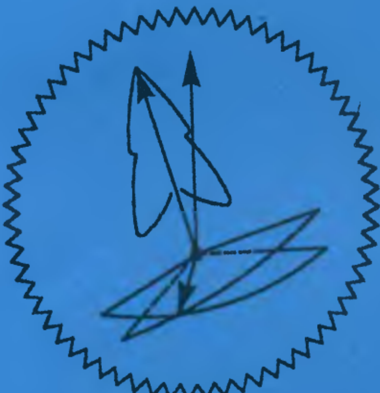
В.В. Андронов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

20 ЛЕКЦИЙ

Часть II



Москва – 2003

Министерство образования
Российской Федерации
Московский государственный университет леса

В. В. Андронов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

20 лекций

Часть 2. Лекции 11–20

Динамика

Учебное пособие
Для студентов очного и заочного обучения
Издание второе, дополненное и исправленное

Допущено УМО по образованию в области Лесного дела
в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по специальностям 260100 и 260200

Издательство Московского государственного университета леса
Москва — 2003

УДК 531

6Л2 **Андронов В. В.** Теоретическая механика. 20 лекций. Ч. 2. Динамика: Учебное пособие для студентов очного и заочного обучения. Спец. 260100 и 260200. 2-е изд., доп. и испр. — М.: МГУЛ, 2003. — 128 с.

Книга содержат лекции, которые автор читает в Московском государственном университете леса студентам технологических специальностей. Во второй части книги излагается динамика — динамика материальной точки, общие теоремы и принципы динамики системы, метод обобщенных координат.

Для удобства при самостоятельном изучении предмета в конце каждой лекции приводятся вопросы для самопроверки и рекомендации по выбору упражнений.

Одобрено и рекомендовано к изданию в качестве учебного пособия редакционно-издательским советом университета.

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор В.Ф. Журавлев, МФТИ;
д.т.н., профессор Л.В. Божкова, МАМИ.

Кафедра теоретической механики

Автор — Андронов Вячеслав Васильевич, профессор, доктор технических наук.

Предисловие

В настоящей, второй части книги «Теоретическая механика. 20 лекций» излагается динамика. Содержание книги составляют лекции, которые автор читает в Московском государственном университете леса студентам технологических специальностей. Материал лекций несколько расширен за счет включения вопросов, выносимых для самостоятельного изучения по учебникам либо сообщаемых на практических занятиях.

Для облегчения самостоятельной работы, особенно студентам, обучающимся заочно, в конце каждой лекции даются вопросы для самопроверки и упражнения, а также рекомендации по выбору задач из сборника задач по теоретической механике И.В. Мещерского (номера задач приводятся по книге 1981 г. издания). Этой же цели служит большое число примеров, рассмотренных в пособии.

Введение в динамику

Статика и ее уравнения служат для исследования равновесия твердых тел. Если силы, приложенные к твердому телу, не удовлетворяют условиям равновесия, тело совершает ускоренное движение. Это последнее служит предметом рассмотрения в динамике. Динамикой, таким образом, называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под воздействием приложенных сил.

В теоретической (общей) механике материальные тела — это материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело и система абсолютно твердых тел.

Материальной точкой называется тело или частица тела, размерами которых можно пренебречь (в данных конкретных условиях).

Системой материальных точек, или механической системой называется выделенная некоторым образом совокупность материальных точек.

Абсолютно твердое тело допускает два различных представления. Во-первых, абсолютно твердое тело можно рассматривать как частный случай механической системы, когда взаимное положение ее точек остается неизменным (расстояния между точками не могут изменяться). С другой стороны, его можно рассматривать как некоторый замкнутый объем, сплошь заполненный веществом с сохраняющимися расстояниями между его частицами.

Такие модели материальных тел, как газ, жидкость, деформируемое твердое тело, плазма в теоретической механике непосредственно не рассматриваются. Однако методы и модели теоретической механики широко используются и в этих случаях, образуя необходимую базу для изучения механики сплошной среды и ее более специальных направлений — механики деформируемого твердого тела, гидромеханики, магнитогидродинамики и др.

В основе динамики лежат законы Ньютона. Сегодня, благодаря школьному курсу физики, законы Ньютона известны каждому выпускнику средней школы. Поэтому ограничимся кратким напоминанием этих законов (в современных терминах).

Первый закон Ньютона. *Если на материальную точку не действуют никакие силы, то она находится в покое либо движется равномерно и прямолинейно.*

Второй закон Ньютона. *Если на материальную точку массы m действует сила, точка совершает ускоренное движение. При* *этом сила и ускорение связаны равенством* (векторным)

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Второй закон Ньютона называют основным законом динамики, а его математическое выражение — основным уравнением динамики.

Первый и второй законы Ньютона выполняются не во всякой системе отсчета (системе координат). Системы отсчета, в которых выполняются первый и второй законы Ньютона, называются *инерциальными системами отсчета.*

Третий закон Ньютона. *Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и прямо противоположны по направлению.*

Кроме трех законов Ньютона в основании динамики лежат еще два принципа — принцип независимости действия сил, также связанный с именем Ньютона, и принцип освобождаемости от связей, установленный уже в посленьютоновское время в связи с изучением несвободного движения.

Принцип независимости действия сил. *Если на материальную точку действуют одновременно несколько сил, ей сообщается ускорение, равное геометрической сумме ускорений от действия каждой силы в отдельности.*

Принцип независимости действия сил эквивалентен правилу, согласно которому силы, приложенные к ускоренно движущейся материальной точке, преобразуются (складываются) точно так же, как преобразуются (складываются) сходящиеся силы в статике. Это дает возможность написать основное уравнение динамики для точки, на которую одновременно действуют несколько сил — $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$:

$$m\vec{a} = \vec{F}; \quad \vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k.$$

Принцип освобождаемости от связей. *Несвободную материальную точку и несвободное твердое тело можно рассматривать как свободные, для чего связи следует мысленно отбросить, а их действие заменить реакциями отброшенных связей.* Принцип освобождаемости дает правило составления основного уравнения динамики для несвободной материальной точки. Это правило остается таким же, как для свободной точки, только в число действующих сил требуется включить также реакции наложенных связей.

О задании сил в динамике. В динамике, в отличие от статики, действующие силы, как правило, переменны. Сила $\vec{F}$, приложенная к материальной точке, может зависеть от положения точки (радиуса-вектора точки $\vec{r}$), ее скорости $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, а также от времени t. Поэтому задать силу в динамике означает указать закон, выражающий зависимость силы от своих аргументов

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

В проекциях на координатные оси эта функциональная зависимость выражается тремя скалярными функциями (по числу проекций силы), зависящими в общем случае от семи скалярных аргументов — трех проекций радиуса-вектора на выбранные координатные оси, трех проекций скорости на эти же оси и времени

$$F_x = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t);$$
$$F_y = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t);$$
$$F_z = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t).$$

В частных случаях сила может зависеть только от части указанных переменных. Например, сила может зависеть только от положения точки, т.е. иметь вид $F_x = F_x(x, y, z)$, $F_y = F_y(x, y, z)$, $F_z = F_z(x, y, z)$; только от скорости: $F_x = F_x(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $F_y = F_y = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $F_z = F_z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}))$ и т.д.

Динамика точки

Лекция 11

Задачи и уравнения динамики материальной точки

Две основные задачи динамики точки

В динамике точки решаются две основные задачи.

Первая (прямая) задача динамики. По заданному движению, совершаемому точкой данной массы, требуется найти неизвестную действующую силу.

Вторая (обратная) задача динамики. По заданным силам, действующим на точку данной массы, и заданным начальным условиям движения требуется найти закон движения точки.

Это — основные (классические) задачи динамики точки, сформулированные самим основоположником динамики И. Ньютоном. С последующим развитием динамики появились новые задачи, сочетающие в себе черты обеих названных задач. Например, при несвободном движении точки реакции связей заранее неизвестны, и вторая задача приобретает смешанный характер — требуется найти как закон движения точки, так и реакции связей. Появились задачи об оптимальном движении, о движении точки с переменной массой и много других задач, тесно связанных с потребностями развивающейся техники.

Основным математическим инструментом для решения задач динамики точки служат основное уравнение динамики и вытекающие из него дифференциальные уравнения движения.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пусть $Oxyz$ — инерциальная система координат, M —движущая точка массы m, $\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ — равнодействующая всех сил, приложенных к точке, $\vec{a}$ — ускорение точки (рис. 1). В любой момент времени для движущейся точки выполняется основное уравнение динамики

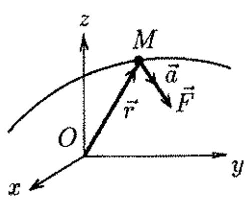


Рис. 1

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Вспоминая из кинематики формулу

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}},$$

выражающую ускорение через радиус-вектор точки, представим основное уравнение динамики в следующем виде:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

Это равенство, выражающее основное уравнение динамики в дифференциальной форме, называется *векторным дифференциальным уравнением движения* материальной точки.

Векторное дифференциальное уравнение эквивалентно трем скалярным дифференциальным уравнениям того же порядка. Они получаются, если основное уравнение динамики спроектировать на координатные оси и записать в координатной форме:

$$ma_x = F_x; \quad ma_y = F_y; \quad ma_z = F_z.$$

Так как $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$, эти равенства запишутся так:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z.$$

Полученные равенства называются *дифференциальными уравнениями движения* материальной точки в декартовой системе координат. В этих уравнениях x, y, z — текущие координаты точки, F_x, F_y, F_z — проекции на координатные оси равнодействующей сил, приложенных к точке.

Если для ускорения воспользоваться формулой

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}},$$

то векторное и скалярные дифференциальные уравнения движения точки запишутся в виде дифференциальных уравнений первого порядка:

$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ — векторное дифференциальное уравнение;

$m\dot{v}_x = F_x$; $m\dot{v}_y = F_y$; $m\dot{v}_z = F_z$ — скалярные дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения движения точки можно записать не только в декартовой, но в любой другой системе координат. Так, проектируя основное уравнение динамики на естественные координатные оси, получаем равенства:

$$ma_\tau = F_\tau; \quad ma_n = F_n; \quad ma_b = F_b,$$

где a_τ, a_n, a_b — проекции ускорения на касательную, главную нормаль и бинормаль траектории в текущем положении точки; F_τ, F_n, F_b — проекции равнодействующей силы на эти же оси. Вспоминая формулы кинематики для проекций ускорения на естественные оси и подставляя их в написанные равенства, получим:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau; \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n; \quad 0 = F_b.$$

Это дифференциальные уравнения движения материальной точки *в естественной форме*. Здесь $v = \pm|\vec{v}|$ — проекция скорости на направление касательной, ρ — радиус кривизны траектории в текущем положении точки. Многие задачи динамики точки решаются более просто, если воспользоваться дифференциальными уравнениями движения в естественной форме.

Рассмотрим примеры на составление дифференциальных уравнений движения.

Пример 1. Материальная точка массой m брошена под углом α к горизонту и движется в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости: $R = bv$, где b — заданный постоянный коэффициент пропорциональности.

Изображаем движущуюся точку в произвольный (текущий) момент времени t, прикладываем действующие силы — силу сопротивления $\vec{R}$ и вес точки $\vec{P} = m\vec{g}$ (рис. 2). Выбираем координатные оси Oxy — начало координат принимаем в начальном положении точки, ось x направляем горизонтально в сторону движения, ось y — вертикально вверх. Определяем проекции равнодействующей $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$ на выбранные оси (φ — угол наклона скорости $\vec{v}$ к горизонту):

$$F_x = -R\cos\varphi = -bv\frac{v_x}{v} = -bv_x = -b\dot{x};$$

$$F_y = -mg - R\sin\varphi = -mg - b\dot{y}.$$

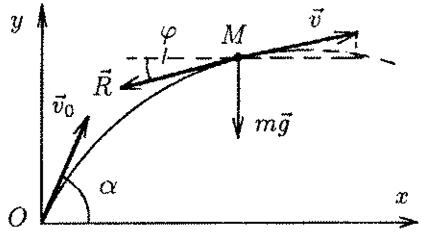


Рис. 2

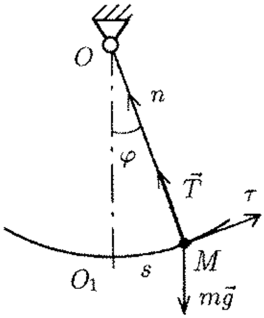


Рис. 3

Подставляя эти значения в дифференциальные уравнения движения точки в общем виде, получаем дифференциальные уравнения движения, соответствующие нашей задаче:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = 0;$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} = -mg.$$

Третье уравнение отсутствует, так как движение происходит в плоскости Oxy.

Пример 2. Движение математического маятника в пустоте. Математическим маятником называют материальную точку M, подвешенную при помощи невесомой нити (или стержня) длиной l к неподвижной точке O и движущуюся под действием силы тяжести в вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса (рис. 3). В данном примере траектория точки известна (это окружность радиуса l с центром в точке O), поэтому целесообразно воспользоваться дифференциальными уравнениями движения в естественной форме. Принимаем за начало отсчета дуговой координаты s наинизшую точку окружности O_1, направление отсчета дуг выберем вправо. Изображаем естественные оси — касательную $M\tau$, главную нормаль Mn; бинормаль Mb направлена на читателя. Проекции на эти оси равнодействующей приложенных сил — веса $m\vec{g}$ и реакции связи $\vec{T}$ таковы (φ — угол наклона маятника к вертикали):

$$F_\tau = -mg\sin\varphi; \quad F_n = T - mg\cos\varphi; \quad F_b = 0.$$

Подставляя эти значения в общие естественные уравнения движения и учитывая равенство $v = l\dot{\varphi}$, получаем дифференциальные уравнения движения математического маятника в естественной форме:

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi; \quad \frac{mv^2}{l} = T - mg\cos\varphi.$$

Так как обе действующие силы лежат в соприкасающейся плоскости $M\tau n$, третье уравнение отсутствует.

В заключение приведем последовательность действий при составлении дифференциальных уравнений движения:

1) движущаяся точка изображается в произвольный (текущий) момент времени;

2) изображаются векторы всех действующих сил;

3) выбирается подходящая система координат;

4) проектируя основное уравнение динамики на выбранные оси, записываются дифференциальные уравнения движения.

Способы решения основных задач динамики точки

В первой основной задаче заданы масса точки m и ее закон движения в той или иной форме — векторной, координатной или естественной. Требуется найти неизвестную силу, действующую на движущуюся точку.

Рассмотрим решение этой задачи при координатном способе задания движения. Пусть $Oxyz$ — система декартовых координатных осей; $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — заданные уравнения движения точки в этих осях. Неизвестную равнодействующую $\vec{F}$ сил, приложенных к точке, будем искать, определяя ее проекции F_x, F_y, F_z на координатные оси.

Запишем дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z.$$

Видно, что в этих уравнениях уже содержится решение задачи в общем виде (для большей убедительности следует поменять местами правые и левые части написанных равенств).

В конкретной задаче, дифференцируя заданные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ два раза по времени и подставляя результат в дифференциальные уравнения движения, определяем проекции F_x, F_y, F_z искомой равнодействующей. Далее, если это необходимо, определяем модуль силы и косинусы углов, образуемых силой с координатными осями.

Пример. Материальная точка M массы m падает вертикально в среде с сопротивлением, причем уравнение движения имеет вид (рис. 4):

$$y = \frac{1}{2}g\left[t - \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\right].$$

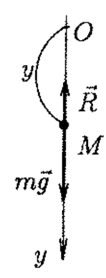


Рис. 4

Определить величину силы сопротивления $\vec{R}$.

Решение. Движение точки происходит под действием двух сил — собственного веса $m\vec{g}$ и силы сопротивления $\vec{R}$; проекция равнодействующей на направление движения (ось y) будет равна $F_y = mg - R$. Составляем дифференциальное уравнение движения (при прямолинейном движении имеет место одно дифференциальное уравнение движения):

$$m\ddot{y} = mg - R.$$

Находим $\ddot{y}$, для чего дважды дифференцируем по времени заданный закон движения точки:

$$\dot{y} = v = \frac{1}{2}g(1 - \mathrm{e}^{-2t}); \quad \ddot{y} = \dot{v} = g\mathrm{e}^{-2t}$$

Подставляя $\ddot{y}$ в дифференциальное уравнение движения и разрешая его относительно неизвестной R, получаем:

$$R = mg(1 - \mathrm{e}^{-2t}) = 2mv.$$

Таким образом, сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости с коэффициентом $2m$. Векторная формула для силы будет иметь вид

$$\vec{R} = -2m\vec{v}.$$

Во второй основной задаче задаются масса материальной точки и действующая сила (силы), а определению подлежат уравнения движения точки. В дифференциальных уравнениях движения точки

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$
$$m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$
$$m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

в этом случае правые части заданы, а искомыми являются функции времени $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, определяющие закон движения точки.

Для того чтобы найти эти функции, требуется выполнить интегрирование дифференциальных уравнений движения при определенных, заданных начальных условиях:

$$\text{при } t = t_0: \quad \begin{array}{ll} x = x(t_0) = x_0; & \dot{x} = \dot{x}(t_0) = v_{0x}; \\ y = y(t_0) = y_0; & \dot{y} = \dot{y}(t_0) = v_{0y}; \\ z = z(t_0) = z_0; & \dot{z} = \dot{z}(t_0) = v_{0z}. \end{array}$$

Обычно принимается $t_0 = 0$.

Пример. Найти уравнения движения материальной точки в примере 1 на с. 9.

Решение. Дифференциальные уравнения движения, которые были получены выше на с. 10, запишем в виде:

$$\begin{array}{l} \ddot{x} + \mu\dot{x} = 0; \\ \ddot{y} + \mu\dot{y} = -g \end{array} \qquad \left(\mu = \frac{b}{m} = \mathrm{const}\right).$$

Точка движется, оставаясь все время в плоскости Oxy, поэтому имеем не три, а только два дифференциальных уравнения движения. Для решения задачи требуется проинтегрировать эти уравнения при следующих начальных условиях:

$$\text{при } t = 0: \quad \begin{array}{ll} x = x(0) = 0; & \dot{x} = \dot{x}(0) = v_{0x}; \\ y = y(0) = 0; & \dot{y} = \dot{y}(0) = v_{0y}. \end{array}$$

Уравнения оказались независимыми, поэтому могут интегрироваться отдельно.

Решим вначале первое уравнение, которое в переменной $v_x = \dot{x}$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\mu v_x.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. После разделения переменных уравнение запишется так:

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\mu dt.$$

Теперь можно брать интегралы от обеих частей:

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = -\mu \int dt,$$

после чего, учитывая, что $v_x > 0$, получаем:

$$\ln v_x = -\mu t + C_*,$$

где C_* — произвольная постоянная интегрирования.

Решаем это логарифмическое уравнение относительно v_x:

$$v_x = \mathrm{e}^{-\mu t + C_*} = C_1 \mathrm{e}^{-\mu t} \quad (C_1 = \mathrm{e}^{C_*}).$$

Далее, заменяя v_x выражением dx/dt, снова приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt} = C_1 \mathrm{e}^{-\mu t}.$$

Снова разделяя переменные и интегрируя, получаем выражение

$$x = -\frac{C_1}{\mu} e^{-\mu t} + C_2,$$

в котором C_2 — новая (вторая) постоянная интегрирования. (Заметим, что C_* и $C_1 = \exp C_*$ представляют собой разные формы записи одной и той же (первой) постоянной интегрирования).

Это и есть общее решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + \mu \dot{x} = 0$. Для того чтобы найти уравнение движения точки, требуется найти постоянные интегрирования C_1 и C_2 и подставить в это общее решение.

Постоянные интегрирования определяем по начальным условиям движения. Для этого начальные условия $t = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ подставляем в выражения для x и $v = \dot{x}$, что дает нам два уравнения (конечных, не дифференциальных) для определения C_1 и C_2:

$$0 = -\frac{C_1}{\mu} + C_2; \quad v_0 \cos\alpha = C_1.$$

Из них находим:

$$C_1 = v_0 \cos\alpha; \quad C_2 = \frac{C_1}{\mu} = \frac{v_0 \cos\alpha}{\mu}.$$

Теперь все готово и остается лишь записать уравнение движения

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{\mu}(1 - e^{-\mu t}).$$

Второе дифференциальное уравнение движения интегрируется по той же общей схеме, что и первое. После интегрирования, которое предлагаем читателю выполнить самостоятельно, получаем второе уравнение движения

$$y = \frac{g + \mu v_0 \sin\alpha}{\mu^2}(1 - e^{-\mu t}) - \frac{g}{\mu} t.$$

Примечания

1. При интегрировании дифференциального уравнения с разделяющимися переменными можно пользоваться определенным

интегрированием на интервале $[t_0, t]$. Тогда начальные условия будут учитываться в пределах определенных интегралов, и постоянные интегрирования вводить не требуется. Например, интегрирование уравнения $\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0$ тогда свелось бы к следующим последовательным действиям:

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0; \quad \frac{dv_x}{dt} = -\mu v_x; \quad \frac{dv_x}{v_x} = -\mu dt;$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\mu \int_0^t dt; \quad \ln v_x\big|_{v_{0x}}^{v_x} = -\mu t\big|_0^t; \quad \ln v_x - \ln v_{0x} = -\mu t;$$

$$\ln \frac{v_x}{v_{0x}} = -\mu t; \quad \frac{v_x}{v_{0x}} = \mathrm{e}^{-\mu t}; \quad v_x = v_{0x}\mathrm{e}^{-\mu t} = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{-\mu t};$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{-\mu t} \text{ и т.д.}$$

2. Дифференциальные уравнения $\ddot{x}+\mu\dot{x} = 0$ и $\ddot{y}+\mu\dot{y} = -g$, приводимые, как это было показано выше, к уравнениям с разделяющимися переменными, одновременно являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами и могут интегрироваться методами, установленными для этого типа уравнений.

Покажем это на примере уравнения $\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0$. Это — линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + \mu\lambda = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\mu$. По найденным корням выписываем общее решение: $x = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\mu t}$, далее находим выражение для проекции скорости на ось x: $v_x = \dot{x} = -\mu C_2\mathrm{e}^{-\mu t}$. Для получения кинематического уравнения движения $x = x(t)$ остается найти произвольные постоянные C_1 и C_2, что делается обычным порядком.

Вопросы для самопроверки

1. Какая система отсчета (система координат) называется инерциальной?

2. В чем заключаются две основные задачи динамики материальной точки?

3. Приведите общий вид дифференциальных уравнений движения материальной точки в декартовой и естественной системах координат.

4. Что называется начальными условиями движения? Приведите примеры задания начальных условий.

5. Приведите пример решения первой основной задачи динамики точки.

6. В чем состоит вторая основная задачи динамики точки и как она решается?

7. Как определяются постоянные интегрирования при решении второй основной задачи динамики?

Упражнения

1. В примере, приведенном на с. 12, получить закон движения точки вдоль оси Oy.

2. Выполнить в указанной последовательности следующие задачи из сборника И.В. Мещерского 1981 г. издания: 26.16; 26.13; 26.25; 26.2; 26.9; 26.28.

Лекция 12

Способы интегрирования дифференциального уравнения прямолинейного движения материальной точки

Дифференциальное уравнение и начальные условия прямолинейного движения

Если действующая сила и начальная скорость материальной точки направлены по одной прямой, точка будет двигаться прямолинейно вдоль той же прямой. Приняв эту прямую за ось x, запишем общий вид дифференциального уравнения прямолинейного движения:

$$m\ddot{x} = F_x(x, \dot{x}, t).$$

Для того чтобы найти закон движения точки $x = x(t)$, требуется проинтегрировать это уравнение при определенных, заданных начальных условиях:

$$\text{при } t = 0: \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = v_{0x}.$$

Выполнить интегрирование этого уравнения при произвольной силе $F_x(x, \dot{x}, t)$ не представляется возможным. Это можно сделать только в более простых случаях, когда действующая сила зависит:

1) только от времени: $F_x = f(t)$;
2) только от положения: $F_x = f(x)$;
3) только от скорости: $F_x = f(\dot{x})$;
4) является постоянной;
5) является линейной функцией своих аргументов вида $F_x = cx + b\dot{x} + \varphi(t)$, где c, b — постоянные коэффициенты, $\varphi(t)$ — заданная функция времени.

Рассмотрим некоторые из этих случаев.

Определение закона движения точки под действием силы, зависящей только от времени

Дифференциальное уравнение движения имеет следующий общий вид:

$$m\ddot{x} = f(t).$$

Переходим к переменной $v_x = \dot{x}$ и рассматриваем уравнение первого порядка

$$m\frac{dv_x}{dt} = f(t).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$m dv_x = f(t)\, dt,$$

после чего берем интегралы от обеих частей. Воспользовавшись определенным интегрированием, запишем:

$$m\int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_0^t f(t)\, dt.$$

Если интеграл в правой части берется, отсюда находим

$$v_x = v_{0x} + \frac{1}{m}\int_0^t f(t)\, dt = V(t),$$

где $V(t)$ — известная функция времени. Заменяем v_x его выражением dx/dt:

$$\frac{dx}{dt} = V(t),$$

снова разделяем переменные и интегрируем в соответствующих пределах:

$$dx = V(t)\, dt; \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V(t)\, dt; \quad x = x_0 + \int_0^t V(t)\, dt.$$

Последнее равенство определяет искомый закон движения точки.

Задачу можно решать и при помощи неопределенных интегралов. В этом случае при каждом интегрировании не нужно забывать вводить произвольную постоянную интегрирования.

Пример. На тело массы m, расположенное на неподвижной горизонтальной плоскости, начинает действовать постоянная по направлению горизонтальная сила $F = \alpha t$, где t — время в секундах, α ($[\alpha]$ = Н/с) — заданный постоянный коэффициент. Одновременно с приложением силы телу сообщается в направлении силы скорость

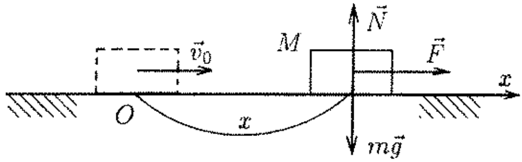


Рис. 5

v_0. Принимая тело за материальную точку и пренебрегая трением, определить закон движения тела.

Решение. Выберем начало координат в начальном положении точки, ось x совместим с общим направлением силы $\vec{F}$ и начальной скорости $\vec{v}_0$. Движение начинается в момент $t = 0$. В текущий момент $t > 0$ тело находится в некотором положении M, определяемом координатой x (рис. 5). На тело действуют сила $\vec{F}$, оговоренная в условии задачи, а также сила тяжести $m\vec{g}$ и нормальная реакция $\vec{N}$ плоскости. Так как силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ перпендикулярны оси x, их проекции на эту ось равны нулю. Сила $\vec{F}$ проектируется в натуральную величину с положительным знаком: $F_x = \alpha t$. Так же в натуральную величину с положительным знаком проектируется и текущая скорость тела: $v_x = v$. Составляем дифференциальное уравнение движения, которое сразу записываем в виде уравнения первого порядка

$$m\frac{dv}{dt} = \alpha t.$$

После разделения переменных и интегрирования будем иметь

$$v = \frac{\alpha t^2}{2m} + C_1.$$

Полагаем $v = dx/dt$, снова разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha t^2}{2m} + C_1; \quad dx = \frac{\alpha t^2}{2m}\,dt + C_1\,dt; \quad x = \frac{\alpha t^3}{6m} + C_1 t + C_2.$$

Постоянные интегрирования определяем по начальным условиям, которые имеют вид:

$$\text{при } t = 0: \quad x = 0; \quad \dot{x} = v_0.$$

Для этого подставляем начальные условия в результат первого и второго интегрирования и находим:

$$C_1 = v_0; \quad C_2 = 0.$$

Теперь можем записать искомое уравнение движения тела

$$x = v_0 t + \frac{\alpha t^3}{6m}.$$

Определение закона движения точки под действием силы, зависящей только от положения

В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = f(x)$$

или, в виде уравнения первого порядка:

$$m\frac{dv_x}{dt} = f(x).$$

Здесь содержатся три переменные — t, x, v_x, поэтому для применения метода разделения переменных требуется исключить одну из них. Это делается при помощи следующего преобразования левой части уравнения:

$$m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{dv_x}{dt}\frac{dx}{dx} = m\frac{dx}{dt}\frac{dv_x}{dx} = mv_x\frac{dv_x}{dx},$$

после чего уравнение принимает типичный вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$mv_x\frac{dv_x}{dx} = f(x).$$

Разделяя переменные и интегрируя, например, вычисляя от обеих частей неопределенные интегралы, будем иметь:

$$mv_x\,dv_x = f(x)\,dx; \quad m\int v_x\,dv_x = \int f(x)\,dx; \quad \frac{mv_x^2}{2} = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Если интеграл справа берется, то его переменная часть будет функцией от x, и для первой степени скорости мы можем написать выражение

$$v_x = \Phi(x, C_1), \tag{*}$$

где $\Phi(x, C_1)$ — известная функция. Далее следует:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x, C_1); \quad \frac{dx}{\Phi(x, C_1)} = dt; \quad \int\frac{dx}{\Phi(x, C_1)} = t + C_2.$$

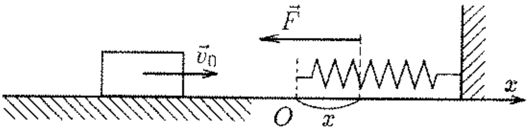


Рис. 6

Если неопределенный интеграл слева берется, то его переменная часть суть некоторая известная функция $\varphi(x, C_1)$, и последнее равенство принимает вид

$$\varphi(x, C_1) = t + C_2. \qquad (**)$$

Дальнейшее решение состоит в определении постоянных C_1 и C_2 из уравнений, которые получаются подстановкой начальных условий в выражения (*) и (**). Если теперь равенство (**), в которое подставлены найденные значения C_1 и C_2, разрешить относительно x, то мы получим зависимость $x = x(t)$ — искомое уравнение движения точки. (Однако это не всегда возможно, так как зависимость (**) может оказаться алгебраическим уравнением высокого порядка либо сложным трансцендентным уравнением).

