

Н.И. Горбач

# Теоретическая механика

## Динамика

*Допущено  
Министерством образования  
Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений  
по техническим специальностям*

2-е издание, исправленное



Минск  
«Вышэйшая школа»  
2012

УДК 531.3(075.8)

ББК 22.213я73

Г67

Рецензенты: кафедра теоретической механики Белорусского государственного технологического университета (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *В.С. Вихренко*); доктор технических наук, профессор *В.М. Сурин*

*Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.*

**Горбач, Н. И.**

Г67 Теоретическая механика. Динамика : учеб. пособие / Н. И. Горбач. — 2-е изд., испр. — Минск : Выш. шк., 2012. — 320 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2197-9.

Рассматриваются вопросы, касающиеся динамики материальной точки, геометрии масс, общих теорем динамики, динамики твердого тела, аналитической механики, теории колебаний материальной точки и механической системы и теории удара. Четкость формулировок законов, теорем и принципов механики и их доказательств, тщательно подобранные примеры и рисунки позволяют глубже уяснить сущность теоретических положений и формул.

Первое издание вышло в 2010 г.

Для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям. Будет полезно учащимся учреждений среднего специального образования.

УДК 531.3(075.8)

ББК 22.213я73

ISBN 978-985-06-2197-9

© Горбач Н.И., 2010, с изменениями, 2012

© Издательство «Высэйшая школа», 2012

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих теоретическую механику по полной программе обучения в учреждениях высшего образования по техническим специальностям.

От существующих учебников и учебных пособий по теоретической механике данное издание отличается более рациональным с методической точки зрения расположением материала, простотой и доступностью его изложения. Большое внимание уделено четкости формулировок основных понятий, теорем и принципов механики и их доказательству. Тщательно подобранные простые примеры позволяют глубже уяснить сущность теоретических положений и методику решения задач. В учебном пособии приведено более 180 рисунков, что позволяет наглядно проиллюстрировать теоретический материал и решение задач.

Выражаю глубокую благодарность рецензентам: заведующему кафедрой теоретической механики Белорусского государственного технического университета доктору физико-математических наук, профессору В.С. Вихренко, доктору технических наук, профессору Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники В.М. Сурина и доценту кафедры теоретической механики Белорусского национального технического университета Г.И. Беяевой за ценные замечания, которые позволили в значительной степени улучшить содержание книги, а также сотруднице кафедры теоретической механики Белорусского национального технического университета А.Р. Трухильо-Липской за большую и добросовестную работу по подготовке к изданию данного пособия.

Первое издание вышло в УП «Издательство “Вышэйшая школа”» в 2010 г.

*Автор*

## ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ

**Динамика** — раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел и точек под действием приложенных сил.

**Материальное тело** — тело, имеющее массу.

**Материальная точка** — материальное тело, различие в движении точек которого является несущественным. Это может быть как тело, размерами которого при его движении можно пренебречь, так и тело конечных размеров, если оно движется поступательно. Материальными точками называют также и бесконечно малые частицы, на которые мысленно разбивается твердое тело при определении отдельных его динамических характеристик. Примеры материальных точек (рис. 1): *a* — Земля при движении вокруг Солнца; *б* — твердое тело при поступательном движении, так как  $\vec{V}_B = \vec{V}_A$ ;  $\vec{a}_B = \vec{a}_A$ ; *в* — частица тела при вращении его вокруг оси.

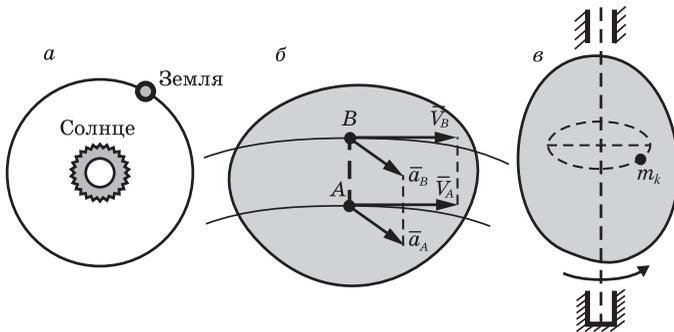


Рис. 1

**Масса тела** — это скалярная положительная величина, зависящая от количества вещества, содержащегося в данном теле.

В классической механике масса тела является постоянной величиной, не зависящей от скорости его движения. Однако есть тела, масса которых при движении может изменяться вследствие присоединения или отбрасывания материальных частиц, так называемые тела переменной массы.

**Сила** — количественная мера механического взаимодействия между телами или между телом (точкой) и полем (электрическим, магнитным и т.д.). Сила — векторная величина, характеризующаяся модулем, точкой приложения и направлением (линией действия) (рис. 2:  $A$  — точка приложения,  $AB$  — линия действия силы).