Пример. Тело массы m движется по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью v_0. В некоторый момент оно наталкивается на пружину и далее движется, сжимая пружину. Найти максимальное сжатие пружины, если упругая сила может быть выражена равенством $F = k\Delta l + k_1(\Delta l)^3$, где Δl — деформация (сжатие) пружины, а k, k_1 — заданные постоянные коэффициенты. Для числовых значений коэффициентов принять для простоты $k_1 = 2k$.

Решение. Тело принимаем за материальную точку, момент начала контакта тела с пружиной принимаем за начальный ($t = 0$), движение отнесем к оси x с началом, совпадающим с начальным положением тела (рис. 6). Тогда задача сведется к решению дифференциального уравнения ($x = \Delta l$):

$$m\ddot{x} = -F(x) = -kx - k_1x^3$$

с начальными условиями

$$\text{при } t = 0: \quad x = 0; \quad \dot{x} = v_0.$$

Действующая сила является функцией координаты (положения), поэтому левую часть уравнения следует представить в виде

$m\ddot{x} = mv_x\, dv_x/dx$. Тогда дифференциальное уравнение движения перепишется так:

$$mv_x \frac{dv_x}{dx} = -kx - k_1 x^3.$$

Для решения задачи здесь не требуется находить уравнение движения тела (такое подробное описание движения было бы излишним). Достаточно рассмотреть интервал от начала движения ($t = 0$, $x = 0$, $v_x = v_0$) до момента остановки ($t = t_{\text{ост}}$, $v_x = 0$, $x = x_{\max} = h$).

Разделяем переменные в уравнении движения и интегрируем в соответствующих пределах:

$$mv_x\, dv_x = -kx\, dx - k_1 x^3\, dx;$$
$$m\int_{v_0}^{0} v_x\, dv_x = -k\int_0^h x\, dx - k_1\int_0^h x^3\, dx;$$
$$-\frac{mv_0^2}{2} = -k\frac{h^2}{2} - k_1\frac{h^4}{4} = -\frac{k}{2}(h^2 + h^4).$$

Последнее выражение представляет собой биквадратное уравнение для определения максимального сжатия $h = x_{\max} = \Delta l_{\max}$:

$$h^4 + h^2 - \frac{mv_0^2}{k} = 0.$$

Из него находим

$$h = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4mv_0^2}{k}} - 1\right).$$

О нахождении закона движения при постоянной силе и силе, зависящей только от скорости

В случаях, когда действующая сила зависит только от скорости ($F_x = f(v)$) или является постоянной, можно применять оба рассмотренных способа разделения переменных.

Пример. Тело массы m, лежащее на наклонной плоскости, получает начальную скорость v_0, направленную вдоль плоскости вверх. Найти уравнение движения тела, если коэффициент трения равен f, а плоскость составляет с горизонтом угол α.

Решение. Тело рассматриваем как материальную точку. Выбираем систему координатных осей с началом в начальном положении

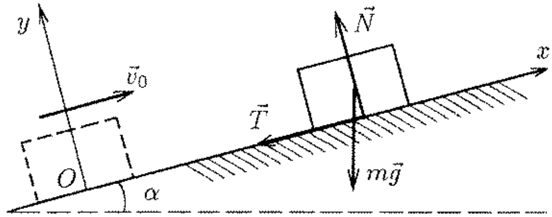


Рис. 7

тела (рис. 7). После полученного толчка тело первое время движется вверх. Изображаем его в некоторый момент t, прикладываем действующие силы — вес $m\vec{g}$, нормальную реакцию плоскости $\vec{N}$, силу трения скольжения $\vec{T}$, составляем дифференциальные уравнения движения:

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - T;$$
$$m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + N.$$

Так как $\ddot{y} = 0$ (тело движется вдоль оси x), из второго уравнения находим: $N = mg\cos\alpha$. Это позволяет определить силу трения: $T = fN = fmg\cos\alpha$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем

$$m\ddot{x} = -mg(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Видно, что имеет место случай, когда действующая сила является постоянной. Делим обе части уравнения на массу, вводим для краткости обозначение

$$g(\sin\alpha + f\cos\alpha) = w = \text{const} \quad (w > 0)$$

и записываем уравнение в виде

$$\frac{dv_x}{dt} = -w.$$

Для определения закона движения тела требуется проинтегрировать это уравнение при начальных условиях:

$$\text{при } t = 0: \quad x = 0; \quad \dot{x} = v_0.$$

Решение задачи при первом способе разделения переменных (в переменных v_x, t) сводится к следующим действиям:

$$dv_x = -wdt; \quad \int_{v_0}^{v_x} dv_x = -w\int_0^t dt; \quad v_x - v_0 = -wt;$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - wt; \quad dx = v_0\,dt - wt\,dt; \quad \int_0^x dx = v_0 \int_0^t dt - w \int_0^t t\,dt;$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} wt^2 \text{ — уравнение движения тела.}$$

Решение задачи при втором способе разделения переменных (в переменных v_x, x) таково:

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = -w; \quad v_x\,dv_x = -w\,dx; \quad \int_{v_0}^{v_x} v_x\,dv_x = -w \int_0^x dx;$$

$$\frac{v_x^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -wx; \quad v_x = \sqrt{v_0^2 - 2wx}; \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - 2wx};$$

$$\frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 2wx}} = dt; \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 2wx}} = \int_0^t dt; \quad -\frac{1}{w}\sqrt{v_0^2 - 2wx}\Big|_0^x = t;$$

$$-\frac{1}{w}\sqrt{v_0^2 - 2wx} + \frac{v_0}{w} = t.$$

Из последнего равенства, разрешая его относительно x, находим

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} wt^2.$$

В данном примере решение первым способом предпочтительнее, так как приводит к более простым выражениям. Однако это не всегда так — иногда задача решается проще при втором способе разделения переменных.

Примеры решения задач на случай, когда сила задается линейной функцией, содержатся в следующей лекции, посвященной колебательным движениям материальной точки.

Вопросы для самопроверки

1. Запишите общий вид дифференциального уравнения и начальных условий при прямолинейном движении материальной точки.

2. Изложите последовательность действий при интегрировании дифференциального уравнения прямолинейного движения материальной точки под действием силы, зависящей только от времени.

3. Сделайте то же самое в следующих случаях:

3.1. Сила зависит только от положения точки;

3.2. Сила зависит только от скорости точки;

3.3. Является постоянной.

Упражнения

1. В примере на с. 21 определить время движения точки до остановки и пройденный путь. Что будет происходить с точкой после остановки?

2. Решить в указанной последовательности следующие задачи из сборника И.В. Мещерского 1981 г. издания: 27.2; 27.4; 27.31; 27.33; 27.16; 27.18; 27.19.

Лекция 13

Колебательные движения материальной точки

Физическое явление называется колебательным, если его протекание во времени характеризуется определенной периодичностью (повторяемостью). Колебания широко распространены в окружающей природе (смена дня и ночи, смена фаз Луны, чередование времен года, волны на поверхности воды, землетрясения, звук и свет и т.д. и т.п.) и в технике (колебания в машинах, колебания зданий и инженерных сооружений и их элементов, колебания средств транспорта — автомобилей, вагонов, судов, самолетов и вертолетов).

В деревообработке колебания представляют интерес в связи с вибрацией лесопильных рам, дереворежущих станков, колебаниями струн и дек музыкальных инструментов.

В теоретической механике рассматриваются механические колебания. Механические колебания весьма разнообразны по своей природе — различают свободные колебания, вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания и различные случаи смешанных колебаний. Мы остановимся только на наиболее простых (в математическом отношении), но в то же время весьма распространенных типах механических колебаний — свободных и вынужденных колебаниях.

Свободные и вынужденные колебания будем рассматривать на примере прямолинейного движения материальной точки.

Свободные колебания

Свободные колебания материальной точки обусловливаются действием на нее особого вида силы, зависящей от положения — восстанавливающей силы.

Пусть ось x — прямая, вдоль которой может двигаться материальная точка M под действием силы $\vec{F}$ (рис. 8). Сила $\vec{F}$ называется восстанавливающей, если она обладает следующими свойствами:

1) всегда направлена вдоль оси x;

2) на оси x имеется точка M_*, называемая положением равновесия (ПР), в которой сила равна нулю;

3) в остальных положениях точки M сила $\vec{F}$ отлична от нуля и направлена к положению равновесия.

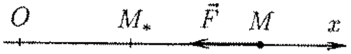


Рис. 8

Если начало отсчета O координаты x принять в положении равновесия, то для проекции F_x восстанавливаю-

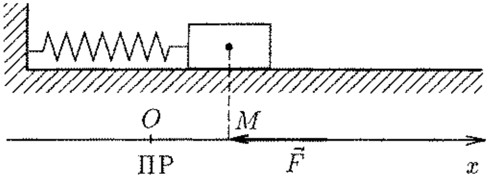


Рис. 9

щей силы можно написать:

$$F_x = -F(x); \quad F(0) = 0.$$

Функция $F(x)$ называется характеристикой восстанавливающей силы.

Если характеристикой восстанавливающей силы служит линейная функция

$$F(x) = cx \quad (c = \text{const}),$$

то восстанавливающая сила называется линейной, а колебания под действием линейной восстанавливающей силы — линейными колебаниями. Во всех остальных случаях восстанавливающая сила и соответствующие колебания называются нелинейными. В математическом отношении нелинейные колебания много сложнее линейных колебаний и далее рассматриваться не будут.

Одним из примеров, когда возникает восстанавливающая сила, служит тело, закрепленное к концу цилиндрической пружины, другой конец которой неподвижен (рис. 9). Восстанавливающей силой является упругая сила пружины $F(x)$, пропорциональная деформации (закон Гука): $F(x) = cx$. Коэффициент c в этом случае называется жесткостью пружины. К возникновению восстанавливающей силы приводит «игра» силы тяжести и архимедовой выталкивающей силы плавающего тела, например понтона (рис. 10). Левый рисунок изображает понтон в положении равновесия; средний и правый рисун-

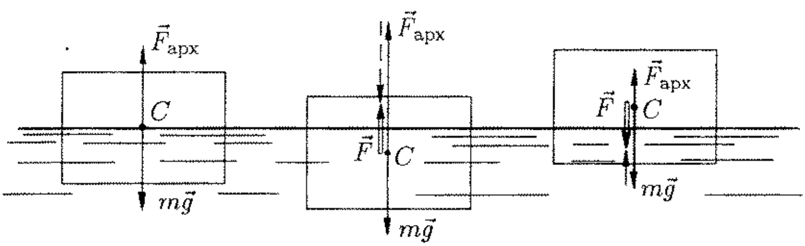


Рис. 10

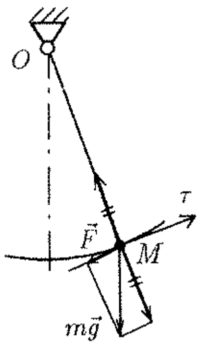


Рис. 11

ки — смещенное положение понтона (соответственно вниз и вверх); восстанавливающей силой служит сумма веса понтона $m\vec{g}$ и архимедовой силы $\vec{F}_{\text{арх}}$, показанная на рисунке сдвоенной линией. Для математического маятника роль восстанавливающей силы играет проекция силы тяжести на направление касательной к траектории (рис. 11).

Пусть материальная точка массы m, на которую действует линейная восстанавливающая сила $\vec{F}$ (см. рис. 8), выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе. Поставим задачу — найти закон возникающего после этого движения, называемого свободными колебаниями.

Выбираем начало отсчета координаты x в положении равновесия, составляем дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Поделив обе части уравнения на массу m, запишем его в следующем виде:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0; \quad k^2 = \frac{c}{m} = \text{const}.$$

Это — линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для определения закона свободных колебаний точки требуется найти решение этого уравнения при начальных условиях:

$$\text{при } t = 0: \quad x = x_0; \quad \dot{x} = v_0.$$

Общее решение полученного уравнения имеет вид

$$x = A\sin kt + B\cos kt \quad (A = \text{const},\ B = \text{const})$$

или

$$x = a\sin(kt + \alpha) \quad (a = \text{const},\ \alpha = \text{const}).$$

Обе формы записи общего решения равносильны. При теоретическом исследовании колебаний часто удобнее вторая форма, при решении задач — первая форма. Постоянные величины A, B и a, α служат постоянными интегрирования.

Как видно из вида решения, движение материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы представляет собой гармонические колебания. Отдельные элементы гармонического закона движения имеют следующие названия:

$a = \sqrt{A^2 + B^2}$ — амплитуда колебаний;

$k = \sqrt{c/m}$ — круговая (угловая, циклическая) частота колебаний;

$kt + \alpha$ — фаза колебаний;

α — начальная фаза колебаний.

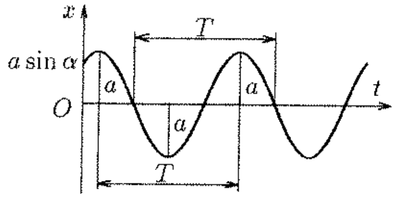


Рис. 12

На рис. 12 показан график гармонического колебательного движения. Буквой T обозначен период колебаний — наименьший промежуток времени, по истечении которого движение начинает повторяться. Поскольку период синуса равен 2π, для периода колебаний получается формула

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Амплитуда и фаза входят в общее решение дифференциального уравнения свободных колебаний в качестве постоянных интегрирования, поэтому их значения будут зависеть от начальных условий. Можно убедиться, что эта зависимость выражается следующими равенствами:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}; \quad \sin\alpha = \frac{x_0}{a}; \quad \cos\alpha = \frac{v_0}{ak}.$$

Что же касается частоты и периода колебаний, то их значения не зависят от начальных условий и всецело определяются параметрами самой колебательной системы — массой m и коэффициентом линейной восстанавливающей силы c.

Пример. Найти свободные вертикальные колебания груза массы $m = 0{,}1$ кг, подвешенного на пружине жесткости $c = 19{,}6$ Н/м (рис. 13). Груз отпущен без начальной скорости из положения, соответствующего недеформированной пружине.

Решение. Будем рассматривать груз как материальную точку M, расположенную в точке прикрепления к пружине. Отнесем движение к оси x, которую направим вдоль вертикали вниз. Пусть M_0 — положение этой точки, соответствующее недеформированной пружине, M_* — положение равновесия, M — положение точки в текущий момент колебаний. Расстояние $\lambda = M_0M_*$, на которое растянута пружина в положении равновесия, называется статическим удлинением. Так как в положении равновесия вес и упругая сила уравновешены

$(c\lambda = mg)$, то для определения λ имеем формулу

$$\lambda = \frac{mg}{c}.$$

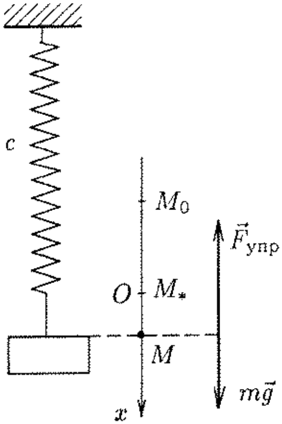


Рис. 13

Для составления дифференциального уравнения движения рассматриваем текущее положение груза. В этом положении к нему приложены упругая сила, равная по модулю $F_{\text{упр}} = c \cdot M_0M$ и направленная вверх, и сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз. Выбрав начало координат O в положении равновесия M_*, для текущих значений координаты x и проекции упругой силы можем записать:

$$x = M_*M;$$

$$F_{\text{упр}.x} = -c(M_0M_* + M_*M) = -c(\lambda + x).$$

Составляем дифференциальное уравнение движения:

$$m\ddot{x} = mg - c(\lambda + x).$$

Так как $mg = c\lambda$, в правой части два первых слагаемых взаимно уничтожаются, и мы приходим к уравнению

$$m\ddot{x} = -cx,$$

которое только что было рассмотрено.

После подстановки числовых значений коэффициентов m, c и приведения к типовому виду уравнение примет вид

$$\ddot{x} + 196x = 0.$$

Записываем его общее решение и вычисляем производную:

$$x = A\sin 14t + B\cos 14t;$$

$$\dot{x} = 14A\cos 14t - 14B\sin 14t.$$

Подставляя сюда начальные условия ($t = 0$, $x(0) = -\lambda$, $\dot{x}(0) = 0$), получаем два уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$-\lambda = B; \quad 0 = 14A,$$

из которых находим

$$A = 0; \quad B = -\lambda = -0{,}05 \text{ м} = -5 \text{ см}.$$

Наконец, подставляя эти значения в общее решение дифференциального уравнения движения, получим искомый закон движения груза

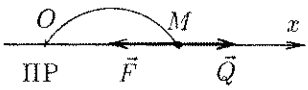


Рис. 14

$$x = -5\cos 14t, \text{ см}.$$

Видно, что груз совершает гармонические колебания с частотой $k = 14$ с$^{-1}$, периодом $T = 2\pi/k = 0{,}449$ с и амплитудой $a = \lambda = 5$ см.

Вынужденные колебания

Пусть на материальную точку M одновременно действуют восстанавливающая сила $F = F(x)$ и сила $Q = Q(t)$, явно зависящая от времени (рис. 14). Силы, явно зависящие от времени, в теории колебаний называются *вынуждающими* силами.

Особый интерес представляют периодические вынуждающие силы, значения которых через определенный промежуток времени τ, называемый периодом, повторяются: $Q(t+\tau) = Q(t)$ (рис. 15,*а*). Простейшим случаем периодической силы является гармоническая вынуждающая сила $Q = H\sin\omega t$ (рис. 15,*б*). В этом случае коэффициент H называется амплитудой вынуждающей силы, а величина $\omega = 2\pi/\tau$ — частотой (круговой, циклической) изменения вынуждающей силы.

Рассмотрим движение материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы и гармонической вынуждающей силы. Дифференциальное уравнение движения имеет вид (координата x отсчитывается от положения равновесия)

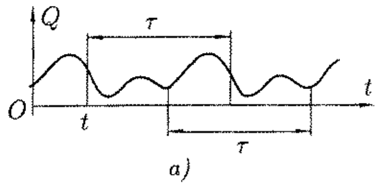
$$m\ddot{x} = -cx + H\sin\omega t,$$

и после деления на массу и введения обозначений

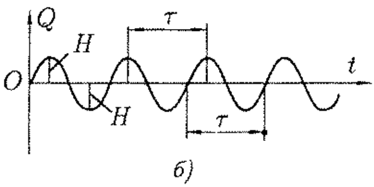
$$\frac{c}{m} = k^2; \quad \frac{H}{m} = h$$

может быть записано в следующей форме:

$$\ddot{x} + k^2x = h\sin\omega t.$$



а)



б)

Рис. 15

Чтобы найти закон движения точки, надо решить это уравнение при определенных, заданных начальных условиях: $t = 0$; $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$.

Полученное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Как известно из математики, общее решение $x(t)$ такого уравнения является суммой двух функций:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

где $x_1(t) = x_{\text{о.о}}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, $x_2(t) = x_{\text{ч.н}}$ — какое-либо частное решение неоднородного уравнения.

Вид общего решения однородного уравнения нам уже известен:

$$x_1 = A \sin kt + B \cos kt \equiv a \sin(kt + \alpha).$$

Для определения частного решения неоднородного уравнения в математике существуют несколько способов. Воспользуемся методом специальной правой части, согласно которому частное решение следует искать в данном случае в виде

$$x_2 = D \sin \omega t + E \cos \omega t \equiv b \sin(\omega t + \beta),$$

в котором D, E и b, β — некоторые постоянные величины, пока неизвестные. Чтобы найти их значения, применяют *метод неопределенных коэффициентов*. Для этого решение $x_2(t)$, взятое в той или иной вышеуказанной форме, подставляется в решаемое дифференциальное уравнение, после чего производится уравнивание коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях в правой и левой частях полученного равенства, обязанного, по свойству решения дифференциального уравнения, быть тождеством по t, т.е. выполняться в любой момент времени.

Примем x_2 во второй (амплитудной) форме и найдем первую и вторую производные:

$$x_2 = b \sin(\omega t + \beta); \quad \dot{x}_2 = b\omega \cos(\omega t + \beta);$$
$$\ddot{x}_2 = -b\omega^2 \sin(\omega t + \beta).$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и приводя подобные члены, получаем

$$b(k^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \beta) = h \sin \omega t.$$

Раскрывая $\sin(\omega t+\beta)$ и приравнивая коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ в обеих частях равенства, получаем два уравнения для определения двух неизвестных — b и β:

$$b(k^2-\omega^2)\cos\beta = h;$$
$$b(k^2-\omega^2)\sin\beta = 0.$$

При $k=\omega$ уравнения не имеют решения, что свидетельствует о несуществовании в этом случае частного решения в разыскиваемом виде. При $k\neq\omega$ существуют два решения этих уравнений:

$$1)\quad \beta=0;\quad b=\frac{h}{k^2-\omega^2};$$
$$2)\quad \beta=\pi;\quad b=-\frac{h}{k^2-\omega^2}.$$

Оба решения определяют один и тот же вид частного решения

$$x_2=\frac{h}{k^2-\omega^2}\sin\omega t.$$

Теперь можем записать и общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний:

$$x=a\sin(kt+\alpha)+\frac{h}{k^2-\omega^2}\sin\omega t.$$

Чтобы найти закон движения точки, надо в это выражение и его производную

$$\dot{x}=ak\cos(kt+\alpha)+\frac{h\omega}{k^2-\omega^2}\cos\omega t$$

подставить начальные условия, разрешить полученные уравнения относительно неизвестных a, α и подставить их в выражение для x. Мы не будем делать этого. Отметим только ряд свойств, которые присущи движению при любых начальных условиях.

1. Движение точки представляет собой наложение двух движений — гармонических колебаний частоты k (свободные, или собственные колебания) и гармонических колебаний частоты вынуждающей силы ω (вынужденные колебания).

2. Вынужденные колебания не зависят от начальных условий движения.

3. Для вынужденных колебаний имеет место явление резонанса.

Явление резонанса

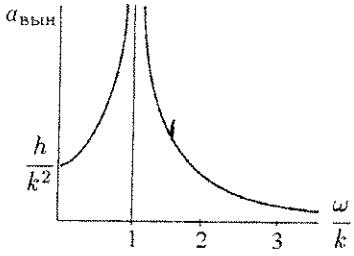


Рис. 16

Запишем выражение для амплитуды вынужденных колебаний:

$$a_{вын} = \left|\frac{h}{k^2-\omega^2}\right| = \frac{h}{k^2}\left|1-\frac{\omega^2}{k^2}\right|^{-1}$$

Видно, что амплитуда зависит не только от величины вынуждающей силы, характеризуемой параметром h, но также от отношения частот ω/k. При $\omega/k \to 1$ амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает, стремясь к бесконечности при $\omega \to k$ (рис. 16). Это явление, состоящее в резком увеличении амплитуды вынужденных колебаний, когда частота вынуждающей силы близка к частоте свободных колебаний, называется *резонансом*.

Явление резонанса следует учитывать в технике. Если оно полезно, как это имеет место в технологических машинах вибрационного принципа действия (виброконвейеры, виброуплотнители и др.), то его надо специально создавать, надлежащим образом выбирая жесткость упругих элементов машины и частоту вращения вибровозбудителей. Если резонанс вреден, то следует «отстраиваться» от него, не допуская возникновения резонанса в эксплуатационных режимах работы машины.

Влияние сопротивления на свободные и вынужденные колебания

В приведенном выше анализе свободных и вынужденных колебаний не были учтены силы сопротивления, которые всегда присутствуют в реальном колебательном процессе. Обычно рассматривают силу сопротивления вида

$$\vec{R} = -b\vec{v} \quad (b = \text{const}),$$

называемую линейным сопротивлением, или линейным трением.

При учете линейного сопротивления в правой части дифференциального уравнения движения появляется дополнительное слагаемое $R_x = -b\dot{x}$, выражающее проекцию силы сопротивления на ось x. С ее учетом дифференциальное уравнение свободных колебаний становится полным линейным однородным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0 \quad \left(k^2 = \frac{c}{m};\ 2n = \frac{b}{m}\right).$$

Анализ его решения показывает, что при условии $n \geqslant k$ движение точки не будет иметь колебательного характера. Выведенная из положения равновесия, точка медленно возвращается снова в это положение, находясь все время по одну сторону от положения равновесия либо единственный раз переходя через него. Чтобы движение было колебательным, должно выполняться условие $n < k$.

Для определения закона движения при $n < k$ осуществим замену переменной $x \to y$: $x = y\mathrm{e}^{-nt}$. Дифференцируя формулу замены два раза по времени и подставляя результат в дифференциальное уравнение свободных колебаний с сопротивлением, приходим к следующему уравнению относительно новой переменной y:

$$\ddot{y} + k_1^2 y = 0; \quad k_1^2 = k^2 - n^2 > 0.$$

Это уравнение того же типа, что и дифференциальное уравнение свободных колебаний без трения. Его решение имеет вид

$$y = a\sin(k_1 t + \alpha) = a\sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \alpha),$$

где a, α — постоянные интегрирования. После перехода к переменной x получаем

$$x = a\mathrm{e}^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) = a\mathrm{e}^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \alpha).$$

Это и есть искомый закон свободных колебаний при наличии сопротивления. Роль амплитуды колебаний в данном случае играет величина $A = a\mathrm{e}^{-nt}$, убывающая с течением времени. Следовательно, свободные колебания при наличии сопротивления являются затухающими колебаниями (рис. 17).

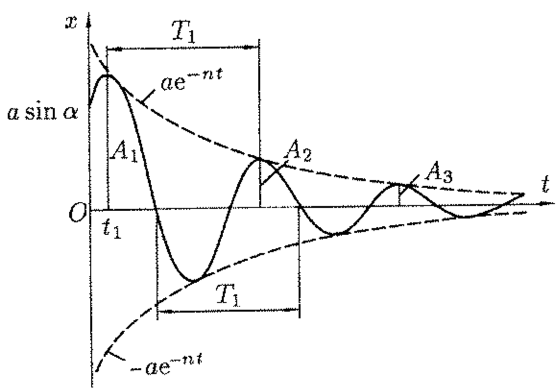


Рис. 17

Строго говоря, затухающие колебания не являются периодическим движением, так как движение полностью не повторяется. Однако движущаяся точка пересекает положение равновесие $x = 0$ через одинаковые промежутки времени, равные

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Поэтому можно условно говорить о периоде затухающих колебаний, понимая под ним величину T_1.

Пусть t_1 — какой-либо момент времени, когда отклонение точки от положения равновесия максимально (см. рис. 17). Следующие моменты максимального отклонения в ту же сторону будут: $t_2 = t_1 + T_1$, $t_3 = t_2 + T_1 = t_1 + 2T_1, \ldots, t_{i+1} = t_1 + iT_1, \ldots$ Соответствующие максимальные отклонения при этом составляют:

$$A_1 = a\mathrm{e}^{-nt_1},\ A_2 = a\mathrm{e}^{-n(t_1+T_1)},\ A_3 = a\mathrm{e}^{-n(t_1+2T_1)}, \ldots$$
$$A_{i+1} = a\mathrm{e}^{-n(t_1+iT_1)}, \ldots \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Можно заметить, что отношение каждого последующего наибольшего отклонения к своему предыдущему равно одному и тому же значению:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \ldots = \frac{A_{i+1}}{A_i} = \mathrm{e}^{-nT_1}.$$

Эта величина называется *декрементом колебаний* и служит в теории колебаний показателем, характеризующим быстроту (темп) затухания колебаний. Натуральный логарифм декремента, взятый по модулю, называется *логарифмическим декрементом* колебаний. Таким образом, можем написать:

$D = \mathrm{e}^{-nT_1}$ — декремент колебаний;

$\delta = |\ln D| = nT_1$ — логарифмический декремент колебаний.

Иногда в качестве декремента выбирают отношение последовательных наибольших отклонений по разные стороны от положения равновесия. В этом случае декремент и логарифмический декремент определяются формулами

$$D = \mathrm{e}^{-nT_1/2}; \quad \delta = \frac{nT_1}{2}.$$

Наличие сопротивления вносит изменения и в процесс вынужденных колебаний, которые при наличии линейного сопротивления будут описываться уравнением

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin \omega t \quad \left(k^2 = \frac{c}{m};\ 2n = \frac{b}{m};\ h = \frac{H}{m}\right).$$

В общем решении этого линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, имеющего вид

$$x = x_1 + x_2,$$

x_1 (общее решение однородного уравнения) теперь представляет собой затухающие колебания, исчезающие с течением времени:

$$x_1|_{t\to\infty} = \lim_{t\to\infty}[ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\alpha)] = 0.$$

Поэтому установившееся движение $x_{\text{уст}} = x|_{t\to\infty}$ будет состоять только из вынужденных колебаний, которые определяются частным решением этого уравнения

$$x_2 = b\sin(\omega t+\beta),$$

где

$$b = \frac{h}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}; \quad \sin\beta = \frac{2bn\omega}{h}; \quad \cos\beta = \frac{b(k^2-\omega^2)}{h}.$$

Формулы для вычисления b и β легко получаются методом неопределенных коэффициентов (предлагаем читателю получить их самостоятельно).

Положительная величина b является амплитудой вынужденных колебаний ($a_{\text{вын}} = b$); угол β определяет разность (сдвиг) фаз вынужденных колебаний и вынуждающей силы.

Отметим основные свойства колебаний при наличии сопротивления.

1. При любых начальных условиях движение точки с течением времени будет состоять только из вынужденных колебаний. Начальные условия «умирают» вместе со свободными колебаниями, которые постепенно затухают.

2. Несмотря на присутствие сопротивления движению, вынужденные колебания являются гармоническими (незатухающими) колебаниями и происходят с частотой вынуждающей силы.

3. Амплитуда вынужденных колебаний всегда конечна (сила сопротивления ограничивает резонансную амплитуду).

Вопросы для самопроверки

1. Что такое восстанавливающая сила? Какова формула для проекции линейной восстанавливающей силы на направление движения точки?

2. Запишите дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы.

3. Запишите кинематическое (после интегрирования) уравнение свободных гармонический колебаний. Что такое частота, период, амплитуда и фаза гармонических колебаний?

4. Что называется нелинейными колебаниями?

5. Какие силы называются вынуждающими? Что такое гармоническая вынуждающая сила, ее частота, период и амплитуда? Укажите их размерности.

6. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний под действием гармонической вынуждающей силы. Как определяются по нему вынужденные колебания?

7. В чем состоит явление резонанса вынужденных колебаний?

8. Приведите дифференциальное уравнение, описывающее затухающие свободные колебания материальной точки. Поясните смысл входящих в него коэффициентов.

9. Что называется декрементом и логарифмическим декрементом колебаний?

10. В чем отличие резонанса вынужденных колебаний при наличии и при отсутствии силы сопротивления?

Упражнения

Решить следующие задачи из сборника И.В. Мещерского 1981 г. издания: 32.12; 32.13; 32.17; 32.28; 32.36; 32.53; 32.81; 32.94.

Динамика системы

Лекция 14

Механическая система и ее характеристики. Теорема о движении центра масс

Механическая система

Материальная точка является одной из основных моделей материальных тел в динамике. Однако во многих случаях ее недостаточно, поэтому наряду с материальной точкой в динамике рассматривают более общую модель — систему материальных точек.

Системой материальных точек или механической системой называется выделенная каким-либо образом совокупность материальных точек.

Масса и центр масс системы

Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_N$ — массы материальных точек, входящих в систему. Сумма масс

$$M = \sum_{k=1}^{N} m_k = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$$

называется массой системы, а геометрическая точка C с радиусом-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

— центром масс системы. Здесь $\vec{r}_C$, $\vec{r}_k$ $(k = 1, 2 \ldots, N)$ — радиусы-векторы центра масс и материальных точек системы, проведенные из некоторого общего начала отсчета O.

Пусть система находится в однородном поле силы тяжести. Тогда, умножая числитель и знаменатель последней формулы на ускорение g силы тяжести, получим:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{Mg}\sum_{k=1}^{N} m_k g \vec{r}_k = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{N} P_k \vec{r}_k,$$

где $P_k = m_k g$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ — силы веса материальных точек системы, P — вес всей системы. Мы пришли к формуле, по которой в статике определяется положение центра тяжести. Отсюда следует вывод: если механическая система находится в однородном поле силы тяжести, то существует понятие центра тяжести, и центр масс совпадает с центром тяжести системы. Поэтому все способы определения положения центра тяжести, ранее рассмотренные в статике, могут применяться при определении положения центра масс.

Для координат центра масс в некоторой системе координатных осей $Oxyz$, проектируя на эти оси векторную формулу для $\vec{r}_C$, получаем:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k x_k; \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k y_k; \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k z_k.$$

Здесь x_k, y_k, z_k — координаты материальных точек системы.

Масса M и радиус-вектор центра масс $\vec{r}_C$ являются важными характеристиками инертных свойств системы, но полностью эти свойства не определяют. Для полной характеристики инертных свойств системы требуется указать еще моменты инерции системы.

Момент инерции относительно оси

Пусть M_1, $M_2, \ldots, M_N$ — материальные точки рассматриваемой системы, ℓ — произвольная ось, h_1, $h_2, \ldots, h_N$ — расстояния материальных точек до оси ℓ (рис. 18). *Моментом инерции J_ℓ системы материальных точек относительно оси ℓ называется сумма произведений масс точек системы на квадраты их расстояний до этой оси*

$$J_\ell = \sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2 = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + \ldots + m_N h_N^2.$$

Моменты инерции относительно координатных осей

Пусть $Oxyz$ — декартова система координат. Тогда могут быть определены моменты инерции относительно каждой из координатных осей (рис. 19):

$$J_x = \sum_{k=1}^{N} m_k h_{kx}^2 = \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad J_y = \sum_{k=1}^{N} m_k h_{ky}^2 = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + z_k^2);$$

$$J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k h_{kz}^2 = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

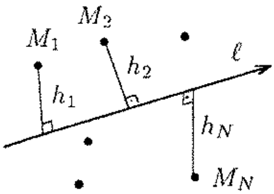


Рис. 18

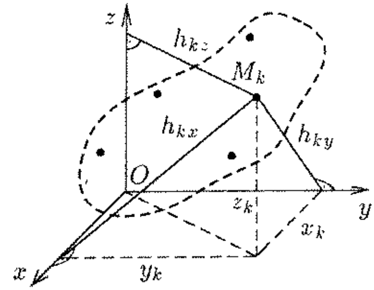


Рис. 19

Кроме осевых моментов инерции в динамике системы возникает потребность еще в центробежных моментах инерции, определяемых формулами

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k; \quad J_{yz} = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k; \quad J_{xz} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k.$$

Масса системы, расположение центра масс C, осевые и центробежные моменты инерции дают исчерпывающую характеристику материальных (инертных) свойств механической системы. Если инертные свойства материальной точки характеризуются единственной скалярной величиной — ее массой m, то в случае механической системы для этого требуется задать десять скалярных величин — массу системы M, три координаты центра масс — x_C, y_C, z_C, три осевых момента инерции — J_x, J_y, J_z и три центробежных момента — J_{xy}, J_{yz}, J_{xz}.

Моменты инерции твердого тела

Твердое тело можно мысленно представить состоящим из бесконечно большого числа бесконечно малых элементов, которые можно рассматривать как материальные точки. В этом случае, переходя в приведенных формулах к пределам при $N \to \infty$ и заменяя суммирование интегрированием, получаем следующие формулы:

для координат центра масс твердого тела

$$x_C = \frac{1}{M}\int_{(M)} x\,dm; \quad y_C = \frac{1}{M}\int_{(M)} y\,dm; \quad z_C = \frac{1}{M}\int_{(M)} z\,dm;$$

для осевых и центробежных моментов инерции

$$J_x = \int_{(M)} (y^2+z^2)\,dm; \quad J_y = \int_{(M)} (x^2+z^2)\,dm; \quad J_z = \int_{(M)} (x^2+y^2)\,dm;$$

$$J_{xy} = \int_{(M)} xy\,dm; \quad J_{yz} = \int_{(M)} yz\,dm; \quad J_{xz} = \int_{(M)} xz\,dm.$$

Здесь dm — масса выделенного элемента интегрирования; x, y, z — его координаты (координаты какой-либо точки внутри или на границе элемента), знаком (M) условно обозначено, что интегрирование проводится по всему объему тела.

Осевые моменты инерции некоторых твердых тел

Покажем применение приведенных формул на примере вычисления моментов инерции некоторых простых тел.

Моменты инерции стержня (материального отрезка)

Выберем начало координат в одном из концов стержня, ось x совместим с самим стержнем, оси y и z проведем перпендикулярно к нему (рис. 20). Пусть M — масса стержня, ℓ — его длина. Полагая стержень однородным, введем линейную плотность $\rho = M/\ell = \mathrm{const}$.

Выделяем элемент интегрирования в виде участка стержня длиной dx на расстоянии x от начала координат и вычисляем моменты инерции. Для момента инерции относительно оси x получаем

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2)\, dm = 0,$$

так как для элемента интегрирования имеем $y = 0$, $z = 0$.

Сразу отметим, что это единственный пример механической системы, когда осевой момент инерции может обращаться в нуль. (Для дискретной механической системы ему соответствует случай, показанный на рис. 21.)

Для моментов инерции относительно осей y, z находим:

$$J_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2)\, dm = \int_{(M)} x^2\, dm = \int_{(M)} x^2 (\rho\, dx) = \rho \int_0^{\ell} x^2\, dx =$$
$$= \frac{M}{\ell} \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\ell} = \frac{M\ell^2}{3}; \quad J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2)\, dm = \int_{(M)} x^2\, dm = J_y.$$

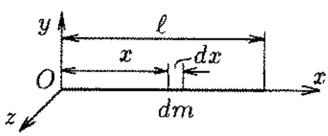


Рис. 20

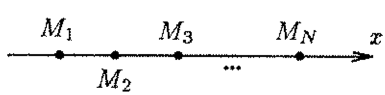


Рис. 21

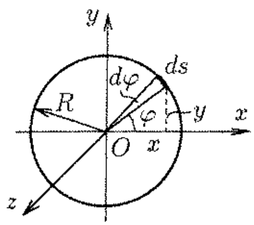


Рис. 22

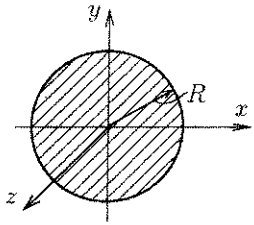


Рис. 23

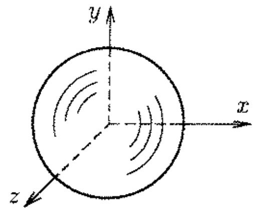


Рис. 24

Момент инерции материальной окружности (тонкого кольца, обода)

Выделяем элемент интегрирования в виде отрезка дуги окружности длиной $ds = R\,d\varphi$, вычисляем координаты элемента (рис. 22): $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = 0$. Полагая окружность однородной с линейной плотностью ρ ($\rho = M/2\pi R$), вычисляем моменты инерции:

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2)\,dm = \int_{(M)} y^2\,dm = \int_{(M)} (R\sin\varphi)^2(\rho R\,d\varphi) =$$

$$= \rho R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi = \rho R^3 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \rho R^3(\pi - 0) = \frac{M}{2\pi R} R^3 \pi = \frac{MR^2}{2};$$

$$J_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2)\,dm = \int_{(M)} x^2\,dm = \rho R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{MR^2}{2};$$

$$J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2)\,dm = \int_{(M)} (R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi)\rho R\,d\varphi =$$

$$= \rho R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = MR^2.$$

Приведем (без вычисления) формулы для осевых моментов инерции некоторых других тел.

Однородный круглый диск (рис. 23)

$$J_x = J_y = \frac{MR^2}{4}; \quad J_z = \frac{MR^2}{2}.$$

Однородный шар (рис. 24)

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5}MR^2.$$

Однородный круглый цилиндр (рис. 25)

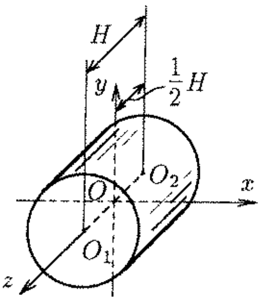


Рис. 25

$$J_x = J_y = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right); \quad J_z = \frac{MR^2}{2}.$$

Радиус инерции

Осевые моменты инерции твердых тел иногда задают, указывая массу и радиус инерции тела. Радиусом инерции тела относительно данной оси ℓ называется такое расстояние i, квадрат которого, умноженный на массу тела, равен моменту инерции тела относительно этой оси: $J_\ell = Mi^2$. Например, радиус инерции цилиндра относительно его продольной оси равен $R\sqrt{2}/2$, радиус инерции шара относительно любой его оси равен $R\sqrt{2}/\sqrt{5}$ и т.д.

Главные оси инерции

Кроме указанного выше единственного случая, осевые моменты инерции в нуль не обращаются и всегда положительны. Что же касается центробежных моментов инерции, то они могут быть положительными, отрицательными и принимать нулевые значения. Если два центробежных момента инерции, содержащие в обозначениях общий индекс некоторой оси, равны нулю, то эта ось называется *главной осью инерции тела* (в точке пересечения осей). Например, если имеем $J_{xz} = J_{yz} = 0$, то ось z является главной осью инерции в точке O (начале координат). Если равны нулю все три центробежных момента инерции, то все три оси являются главными.

Существует теорема, которая устанавливает, что в каждой точке тела можно найти как минимум три главные оси инерции. Главные оси, построенные в центре масс тела, называются главными центральными осями инерции, а моменты инерции относительно этих осей — главными центральными моментами инерции.

Классификация сил, действующих на точки системы

Различают свободную и несвободную механическую систему. Если точки механической системы не ограничены в своих движениях (свободны от связей), то система называется свободной. Если хотя бы на одну точку системы наложена связь, система называется несвободной.

Согласно принципу освобождаемости от связей, несвободную систему можно рассматривать как свободную, отбрасывая связи и заменяя их действие реакциями связей. Следовательно, в общем случае на точки механической системы могут действовать два вида сил — активные (задаваемые) силы и реакции связей.

Все действующие силы (активные силы и реакции связей) можно классифицировать и по-другому, разделяя их на силы внешние и силы внутренние. Внешними называются силы, которые приложены к точкам системы со стороны материальных точек и тел, не входящих в состав системы. Внутренними силами называются силы взаимодействия между точками системы. В дальнейшем для равнодействующей внешних сил будем пользоваться обозначениями $\vec{F}_k^e$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, для равнодействующей внутренних сил — $\vec{F}_k^i$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

Свойства внутренних сил

Внутренние силы всегда входят попарно и подчиняются третьему закону Ньютона. Если материальная точка M_k действует на материальную точку M_j силой $\vec{F}_{kj}$, то материальная точка M_j, в свою очередь, действует на точку M_k силой $\vec{F}_{jk}$ и имеет место равенство $\vec{F}_{kj} = -\vec{F}_{jk}$. Благодаря этому внутренние силы обладают следующими двумя свойствами.

Свойство 1. Главный вектор всех внутренних сил системы в любой момент времени равен нулю $(\vec{R}^i = 0)$.

Свойство 2. Главный момент всех внутренних сил системы (относительно всякого выбранного центра O) в любой момент времени равен нулю $(\vec{M}_O^i = 0)$.

Однако отсюда вовсе не следует, что внутренние силы не влияют на движение системы. Это было бы так, если внутренние силы были бы уравновешенной системой сил. Однако они таковой не являются, поскольку приложены к разным точкам. Тем не менее равенства $\vec{R}^i = 0$ и $\vec{M}_O^i = 0$ в динамике системы играют важную конструктивную роль, так как позволяют исключить из уравнений движения системы внутренние силы, которые, как правило, заранее неизвестны.

Дифференциальные уравнения движения механической системы

Для каждой точки механической системы можно составить дифференциальные уравнения движения по правилам динамики точки. Составляя дифференциальные уравнения в векторной форме, получаем

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1; \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2; \ldots; \quad m_N\ddot{\vec{r}}_N = \vec{F}_N.$$

Эти уравнения называются векторными дифференциальными уравнениями движения механической системы.

Проектируя эти уравнения на координатные оси $Oxyz$, получаем $3N$ обычных (скалярных) дифференциальных уравнения движения

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}; \quad m_k \ddot{y}_k = F_{ky}; \quad m_k \ddot{z}_k = F_{kz} \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Если все действующие силы поделены на активные силы и реакции связей, то правые части векторных уравнений (равнодействующие сил, приложенных к отдельным точкам системы), имеют вид

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^a + \vec{R}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\vec{F}_k^a$ — равнодействующая всех активных сил, приложенных к k-ой материальной точке системы, $\vec{R}_k$ — то же самое для реакций связей. При делении сил на внешние и внутренние эти же силы выражаются так:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Как реакции $\vec{R}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, так и внутренние силы $\vec{F}_k^i$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ наперед неизвестны, и с этим связаны большие трудности в определении движения системы посредством интегрирования ее дифференциальных уравнений движения. Лишь если эти силы удается исключить из уравнений движения, появляется возможность сформулировать некоторые общие закономерности, которым подчиняется движение системы.

Теорема о движении центра масс

Пусть все силы системы поделены на внешние и внутренние. Тогда дифференциальные уравнения движения системы запишутся в виде

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i; \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_N \ddot{\vec{r}}_N &= \vec{F}_N^e + \vec{F}_N^i. \end{aligned}$$

Почленно сложим левые и правые части уравнений:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i. \qquad (*)$$

По свойству внутренних сил последнее слагаемое в этом равенстве равно нулю. Левая часть равенства равна произведению массы системы на ускорение ее центра масс, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\vec{r}}_k = M \ddot{\vec{r}}_C.$$

В этом легко убедиться, дифференцируя дважды по времени выражение для радиуса-вектора центра масс

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$$

и разрешая результат относительно суммы $\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \ddot{\vec{r}}_k$.

В итоге равенство (*) принимает вид

$$M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e$$

или, в проекциях на неподвижные координатные оси:

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^e; \quad M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^e; \quad M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^e.$$

Получены дифференциальные уравнения, определяющие движение центра масс механической системы. Они выражают следующее правило, получившее название теоремы о движении центра масс механической системы: *центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к точкам системы.*

Законы сохранения движения центра масс

Отметим два важных следствия, вытекающие из теоремы о движении центра масс и называемые *законами сохранения движения центра масс.*

1. Если на механическую систему не действуют внешние силы или геометрическая сумма внешних сил равна нулю, то центр масс системы движется прямолинейно и равномерно.

2. Если сумма проекций внешних сил системы на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось остается постоянной.

Из теоремы о движении центра масс также следует, что без участия внешних сил, одними лишь внутренними силами, невозможно изменить положение центра масс механической системы.

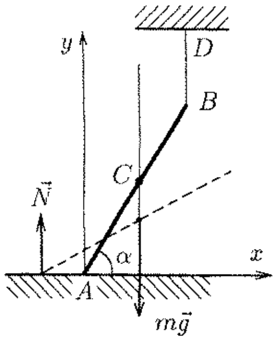


Рис. 26

Пример. Прямолинейный стержень AB длиной ℓ и массой m опирается своим нижним концом на гладкую горизонтальную плоскость и удерживается в равновесии под углом α нитью BD (рис. 26). В некоторый момент нить пережигают. Найти траекторию центра масс в возникающем после этого несвободном падении стержня.

Решение. Совместим начало координат с начальным положением опорного конца A стержня, ось x направим горизонтально, ось y — вертикально вверх. После нарушения связи на стержень действуют две внешние силы — собственный вес $m\vec{g}$, приложенный в центре масс C, и нормальная реакция $\vec{N}$ опорной плоскости.

Составим дифференциальные уравнения движения центра масс:

$$m\ddot{x}_C = 0; \quad m\ddot{y}_C = N - mg.$$

Начальные условия движения таковы:

$$t = 0; \quad x_C = \frac{\ell}{2}\cos\alpha; \quad y_C = \frac{\ell}{2}\sin\alpha;$$
$$\dot{x}_C = \dot{y}_C = 0.$$

Из первого уравнения, которое запишем в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dv_{Cx}}{dt} = 0,$$

сразу же следует: $v_{Cx} = C_1 = \text{const}$. Подставляя сюда вместо v_{Cx} ее выражение dx_C/dt и снова интегрируя, находим $x_C = C_1 t + C_2$. По начальным условиям находим $C_1 = 0$, $C_2 = (\ell/2)\cos\alpha$. Следовательно, $x_C = \text{const} = (\ell/2)\cos\alpha$. Это означает, что центр масс при падении стержня движется вдоль вертикальной прямой, проходящей через его начальное положение.

Второе уравнение позволяет выразить (но не найти) динамическую реакцию опорной плоскости

$$N = mg + m\ddot{y}_C.$$

Полное решение задачи, для которого требуется еще найти реакцию N и второе уравнение движения центра масс (уравнение $y_C = y_C(t)$), одной теоремой о движении центра масс выполнить невозможно. Для этого следует дополнительно воспользоваться какой-либо из других общих теорем динамики — теоремой об изменении кинетического момента или теоремой об изменении кинетической энергии.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется механической системой? В чем отличие свободных и несвободных механических систем?

2. Как определяются масса и центр масс механической системы?

3. Что называется моментом инерции механической системы относительно оси?

4. Приведите формулы для вычисления моментов инерции твердого тела. Что называется радиусом инерции?

5. Как классифицируются силы, приложенные к точкам механической системы? Сформулируйте свойства внутренних сил.

6. Запишите дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы (в векторной и скалярной форме).

7. Приведите словесную формулировку теоремы о движении центра масс.

8. В чем состоят законы сохранения движения центра масс?

Упражнения

1. Определить уравнение траектории конца B стержня в предыдущем примере.

2. Решить следующие задачи из сборника И.В. Мещерского 1981 г. издания: 34.2, 35.5, 35.10, 35.11, 35.17.

Общие теоремы динамики

Лекция 15

Теорема об изменении количества движения

Основные динамические величины механической системы

Из предыдущей лекции видно, что изучение движения механической системы не может основываться на детальном интегрировании ее дифференциальных уравнений движения. Такая задача слишком сложна и может быть реализована на практике только в исключительных случаях. Однако в той же лекции мы видели, что можно найти такие величины, общие для всей механической системы, изменение которых во времени позволяет сделать важные выводы о движении системы в целом. Одной из таких величин является центр масс системы. Этим же свойством обладают *количество движения*, *кинетический момент* и *кинетическая энергия* механической системы, называемые *основными динамическими величинами* механической системы.

Пусть $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N$ — скорости точек движущиеся механической системы. Произведение массы материальной точки m_k на ее вектор скорости $\vec{v}_k$ называется *количеством движения* (импульсом) материальной точки. Для совокупности векторов количеств движения точек системы $m_1\vec{v}_1$, $m_2\vec{v}_2, \ldots$, $m_N\vec{v}_N$ (рис. 27) можно определить главный вектор и главный момент.

Главный вектор количеств движения точек механической системы

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k$$

называется *количеством движения механической системы*.

Главный момент количеств движения точек механической системы относительно некоторого центра O

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_O(m_k \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k$$

называется *кинетическим моментом* механической системы.

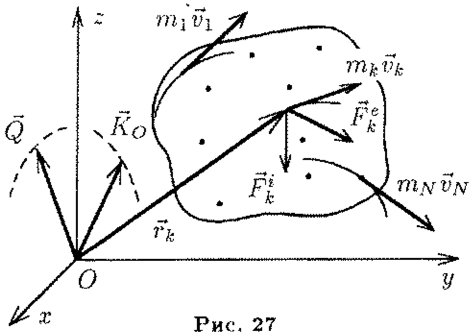


Рис. 27

Скалярная величина

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \vec{v}_k^{\,2}}{2},$$

равная сумме кинетических энергий всех материальных точек механической системы, называется *кинетической энергией* системы.

Основные динамические величины называют также мерами механического движения. Количество движения $\vec{Q}$ и кинетический момент $\vec{K}_O$ являются векторными мерами, кинетическая энергия T — скалярной мерой.

Теорема об изменении количества движения

Рассматривается произвольная механическая система, состоящая из материальных точек M_1, $M_2, \ldots, M_N$, движущаяся под действием приложенных сил относительно некоторой инерциальной системы координат $Oxyz$. Если система несвободна, мысленно освобождаемся от связей, добавляя к задаваемым (активным) силам реакции связей. После этого все действующие силы (активные и реакции связей) разделяем на внешние и внутренние. Тогда равнодействующие $\vec{F}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ сил, приложенных к точкам системы, будут складываться из внешней и внутренней сил:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Запишем выражение для количества движения системы

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k$$

и продифференцируем по времени обе части написанного равенства:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k.$$

Далее преобразуем последний член этого равенства, используя основное уравнение динамики и равенство нулю главного вектора внутренних сил:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i) = \vec{R}^e.$$

В результате для производной количества движения получаем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e.$$

Полученное равенство в математической форме выражает теорему об изменении количества движения механической системы: *производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору всех внешних сил.*

Проектируя это векторное равенство на координатные оси $Oxyz$, получаем математическое выражение теоремы в скалярной форме:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e.$$

В этих формулах

$$Q_x = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{kx}; \quad Q_y = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{ky}; \quad Q_z = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{kz}$$

— проекции количества движения системы на координатные оси, а

$$R_x^e = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^e; \quad R_y^e = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^e; \quad R_z^e = \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^e$$

— проекции на эти же оси главного вектора внешних сил.

Законы сохранения количества движения

Отметим два следствия из теоремы, чрезвычайно полезные для качественных рассуждений и решения задач.

1. Если главный вектор внешних сил равен нулю, то количество движения системы остается постоянным ($\vec{R}^e = 0 \to \dot{Q} = 0 \to \vec{Q} = \overrightarrow{\text{const}}$).

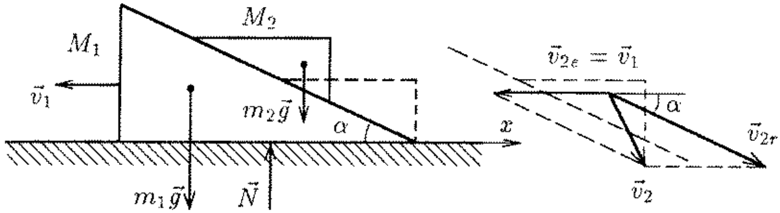


Рис. 28

2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо неподвижную ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось не изменяется. (Пусть, например, $R_x^e = 0$, тогда из теоремы, записанной в проекциях, следует $\dot{Q}_x = 0$ и, далее, $Q_x = \text{const}$.)

Следствия называются законами сохранения количества движения.

Из теоремы следует также, что внутренние силы непосредственно не влияют на изменение количества движения.

Пример. На гладкой призме M_1 массой m_1 и углом α при вершине покоится призма M_2, масса которой равна m_2 (рис. 28). Предоставленные себе, призмы приходят в движение под действием сил тяжести. Найти скорость призмы M_2 относительно призмы M_1 в момент касания основания, если $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 1$ кг, $\alpha = 30°$, а скорость призмы M_1 в этот момент составляет 0,2 м/с.

Решение. Примем за систему совокупность обеих призм. На систему действуют три внешние силы — веса призм $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ и нормальная реакция основания $\vec{N}$. Силы перпендикулярны к опорной плоскости, поэтому их проекции на ось x равны нулю. Будет равна нулю и проекция главного вектора внешних сил на эту ось: $R_x^e = 0$. Следовательно, проекция количества движения на ось x остается при движении системы постоянной. Так как в начале движения обе призмы неподвижны, то это постоянное значение равно нулю:

$$Q_x = \text{const} = Q_{x0} = 0.$$

Получим выражение для определения Q_x. Прежде всего заметим, что в теореме об изменении количества движения участвуют абсолютные скорости точек системы. Рассматривая движение призмы M_2 как сложное, состоящее из переносного (движение призмы M_1) и относительного (движение призмы M_2 относительно призмы M_1), и применяя теорему сложения скоростей, для абсолютной скорости $\vec{v}_2$ призмы M_2 будем иметь выражение

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2e} + \vec{v}_{2r} = \vec{v}_1 + \vec{v}_{2r},$$

где $\vec{v}_1$ — скорость призмы M_1 (абсолютная); v_{2r} — относительная скорость призмы M_2. Проектируя это векторное равенство на ось x, находим проекцию абсолютной скорости призмы M_2

$$v_{2x} = v_{1x} + v_{2rx} = -v_1 + v_{2r}\cos\alpha,$$

а далее и проекцию количества движения системы*

$$Q_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = -m_1 v_1 + m_2(-v_1 + v_{2r}\cos\alpha).$$

Отсюда, приравнивая Q_x нулю, находим

$$v_{2r} = \frac{(m_1 + m_2)v_1}{m_2\cos\alpha} = \frac{(5+1)\cdot 0{,}2}{1\cdot 0{,}866} = 1{,}38 \text{ м/с}.$$

О вычислении количества движения

Вычисление количества движения системы непосредственно по определяющей формуле

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N$$

становится затруднительным, если в системе содержится большое количество материальных точек. Получим более удобную формулу для вычисления $\vec{Q}$.

Запишем формулу для радиуса-вектора центра масс системы

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{r}_k.$$

Продифференцируем это равенство по времени, домножим обе части на M. Так как $\dot{\vec{r}}_C = \vec{v}_C$, $\dot{\vec{r}}_k = \vec{v}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, в результате получаем:

$$M\vec{v}_C = \sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k.$$

Откуда следует:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C,$$

т.е. *количество движения системы равно массе системы, умноженной на скорость центра масс.*

---

* При поступательном движении можно рассматривать тела как материальные точки.

Интегральная форма теоремы об изменении количества движения

Теорему об изменении количества движения можно записать также в интегральной (конечной) форме. Пусть в начале и конце некоторого рассматриваемого интервала времени $[t_1, t_2]$ количество движения равно соответственно $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$. Домножим обе части равенства $\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^e$ на dt и проинтегрируем на этом интервале:

$$\int_{\vec{Q}_1}^{\vec{Q}_2} d\vec{Q} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}^e\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e\, dt = \sum_{k=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k^e\, dt.$$

Произведение вектора силы на бесконечно малый промежуток времени ее действия $\vec{F}_k\, dt$ называется элементарным импульсом силы $\vec{F}_k$.

Интеграл от элементарного импульса на интервале $[t_1, t_2]$

$$\vec{S}_k = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k\, dt$$

называется импульсом (полным импульсом) силы $\vec{F}_k$ на этом интервале. С использованием этого понятия теорема запишется в виде

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k^e$$

и читается так: *изменение количества движения механической системы за некоторый (конечный) промежуток времени равно геометрической сумме импульсов внешних сил за тот же промежуток времени.* Теорема в такой форме применяется при изучении удара твердых тел.

Подставим в равенство

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e,$$

выражающее теорему об изменении количества движения в дифференциальной форме, формулу

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C = M\frac{d\vec{r}_C}{dt},$$

служащую для вычисления количества движения, и расшифруем обозначение $\vec{R}^e$. В результате придем к равенству

$$M\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2}=\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^e,$$

в точности совпадающему с математическим выражением теоремы о движении центра масс. Откуда следует, что теоремы об изменении количества движения системы и о движении центра масс вполне тождественны.

Однако по способу выражения общего объективного содержания эти теоремы настолько отличаются, что считаются вполне самостоятельными теоремами динамики. Каждая из теорем имеет свою преимущественную область применения. Теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме применяется в механике сплошной среды, в интегральной форме — в теории удара твердых тел. Теорема о движении центра масс применяется в динамике твердого тела и системы твердых тел.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется основными динамическими величинами механической системы?

2. Как вычисляется количество движения механической системы? Его проекция на координатную ось?

3. Сформулируйте теорему об изменении количества движения (в векторной и координатной форме).

4. Какие следствия вытекают из этой теоремы?

5. Что называется элементарным и полным импульсом силы?

6. Приведите теорему об изменении количества движения в интегральной форме.

Упражнения

1. Найти количество движения диска массы $m = 2$ кг в момент $t = 1$ с, если его центр C движется согласно уравнению $s = 3t^2$, м (рис. 29).

2. Найти количество движения системы, изображенной на рис. 30, если скорость стержня равна v. Масса стержня m_1, масса каждого из катков m_2, проскальзывание между стержнем и катками, а также между основанием и катками отсутствует.

3. Решить следующие задачи из сборника И.В. Мещерского 1981 г. издания: 36.9; 36.10; 28.6; 28.11.

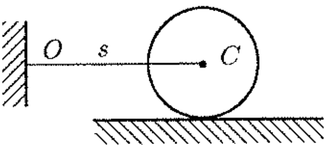


Рис. 29

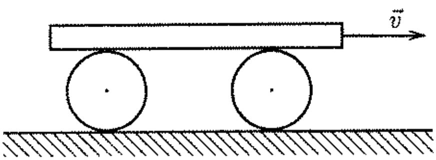


Рис. 30

Лекция 16

Теорема об изменении кинетического момента

Кинетический момент

Сначала рассмотрим случай одной материальной точки. Пусть m — масса материальной точки M, $\vec{v}$ — ее скорость, $m\vec{v}$ — количество движения.

Выберем в окружающем пространстве точку O и построим момент вектора $m\vec{v}$ относительно этой точки по тем же правилам, по которым в статике вычисляется момент силы. Получим векторную величину

$$\vec{k}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v},$$

которая называется моментом количества движения материальной точки относительно центра O (рис. 31).

Построим с началом в центре O декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$ и спроектируем вектор $\vec{k}_O$ на эти оси. Его проекции на эти оси, равные моментам вектора $m\vec{v}$ относительно соответствующих координатных осей, называются моментами количества движения материальной точки относительно координатных осей:

$$k_{Ox} = M_x(m\vec{v}); \quad k_{Oy} = M_y(m\vec{v}); \quad k_{Oz} = M_z(m\vec{v}).$$

Пусть теперь имеем механическую систему, состоящую из N материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_N$. В этом случае момент количества движения можно определить для каждой точки системы:

$$\vec{k}_{O1} = \vec{M}_O(m_1\vec{v}_1) = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1;$$
$$\vec{k}_{O2} = \vec{M}_O(m_2\vec{v}_2) = \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vec{k}_{ON} = \vec{M}_O(m_N\vec{v}_N) = \vec{r}_N \times m_N\vec{v}_N.$$

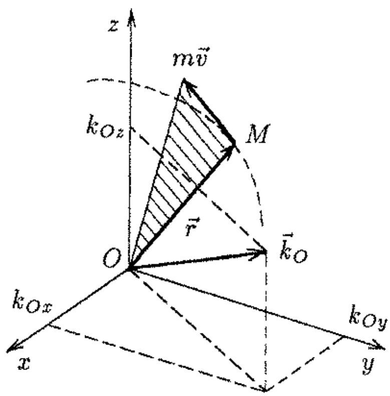


Рис. 31

Геометрическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек, входящих в состав системы, называется главным моментом количеств движения или кинетическим моментом системы:

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_O(m_k\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k.$$

Проекции кинетического момента системы на координатные оси

$$K_{Ox} = \sum_{k=1}^{N} M_x(m_k\vec{v}_k);\ K_{Oy} = \sum_{k=1}^{N} M_y(m_k\vec{v}_k);\ K_{Oz} = \sum_{k=1}^{N} M_z(m_k\vec{v}_k)$$

называются кинетическими моментами относительно координатных осей.

Теорема об изменении кинетического момента

При движении механической системы ее кинетический момент $\vec{K}_O$ изменяется с течением времени. Чтобы установить закон изменения кинетического момента, продифференцируем по времени обе части выражения

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k,$$

определяющего кинетический момент:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k\vec{v}_k + \vec{r}_k \times m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt}\right).$$

Так как $d\vec{r}_k/dt = \vec{v}_k$, то первое слагаемое в круглых скобках равно нулю (как векторное произведение двух коллинеарных векторов). Второе слагаемое можно представить в следующем виде:

$$\vec{r}_k \times m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{r}_k \times m_k\vec{a}_k = \vec{r}_k \times (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i) = \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_k^i),$$

где $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$ — момент относительно центра O равнодействующей $\vec{F}_k^e$ внешних сил, приложенных к точке M_k; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^i)$ — момент равнодействующей внутренних сил относительно того же центра. Произведя суммирование, находим:

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k \times m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{F}_k^i) = \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^i = \vec{M}_O^e.$$

Главный момент внутренних сил системы $\vec{M}_O^i$ всегда равен нулю, поэтому остается только главный момент внешних сил $\vec{M}_O^e$.

Таким образом, результат дифференцирования кинетического момента приводит к равенству

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e,$$

или, в проекциях на неподвижные координатные оси Ox, Oy, Oz:

$$\frac{dK_{Ox}}{dt} = M_x^e; \quad \frac{dK_{Oy}}{dt} = M_y^e; \quad \frac{dK_{Oz}}{dt} = M_z^e.$$

Полученные равенства выражают теорему об изменении кинетического момента системы соответственно в векторной и координатной форме. Теорема формулируется так: *производная по времени от кинетического момента механической системы* (относительно данного неподвижного центра, данной неподвижной оси) *равна главному моменту всех внешних сил системы* (относительно того же центра, той же оси).

Законы сохранения кинетического момента

Из теоремы об изменении кинетического момента вытекают два важных следствия, называемые законами сохранения кинетического момента.

1. Если главный момент внешних сил системы относительно некоторого неподвижного центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра остается постоянным. Действительно, пусть, например, $\vec{M}_O^e = 0$. Тогда имеем $d\vec{K}_0/dt = 0$, откуда следует $\vec{K}_0 = \overrightarrow{\text{const}}$.

2. Если главный момент внешних сил системы относительно некоторой неподвижной оси равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси не изменяется при движении системы. (Пусть, например, $M_x^e = 0$, тогда $dK_{Ox}/dt = 0$ и поэтому $K_{Ox} = \text{const}$.)

Из теоремы также следует, что внутренние силы непосредственно не влияют на изменение кинетического момента системы.

Кинетический момент твердого тела (общий случай)

Во многих случаях в качестве механической системы выступают твердое тело и система твердых тел.

В динамике твердого тела часто возникает необходимость во введении вспомогательной системы координатных осей, начало которой находится в центре масс тела и которые движутся, оставаясь все время параллельными самим себе (поступательно движутся вместе с центром масс). Такие оси называются осями Кёнига.

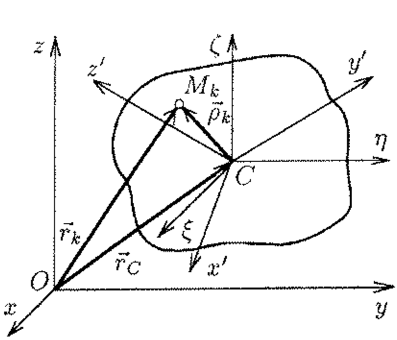


Рис. 32

При вычислении кинетического момента твердое тело мысленно разбиваем на N малых частиц (материальных точек) и вводим две вспомогательные системы координат с началом в центре масс C — систему $C\xi\eta\zeta$ осей Кёнига и систему $Cx'y'z'$, оси которой неизменно связаны с движущимся телом (как бы «вморожены» в тело) (рис. 32). Тогда движение материальных точек тела относительно основной (неподвижной) системы координат $Oxyz$ можем рассматривать как сложное движение, состоящее из переносного (движение осей Кёнига) и относительного (движение точек тела относительно осей Кёнига). Соответственно, скорости $\vec{v}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ точек тела в выражении для кинетического момента $\vec{K}_O$ будут являться абсолютными скоростями и вычисляться при помощи теоремы сложения скоростей по формулам

$$\vec{v}_k = \vec{v}_{ek} + \vec{v}_{rk} = \vec{v}_C + \vec{v}_{rk} \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Здесь учтено, что переносное движение является поступательным, поэтому переносные скорости $\vec{v}_{ek}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ точек тела все одинаковы и равны скорости $\vec{v}_C$ центра масс.

Подставим это выражение в формулу для определения кинетического момента системы (в данном случае — тела):

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_O(m_k\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k(\vec{v}_C + \vec{v}_{rk}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_C + \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_{rk}.$$

Первая сумма приводится к виду

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_C = \left(\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{r}_k\right) \times \vec{v}_C = M\vec{r}_C \times \vec{v}_C = \vec{r}_C \times M\vec{v}_C$$

и представляет собой момент относительно центра O количества движения тела $\vec{Q} = M\vec{v}_C$, приложенного в центре масс тела. Вторая сумма определяет главный момент $\vec{K}_{Or}$ относительных количеств движения точек тела $m_k\vec{v}_{rk}$ относительно того же центра O.

Введем в рассмотрение главный момент относительных количеств движения тела относительно центра масс

$$\vec{K}_{Cr} = \sum_{k=1}^{N} \vec{\rho}_k \times m_k \vec{v}_{rk},$$

где $\vec{\rho}_k$ — радиусы-векторы материальных точек тела, проведенные из центра масс, и покажем, что имеет место равенство $\vec{K}_{Or} = \vec{K}_{Cr}$. Для этого выразим абсолютные радиусы-векторы $\vec{r}_k$ через радиус-вектор центра масс $\vec{r}_C$ и относительные радиусы-векторы $\vec{\rho}_k$:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

и подставим в выражение для $\vec{K}_{Or}$:

$$\vec{K}_{Or} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_{rk} = \sum_{k=1}^{N} (\vec{r}_C + \vec{\rho}_k) \times m_k \vec{v}_{rk} = \vec{r}_C \times \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_{rk} + \vec{K}_{Cr}.$$

Но первый член в полученной сумме равен нулю, так как равна нулю величина $\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_{rk}$. Действительно, для этой величины последовательно можем написать:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_{rk} = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{\rho}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{\rho}_k = \frac{d}{dt}(M\vec{\rho}_C) = 0,$$

так как $\vec{\rho}_C$ сохраняет постоянное значение (равное нулю). Следовательно, имеет место равенство $\vec{K}_{Or} = \vec{K}_{Cr}$.

В результате для вычисления кинетического момента твердого тела относительно неподвижного центра O получаем следующую общую формулу:

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times M\vec{v}_C + \vec{K}_{Cr}.$$

Напомним, что в этой формуле M — масса тела, $\vec{r}_C$ — радиус-вектор центра масс, проведенный из неподвижного центра O, $\vec{v}_C$ — скорость центра масс, $\vec{K}_{Cr}$ — кинетический момент тела в его относительном движении по отношению к осям Кёнига, вычисленный относительно центра масс.

Отметим частные случаи.

Тело движется поступательно. В этом случае относительное движение отсутствует — положение тела не изменяется относительно осей Кёнига. Относительные скорости частиц тела $\vec{v}_{rk}$

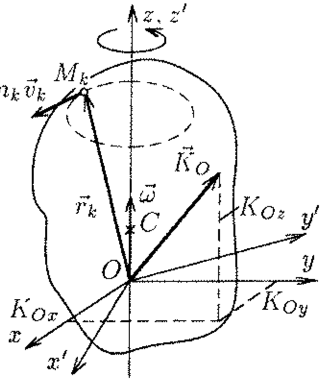


Рис. 33

$(k = 1, 2, \ldots, N)$ равны нулю, вместе с ними равен нулю и относительный кинетический момент тела $\vec K_{Cr}$. Следовательно, для определения кинетического момента остается только первый член в полученной общей формуле, т. е.

$$\vec K_O = \vec r_C \times M\vec v_C.$$

Так как $m\vec v_C = \vec Q$, формулу можно записать и в другом виде:

$$\vec K_O = \vec r_C \times \vec Q = \vec M_O(\vec Q).$$

Из нее следует, что *кинетический момент поступательно движущегося тела относительно некоторого неподвижного центра равен моменту относительно этого центра количества движения тела, приложенного в его центре масс.* Правило сохраняется и при вычислении кинетических моментов тела относительно координатных осей Ox, Oy, Oz.

Тело вращается вокруг неподвижной оси. В этом случае удобно действовать непосредственно, не прибегая к разложению движения на переносное и относительное.

Выберем моментный центр O на оси вращения тела, ось вращения совместим с осью Oz неподвижной системы координат $Oxyz$ (рис. 33). Выделим в теле частицу (материальную точку) M_k с массой m_k и радиусом-вектором $\vec r_k$. Тогда для скорости $\vec v_k$ частицы можем записать

$$\vec v_k = \vec\omega \times \vec r_k = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = -\omega_z y_k \vec i + \omega_z x_k \vec j.$$

Здесь $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ — орты осей $Oxyz$; 0, 0, ω_z — проекции вектора $\vec\omega$ угловой скорости тела на эти оси; x_k, y_k, z_k — координаты выделенной частицы.

В полученном выражении коэффициенты при ортах равны проекциям скорости частицы на соответствующие координатные оси. Следовательно, для проекций количества движения $m_k\vec v_k$ выделенной частицы будем иметь выражения

$$m_k v_{kx} = -m_k\omega_z y_k; \quad m_k v_{ky} = m_k\omega_z x_k; \quad m_k v_{kz} = 0.$$

Для момента количества движения частицы относительно точки O с учетом полученных равенств получаем

$$\vec{M}_O(m_k\vec{v}_k) = \vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ m_k v_{kx} & m_k v_{ky} & m_k v_{kz} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ -m_k\omega_z y_k & m_k\omega_z x_k & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\omega_z m_k x_k z_k \vec{i} - \omega_z m_k y_k z_k \vec{j} + \omega_z m_k (x_k^2 + y_k^2)\vec{k}.$$

Отсюда следуют формулы для моментов количества движения частицы M_k относительно координатных осей

$$M_x(m_k\vec{v}_k) = -\omega_z m_k x_k z_k;$$
$$M_y(m_k\vec{v}_k) = -\omega_z m_k y_k z_k;$$
$$M_z(m_k\vec{v}_k) = \omega_z m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Суммируя соответствующие моменты для всех материальных точек тела, определяем проекции на оси $Oxyz$ кинетического момента $\vec{K}_O$ всего тела:

$$K_{Ox} = \sum_{k=1}^{N} M_x(m_k\vec{v}_k) = -\omega_z \sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k = -J_{xz}\omega_z;$$
$$K_{Oy} = \sum_{k=1}^{N} M_y(m_k\vec{v}_k) = -\omega_z \sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k = -J_{yz}\omega_z;$$
$$K_{Oz} = \sum_{k=1}^{N} M_z(m_k\vec{v}_k) = \omega_z \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2) = J_z\omega_z.$$

Из этих формул основное значение для дальнейшего имеет формула

$$K_{Oz} = J_z\omega_z,$$

определяющая проекцию кинетического момента вращающегося тела на направление оси вращения.

Сравнивая проекции кинетического момента тела с проекциями угловой скорости $\vec{\omega}(0, 0, \omega_z)$, видим, что векторы угловой скорости и кинетического момента вращающегося тела не направлены вдоль одной прямой (см. также рис. 33). Векторы $\vec{K}_O$ и $\vec{\omega}$ будут коллинеарными лишь в том случае, если выполняются равенства $J_{xz} = J_{yz} = 0$.

Вращающееся твердое тело (ротор), для которого выполняются условия $x_C = y_C = 0$ (центр масс лежит на оси вращения) и $J_{xz} = J_{yz} = 0$ (ось вращения является главной осью инерции), называется статически и динамически уравновешенным. Таковы, например, однородный круглый диск, однородный круглый цилиндр, однородный шар при их вращении вокруг одной из своих осей симметрии.

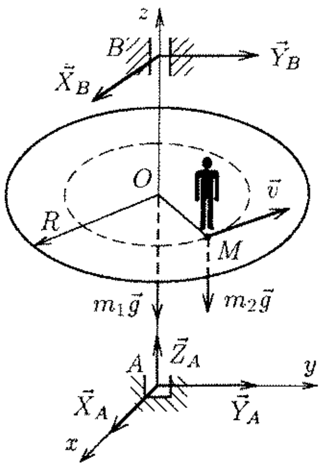


Рис. 34

Иногда требуется знать проекции кинетического момента на оси $Ox'y'z'$, неизменно связанные с самим движущимся телом — $K_{Ox'}$, $K_{Oy'}$, $K_{Oz'}$. Вид формул для их вычисления сохраняется, только моменты инерции и угловую скорость следует задавать теперь в осях $Ox'y'z'$:

$$K_{Ox'} = -J_{x'z'}\omega_{z'}; \quad K_{Oy'} = -J_{y'z'}\omega_{z'}; \quad K_{Oz'} = J_{z'}\omega_{z'}.$$

Пример. На круглой горизонтальной платформе массы m_1 и радиуса R стоит человек массы m_2 (рис. 34). Платформа и человек вначале неподвижны. Что будет происходить с платформой, если человек будет двигаться по ней с относительной скоростью v_r по окружности радиуса $OM = R/2$? Трением в опорах пренебречь, платформу считать однородным круглым диском.

Решение. Выберем в качестве системы платформу вместе с находящимся на ней человеком, принимаемым за материальную точку M. Внешними силами будут вес платформы $m_1\vec{g}$, вес человека $m_2\vec{g}$, реакции подпятника A и подшипника B. Момент каждой из этих сил относительно оси вращения платформы (оси z) равен нулю, поэтому равен нулю и главный момент M_z^e внешних сил относительно этой оси. Следовательно, кинетический момент системы относительно оси z остается при движении постоянным, равным своему начальному значению

$$K_{Oz} = K_{Oz}|_{t=0}.$$

В начале движения платформа и человек неподвижны, поэтому $K_{Oz}|_{t=0} = 0$, и это равенство принимает вид

$$K_{Oz} = 0.$$

Если человек будет перемещаться по платформе с некоторой абсолютной скоростью $\vec{v}$, то его количество движения $m_2\vec{v}$ имеет относительно оси z момент

$$M_z(m_2\vec{v}) = m_2 v \cdot OM = m_2 v \frac{R}{2}.$$

Но кинетический момент всей системы равен нулю, поэтому платформа начнет вращаться, а ее кинетический момент относительно оси вращения $J_z\omega_z$ будет равным и противоположным по знаку моменту количества движения человека $M_z(m_2\vec{v})$.

Для определения угловой скорости платформы составим выражение для кинетического момента системы относительно оси z:

$$K_{Oz} = J_z\omega_z + \frac{m_2 v R}{2} = -\frac{m_1 R^2}{2}\omega + \frac{m_2 v R}{2}.$$

Так как платформа вращается, движение человека (точки M) будет сложным движением. По теореме сложения скоростей для абсолютной скорости v получаем:

$$v = v_r - v_e = v_r - OM \cdot \omega = v_r - \frac{R}{2}\omega.$$

Условие сохранения кинетического момента $K_{Oz} = 0$ теперь запишется так:

$$-\frac{m_1 R^2}{2}\omega + m_2\left(v_r - \frac{R}{2}\omega\right)\frac{R}{2} = 0.$$

Отсюда находим

$$\omega = \frac{2m_2 v_r}{R(2m_1 + m_2)}.$$

В заключение заметим, что теорема об изменении кинетического момента выполняется только по отношению к неподвижному центру и неподвижным координатным осям. Однако существует единственная подвижная точка, относительно которой теорема продолжает оставаться справедливой. Такой точкой является центр масс (системы или тела). Теорема сохраняется и по отношению к осям Кенига. Доказательство этих положений мы опускаем.

Дифференциальные уравнения движения твердого тела

Дифференциальные уравнения движения тела могут быть получены при помощи теоремы о движении центра масс и теоремы об изменении кинетического момента. Получим эти уравнения для основных видов движения тела — поступательного, вращательного и плоскопараллельного.

При *поступательном движении* все точки тела движутся одинаково. По этой причине, определив движение какой-то одной точки тела, одновременно получаем все данные и о движении остальных точек. В качестве такой определяющей точки выберем центр масс тела, так как именно для него известно правило составления дифференциальных уравнений движения, устанавливаемое теоремой о движении центра масс.

Дифференциальные уравнения движения центра масс

$$M\ddot{x} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^{e}; \quad M\ddot{y} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^{e}; \quad M\ddot{z} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz}^{e}$$

одновременно служат дифференциальными уравнениями поступательного движения тела. В этих уравнениях индекс центра масс опущен, так как теперь x, y, z — координаты любой точки тела.

Дифференциальное уравнение *вращательного движения* получим, воспользовавшись теоремой об изменении кинетического момента относительно оси вращения тела. Совмещая ось вращения с координатной осью Oz (см. рис. 33), запишем

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = M_z^e.$$

Подставляя сюда равенства

$$K_{Oz} = J_z\omega_z = J_z\dot{\varphi}; \quad M_z^e = \sum_{k=1}^{N} M_z(\vec{F}_k^e),$$

получаем дифференциальное уравнение вращательного движения

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{N} M_z(\vec{F}_k^e).$$

Направление отсчета угла поворота φ удобно совместить с направлением вращения тела. Тогда правило знаков при вычислении моментов внешних сил, сумма которых стоит в правой части уравнения, будет такое: момент положителен, если направлен в сторону вращения тела; момент отрицателен, если направлен против вращения тела.

Пример. Ротор рубительной машины, вращавшийся с угловой скоростью $\omega = \omega_0$, после выключения электродвигателя постепенно останавливается под действием постоянного тормозного момента $M_т$. Определить число оборотов до момента остановки и время торможения. Момент инерции ротора относительно оси вращения равен J.

Решение. Составляем дифференциальное уравнение вращения ротора на этапе торможения

$$J\ddot{\varphi} = -M_т.$$

Для определения времени торможения запишем уравнение в виде уравнения первого порядка

$$J\frac{d\omega}{dt} = -M_т.$$

Разделяем переменные и интегрируем на интервале времени от начала торможения ($t = 0$, $\omega = \omega_0$) до момента остановки ($t = t_к$, $\omega = 0$):

$$J\int_{\omega_0}^{0} d\omega = -M_т \int_0^{t_к} dt.$$

Отсюда находим $t_к = J\omega_0/M_т$.

Число оборотов до остановки найдется по формуле $N = \varphi_к/2\pi$, где $\varphi_к$ — значение угла поворота в момент остановки (в радианах). Угол $\varphi_к$ можно найти, определив путем интегрирования дифференциального уравнения вращения закон движения ротора $\varphi = \varphi(t)$ и подставив в него далее $t = t_к$. Однако это можно сделать более коротким способом, если левую часть дифференциального уравнения вращения представить в виде $J\omega d\omega/d\varphi$. Тогда определение N сведется к следующим действиям:

$$J\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = -M_т; \quad J\omega d\omega = -M_т d\varphi;$$

$$J\int_{\omega_0}^{0} \omega d\omega = -M_т \int_0^{\varphi_к} d\varphi; \quad \varphi_к = \frac{J\omega_0^2}{2M_т}; \quad N = \frac{J\omega_0^2}{4\pi M_т}.$$

Плоскопараллельное движение тела задается движением некоторой точки плоской фигуры тела (полюса) и вращением плоской фигуры в своей плоскости вокруг этого полюса. При решении задач динамики за полюс следует выбирать центр масс тела, так как именно для него известно, как составляются дифференциальные уравнения движения.

Неподвижную систему координат $Oxyz$ выберем так, чтобы плоскость Oxy совпадала с плоскостью, в которой движется центр масс

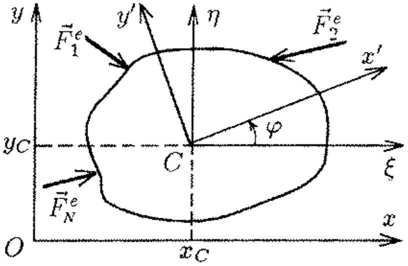


Рис. 35

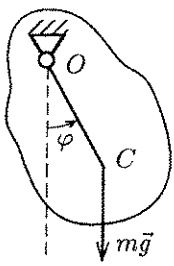


Рис. 36

тела. С началом в центре масс строим еще две системы координат — систему $C\xi\eta\zeta$ осей Кёнига и систему $Cx'y'z'$, оси которой неизменно связаны с движущемся телом; координатные плоскости Oxy, $C\xi\eta$ и $Cx'y'$ совпадают (рис. 35). Не обозначенные на рисунке оси Oz, $C\zeta$ и Cz' направлены на читателя.

Положение тела задается координатами x_C, y_C центра масс и углом поворота φ. Относительно этих величин и должны составляться дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения. Эти уравнения получим, применяя теорему о движении центра масс и теорему об изменении кинетического момента относительно оси Кёнига $C\zeta$, совпадающей в данном случае с осью Cz':

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}^e; \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}^e; \quad J_{Cz'}\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{N} M_{Cz'}(\vec{F}_k^e).$$

Физический маятник и его малые колебания

Физическим маятником называется твердое тело, находящееся в поле силы тяжести и имеющее горизонтальную ось вращения, не проходящую через центр тяжести тела.

Пусть m — масса тела, J — его момент инерции относительно оси вращения O, $h = OC$ — расстояние от центра тяжести до оси вращения (рис. 36). Выведенное из положения равновесия, тело будет вращаться либо совершать колебательное движение. В обоих случаях дифференциальное уравнение движения имеет один и тот же вид (силами трения пренебрегаем):

$$J\ddot{\varphi} = -mgh\sin\varphi.$$

Пусть начальные условия таковы, что угол φ все время остается малым (максимальное отклонение от вертикали не превышает $8\ldots10°$). Тогда можно приближенно принять $\sin\varphi = \varphi$ (в радианах) и рассматривать более простое уравнение

$$J\ddot{\varphi} = -mgh\varphi$$

или, что то же, уравнение

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \quad \left(k^2 = \frac{mgh}{J}\right).$$

Это уравнение называется дифференциальным уравнением малых колебаний физического маятника. Из него следует, что малые колебания физического маятника являются гармоническими колебаниями частоты

$$k = \sqrt{\frac{mgh}{J}}$$

и периода

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}.$$

Амплитуда и фаза колебаний будут определяться начальным отклонением φ_0 и начальной угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$ физического маятника.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется моментом количества движения материальной точки?

2. Что называется кинетическим моментом механической системы относительно данного центра, данной оси?

3. Приведите общие формулы для определения кинетического момента механической системы (относительно данного центра, данной оси).

4. Приведите математическую запись теоремы об изменении кинетического момента. Дайте словесную формулировку теоремы.

5. В каких случаях кинетический момент системы или его проекция на ось остаются постоянными при движении системы?

6. Какие координатные оси называются осями Кенига?

7. Приведите общую формулу для определения кинетического момента твердого тела относительно данного неподвижного центра?

8. Как вычисляется кинетический момент тела при его поступательном и вращательном движениях?

9. Как составляются дифференциальные уравнения движения тела при его поступательном движении? При вращении вокруг неподвижной оси? При плоскопараллельном движении?

10. Что называется физическим маятником? Как определяется период его малых колебаний?

Упражнения

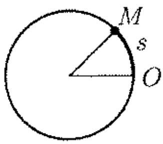


Рис. 37

1. Материальная точка M массы m движется по окружности радиуса R согласно уравнению $s = 2\pi Rt^2$ (рис. 37). Вычислить и построить количество движения и момент количества движения точки при $t = 1$ с.

2. Сплошной однородный диск массы m и радиуса R вращается вокруг своей оси согласно уравнению $\varphi = \pi t^2 - 2t$, рад. Найти кинетический момент диска относительно оси вращения.

3. Решить в указанном порядке следующие задачи из сборника И.В. Мещерского 1981 г. издания: 28.4; 37.1; 37.56; 37.43; 37.5; 37.6; 37.16.

Лекция 17

Теорема об изменении кинетической энергии

Работа силы

Если изменение количества движения связано с главным вектором приложенных сил, а изменение кинетического момента — с главным моментом этих сил, то изменение кинетической энергии определяется величиной работы, совершенной приложенными силами.

Первоначальное понятие работы относится к случаю прямолинейного движения и постоянной силы, действующей в направлении перемещения (рис. 38). В этом случае работой силы называется величина

$$A = \pm Fs,$$

где F — модуль силы, s — величина перемещения точки приложения силы. Знак плюс берется, если направление силы совпадает с направлением перемещения, знак минус — если эти направления противоположны.

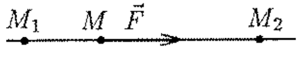


Рис. 38

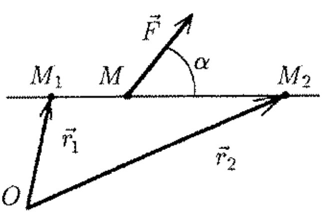


Рис. 39

Для постоянной силы, составляющей некоторый угол α с направлением перемещения (рис. 39), работа определяется как произведение перемещения на проекцию силы на направление перемещения:

$$A = Fs\cos\alpha.$$

Знак плюс или минус определяется знаком $\cos\alpha$. Если $0 \leqslant \alpha < \pi/2$ (сила направлена под острым углом к направлению перемещения), то работа положительна;

если $\pi/2 < \alpha \leqslant \pi$ (сила направлена под тупым углом к направлению перемещения), — работа отрицательна. При $\alpha = \pi/2$ (сила перпендикулярна направлению перемещения) работа равна нулю.

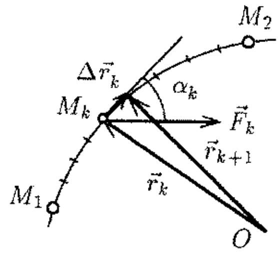


Рис. 40

Так как $s = |\overrightarrow{M_1M_2}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = |\Delta\vec{r}|$, то эту формулу можно представить в виде скалярного произведения вектора силы и вектора перемещения точки приложения силы:

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}.$$

Дальнейшее обобщение понятия работы связано с рассмотрением общего случая, когда сила переменна, а точка приложения силы движется по криволинейной траектории. В этом случае формулу $A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ непосредственно применить нельзя. Однако это можно сделать, если рассматривать работу на малых участках траектории, близких к прямолинейным отрезкам, вдоль которых можно пренебречь изменением направления и модуля силы.

Разбивая криволинейный путь точки приложения силы на множество (n) малых участков (рис. 40) и определяя работу на каждом участке по приведенной формуле, путем суммирования находим

$$A^{(n)} \approx \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r}_k.$$

Это — приближенное выражение работы переменной силы $\vec{F}$ на участке траектории M_1M_2. Точное значение работы получаем, переходя в этой формуле к пределу при неограниченном увеличении числа участков разбиения n. В итоге приходим к общей формуле для вычисления работы в виде криволинейного интеграла

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Выражение под знаком интеграла

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

называется *элементарной работой* силы. (Обозначение $d'A$ (а не dA) обусловлено тем, что соответствующий дифференциальный трехчлен может и не быть полным дифференциалом.) В отличие от элементарной работы интеграл от нее называется полной работой.

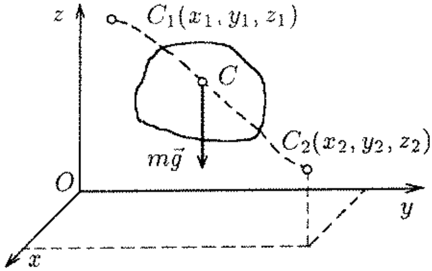


Рис. 41

В технике весьма употребительно понятие *мощности*, т.е. работы, совершаемой в единицу времени. Для определения мощности источника силы имеем:

$$W = \frac{d'A}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Работа силы тяжести

Тело массы m совершает некоторое перемещение в пространстве, при этом его центр тяжести C переходит из положения $C_1(x_1, y_1, z_1)$ в положение $C_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 41). Полная работа веса тела $\vec{P}(0, 0, -mg)$ будет равна

$$A = \int_{(C_1)}^{(C_2)} P_x\,dx + P_y\,dy + P_z\,dz = \int_{z_1}^{z_2} (-mg)\,dz = mg(z_1 - z_2).$$

Обозначая $z_1 - z_2 = \pm h$, окончательно запишем:

$$A = \pm mgh.$$

Таким образом, работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению веса тела на вертикальное перемещение его центра тяжести. Если $z_1 > z_2$ (центр тяжести опускается), то работа положительна, если $z_1 < z_2$ (центр тяжести поднимается), то работа отрицательна.

Работа упругой силы пружины

Пусть свободный конец пружины прикреплен к телу, которое может перемещаться поступательно и прямолинейно (рис. 42). Найдем работу упругой силы пружины при переходе тела из положения, в котором пружина не деформирована (точка M тела занимает положение M_1) в другое положение, в котором пружина имеет удлинение $\Delta\ell$ (точка M занимает положение M_2).

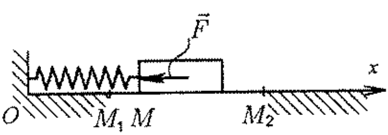


Рис. 42

Проведем ось x параллельно оси пружины, введем обозначения: c — жесткость, a — длина недеформированной пружины. Тогда для текущего значения F_x проекции упругой силы $\vec{F}$ можем записать

$$F_x = -c(x-a),$$

где x — текущая длина пружины, в данном случае совпадающая с абсциссой точки M (координатой тела). Проекции упругой силы на оси Oy, Oz, не показанные па рис. 42, равны нулю.

Вычисляем работу упругой силы:

$$A_{M_1M_2} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -c\int_a^{a+\Delta\ell}(x-a)\,dx =$$

$$= -c\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_a^{a+\Delta\ell} = -\frac{c(\Delta\ell)^2}{2}.$$

Если рассмотреть обратный переход из положения M_2, в положение M_1, то для работы получим

$$A_{M_2M_1} = -c\int_{a+\Delta\ell}^{a}(x-a)\,dx = \frac{c(\Delta\ell)^2}{2}.$$

Таким образом, работа упругой силы пружины между двумя ее положениями, в одном из которых пружина не напряжена, а в другом — сжата или растянута на величину $\Delta\ell$, определяется по формуле

$$A = \pm\frac{1}{2}c(\Delta\ell)^2.$$

Знак плюс берется в случае разгрузки пружины (деформация изменяется от $\Delta\ell$ до 0), знак минус — при нагружении (деформация изменяется от 0 до $\Delta\ell$).

Полученная формула остается справедливой и в том случае, когда свободный конец пружины M движется вдоль любой криволинейной траектории.

Если пружина деформирована в обоих рассматриваемых положениях (в конечном — на величину $\Delta\ell_2$, в начальном — на $\Delta\ell_1$), то имеет место формула

$$A_{M_1M_2} = -\frac{c}{2}[(\Delta\ell_2)^2 - (\Delta\ell_1)^2].$$

Работа силы трения скольжения

Пусть тело M массы m движется прямолинейно по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения f и проходит путь $M_1M_2 = s$ (рис. 43).

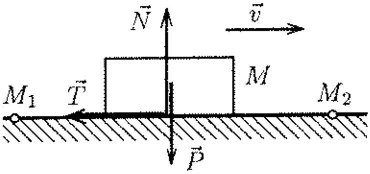


Рис. 43

Движение тела происходит под действием трех сил: собственного веса $\vec{P} = m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и силы трения скольжения $\vec{T}$ ($T = fmg$). Проекции сил $\vec{P}$ и $\vec{N}$ на направление перемещения равны нулю, поэтому эти силы не совершают работу. Работа силы трения соответствует простейшему случаю вычисления работы и будет равна

$$A(\vec{T}) = -Ts = -fmgs.$$

Работа пары сил трения качения

Если тело катится по поверхности другого тела, то сопротивление движению складывается из силы трения скольжения $\vec{T}$ и пары сил трения качения с моментом $M_C = kN$, где N — величина нормальной реакции (нормального давления), k — коэффициент трения качения.

Пусть, например, круглый цилиндрический каток радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости (рис. 44). Вычислим работу пары сил с моментом M_C при перемещении катка на расстояние $O_1O = s$ (рис. 44,*а*).

Пару сил с моментом M_C представим силами $\vec{F}_c$ и $-\vec{F}_c$, равными по модулю M_C/R и приложенными в точках O и P соответственно (рис. 44,*б*). Так как при качении без скольжения точка опоры катка P является мгновенным центром скоростей, то сила $-\vec{F}_c$ при перемещении катка никакой работы не совершает (как сила, приложенная в неподвижной точке). Работу будет совершать только сила $\vec{F}_c$, и эта работа будет равна

$$A(\vec{F}_c) = -F_c s = -\frac{M_c}{R}s = -M_c\varphi.$$

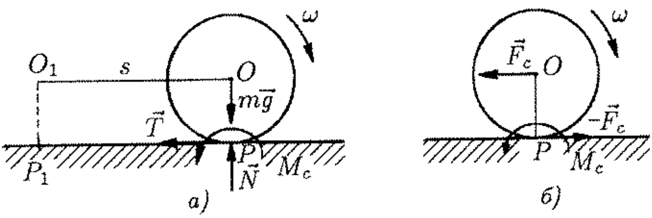


Рис. 44

Здесь φ — угол поворота катка (в радианах) при перемещении его центра на расстояние s.

Следовательно, этой же величине будет равна и работа пары сил трения качения:

$$A(M_c) = -M_c\varphi.$$

Потенциальные силы

В общем случае сила зависит от положения точки, ее скорости и времени:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t).$$

В отдельных случаях сила может зависеть только от части своих аргументов. В частности, существует класс сил, зависящих только от положения точки в пространстве. Это значит, что известны выражения

$$F_x = F_x(x, y, z); \quad F_y = F_y(x, y, z); \quad F_z = F_z(x, y, z),$$

определяющие проекции силы на координатные оси как функции координат точки.

Пространство или часть пространства, в каждой точке которых определен некоторый вектор, называется векторным полем. В зависимости от физического смысла вектора это может быть силовое поле, поле скоростей, поле ускорений и т.д. Задание силы, зависящей от положения точки, означает, что при помощи указанных равенств одновременно задается силовое поле.

Если в указанной области пространства существует функция $U = U(x, y, z)$, такая, что проекции силы $\vec{F}$ равны соответствующим частным производным этой функции —

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то сила $\vec{F}$ называется потенциальной силой, а функция U — силовой функцией. В задачах механики чаще используется функция $\Pi = -U(x, y, z)$, которая отличается от силовой функции только знаком и называется потенциальной энергией, или потенциалом силы $\vec{F}$. При помощи потенциальной энергии проекции потенциальной силы определяются равенствами:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Потенциальные силы обладают одним важным свойством — совершаемая ими работа определяется только начальным и конечным положениями точки и не зависит от способа перемещения (формы пути, закона движения) из одного положения в другое. Действительно, вычисляя работу потенциальной силы, находим:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -\int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{\partial \Pi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\,dz =$$

$$= -\int_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2.$$

В этой формуле $\Pi_1 = \Pi(x_1, y_1, z_1)$ — значение потенциальной энергии в начальном положении точки; $\Pi_2 = \Pi(x_2, y_2, z_2)$ — то же в конечном положении точки.

Важно заметить, что не всякая сила, зависящая от положения, является потенциальной. Для потенциальности требуется еще выполнение условий существования функции $\Pi = \Pi(x, y, z)$. Эти условия подробно рассматриваются в математике и сводятся к выполнению следующих трех равенств:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}.$$

Пример. К стержню OA (рис. 45) приложены три активные силы — вес стержня $\vec{G}$, упругая сила пружины $\vec{F}$ и постоянная по модулю сила $\vec{P}$, перпендикулярная к стержню. Определить, какие из этих сил потенциальны, а какие — нет. Жесткость пружины — c, натуральная длина пружины — a, длина стержня $OA = OB = L$.

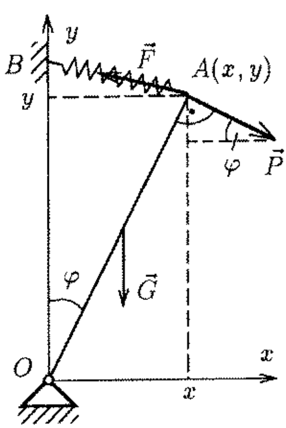


Рис. 45

Решение. Изображаем систему в произвольном положении, вводим декартову систему координат Oxy. Все силы лежат в плоскости Oxy, поэтому из условий потенциальности силы в данном случае остается только первое равенство $\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x$.

Проекции силы тяжести на выбранные оси равны: $G_x = 0$; $G_y = -G$. Имеем $\partial G_x/\partial y = 0$; $\partial G_y/\partial x = 0$. Следовательно, $\partial G_x/\partial y = \partial G_y/\partial x$, поэтому сила тяжести является потенциальной силой.

Аналогичным образом можно показать, что сила упругости пружины также является потенциальной силой.

Определяем проекции силы $\vec{P}$:

$$P_x = P\cos\varphi = P\frac{y}{L}; \quad P_y = -P\sin\varphi = -P\frac{x}{L}.$$

Находим нужные производные:

$$\frac{\partial P_x}{\partial y} = \frac{P}{L}; \quad \frac{\partial P_y}{\partial x} = -\frac{P}{L}.$$

Видно, что $\partial P_x/\partial y \neq \partial P_y/\partial x$, поэтому сила $\vec{P}$ не является потенциальной. Силы такого типа иногда называют следящими силами.

Вычисление потенциальной энергии

При исследовании движения механической системы с потенциальными силами вместо сил часто используется потенциальная энергия $\Pi = \Pi(x, y, z)$. Она может быть вычислена путем интегрирования уравнения в полных дифференциалах:

$$-d\Pi = F_x(x, y, z)\,dx + F_y(x, y, z)\,dy + F_z(x, y, z)\,dz.$$

Однако проще это сделать непосредственно, вычисляя работу силы.

Для этого сначала познакомимся с некоторыми новыми понятиями. Пусть $\Pi = \Pi(x, y, z)$ — потенциальная энергия силы, приложенной к точке M. Полагая

$$\Pi = \Pi(x, y, z) = C = \text{const},$$

получаем уравнение поверхности в пространстве $Oxyz$, которая называется поверхностью уровня (рис. 46). Поверхность уровня обладает следующим свойством: при движении точки по поверхности уровня потенциальная сила не совершает работы, так как для любых двух точек M_1 и M_2, принадлежащих этой поверхности, имеем $A_{M_1M_2} = \Pi(M_1) - \Pi(M_2) = C - C = 0$.

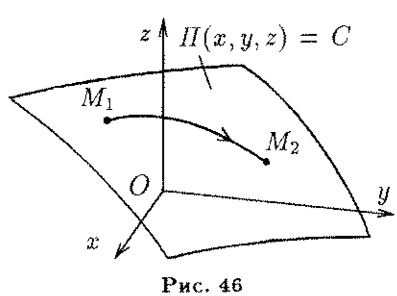


Рис. 46

Придавая постоянной C различные значения C_1, C_2, ..., получим семейство поверхностей (рис. 47). Все пространство оказывается как бы расслоенным поверхностями уровня. Выберем одну из них за поверхность нулевого уровня потенциальной энергии и

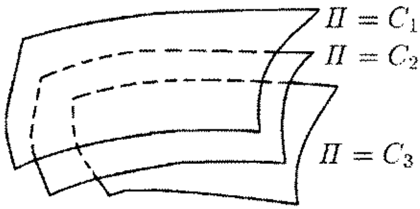


Рис. 47

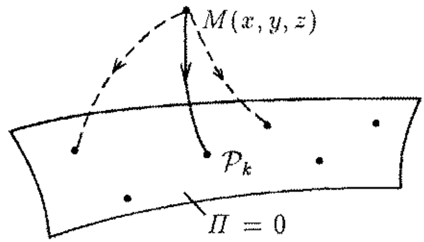


Рис. 48

подсчитаем работу, совершаемую потенциальной силой при перемещении точки M из данного положения $M(x, y, z)$ в какую-либо точку $\mathcal{P}_k$, принадлежащую нулевой поверхности уровня (рис. 48). Учитывая, что $\Pi(\mathcal{P}_k) = 0$, получаем

$$A_{M\mathcal{P}_k} = \Pi(M) - \Pi(\mathcal{P}_k) = \Pi(M) = \Pi(x, y, z).$$

Отсюда следует формула

$$\Pi(M) = \Pi(x, y, z) = A_{M\mathcal{P}_k}.$$

Тем самым устанавливается следующее правило для вычисления потенциальной энергии: *чтобы вычислить потенциальную энергию в данном положении точки $M(x, y, z)$, достаточно вычислить работу, совершаемую силой при перемещении точки M из этого положения в какую-либо точку, принадлежащую нулевой поверхности уровня потенциальной энергии* (см. рис. 48).

Пример 1. Для математического маятника (рис. 49) поверхностями уровня служат горизонтальные прямые aa, bb и т. д. Любая из них может быть принята за линию нулевого уровня потенциальной энергии. Примем в качестве таковой горизонталь, проходящую через точку подвеса O. Тогда для потенциальной энергии маятника получаем

$$\Pi = A_{MM_1} = -mgx.$$

Если за начало отсчета Π принять горизонталь, проходящую через положение равновесия маятника (точку M_2), потенциальная энергия будет иметь выражение

$$\Pi = A_{MM_2} = mg(\ell - x).$$

Пример 2. Пружинный маятник состоит из массы M, прикрепленной к неподвижной стенке при помощи пружины жесткости c, имеющей натуральную длину a (рис. 50). Поверхностями уровня в

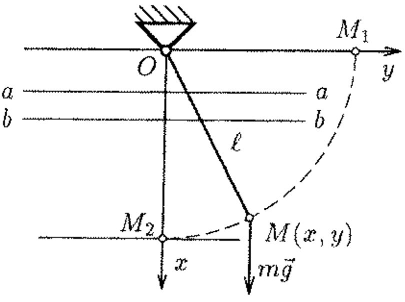


Рис. 49

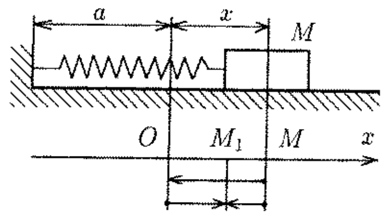


Рис. 50

данном случае являются точки оси x. Приняв за начало отсчета потенциальной энергии ее значение в положении равновесия ($x = 0$), для потенциальной энергии маятника в данном положении, определяемом координатой x, будем иметь

$$\Pi = A_{MO} = \frac{1}{2}c(\Delta\ell)^2 = \frac{1}{2}cx^2.$$

Если за нулевой уровень принять значение потенциальной энергии в некоторой точке M_1 с координатой x_1, то $\Pi(M)$ будет равна работе упругой силы пружины при переходе тела из положения M в положение M_1. При вычислении этой работы удобно воспользоваться свойством независимости работы потенциальной силы от формы пути и переход MM_1 осуществить так: вначале из положения M перейти в начало координат, далее из начала координат — в положение M_1 (см. рис. 50). В каждом из указанных переходов одно из крайних положений соответствует недеформированной пружине, и работа может быть вычислена по формуле $A = \pm c(\Delta\ell)^2/2$. На участке MO пружина разгружается, при этом совершается положительная работа $A_{MO} = cx^2/2$. При переходе OM_1 пружина нагружается, и работа упругой силы отрицательна: $A_{OM_1} = -cx_1^2/2$. В итоге для потенциальной энергии получаем

$$\Pi = A_{MM_1} = A_{MO} + A_{OM_1} = \frac{1}{2}c(x^2 - x_1^2).$$

На материальную точку могут действовать несколько сил, обладающих потенциалом. Тогда можно говорить также о потенциальной энергии материальной точки, понимая под ней сумму потенциальных энергий, соответствующих каждой силе. Понятие потенциальной энергии естественным образом обобщается и на случай механической системы, где принимает смысл суммы потенциальных энергий всех потенциальных сил, действующих на систему. При этом

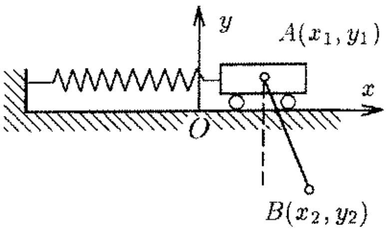


Рис. 51

потенциальная энергия в общем случае будет зависеть от координат всех точек системы:

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, \ldots, x_N, y_N, z_N),$$

а проекции потенциальных сил на координатные оси будут определяться по формулам:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}; \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}; \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Пример 3. Вычислить потенциальную энергию системы, состоящей из ползуна и прикрепленного к нему математического маятника (рис. 51). Масса ползуна — m_1, маса маятника — m_2, жесткость пружины — c.

Выберем систему координат Oxy, как показано на рис. 51. Ось y проходит через точку подвеса маятника A в положении равновесия системы. Вычисляем потенциальную энергию сил тяжести, приняв за нулевой уровень потенциальной энергии ось x:

$$\Pi_1 = m_1 g y_1; \quad \Pi_2 = m_2 g y_2.$$

Для потенциальной энергии Π_3 пружины, которую отсчитываем от значения при недеформированной пружине, будем иметь

$$\Pi_3 = \frac{1}{2} c x_1^2.$$

Потенциальная энергия всей системы определяется выражением

$$\Pi = \sum_{i=1}^{3} \Pi_i = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} c x_1^2.$$

Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетическая энергия механической системы — это сумма кинетических энергий всех ее материальных точек:

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \vec{v}_k^{\,2}}{2}.$$

Вычислим дифференциал от выражения кинетической энергии и выполним некоторые простые преобразования:

$$dT = d\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \vec{v}_k^{\,2}}{2}\right) = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot d\vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot d\vec{v}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i) \cdot d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k.$$

Опуская промежуточные значения и применяя ранее введенный для обозначения элементарной работы символ $d'A$, запишем:

$$dT = \sum_{k=1}^{N} d'A_k^e + \sum_{k=1}^{N} d'A_k^i.$$

Итак, *дифференциал кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на точки системы.* В этом и состоит содержание теоремы об изменении кинетической энергии.

Заметим, что сумма работ внутренних сил системы в общем случае не равна нулю. Она обращается в нуль только в некоторых частных случаях: когда системой служит абсолютно твердое тело; система абсолютно твердых тел, взаимодействующих при помощи недеформируемых элементов (идеальных шарниров, абсолютно твердых стержней, нерастяжимых нитей и т.п.). По этой причине теорема об изменении кинетической энергии является единственной из общих теорем динамики, которая учитывает эффект действия внутренних сил.

Можно интересоваться изменением кинетической энергии не за бесконечно малый промежуток времени, как это делается выше, а за некоторый конечный промежуток времени $[t_1, t_2]$. Тогда при помощи интегрирования можно получить:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{N} A_k^e + \sum_{k=1}^{N} A_k^i.$$

Здесь T_1, T_2 — значения кинетической энергии соответственно в моменты времени t_1, t_2, а $\sum\limits_{k=1}^{N} A_k^e$, $\sum\limits_{k=1}^{N} A_k^i$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ — суммы полных работ внешних и внутренних сил за рассматриваемый промежуток времени.

Полученное равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии в конечной (интегральной) форме, которая может быть сформулирована так: *изменение кинетической энергии при переходе механической системы из одного положения в другое равно сумме полных работ всех внешних и внутренних сил.*

Вычисление кинетической энергии твердого тела

Для решения задач при помощи теоремы об изменении кинетической энергии требуется умение вычислять кинетическую энергию и работу сил. Вычисление работы рассмотрено в предыдущих пунктах. Здесь рассмотрим вычисление кинетической энергии.

В общем случае кинетическая энергия системы вычисляется по формуле

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \vec{v}_k^{\,2}}{2}.$$

Если система состоит из нескольких (n) твердых тел, то кинетическая энергия будет равна сумме кинетических энергий отдельных тел: $T = \sum\limits_{i=1}^{n} T_i$.

Рассмотрим, как вычисляется кинетическая энергия тела в различных случаях движения. При этом будем исходить из общей формулы для кинетической энергии системы, в которой под m_k, $\vec{v}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) будем понимать теперь массы и скорости малых частиц тела, на которые мысленно разбивается движущееся тело.

При поступательном движении скорости всех точек тела геометрически равны: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \ldots = \vec{v}_N = \vec{v}$, и для вычисления кинетической энергии получаем формулу

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \vec{v}_k^{\,2}}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \vec{v}^{\,2}}{2} = \left(\sum_{k=1}^{N} m_k\right) \frac{\vec{v}^{\,2}}{2} = \frac{M v^2}{2}.$$

Так как

$$\vec{v}^{\,2} = \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cos 0 = v^2$$

(скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля), то в конечном результате содержится модуль v скорости $\vec{v}$ тела.

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении определяется так же, как для материальной точки с массой и скоростью, равными массе и скорости тела:

$$T = \frac{1}{2} M v^2.$$

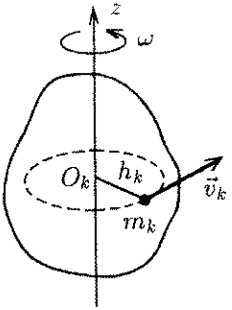


Рис. 52

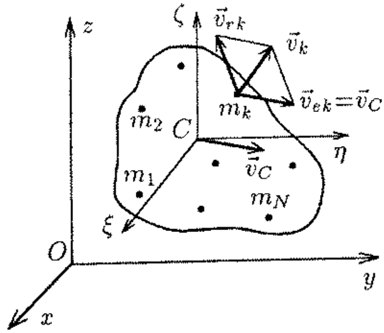


Рис. 53

При вращательном движении (рис. 52) будем иметь:

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k h_k^2 \omega^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 .$$

Получено правило: кинетическая энергия тела при его вращении вокруг неподвижной оси равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости.

При сложном движении тела кинетическую энергию вычисляют при помощи следующей теоремы (теоремы Кёнига): *кинетическая энергия механической системы равна кинетической энергии ее центра масс в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, плюс кинетическая энергия системы в ее относительном движении по отношению к осям Кёнига.*

Докажем эту теорему. Пусть скорости материальных точек системы относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ равны соответственно $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N$. Введем вспомогательную систему координат $C\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс системы C и осями, движущимися поступательно вместе с центром масс (рис. 53; на рисунке оси $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$ выбраны соответственно параллельными осям Ox, Oy, Oz). Как и для твердого тела (см. с. 56 и рис. 32) эти вспомогательные оси называются осями Кёнига. Теперь движение каждой точки системы можно рассматривать как движение сложное, в котором переносным является движение осей Кёнига, а относительным — движение точки по отношению к осям Кёнига. Для скоростей $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N$, являющихся абсолютными скоростями, на основании теоремы сложения скоростей можем записать:

$$\vec{v}_k = \vec{v}_{ek} + \vec{v}_{rk} = \vec{v}_C + \vec{v}_{rk} \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Здесь учтено, что при переносном поступательном движении переносные скорости всех точек одинаковы и равны скорости начала подвижной системы координат (в данном случае — скорости $\vec{v}_C$ центра масс). Подставляя это выражение в формулу для кинетической энергии системы, получаем:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k(\vec{v}_C + \vec{v}_{rk})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_C^2 + \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_C \cdot \vec{v}_{rk} + \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \vec{v}_{rk}^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} M v_C^2 + M\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{Cr} + T_r.$$

В этой формуле $T_r = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{m_k \vec{v}_{kr}^2}{2}$ — кинетическая энергия системы в относительном движении по отношению к осям Кёнига; $\vec{v}_{Cr}$ — относительная скорость центра масс по отношению к этим же осям. В силу выбора подвижных осей $\vec{v}_{Cr} = 0$, и из полученного равенства следует

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_r,$$

что и доказывает теорему.

При помощи теоремы Кёнига получим формулу для вычисления кинетической энергии *при плоскопараллельном движении*. Примем за полюс центр масс тела, оси Кёнига $C\xi$, $C\eta$ расположим в плоскости движения, ось $C\zeta$ — перпендикулярно этой плоскости. Тогда плоскопараллельное движение представится как сумма поступательного движения вместе с осями Кёнига (переносное движение) и вращения вокруг оси $C\zeta$ с угловой скоростью тела ω (относительное движение). Так как относительное движение вращательное, слагаемое T_r в формуле Кёнига определяется по формуле $T_r = J_{C\zeta}\omega^2/2$, где $J_{C\zeta}$ — момент инерции тела относительно оси Кёнига, перпендикулярной плоскости движения. После подстановки этого значения в формулу Кёнига, получаем

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_{C\zeta}\omega^2.$$

По этой формуле и следует вычислять кинетическую энергию тела при плоскопараллельном движении.

О решении задач при помощи теоремы об изменении кинетической энергии

При помощи теоремы об изменении кинетической энергии можно решать широкий круг задач динамики: определять скорости и ускорения точек системы, находить работу неизвестных внешних и внутренних сил, определять перемещения отдельных точек и тел, составлять дифференциальные уравнения движения и т.д.

При определении скоростей удобно пользоваться теоремой об изменении кинетической энергии в конечной форме. Пусть, например, требуется определить скорость оси катка массы m в момент, когда каток, двигаясь без скольжения по наклонной плоскости с углом наклона α, проходит путь длиной s. В начальный момент каток неподвижен, трение качения пренебрежительно мало (рис. 54).

Применим для катка теорему об изменении кинетической энергии при его перемещении из начального положения (ось катка занимает положение C_0) до рассматриваемого положения (ось занимает положение C, $C_0C = s$):

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{N} A_k^e + \sum_{k=1}^{N} A_k^i.$$

Обозначив скорость оси катка в рассматриваемом положении через v, для кинетической энергии T катка, совершающего плоскопараллельное движение, находим (r — радиус катка):

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2.$$

Начальное значение кинетической энергии T_0 равно нулю, так как в начале движения каток неподвижен.

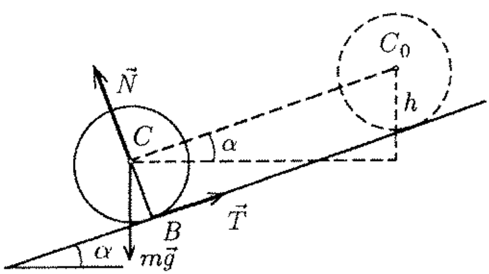


Рис. 54

Работа внутренних сил в абсолютно твердом теле равна нулю: $\sum\limits_{k=1}^{N} A_k^i = 0$. Внешние силы $\vec{N}$ и $\vec{T}$ также не совершают работу, так как в каждый момент они приложены к неподвижной точке — мгновенному центру скоростей, совпадающему при качении без скольжения с точкой опоры B. Работу совершает только вес катка $m\vec{g}$: $A(m\vec{g}) = mgh = mgs\sin\alpha$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N} A_k^e = A(m\vec{g}) = mgs\sin\alpha.$$

Подставляя найденные величины в выражение для изменения кинетической энергии, получаем:

$$\frac{3}{4}mv^2 = mgs\sin\alpha,$$

откуда находим

$$v = 2\sqrt{\frac{gs\sin\alpha}{3}}.$$

Если требуется найти ускорение a оси катка, то одно из полученных равенств следует продифференцировать по времени. Так, дифференцируя первое равенство, получаем:

$$\frac{3}{4}m \cdot 2v\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha\frac{ds}{dt}.$$

Так как $ds/dt = v$, отсюда, сокращая на mv, находим

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}g\sin\alpha.$$

Задачу можно решать и с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, записанной в дифференциальной форме. Тогда последовательность действий может быть такой.

Вначале вычисляем кинетическую энергию катка в данном положении, которое принимаем за текущее: $T = 3mv^2/4$. Далее подсчитываем элементарную работу сил на перемещении ds оси катка:

$$d'A = \sum_{k=1}^{N} d'A_k^e + \sum_{k=1}^{N} d'A_k^i = d'A(m\vec{g}) = mg\sin\alpha\, ds.$$

Вычисляем дифференциал кинетической энергии

$$dT = d\left(\frac{3}{4}mv^2\right) = \frac{3}{2}mv\,dv$$

и приравниваем элементарной работе:

$$\frac{3}{2}mv\,dv = mg\sin\alpha\,ds.$$

Разделив обе части этого равенства на dt и учитывая, что $ds/dt = v$, $dv/dt = a$, отсюда находим

$$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha.$$

Для определения скорости оси катка при таком варианте решения потребуется выполнить интегрирование. Для этого ускорение a представляем в виде $a = dv/dt = v\,dv/ds$, после чего последовательно находим:

$$v\frac{dv}{ds} = \frac{2}{3}g\sin\alpha; \quad v\,dv = \frac{2}{3}g\sin\alpha\,ds;$$

$$\int_0^v v\,dv = \frac{2}{3}g\sin\alpha\int_0^s ds; \quad \frac{v^2}{2}\bigg|_0^v = \frac{2}{3}g\sin\alpha\cdot s\bigg|_0^s;$$

$$v^2 = \frac{4}{3}g\sin\alpha\cdot s; \quad v = 2\sqrt{\frac{gs\sin\alpha}{3}}.$$

Пусть скорость оси катка в конце пути s нам известна $(v = v_1)$ и требуется определить постоянный момент трения качения M_c, который более не считается пренебрежимо малым. В этом случае сумма работ действующих сил включает в себя новое слагаемое — работу постоянного момента пары сил трения качения:

$$A(M_c) = -M_c\varphi = -M_c\frac{s}{r}.$$

Здесь M_c — момент трения качения, направленный противоположно направлению вращения (на рис. 54 не показан); φ — угол поворота катка, соответствующий его перемещению на величину s; r — радиус катка. Применяя теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме, получаем:

$$\frac{3}{4}mv_1^2 = mgs\sin\alpha - M_c\frac{s}{r}.$$

Отсюда для определения момента находим:

$$M_c = \left(mgs\sin\alpha - \frac{3}{4}mv_1^2\right)\frac{r}{s}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется работой силы? Поясните понятия элементарной и полной работы силы.

2. Как вычисляются работа силы тяжести, работа упругой силы пружины?

3. Какие силы называются потенциальными? Что называется силовой функцией? Потенциальной энергией?

4. Как вычисляется работа потенциальной силы?

5. Поясните определение потенциальной энергии через вычисление работы.

6. Что называется кинетической энергией механической системы? Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела при его поступательном и вращательном движениях?

7. Сформулируйте теорему Кёнига. Поясните способ вычисления при помощи теоремы Кёнига кинетической энергии тела при плоскопараллельном движении.

8. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы: 1) в дифференциальной форме; 2) в конечной форме.

9. Всегда ли равна нулю работа внутренних сил механической системы?

Упражнения

1. Однородный стержень OA длиной ℓ и массой m удерживается в горизонтальном положении нитью AB (рис. 55). В некоторый момент нить пережигают, и стержень приходит в движение, вращаясь без трения вокруг оси шарнира O. Определить угловую скорость стержня в зависимости от угла поворота φ.

2. При каком условии начнется движение стержня в предыдущей задаче, если в шарнире имеется трение с постоянным моментом $M_т$? Полагая это условие выполненным, найти угловую скорость стержня в этом случае.

3. К свободному концу цилиндрической пружины жесткости c, расположенной вертикально, присоединяют груз массы m и отпускают без начальной скорости (рис. 56). Определить наибольшее растяжение пружины.

4. Сплошному цилиндру массы m и радиуса R, расположенному на наклонной плоскости с углом наклона α, сообщают скорость центра $\vec{v}_0$, направленную вдоль плоскости вверх. Пренебрегая трением качения, найти путь, пройденный цилиндром до остановки, если качение происходит без скольжения.

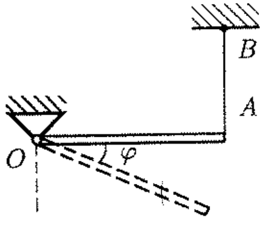


Рис. 55

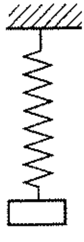


Рис. 56

5. Решить предыдущую задачу при наличии трения качения с коэффициентом k.

6. В примерах 4 и 5 найти скорость оси цилиндра в момент возврата снова в начальное положение.

7. Решить в указанном порядке следующие задачи из сборника И.В. Мещерского 1981 г. издания: 38.1; 38.3; 38.20; 30.28; 38.30.

Общие принципы механики

Лекция 18
Принцип Даламбера и метод кинетостатики

В предыдущих лекциях рассматривались способы решения задач динамики, основанные на законах Ньютона. В теоретической механике разработаны и другие способы решения динамических задач, в основе которых лежат некоторые иные исходные положения, называемые *принципами механики*.

Важнейшим из принципов механики является *принцип Даламбера*. С принципом Даламбера тесно связан *метод кинетостатики* — способ решения задач динамики, в котором динамические уравнения записываются в форме уравнений равновесия. Метод кинетостатики широко применяется в таких общеинженерных дисциплинах, как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, в других областях прикладной механики. Принцип Даламбера результативно используется и внутри самой теоретической механики, где с его помощью созданы эффективные способы решения задач динамики.

Принцип Даламбера для материальной точки

Пусть материальная точка массы m совершает несвободное движение относительно инерциальной системы координат $Oxyz$ под действием активной силы $\vec{F}^a$ и реакции связи $\vec{R}$ (рис. 57).

Определим вектор

$$\vec{F}^{и} = -m\vec{a},$$

численно равный произведению массы точки на ее ускорение и направленный противоположно вектору ускорения. Вектор $\vec{F}^{и}$ имеет размерность силы и называется *силой инерции* (даламберовой) материальной точки.

Принцип Даламбера для материальной точки сводится к следующему утверждению: *если к силам, действующим на материальную точку, условно присоединить силу инерции точки, то получим уравновешенную систему сил*, т. е.

$$(\vec{F}^a, \vec{R}, \vec{F}^{и}) \sim 0.$$

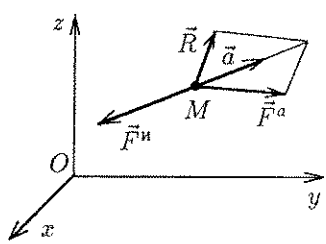


Рис. 57

Вспоминая из статики условие равновесия сходящихся сил, принцип Даламбера можем записать также в следующей форме:

$$\vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}^и = 0.$$

Легко видеть, что принцип Даламбера эквивалентен основному уравнению динамики, и наоборот, из основного уравнения динамики следует принцип Даламбера. Действительно, перенося в последнем равенстве вектор $\vec{F}^и$ в другую часть равенства и заменяя $-\vec{F}^и$ на $m\vec{a}$, получаем основное уравнение динамики. Наоборот, перенося в основном уравнении динамики член $m\vec{a}$ в одну сторону с силами и используя обозначение $-m\vec{a} = \vec{F}^и$, получаем запись принципа Даламбера.

Принцип Даламбера для материальной точки, будучи вполне эквивалентным основному закону динамики, выражает этот закон в совершенно иной форме — в форме уравнения статики. Это дает возможность пользоваться при составлении уравнений динамики методами статики, что и называется методом кинетостатики.

Метод кинетостатики особенно удобен при решении первой задачи динамики.

Пример. Из наивысшей точки гладкого сферического купола радиуса R соскальзывает материальная точка M массы m с пренебрежимо малой начальной скоростью (рис. 58). Определить, в каком месте точка сойдет с купола.

Решение. Точка будет двигаться по дуге некоторого меридиана M_0L. Пусть в некоторый (текущий) момент радиус OM составляет с вертикалью угол φ. Раскладывая ускорение точки $\vec{a}$ на касательное ($\vec{a}_\tau$) и нормальное ($\vec{a}_n$), представим силу инерции точки также в виде суммы двух составляющих:

$$\vec{F}^и = \vec{F}^и_\tau + \vec{F}^и_n.$$

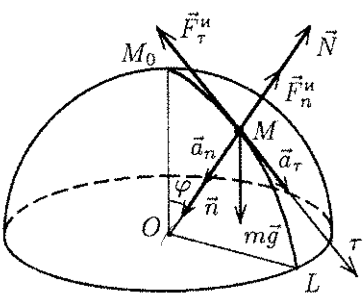


Рис. 58

Касательная составляющая силы инерции имеет модуль $F^и_\tau = m\,dv/dt$ и направлена противоположно касательному ускорению, нормальная составляющая — модуль mv^2/R и направлена противоположно нормальному ускорению. Добавляя эти силы к фактически действующим на точку активной силе $m\vec{g}$ и реакции купола

$\vec{N}$, составляем уравнение кинетостатики

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}^{и}_{\tau} + \vec{F}^{и}_{n} = 0.$$

Проектируя это векторное уравнение на направления касательной и главной нормали, получаем два уравнения кинетостатики в скалярной форме:

$$\sum F_\tau = 0: \quad mg\sin\varphi - m\frac{dv}{dt} = 0;$$

$$\sum F_n = 0: \quad mg\cos\varphi - N - \frac{mv^2}{R} = 0.$$

Из второго уравнения находим

$$N = mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{R}.$$

Реакция N окончательно найдется после того, как будет определена величина v и подставлена в это выражение.

Для определения v служит первое уравнение, которое является дифференциальным уравненим и требует интегрирования. Однако можно избежать интегрирования, если воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии. Применяя эту теорему для точки M на участке траектории M_0M и учитывая, что $T = mv^2/2$, $T_0 = mv_0^2/2 = 0$, $A = mgR(1 - \cos\varphi)$ (работу совершает только сила тяжести), получаем:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos\varphi).$$

Отсюда находим

$$\frac{mv^2}{R} = 2mg(1 - \cos\varphi),$$

и далее

$$N = mg(3\cos\varphi - 2).$$

В момент отделения от купола реакция N равна нулю. Следовательно, точка сойдет с купола при

$$\varphi = \varphi_* = \arccos\frac{2}{3} = 48°10'.$$

Принцип Даламбера для механической системы

В случае механической системы уравнение кинетостатики можно написать для каждой материальной точки системы:

$$\vec{F}_1^a + \vec{R}_1 + \vec{F}_1^{и} = 0;$$
$$\vec{F}_2^a + \vec{R}_2 + \vec{F}_2^{и} = 0;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{F}_N^a + \vec{R}_N + \vec{F}_N^{и} = 0.$$

В этих уравнениях $\vec{F}_1^a, \vec{F}_2^a, \ldots, \vec{F}_N^a$; $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \ldots, \vec{R}_N$ — соответственно равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к точкам системы; $\vec{F}_1^{и} = -m_1\vec{a}_1$, $\vec{F}_2^{и} = -m_2\vec{a}_2, \ldots$, $\vec{F}_N^{и} = -m_N\vec{a}_N$ — силы инерции точек. Эти N векторных равенств выражают принцип Даламбера для механической системы: *если к материальным точкам движущейся механической системы, кроме фактически действующих на них активных сил и реакций связей, условно приложить также силы инерции точек, то получим уравновешенную систему сил, к которой можно применять все уравнения статики.*

При решении задач динамики системы при помощи принципа Даламбера используются следствия написанных уравнений, называемые *основными уравнениями кинетостатики*. Они имеют вид

$$\vec{F}^a + \vec{F}^R + \vec{F}^{и} = 0;$$
$$\vec{M}_O^a + \vec{M}_O^R + \vec{M}_O^{и} = 0$$

и выражают равенство нулю главного вектора и главного момента всех активных сил, реакций связей и сил инерции механической системы, образующих, согласно принципу Даламбера, уравновешенную систему сил. В этих уравнениях величины

$$\vec{F}^a = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a; \quad \vec{F}^R = \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k; \quad \vec{F}^{и} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{и}$$

обозначают главные векторы соответственно активных сил, реакций связей и сил инерции, а величины

$$\vec{M}_O^a = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{F}_k^a); \quad \vec{M}_O^R = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{R}_k); \quad \vec{M}_O^{и} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{F}_k^{и})$$

— главные моменты этих групп сил относительно выбранного центра приведения O.

Проектируя эти два векторных уравнения на подходящим образом выбранные координатные оси, получим шесть основных уравнений метода кинетостатики в скалярной форме:

$$F_x^a + F_x^R + F_x^и = 0;$$
$$F_y^a + F_y^R + F_y^и = 0;$$
$$F_z^a + F_z^R + F_z^и = 0;$$
$$M_{Ox}^a + M_{Ox}^R + M_{Ox}^и = 0;$$
$$M_{Oy}^a + M_{Oy}^R + M_{Oy}^и = 0;$$
$$M_{Oz}^a + M_{Oz}^R + M_{Oz}^и = 0.$$

Эти уравнения и составляются при решении задач при помощи принципа Даламбера.

Определение главного вектора и главного момента сил инерции твердого тела

При пользовании методом кинетостатики для твердого тела величины $\vec{F}^a$, $\vec{F}^R$, $\vec{M}_O^a$, $\vec{M}_O^R$ вычисляются обычным образом, т. е. путем непосредственного суммирования соответствующих сил и их векторных моментов. Что же касается величин $\vec{F}^и$ и $\vec{M}_O^и$, то они вычисляются по специальным формулам. Это связано с тем, что сил инерции в твердом теле бесконечно много, и непосредственное суммирование становится невозможным.

Формула для вычисления главного вектора сил инерции весьма проста:

$$\vec{F}^и = -m\vec{a}_C,$$

т. е. *главный вектор сил инерции твердого тела численно равен произведению массы тела на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.* Действительно, используя определение главного вектора сил инерции и выполняя простые преобразования, находим:

$$\vec{F}^и = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^и = \sum_{k=1}^{N} -m_k\vec{a}_k = -\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} =$$
$$= -\frac{d^2}{dt^2}\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{r}_k = -\frac{d^2}{dt^2}(m\vec{r}_C) = -m\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = -m\vec{a}_C.$$

Для главного момента сил инерции аналогичным образом получаем формулу

$$\vec{M}_O^{\text{и}} = -\frac{d\vec{K}_O}{dt},$$

где $\vec{K}_O$ — кинетический момент тела относительно центра O. Действительно:

$$\vec{M}_O^{\text{и}} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{F}_k^{\text{и}}) = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\text{и}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times (-m_k \vec{a}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \left(-m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = -\frac{d\vec{K}_O}{dt}.$$

Таким образом, *главный момент сил инерции твердого тела относительно данного неподвижного центра O равен и противоположно направлен производной по времени от кинетического момента тела относительно этого же центра.*

Подчеркнем, что в этой формуле центр приведения O полагается неподвижным. Для подвижного центра приведения формула сохраняется только в том случае, если таким центром является центр масс тела C. Для произвольного подвижного центра формула теряет силу.

Рассмотрим отдельно основные случаи движения тела — поступательное, вращательное и плоскопараллельное.

Тело движется поступательно с ускорением $\vec{a}$

Принимая за центр приведения сил инерции центр масс C и учитывая, что $\vec{a}_C = \vec{a}$, получаем:

$$\vec{F}^{\text{и}} = -m\vec{a}; \quad \vec{M}_C^{\text{и}} = 0.$$

Последнее равенство обусловлено тем, что при поступательном движении тело не движется относительно осей Кёнига, его кинетический момент $\vec{K}_C$ в любой момент равен нулю, поэтому равна нулю и его производная $d\vec{K}_C/dt = -\vec{M}_C^{\text{и}}$.

Равенство $\vec{M}_C^{\text{и}} = 0$ можно получить и из формулы $\vec{M}_C^{\text{и}} = \sum\limits_{k=1}^{N} M_C(\vec{F}_k^{\text{и}})$, определяющей само понятие главного момента сил инерции тела относительно центра C. Действительно, пусть $\vec{\rho}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ — радиусы-векторы материальных точек тела,

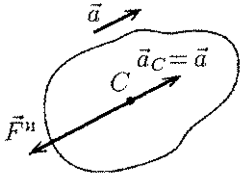


Рис. 59

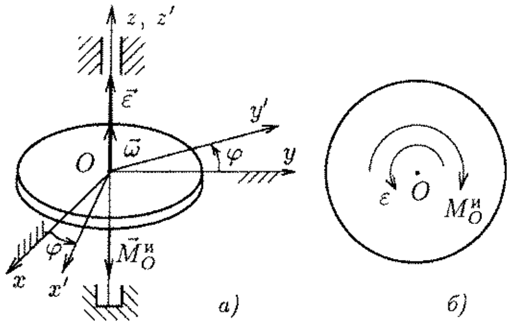


Рис. 60

проведенные из центра масс C. Тогда для главного момента $\vec M_C^{\text{и}}$ можем записать

$$\vec M_C^{\text{и}} = \sum_{k=1}^{N} M_C(\vec F_k^{\text{и}}) = \sum_{k=1}^{N} \vec\rho_k \times (-m_k \vec a_k) = -\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \vec\rho_k\right) \times \vec a = -m\vec\rho_C \times \vec a.$$

Здесь учтен поступательный характер движения тела ($\vec a_1 = \vec a_2 = \ldots = \vec a_N = \vec a$) и использована формула для радиуса-вектора центра масс относительно начала отсчета C

$$\vec\rho_C = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec\rho_k .$$

Но $\vec\rho_C = 0$ (как радиус-вектор точки C относительно самой себя), поэтому и $M_C^{\text{и}} = 0$. Таким образом, приводя силы инерции к центру масс тела, мы пришли к случаю приведения сил, когда главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю. Вспоминая статику, можем сформулировать следующий вывод: *при поступательном движении тела силы инерции точек тела приводятся к одной силе — равнодействующей. Эта равнодействующая приложена в центре масс тела и равна главному вектору сил инерции* $\vec F^{\text{и}} = -m\vec a$ (рис. 59).

Тело совершает вращательное движение

Пусть статически и динамически уравновешенное тело вращается вокруг своей оси симметрии Oz, имея угловую скорость $\vec\omega(0, 0, \omega_z)$ и угловое ускорение $\vec\varepsilon(0, 0, \varepsilon_z)$, $\omega_z = \dot\varphi$, $\varepsilon_z = \dot\omega_z = \ddot\varphi$ (рис. 60).

Кинетический момент тела относительно неподвижной точки O будет равен

$$\vec K_O = (-J_{xz}\omega_z)\vec i + (-J_{yz}\omega_z)\vec j + (J_z\omega_z)\vec k = J_z\omega_z\vec k = J_z\vec\omega,$$

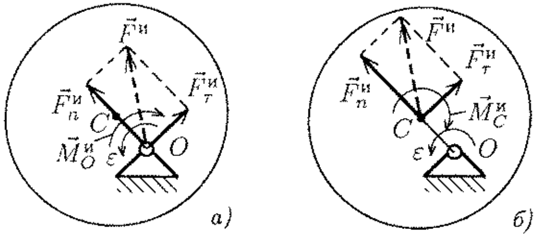


Рис. 61

так как для статически и динамически уравновешенного тела $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Для главного момента сил инерции относительно точки O получаем:

$$\vec M_O^{и} = -\frac{d\vec K_O}{dt} = -J_z\frac{d\vec\omega}{dt} = -J_z\vec\varepsilon.$$

Главный вектор сил инерции $\vec F^{и} = -m\vec a_C = 0$, потому что центр масс уравновешенного тела лежит на оси вращения.

Так как главный вектор сил инерции равен нулю, а главный момент отличен от нуля, то силы инерции тела приводятся к паре сил с моментом $\vec M_O^{и}$. Из выражения $\vec M_O^{и} = -J_z\vec\varepsilon$ следует, что эта пара действует в плоскости, перпендикулярной оси вращения, а ее момент равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение и направлен против углового ускорения (см. рис. 60,*а*,*б*; на рис. 60,*б* векторы $\vec\varepsilon$, $\vec M_O^{и}$, допускающие в данном случае алгебраическое представление, показаны круговыми стрелками).

Если симметричное тело вращается вокруг оси, смещенной относительно оси симметрии на величину $OC = e$ (установлено с эксцентриситетом e), то главный вектор сил инерции $\vec F^{и}$ будет отличен от нуля. Этот случай показан на рис. 61,*а*,*б*. В первом случае за центр приведения сил инерции принята точка O на оси вращения, во втором — центр масс C тела. Главный вектор сил инерции, представленный для удобства в виде суммы касательной и нормальной составляющих, не зависит от выбора центра приведения и в обоих случаях определяется формулами:

$$F_\tau^{и} = ma_C^\tau = me\varepsilon; \quad F_n^{и} = ma_C^n = me\omega^2,$$

где m — масса тела. Формулы для главного момента, зависящего от выбора центра приведения, будут различны, а именно:

$$M_O^{и} = J_O\varepsilon; \quad M_C^{и} = J_C\varepsilon.$$

Тело совершает плоскопараллельное движение

Пусть тело, имеющее плоскость материальной симметрии, совершает плоскопараллельное движение параллельно этой плоскости. Приводя силы инерции частиц тела к центру масс, получаем главный вектор $\vec{F}^{\text{и}} = -m\vec{a}_C$ и главный момент $\vec{M}_C^{\text{и}} = -d\vec{K}_{Cr}/dt = -J_C\vec{\varepsilon}$, где J_C — момент инерции тела относительно оси Cz', проходящей через центр масс и перпендикулярной к плоскости движения. Сила $\vec{F}^{\text{и}}$ и пара с моментом $\vec{M}_C^{\text{и}}$ действуют в плоскости движения, имеют модули $F^{\text{и}} = ma_C$, $M_C^{\text{и}} = J_C\varepsilon$ и направления, противоположные направлениям ускорения центра масс и углового ускорения тела соответственно (рис. 62).

Пример. Груз массы m_2 поднимается на тросе лебедкой, к барабану которой приложена пара сил с моментом $M_{\text{д}}$ (рис. 63). Найти ускорение груза и натяжение троса, если барабан можно считать однородным круглым цилиндром с радиусом R и массой m_1. Массой троса и сопротивлением вращению барабана пренебречь.

Решение. Расчленим систему на отдельные тела и для каждого тела составим уравнения кинетостатики.

К барабану приложены пара с моментом $M_{\text{д}}$ и вес $m_1\vec{g}$ (активные силы), реакции $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ шарнира O и натяжение троса $\vec{T}_1$. Силы инерции приводятся к паре с моментом $M_O^{\text{и}}$, направленным против углового ускорения барабана ε. Эти силы образуют плоскую произвольную систему сил, поэтому можем составить для барабана три уравнения кинетостатики. Так как реакции $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ по условию задачи находить не требуется, составим только уравнение моментов относительно точки O:

$$\sum M_O = 0: \quad M_{\text{д}} - M_O^{\text{и}} - T_1 R = 0.$$

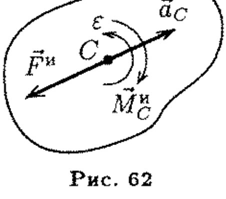


Рис. 62

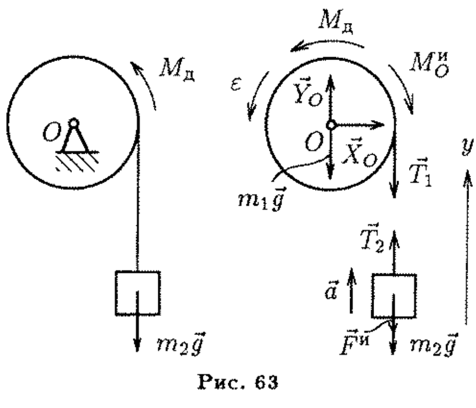


Рис. 63

К грузу приложены собственный вес $m_2\vec{g}$ и натяжение троса $\vec{T}_2$. Силы инерции материальных точек груза, движущегося поступательно, приводятся к одной силе $\vec{F}^{\text{и}}$, направленной против ускорения груза $\vec{a}$. Проектируя эти силы на ось y, составляем уравнение кинетостатики для груза:

$$\sum F_y = 0: \quad T_2 - m_2 g - F^{\text{и}} = 0.$$

Входящие в составленные уравнения главный момент сил инерции барабана и главный вектор сил инерции груза определяются так:

$$M_O^{\text{и}} = J_O\varepsilon = \frac{m_1 R^2}{2}\frac{a}{R} = \frac{1}{2}m_1 a R; \quad F^{\text{и}} = m_2 a.$$

Подставляя эти значения в уравнения и учитывая, что на основе равенства действия и противодействия $T_1 = T_2 = T$, получаем два уравнения с двумя неизвестными $(a,\ T)$:

$$M_{\text{д}} - \frac{1}{2}m_1 a R - TR = 0;$$
$$T - m_2 g - m_2 a = 0.$$

Решая их, находим

$$a = \frac{2(M_{\text{д}} - m_2 g R)}{R(m_1 + 2m_2)}; \quad T = \frac{(2M_{\text{д}} + m_1 g R)m_2}{R(m_1 + 2m_2)}.$$

Задачу можно было решать и несколько по-другому. Можно было сначала составить уравнение моментов относительно точки O для всей системы, что позволило бы сразу получить уравнение для определения ускорения груза (реакции нити, будучи для системы в целом внутренними силами, в это уравнение не войдут). Определив ускорение, далее можно найти и реакцию троса, составив уравнение кинетостатики для одного из тел.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется силой инерции материальной точки?

2. Дайте словесную формулировку и математическую запись принципа Даламбера для материальной точки.

3. Как формулируется принцип Даламбера для механической системы?

4. В чем состоит метод кинетостатики?

5. Запишите и поясните основные уравнения метода кинетостатики для механической системы.

6. Выведите формулы для вычисления главного вектора и главного момента сил инерции твердого тела.

7. К чему приводятся силы инерции твердого тела при его поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях?

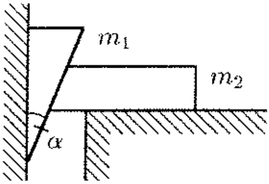


Рис. 64

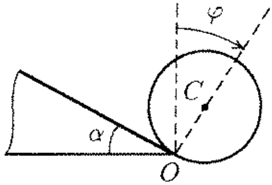


Рис. 65

Упражнения

1. Решить следующие задачи из сборника И.В. Мещерского 1981 г. издания: 26.2; 26.9; 31.25; 41.11; 41.17.

2. Две тяжелые призмы с массами m_1 и m_2, соприкасающиеся своими наклонными гранями, предоставленные себе, начинают двигаться под действием сил тяжести. Пренебрегая силами трения и считая угол α заданным, найти ускорения призм (рис. 64).

3. Круглое цилиндрическое бревно массы m и радиуса R падает с наклонной площадки сортировочного конвейера, вращаясь вокруг неподвижной опорной образующей O (рис. 65). Считая, что угол α задан, а угловая скорость бревна при $\varphi = \varphi_0 = \alpha$ ничтожна мала и сопротивление вращению отсутствует, найти угол φ и угловую скорость бревна в момент схода с конвейера.

Лекция 19

Принцип возможных перемещений

Механическая система может находиться под действием приложенных сил в состоянии равновесия.

Механическая система находится в равновесии относительно данной системы отсчета $Oxyz$, если скорости и ускорения ее материальных точек относительно этой системы отсчета одновременно равны нулю: $\vec{v}_k = 0$, $\vec{a}_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

Принцип возможных перемещений представляет собой некоторое общее правило, выражающее необходимое и достаточное условие равновесия для произвольной механической системы (напомним: в статике необходимые и достаточные условия равновесия устанавливаются только для твердого тела). Прежде чем сформулировать это правило, рассмотрим некоторые новые понятия.

Возможные перемещения

Будем рассматривать несвободную механическую систему. Наличие связей, характерное для несвободной системы, выражается в том, что к точкам системы, кроме активных сил, прикладываются дополнительные силы от действия связей — реакции связей. Однако наличие связей выражается и в другом — материальные точки

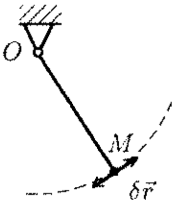


Рис. 66

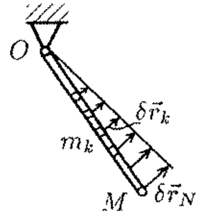


Рис. 67

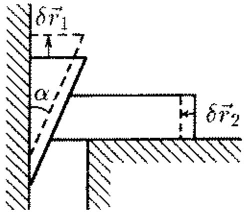


Рис. 68

несвободной системы не могут получать любые перемещения в пространстве. Они могут иметь только такие перемещения (и скорости), которые согласуются с наложенными связями или, иначе, происходят без нарушения связей. Для выделения таких перемещений вводится специальный термин — возможные (или виртуальные) перемещения.

Возможным перемещением механической системы называется любая совокупность (множество) бесконечно малых перемещений ее материальных точек, допускаемая в данный момент времени всеми наложенными на систему связями.

Примеры.

Возможным перемещением материальной точки M, связанной с неподвижной точкой O невесомым стержнем OM, служит бесконечно малый вектор $\delta\vec{r}$, перпендикулярный стержню (рис. 66). Сторона направления не имеет значения.

Для материального стержня OM (рис. 67) возможное перемещение суть множество векторов $\delta\vec{r}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, перпендикулярных стержню и направленных в ту или противоположную сторону.

Для механической системы, показанной на рис. 68, возможное перемещение задается бесконечно малыми векторами $\delta\vec{r}_1$, $\delta\vec{r}_2$, связанными соотношением $\delta r_2 = \delta r_1 \operatorname{tg}\alpha$ и направленными как показано на рисунке или в соответственно противоположные стороны.

Возможные перемещения следует отличать от бесконечно малых перемещений, которые получают точки системы в ее действительном движении, т. е. в движении, которое фактически совершается системой под действием приложенных сил и при заданных начальных условиях. Действительное бесконечно малое перемещение системы выражается дифференциалами $d\vec{r}_1 = \vec{v}_1\,dt$, $d\vec{r}_2 = \vec{v}_2\,dt, \ldots$, $d\vec{r}_N = \vec{v}_N\,dt$ и обусловлено приращением dt времени t. Возможное же перемещение определяется при фиксировании времени — время считается остановленным, а точкам системы предоставляется возможность перемещаться независимо от времени, сообразуясь только с наложенными связями. Это чисто воображаемое перемещение, не совершаемое в действительности системой. Чтобы подчеркнуть это различие, для дифференциалов, соответствующих возможным перемещениям, вводится вместо d обозначение δ: $\delta\vec{r}_1$, $\delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_N$.

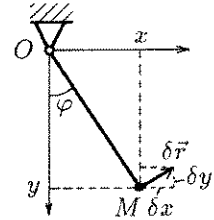


Рис. 69

Возможные перемещения можно задавать, указывая проекции векторов $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_N$ на неподвижные координатные оси $Oxyz$: δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, $\delta z_2, \ldots, \delta x_N$, δy_N, δz_N, называемые вариациями координат. При этом не все вариации можно выбирать свободно — часть из них будут величинами зависимыми и должны выбираться из условия сохранения связей. Например, для математического маятника, показанного на рис. 66, из проекций δx, δy возможного перемещения $\delta\vec{r}$ независима только одна. Выбрав за независимую вариацию δx, вариацию δy мы должны выбирать из условия выполнения связи, т. е. равной $\delta y = -\delta x \operatorname{tg}\varphi = -x\,\delta x/y$ (рис. 69).

Зависимость между вариациями координат при возможном перемещении системы можно находить при помощи уравнений связей. Например, связь, наложенная на математический маятник (рис. 69), состоит в том, что материальная точка M принуждена все время находиться на окружности радиуса $OM = \ell$ с центром в шарнире O.

Координаты точки удовлетворяют при этом уравнению окружности

$$x^2 + y^2 = \ell^2,$$

которое выражает условие связи в математической форме и называется *уравнением связи*. Вычисляя дифференциалы от обеих частей уравнения связи, получаем условие, накладываемое связью на вариации координат:

$$x\,\delta x + y\,\delta y = 0.$$

Выбирая одну из вариаций δx, δy за независимую, вторую вариацию находим из этого уравнения.

Вариации координат можно выражать через промежуточные величины (параметры). Например, для математического маятника (рис. 69), выбрав за параметр угол φ, для координат точки M получаем

$$x = \ell\sin\varphi; \quad y = \ell\cos\varphi.$$

Вычисляя дифференциалы, находим вариации координат:

$$\delta x = \ell\cos\varphi\,\delta\varphi; \quad \delta y = -\ell\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

При таком способе действий уравнение связи также используется, только выражается оно в параметрической форме (уравнения

$x = \ell \sin\varphi$, $y = \cos\varphi$ служат параметрическими уравнениями нашей окружности).

Уравнения связей. Классификация связей по виду их уравнений

Связи можно выражать при помощи уравнений. Так, связь, накладываемая на математический маятник M стержнем длиной ℓ (см. рис. 69), выражается уравнением $x^2 + y^2 = \ell^2$, где x, y — координаты точки M. Если вместо стержня будет такой же длины гибкая невесомая нить, то уравнение связи приобретает вид неравенства

$$x^2 + y^2 \leqslant \ell^2,$$

так как в этом случае точка M может находиться как на окружности, так и внутри нее.

Если вместо цилиндрического шарнира в точке O имеем сферический шарнир, материальная точка M становится пространственным маятником, а уравнение связи будет

$$x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$$

в случае стержня и

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \ell^2$$

в случае нити.

Пусть длина нити OM изменяется с течением времени по заданному закону $OM = \ell(t)$. Тогда в уравнение связи в качестве одной из переменных будет входить также время t. Например, если нить втягивается в кольцо O с постоянной по величине скоростью V (рис. 70,*а*) и в момент $t = 0$ имеет длину ℓ_0, то уравнение связи имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant (\ell_0 - Vt)^2.$$

В общем случае в уравнение связи могут входить координаты всех материальных точек системы и время t, т. е. уравнение связи в общем виде имеет выражение

$$f_j(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_N, y_N, z_N, t) \geqslant 0.$$

Наличие индекса j ($j = 1, 2, \ldots, s$) указывает, что на систему может быть наложена не одна, а одновременно несколько связей.

По виду своих уравнений связи подразделяются на удерживающие и неудерживающие, стационарные и нестационарные. Связь называется *удерживающей* или *двусторонней*, если ее уравнение имеет вид строгого равенства. Такова связь в математическом маятнике в случае закрепления при помощи стержня. Другой пример дают

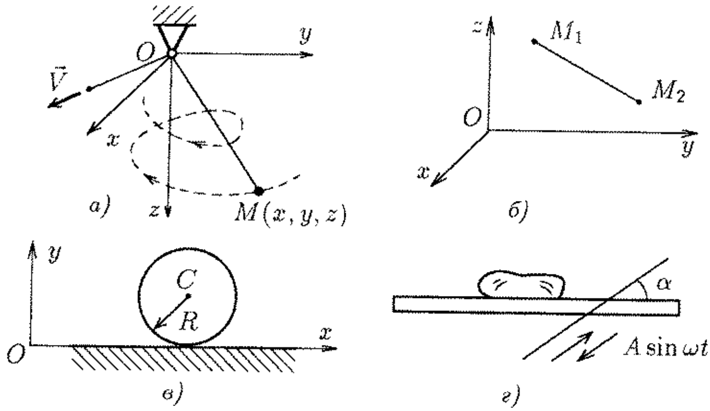


Рис. 70

две материальные точки M_1, M_2, соединенные между собой невесомым жестким стержнем длиной ℓ (рис. 70,*б*). Условие связи состоит в неизменности расстояния между точками и выражается при помощи уравнения

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \ell^2.$$

Если уравнение связи имеет вид равенства–неравенства, то связь называется *неудерживающей* или *односторонней*. Примером системы с неудерживающей связью служит математический маятник в случае закрепления при помощи нити. Такова же связь, накладываемая на катящееся колесо опорной плоскостью (рис. 70,*в*), описываемая уравнением

$$y_C - R \geqslant 0.$$

Связь (удерживающая или неудерживающая) называется *стационарной*, если в ее уравнение время t не входит явным образом. В противном случае связь называется *нестационарной* или *реономной*. Примерами систем с реономными связями служат математический маятник, длина которого изменяется заданным образом во времени; тело на подвижной опоре, совершающей заданное движение (например, гармоническую вибрацию $A\sin\omega t$ (рис. 70,*г*) и т.д.

Связи идеальные и неидеальные

Вначале введем понятие возможной работы.

Зафиксируем некоторый момент времени t. Пусть $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2, \ldots$, $\vec{r}_N$ — радиусы векторы материальных точек системы в этот момент, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2, \ldots$, $\vec{F}_N$ — действующие силы. Сообщим системе в этом ее положении возможное перемещение $\delta\vec{r}_1$, $\delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_N$ и вычислим сумму элементарных работ приложенных сил:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \vec{F}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 + \ldots + \vec{F}_N \cdot \delta\vec{r}_N.$$

Сумма элементарных работ приложенных сил на возможном перемещении системы, называется возможной работой.

Возможную работу можно вычислять для отдельных групп сил, например для активных сил, для внутренних сил и т.д. Например, возможная работа реакций связей будет определяться выражением

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k.$$

На практике часто оказывается, что возможная работа реакций связей мала по сравнению с возможной работой других сил и ею можно пренебречь. Это служит основанием для введения понятия идеальной связи.

Связь называется идеальной, если возможная работа реакций связи равна нулю. В противном случае связь называется *неидеальной*.

Одним из примеров идеальной связи является невесомый стержень, соединяющий две материальные точки M_1 и M_2 (см. рис. 70,*б*). Чтобы убедиться в этом, изобразим реакции стержня $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ ($\vec{R}_2 = -\vec{R}_1$) и вычислим их возможную работу (рис. 71):

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^{2} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \vec{R}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 = R_1 \delta r_1 \cos\alpha_1 + R_2 \delta r_2 \cos(\pi - \alpha_2).$$

Так как $R_2 = R_1$ и $\delta r_1 \cos\alpha_1 = \delta r_2 \cos\alpha_2$ (следует из равенства проекций скоростей концов стержня на направление стержня), отсюда получаем: $\delta A^R = 0$.

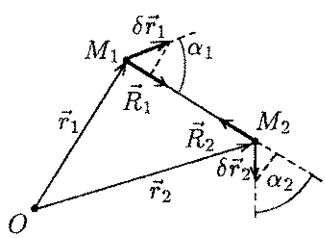


Рис. 71

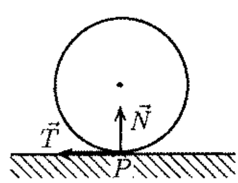


Рис. 72

Другими примерами идеальных связей являются: гладкие (без трения) плоскость и поверхность, гладкие цилиндрический и сферический шарниры, невесомая нерастяжимая нить и т.п. Идеальными могут быть не только гладкие связи, но в некоторых случаях и связи с трением. Например, шероховатая поверхность по отношению к твердому телу, катящемуся по ней без проскальзывания, является идеальной связью, если трение качения отсутствует (рис. 72). Действительно, вычисляя возможную работу реакций $\vec{N}$ (нормальная реакция) и $\vec{T}$ (сила трения скольжения), получаем

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^{2} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \vec{N} \cdot \delta\vec{r}_P + \vec{T} \cdot \delta\vec{r}_P = 0,$$

так как обе силы приложены в мгновенном центре скоростей P, который при возможном перемещении неподвижен ($\delta\vec{r}_P = 0$).

Принцип возможных перемещений

Теперь можем сформулировать принцип возможных перемещений: *для равновесия механической системы с идеальными удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы возможная работа активных сил была равна нулю:*

$$\delta A^a = 0.$$

Доказательство. Пусть система материальных точек M_1, M_2, ..., M_N находится в равновесии относительно неподвижной системы координат $Oxyz$. Тогда, вспоминая из статики условие равновесия сходящихся сил, для каждой точки системы можем записать:

$$\vec{F}_k^a + \vec{R}_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Здесь $\vec{F}_k^a$ — равнодействующая активных сил, приложенных к материальной точке M_k системы; $\vec{R}_k$ — равнодействующая реакций связей, приложенных к этой точке.

Сообщим системе возможное перемещение. Пусть в результате точка M_k получит элементарное перемещение $\delta\vec{r}_k$. Умножим обе части написанного выше векторного равенства скалярно на $\delta\vec{r}_k$ и просуммируем результат по всем точкам системы:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0.$$

Полученное равенство, которое запишем в краткой форме в виде

$$\delta A^a + \delta A^R = 0,$$

означает, что при равновесии системы сумма возможных работ активных сил и реакций связей равна нулю. Но, по условию, все связи в системе являются идеальными, поэтому $\delta A^R = 0$. Откуда следует

$$\delta A^a = 0,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Проделанное выше является доказательством необходимости условия $\delta A^a = 0$ для равновесия системы. Для полного доказательства принципа возможных перемещений следовало бы доказать еще достаточность этого условия, т. е. показать, что если система находится в покое и одновременно выполняется условие $\delta A^a = 0$, то система не может прийти в движение. Это доказательство мы опускаем.

Применение принципа возможных перемещений

Принцип возможных перемещений позволяет решать самые разнообразные задачи на равновесие механических систем — находить неизвестные активные силы, определять реакции связей, находить положения равновесия механической системы под действием приложенной системы сил. Проиллюстрируем это на конкретных примерах.

Пример 1. Найти величину силы $\vec{P}$, удерживающей тяжелые гладкие призмы с массами m_1 и m_2 в состоянии равновесия. Угол скоса призм равен α (рис. 73).

Решение. Воспользуемся принципом возможных перемещений. Сообщим системе возможное перемещение δs_1, δs_2 ($\delta s_2 = \delta s_1 \operatorname{tg}\alpha$) и вычислим возможную работу активных сил:

$$\delta A^a = \delta A(m_1\vec{g}) + \delta A(m_2\vec{g}) + \delta A(\vec{P}) = m_1 g\,\delta s_1 - P\,\delta s_2.$$

Возможная работа силы тяжести $m_2\vec{g}$ равна нулю, так как сила перпендикулярна вектору элементарного перемещения точки приложения силы. Подставляя сюда значение $\delta s_2 = \delta s_1 \operatorname{tg}\alpha$ и приравнивая выражение нулю, получаем:

$$(m_1 g - P\operatorname{tg}\alpha)\delta s_1 = 0.$$

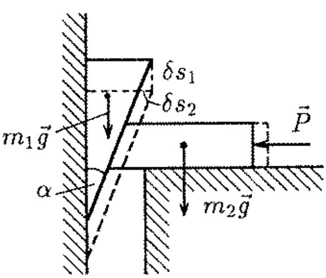


Рис. 73

Так как $\delta s_1 \neq 0$, то равно нулю выражение в скобках:

$$m_1 g - P\operatorname{tg}\alpha = 0.$$

Отсюда находим

$$P = m_1 g \operatorname{ctg}\alpha.$$

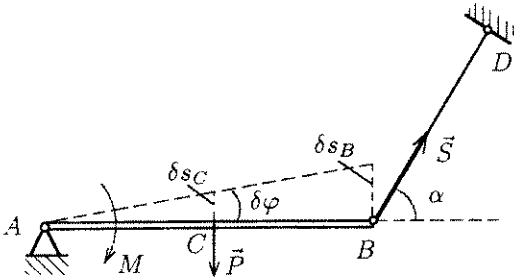


Рис. 74

Пример 2. Однородная балка AB длиной ℓ и весом P, нагруженная парой сил с заданным моментом M, закреплена как показано на рис. 74 и находится в покое. Определить реакцию стержня BD, если он составляет угол α с горизонтом.

Решение. Задача отличается от предыдущей тем, что здесь требуется найти реакцию идеальной связи. Но в уравнение работ $\delta A^a = 0$, выражающее принцип возможных перемещений, реакции идеальных связей не входят. В таких случаях принцип возможных перемещений следует применять совместно с принципом освобождаемости от связей.

Мысленно отбросим стержень BD, а его реакцию $\vec{S}$ будем считать неизвестной по величине активной силой. После этого сообщим системе возможное перемещение (при условии, что данная связь совершенно отсутствует). Это будет элементарный поворот балки AB на угол $\delta\varphi$ вокруг оси шарнира A в ту или другую сторону (на рис. 74 — против часовой стрелки). Элементарные перемещения точек приложения активных сил и отнесенной к ним реакции $\vec{S}$ при этом равны:

$$\delta s_C = |\delta\vec{r}_C| = \frac{1}{2}\ell\,\delta\varphi; \quad \delta s_B = |\delta\vec{r}_B| = \ell\,\delta\varphi.$$

Составляем уравнение работ

$$\delta A^a = -M\,\delta\varphi - \frac{1}{2}P\ell\,\delta\varphi + S\ell\,\delta\varphi\cos(90^\circ - \alpha) =$$

$$= (-M - \frac{1}{2}P\ell + S\ell\sin\alpha)\delta\varphi = 0.$$

Приравнивая нулю выражение в скобках, отсюда находим

$$S = \frac{2M + P\ell}{2\ell\sin\alpha}.$$

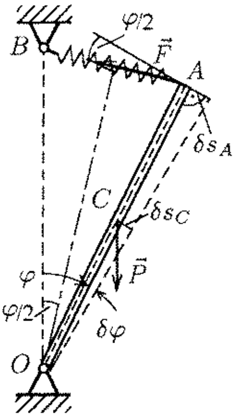


Рис. 75

Пример 3. Однородный стержень OA весом P закреплен при помощи цилиндрического шарнира O и пружины AB (рис. 75). Определить положения, в которых стержень может находиться в равновесии, если жесткость пружины равна k, натуральная длина пружины — a, $OA = OB = \ell$ и точка B находится на одной вертикали с точкой O.

Решение. К стержню OA приложены две активные силы — собственный вес P и упругая сила пружины $F = k(AB - a) = k(2\ell \sin\frac{\varphi}{2} - a)$, где φ — угол, образуемый стержнем с вертикалью OB. Наложенные связи — идеальные (в данном случае имеется единственная связь — шарнир O).

Сообщим системе возможное перемещение — элементарный поворот стержня вокруг оси шарнира O на угол $\delta\varphi$, вычислим возможную работу активных сил и приравняем ее нулю:

$$\delta A^a = \delta A(\vec{P}) + \delta A(\vec{F}) = P\,\delta s_C \sin\varphi - F\,\delta s_A \cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Подставляя сюда выражение для силы F и значения

$$\delta s_C = \frac{1}{2}\ell\,\delta\varphi; \quad \delta s_A = \ell\,\delta\varphi; \quad \sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

после простых преобразований получаем следующее тригонометрическое уравнение для определения угла φ при равновесии стержня:

$$\cos\frac{\varphi}{2}\left[P\sin\frac{\varphi}{2} - k\left(2\ell\sin\frac{\varphi}{2} - a\right)\right] = 0.$$

Уравнение определяет три значения для угла φ:

$$\varphi = \varphi_1 = 2\arcsin\frac{ak}{2k\ell - P}; \ \varphi = \varphi_2 = \pi - 2\arcsin\frac{ak}{2k\ell - P}; \ \varphi = \varphi_3 = \pi.$$

Следовательно, стержень имеет три положения равновесия. Так как $|\sin\varphi| \leqslant 1$, два первых положения равновесия существуют, если выполняется условие $a < 2\ell - P/k$. Равновесие при $\varphi = \varphi_3 = \pi$ существует всегда.

В заключение заметим, что принцип возможных перемещений можно применять и к системам с неидеальными связями. Акцент на идеальность связей делается в формулировке принципа с одной единственной целью — показать, что уравнения равновесия механических систем можно составлять, не включая в них реакции идеальных связей, упрощая этим расчеты.

Для систем с неидеальными связями принцип возможных перемещений следует переформулировать так: *для равновесия механической системы с удерживающими связями, среди которых имеются неидеальные связи, необходимо и достаточно, чтобы возможная работа активных сил и реакций неидеальных связей была равна нулю.* Можно, однако, обойтись без переформулировки принципа, условно относя реакции неидеальных связей в число активных сил.

Вопросы для самопроверки

1. В чем основная особенность несвободной механической системы по сравнению со свободной?
2. Что называется возможным перемещением? Приведите примеры.
3. Как определяются вариации координат точек системы при ее возможном перемещении (укажите три способа)?
4. Как классифицируются связи по виду их уравнений? Приведите примеры связей удерживающих и неудерживающих, стационарных и нестационарных.
5. В каком случае связь называется идеальной? Неидеальной?
6. Приведите словесную формулировку и математическую запись принципа возможных перемещений.
7. Как формулируется принцип возможных перемещений для систем, содержащих неидеальные связи?
8. Перечислите основные типы задач, решаемые при помощи принципа возможных перемещений.

Упражнения

При помощи принципа возможных перемещений решить следующие задачи из сборника И.В. Мещерского 1981 г. издания: 46.1; 46.8; 46.17; 2.49; 4.53.

Лекция 20

Принцип Даламбера–Лагранжа и общее уравнение динамики. Уравнения движения механической системы в обобщенных координатах

Принцип Даламбера–Лагранжа

Соединение принципа Даламбера с принципом возможных перемещений приводит к новому принципу механики — принципу Даламбера–Лагранжа. Принцип имеет следующие словесную формулировку и математическую запись.

Словесная формулировка:

При любом движении механической системы с удерживающими идеальными связями возможная работа активных сил и сил инерции системы равна нулю.

Математическая запись:

$$\delta A^a + \delta A^и = 0.$$

Математическое выражение принципа можно записать и в более подробном виде:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^и \cdot \delta\vec{r}_k = 0.$$

Здесь $\vec{F}_k^a$ и $\vec{F}_k^и$ — активная сила и сила инерции точки M_k движущейся механической системы, $\delta\vec{r}_k$ — возможное перемещение этой точки из ее положения в рассматриваемый произвольный момент времени t.

Доказательство производится аналогично тому, как это делается при обосновании необходимости условия $\delta A^a = 0$ в принципе возможных перемещений. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_N$ — система материальных точек с идеальными удерживающими связями, движущаяся под действием приложенных сил. Зафиксируем систему в произвольный момент времени t, выделим в ней произвольную точку M_k и применим к ней принцип Даламбера:

$$\vec{F}_k^a + \vec{R}_k + \vec{F}_k^и = 0.$$

Выведем теперь систему из данного фиксированного положения, сообщив ей возможное перемещение. Пусть точка M_k получит при этом элементарное перемещение $\delta\vec{r}_k$. Умножая обе части написанного выше уравнения кинетостатики скалярно на $\delta\vec{r}_k$ и суммируя по всем точкам системы, получим:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^и \cdot \delta\vec{r}_k = 0$$

или, в краткой записи:

$$\delta A^a + \delta A^R + \delta A^и = 0.$$

Здесь $\delta A^и = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{F}_k^и \cdot \delta\vec{r}_k$ — возможная работа сил инерции системы.

По условию, все связи системы идеальные. Следовательно, $\delta A^R = 0$, и мы получаем

$$\delta A^a + \delta A^и = 0,$$

что и требовалось доказать.

Как и в случае принципа возможных перемещений, формулировку принципа Даламбера–Лагранжа можно сохранить и для систем с неидеальными связями, включив реакции неидеальных связей в число активных сил.

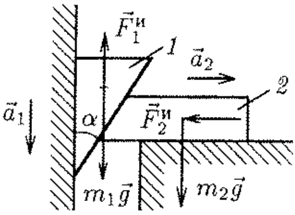


Рис. 76

Принцип Даламбера–Лагранжа, будучи столь же общим правилом механики, что и принцип Даламбера, при решении задач более удобен, так как позволяет составлять уравнения динамики, не содержащие реакций идеальных связей.

Пример 1. Применяя принцип Даламбера–Лагранжа, найти ускорения призм в примере 1 на с. 104, если силу $\vec{P}$, удерживавшую призмы в равновесии, мгновенно убрали.

Решение. При отсутствии силы $\vec{P}$ призмы приходят в движение под действием силы тяжести призмы *1*. Обозначив через $\vec{a}_1$ ускорение призмы *1*, для ускорения призмы *2* будем иметь $a_2 = a_1 \operatorname{tg}\alpha$. По ускорениям определяем равнодействующие сил инерции призм: $\vec{F}_1^{\text{и}} = -m_1\vec{a}_1$, $\vec{F}_2^{\text{и}} = -m_2\vec{a}_2$ (рис. 76). Модули сил инерции будут равны:

$$F_1^{\text{и}} = m_1 a_1; \quad F_2^{\text{и}} = m_2 a_1 \operatorname{tg}\alpha.$$

Сообщим системе возможное перемещение — пусть это будет перемещение, при котором призма *1* сместится вниз на величину δs_1, а призма *2* — вправо на величину $\delta s_2 = \delta s_1 \operatorname{tg}\alpha$. В соответствии с принципом Даламбера–Лагранжа, возможная работа активных сил и сил инерции равна нулю, т. е.

$$m_1 g\,\delta s_1 - F_1^{\text{и}}\delta s_1 - F_2^{\text{и}}\delta s_2 = 0.$$

Подставляя сюда значения сил инерции, учитывая равенство $\delta s_2 = \delta s_1 \operatorname{tg}\alpha$ и сокращая на δs_1, получаем уравнение для определения ускорения a_1:

$$m_1 g - m_1 a_1 - m_2 a_1 \operatorname{tg}^2\alpha = 0.$$

Из него находим

$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 \operatorname{tg}^2\alpha},$$

и далее

$$a_2 = a_1 \operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1 g \operatorname{tg}\alpha}{m_1 + m_2 \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

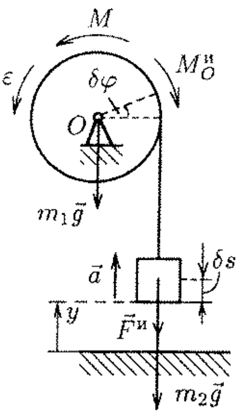


Рис. 77

Пример 2. Груз массы m_2 поднимают вверх при помощи троса и лебедки, к барабану которой приложена пара сил с моментом M (рис. 77). Найти уравнение движения груза, если в начальный момент он был неподвижен. Момент пары сил выражается зависимостью $M = M_0 + \alpha t$ ($\alpha = \mathrm{const}$), причем $M_0 = m_2 g R$, где R — радиус барабана.

Решение. Сначала найдем ускорение груза, для чего применим ко всей системе принцип Даламбера–Лагранжа. К активным силам — паре с моментом M и силам тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ добавим силы инерции. Силы инерции груза приводятся к одной силе $F_1^и = m_1 a$, где a — ускорение груза; силы инерции барабана — к паре сил с моментом

$$M_O^и = J_O\varepsilon = \frac{m_1R^2}{2}\frac{a}{R} = \frac{1}{2}m_1 aR.$$

Сила $\vec{F}_1^и$ направлена противоположно ускорению $\vec{a}$, момент $M_O^и$ — противоположно угловому ускорению барабана $\varepsilon = a/R$.

Сообщим системе возможное перемещение. Пусть это будет поворот барабана на угол $\delta\varphi$ и смещение груза на величину $\delta s = R\,\delta\varphi$ в направлении действительного движения системы. Вычисляем возможную работу активных сил и сил инерции и приравниваем ее нулю:

$$M\,\delta\varphi - M_O^и\,\delta\varphi - m_2 g\,\delta s - F_2^и\,\delta s = 0.$$

Подставляя сюда выражения для M, $M_O^и$, $F_2^и$ и учитывая, что $\delta s = R\,\delta\varphi$, $M_0 = m_2 gR$, после сокращения на $\delta\varphi$ получаем:

$$\alpha t - \frac{1}{2}m_1 Ra - m_2 Ra = 0.$$

Отсюда находим ускорение груза:

$$a = \frac{2\alpha t}{R(m_1 + 2m_2)}.$$

Пусть y — координата груза, отсчитываемая от его начального положения (при $t = 0$). Заменяя a его выражением $a = \ddot{y}$, получаем дифференциальное уравнение движения груза

$$\ddot{y} = \frac{2\alpha t}{R(m_1 + 2m_2)}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях ($t = 0$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$), получаем искомое уравнение движения груза (кинематическое):

$$y = \frac{\alpha t^3}{3R(m_1 + 2m_2)}.$$

Общее уравнение динамики

Вспоминая выражения для сил инерции

$$\vec{F}_k^{\text{и}} = -m_k \vec{a}_k = -m_k \ddot{\vec{r}}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

запишем принцип Даламбера–Лагранжа в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k^a - m_k \ddot{\vec{r}}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \qquad (*)$$

Если это равенство дополнить уравнениями наложенных связей

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_N, y_N, z_N, t) = 0; \\ f_2(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_N, y_N, z_N, t) = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_s(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_N, y_N, z_N, t) = 0, \end{array}\right. \quad (s < 3N)$$

то можно составить для механической системы совокупность уравнений, позволяющую решить для нее любую задачу динамики. В связи с этим равенство $(*)$ получило название *общего уравнения динамики**.

Однако прямое применение общего уравнения динамики, требующее выписывать и учитывать в ходе решения задачи все уравнения связей, оказывается мало удобным. Гораздо удобнее оказывается метод, в котором уравнения связей учитываются автоматически путем специального выбора переменных, принятых для описания положения движущейся системы в пространстве. Такой метод был разработан Лагранжем и получил название *метода обобщенных координат.*

Обобщенные координаты и обобщенные силы

Пусть имеем систему материальных точек M_1, $M_2, \ldots$, M_N, подчиненную s удерживающим связям, уравнения которых имеют вид, приведенный выше.

---

* По аналогии уравнение $\sum\limits_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a \cdot \delta \vec{r}_k = 0$, выражающее принцип возможных перемещений, можно назвать общим уравнением статики.

Если бы система была свободной, то все $3N$ декартовых координат ее точек были бы независимыми. Для указания положения системы потребовалось бы задать все $3N$ декартовых координат ее точек x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_N, y_N, z_N. В несвободной механической системе $3N$ декартовых координат ее точек должны удовлетворять s уравнениям связей, поэтому независимыми среди них будут только $n = 3N - s$ координат.

Число независимых между собой скалярных величин, однозначно определяющих положение механической системы в пространстве, называется числом степеней свободы системы.

Следовательно, механическая система, состоящая из N свободных материальных точек, имеет $n = 3N$ степеней свободы. Несвободная система из N материальных точек с s удерживающими связями $n = 3N - s$ степеней свободы.

Определяя положение несвободной системы, мы можем независимо задавать только $n = 3N - s$ координат; остальные s координат определяются из уравнений связей. Однако положение несвободной системы можно задавать более удобным способом — вместо независимых декартовых координат задавать такое же число других геометрических величин, через которые декартовы координаты (как зависимые, так и независимые) могут быть однозначно выражены. В качестве таких величин, называемых *обобщенными координатами системы*, могут выбираться углы, линейные расстояния, площади и т.п. Удобство состоит в том, что обобщенные координаты можно выбирать с учетом наложенных связей, т.е. сообразуясь с характером движения, допускаемого для системы всей совокупностью наложенных связей. При этом связи учитываются автоматически, а необходимость решать уравнения связей относительно зависимых координат отпадает.

Пример 1. Положение физического маятника, состоящего из шарнирно закрепленного в точке O тяжелого стержня OA, вполне определяется заданием угла φ (рис. 78). Если угол φ задан, то для любой точки стержня M_k с заданным расстоянием $OM_k = h_k$ могут быть вычислены ее декартовы координаты:

$$x_k = h_k \cos\varphi; \quad y_k = h_k \sin\varphi.$$

Пример 2. Для механической системы, состоящей из математического маятника на подвижной платформе (рис. 79), положение в пространстве вполне определяется величинами s и φ (h, ℓ заданы). Положение платформы определяется расстоянием s, координаты то-

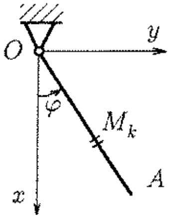


Рис. 78

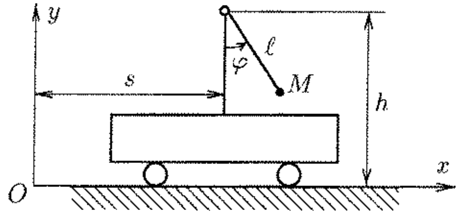


Рис. 79

чечной массы M также легко вычисляются:

$$x_M = s + \ell \sin\varphi; \quad y_M = h - \ell\cos\varphi.$$

Величины φ (пример 1), φ и s (пример 2) являются обобщенными координатами указанных систем. Это понятие можно распространить на случай произвольной механической системы.

Таким образом, *обобщенными координатами механической системы называются любые независимые между собой геометрические величины, однозначно определяющие положение системы в пространстве.* Число обобщенных координат равно числу степеней свободы системы n.

Независимо от геометрического смысла и, соответственно, размерности, обобщенные координаты обозначают единообразным способом, буквой q с номером: q_1, $q_2, \ldots$, q_n. Из того факта, что обобщенные координаты однозначно определяют положение механической системы в выбранной системе координат $Oxyz$, следует, что существуют функции

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t); \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t); \quad (k = 1,\, 2, \ldots,\, N) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \end{aligned}$$

выражающие декартовы координаты всех точек системы через обобщенные координаты и, быть может, время t. Конкретный вид этих функций устанавливается свой для каждой системы (см. примеры 1 и 2).

Если ввести радиусы-векторы точек $\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ ($k = 1$, 2, $\ldots$, N), указанные функции можно представить в векторной форме

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \quad (k = 1,\, 2, \ldots,\, N).$$

Введем теперь понятие *обобщенной силы.* Зафиксируем систему в произвольный момент времени t и сообщим ей из этого положения возможное перемещение. Пусть в результате обобщенные координаты получают приращения (вариации) δq_1, $\delta q_2, \ldots, \delta q_n$. Соответствующие элементарные перемещения точек системы найдем, вычисляя дифференциалы функций $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ при фиксированном (t = const) времени:

$$\delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Вычисляя возможную работу приложенных сил, найдем:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\right)\delta q_2 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_n}\right)\delta q_n.$$

Видно, что возможная работа выражается однородной функцией первой степени (линейной формой) относительно вариаций обобщенных координат δq_1, $\delta q_2, \ldots, \delta q_n$ с коэффициентами

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}; \quad Q_2 = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}; \ldots; \quad Q_n = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_n},$$

т. е. имеет вид

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i.$$

Коэффициенты Q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) называются обобщенными силами.

Таким образом, каждой обобщенной координате q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) соответствует своя обобщенная сила Q_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). При этом *обобщенной силой Q_i, соответствующей обобщенной координате q_i, называется коэффициент при вариации δq_i этой обобщенной координаты в выражении для возможной работы сил, приложенных к точкам системы.*

Обобщенные силы можно вводить для отдельных групп сил, например для активных сил, для реакций связей, для потенциальных сил и т.д. Тогда полная обобщенная сила будет выражаться суммой обобщенных сил, соответствующих этим выделенным группам. Так, если действующие силы поделены на активные силы и реакции связей, то полные обобщенные силы будут равны

$$Q_i = Q_i^a + Q_i^R \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где Q_i^a — обобщенные активные силы, Q_i^R — обобщенные реакции связей. Обобщенные реакции идеальных связей всегда равны нулю. По этой причине реакции идеальных связей можно при вычислении обобщенных сил игнорировать.

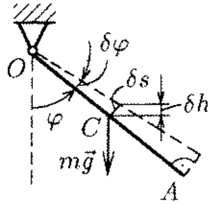


Рис. 80

Пример 3. Вычислить обобщенную силу физического маятника, состоящего из стержня OA длиной ℓ и массой m (рис. 80).

Решение. Физический маятник является системой с одной степенью свободы ($n = 1$). Следовательно, положение маятника определяется одной обобщенной координатой, в качестве которой выберем угол наклона к вертикали φ ($q_1 = q = \varphi$).

Изображаем маятник в произвольном положении, прикладываем действующие силы. Реакции в опоре A можно не показывать, так как шарнир является идеальной связью и его вклад в обобщенную силу равен нулю. Сообщаем системе возможное перемещение — элементарный поворот маятника на угол $\delta\varphi$ в сторону возрастания угла φ*. Работу совершает только вес маятника $m\vec{g}$. Его точка приложения (центр тяжести C стержня) опишет дугу длиной $\delta s = (OC)\delta\varphi = {}^1/_2\ell\,\delta\varphi$, при этом поднимется вдоль вертикали на величину $\delta h = \delta s\,\sin\varphi = {}^1/_2\ell\sin\varphi\,\delta\varphi$, совершив элементарную работу

$$\delta A = -mg\,\delta h = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Коэффициент при вариации $\delta\varphi$ в этом выражении определяет искомую обобщенную силу, т. е.

$$Q = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\varphi.$$

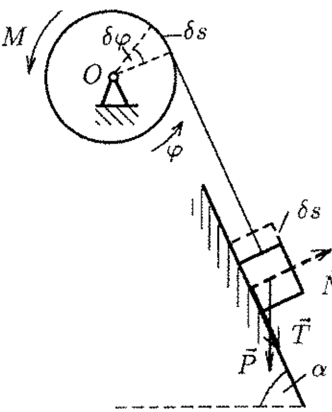


Рис. 81

Пример 4. Найти обобщенную силу для системы, показанной на рис. 81, приняв за обобщенную координату угол поворота барабана φ. К барабану приложен движущий момент M, между грузом и наклонной плоскостью имеется трение скольжения с коэффициентом f. Вес груза равен P, радиус барабана — R.

---

* Чтобы при определении обобщенных сил избежать ошибок в знаках, вариации обобщенных координат $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ следует выбирать положительными.

Решение. *Возможным перемещением данной системы будет поворот* барабана на угол $\delta\varphi$ в ту или иную сторону и соответствующее перемещение груза. Изображаем силы, совершающие работу на возможном перемещении — момент M, вес груза $\vec{P}$, силу трения скольжения $\vec{T}$ ($T = fN = fP\cos\alpha$). Элементарный поворот барабана $\delta\varphi$ примем в сторону момента M и вычислим возможную работу:

$$\delta A = M\,\delta\varphi - P\sin\alpha\,\delta s - T\,\delta s.$$

Подставляя сюда значения $T = fP\cos\alpha$, $\delta s = R\,\delta\varphi$ и вынося $\delta\varphi$ за скобки, запишем:

$$\delta A = [M - PR(\sin\alpha + f\cos\alpha)]\delta\varphi.$$

Обобщенная сила Q равна коэффициенту при $\delta\varphi$ в полученном выражении, т. е.

$$Q = M - PR(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Уравнения движения механической системы в обобщенных координатах

Такие уравнения впервые были получены Лагранжем и носят его имя. Они получаются путем преобразования общего уравнения динамики

$$\sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_k^a - m_k\ddot{\vec{r}}_k)\cdot\delta\vec{r}_k = 0$$

к обобщенным координатам q_1, $q_2, \ldots, q_n$.

Осуществим это преобразование. Общее уравнение динамики запишем для удобства в терминах сил:

$$\sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_k^a + \vec{F}_k^{и})\cdot\delta\vec{r}_k = 0.$$

Раскроем в этом выражении скобки и рассмотрим каждое слагаемое отдельно. Первое слагаемое, равное

$$\delta A^a = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\cdot\delta\vec{r}_k,$$

определяет возможную работу активных сил. Согласно предыдущему, оно имеет в обобщенных координатах выражение

$$\delta A^a = Q_1^a \delta q_1 + Q_2^a \delta q_2 + \ldots + Q_n^a \delta q_n = \sum_{i=1}^{n} Q_i^a \, \delta q_i,$$

где $Q_i^a = \sum\limits_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — обобщенные активные силы. Аналогичное выражение имеет и второе слагаемое, определяющее возможную работу сил инерции:

$$\delta A^{\text{и}} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{\text{и}} \cdot \delta \vec{r}_k = Q_1^{\text{и}} \delta q_1 + Q_2^{\text{и}} \delta q_2 + \ldots + Q_n^{\text{и}} \delta q_n = \sum_{i=1}^{n} Q_i^{\text{и}} \, \delta q_i.$$

Здесь $Q_i^{\text{и}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — обобщенные силы инерции, которые определяются формулами

$$Q_i^{\text{и}} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{\text{и}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} -m_k \ddot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Преобразуем выражения для обобщенных сил инерции, для чего воспользуемся тождеством

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\right) - \vec{v}_k \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \quad (k = 1, 2, \ldots, N;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Его справедливость устанавливается непосредственной проверкой. Непосредственной же проверкой доказывается справедливость двух следующих тождественных равенств:

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i}.$$

Величины $\dot{q}_i = dq/dt$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются обобщенными скоростями системы.

С помощью этих равенств основное тождество приводится к более простому виду, содержащему производные только от скоростей точек системы (точнее — от скалярных квадратов скоростей):

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \vec{v}_k \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\vec{v}_k^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\vec{v}_k^2}{2}\right).$$

Подставляя это выражение в формулу для обобщенных сил инерции, получаем:

$$Q_i^{и} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\vec{v}_k^{\,2}}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\vec{v}_k^{\,2}}{2}\right)\right] =$$

$$= -\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\vec{v}_k^{\,2}}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\vec{v}_k^{\,2}}{2}\right)\right] = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)$$

$$(i = 1,\, 2, \ldots,\, n),$$

где $T = \sum\limits_{k=1}^{N}\frac{m_k\vec{v}_k^{\,2}}{2}$ — кинетическая энергия системы.

Чтобы вычислить указанные производные, кинетическая энергия должна быть записана в обобщенных координатах, т. е. представлена в виде функции от обобщенных координат, обобщенных скоростей и, быть может, времени t:

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t).$$

С учетом полученных выражений общее уравнение динамики запишется в обобщенных координатах в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[Q_i^a - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right]\delta q_i = 0.$$

Так как все δq_i $(i = 1,\, 2, \ldots,\, n)$ независимы, это равенство выполняется, только если каждый сомножитель в квадратных скобках равен нулю. Отсюда следуют равенства

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^a \quad (i = 1,\, 2, \ldots,\, n),$$

которые называются *уравнениями движения механической системы в обобщенных координатах или уравнениями Лагранжа второго рода.*

Если среди связей системы имеются связи неидеальные, то в правые части уравнений Лагранжа войдут также обобщенные реакции неидеальных связей Q_i^R, и уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1,\, 2, \ldots,\, n),$$

где $Q_i = Q_i^a + Q_i^R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — полные обобщенные силы, учитывающие как активные силы, так и реакции неидеальных связей.

В развернутом виде эти уравнения запишутся так:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1;\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial T}{\partial q_n} = Q_n.
\end{aligned}$$

После выполнения предписанных математических действий уравнения Лагранжа приводят к системе n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$. По этим уравнениям, если заданы действующие силы и начальные условия, путем интегрирования можно найти закон движения системы в обобщенных координатах

$$q_1 = q_1(t); \quad q_2 = q_2(t), \ldots, \quad q_n = q_n(t).$$

Если задается закон движения системы, то составленные уравнения позволяют определить неизвестные действующие силы.

Уравнения Лагранжа второго рода являются наиболее общими уравнениями динамики. Примечательно, что уравнения всегда имеют один и тот же вид, не зависящий ни от количества тел, входящих в систему, ни от характера движения тел, которое может быть поступательным, вращательным, плоскопараллельным или сложным. Все эти детали учитываются в ходе вычисления кинетической энергии и обобщенных сил. Существенно также, что для составления уравнений Лагранжа нужно находить только скорости точек системы (при вычислении кинетической энергии), а определять ускорения не требуется. Это упрощает их составление.

Количество уравнений Лагранжа всегда равно числу степеней свободы системы.

Если механическая система находится под действием приложенных сил в равновесии, то кинетическая энергия равна нулю и постоянна ($T = 0 = \text{const}$). В этом случае из уравнений Лагранжа следуют уравнения равновесия механической системы в обобщенных координатах

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ldots, \quad Q_n = 0.$$

Они показывают, что при равновесии системы обобщенные силы, соответствующие активным силам и реакциям неидеальных связей, равны нулю.

Пример. В механической системе (см. рис. 81) масса барабана равна m_1, масса перемещаемого груза — m_2, а движущий момент M изменяется по закону $M = M_0 - k\omega$, где M_0, k — заданные постоянные, ω — угловая скорость барабана. Полагая выполненным условие $M_0 \geqslant m_2 gR(\sin\alpha + f\cos\alpha)$, найти закон движения барабана. В начальный момент система находилась в покое.

Решение. Система имеет одну степень свободы ($n = 1$). Примем за обобщенную координату угол поворота барабана φ ($q = \varphi$) и запишем для системы уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Далее вычисляем обобщенную силу Q_φ и кинетическую энергию системы T и выражаем их через обобщенную координату φ и обобщенную скорость $\dot{\varphi}$.

Выражение для обобщенной силы получено ранее (см. пример 4 на с. 115). Подставляя в него значения $M = M_0 - k\omega$, $P = m_2 g$, $\omega = \dot{\varphi}$, найдем

$$Q_\varphi = M_1 - k\dot{\varphi},$$

где $M_1 = M_0 - m_2 gR(\sin\alpha + f\cos\alpha)$.

Кинетическую энергию системы определяем как сумму кинетических энергий барабана (T_1) и груза (T_2):

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 R^2}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}m_2(R\omega)^2 = \frac{1}{4}(m_1 + 2m_2)R^2\dot{\varphi}^2.$$

Вычисляем производные, указанные в левой части уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)R^2\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)R^2\ddot{\varphi};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \ \ (\text{так как } T \text{ не зависит от } \varphi).$$

Подставляя найденные производные и обобщенную силу в уравнение Лагранжа, получаем дифференциальное уравнение движения системы

$$\frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)R^2\ddot{\varphi} = M_1 - k\dot{\varphi}.$$

Дальнейшее решение задачи сводится к интегрированию этого уравнения при начальных условиях: $t_0 = 0$; $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$.

Введем обозначения

$$b = \frac{2k}{(m_1 + 2m_2)R^2}; \quad d = \frac{2M_1}{(m_1 + 2m_2)R^2}$$

и представим это уравнение, являющееся линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами, в следующем виде:

$$\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} = d.$$

Его общее решение (φ) складывается из общего решения (φ_1) однородного уравнения $\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} = 0$ и частного решения (φ_2) неоднородного уравнения:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Чтобы найти общее решение однородного уравнения, составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + b\lambda = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -b$. По найденным корням находим

$$\varphi_1 = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-bt}.$$

Частное решение, согласно методу специальной правой части, ищем в виде $\varphi_2 = At$, где A — неизвестная пока постоянная. Ее находим, подставляя $\varphi = \varphi_2 = At$ в неоднородное уравнение и приравнивая сходственные члены в правой и левой частях полученного равенства. Получаем

$$A = \frac{d}{b}; \quad \varphi_2 = \frac{d}{b}t.$$

Теперь можем записать общее решение неоднородного уравнения:

$$\varphi = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-bt} + \frac{d}{b}t.$$

После определения по начальным условиям постоянных интегрирования C_1, C_2 и подстановки найденных значений в это общее решение, получаем

$$\varphi = \frac{d}{b^2}(\mathrm{e}^{-bt} - 1) + \frac{d}{b}t.$$

Тем самым закон движения системы (и барабана) полностью определен.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит принцип Даламбера-Лагранжа?

2. Запишите общее уравнение динамики.

3. Что называется обобщенными координатами механической системы? Сколько у системы обобщенных координат?

4. Что такое обобщенная сила? Как она вычисляется?

5. Приведите выражение для возможной работы сил системы в обобщенных координатах.

6. Запишите уравнения Лагранжа второго рода для механической системы с n степенями свободы.

7. Как записываются уравнения равновесия механической системы в обобщенных координатах?

Упражнения

1. Вывести при помощи уравнения Лагранжа второго рода дифференциальное уравнение свободных колебаний физического маятника.

2. При помощи уравнений Лагранжа второго рода решить следующие задачи из сборника И.В. Мещерского 1981 г. издания: 47.9; 47.13; 48.28.

Рекомендуемая литература

Учебники и задачники

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 2002.

2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 1; Т, 2. — М.: Наука, 1985.

3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1981.

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под редакцией А.А. Яблонского. — М.: Высшая школа, 1998.

Вспомогательные учебные пособия

5. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика. — М.: Физматгиз, 1961 (и последующие издания).

6. Андронов В.В. Механика в лесоинженерном деле. — М.: МГУЛ, 2000.

Содержание

Учебное пособие

Вячеслав Васильевич Андронов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

20 лекций

Часть 2

Динамика

Под редакцией автора

Оригинал-макет подготовлен в пакете *CyrTUG*-EmTEX с использованием кириллических шрифтов семейства LH.

Верстка в TEXе: Ю.Н. Чернышов.

По тематическому плану внутривузовских изданий учебной литературы на 2002 год, доп.

Лицензия ЛР 020718 от 02.02.1998 г.
Лицензия ПД 00326 от 4.02.2000 г.

Подписано к печати 20.01.03		Формат 60×88/16
Бумага 80 г/м^2 «Снегурочка»		Ризография
Объем 8,0 п. л.	Тираж 500 экз.	Зак. № 385

Издательство Московского государственного университета леса.
141005. Мытищи-5, Московская обл., 1-я Институтская, 1, МГУЛ.
Телефон: (095) 588-57-62
E-mail: izdat@mgul.ac.ru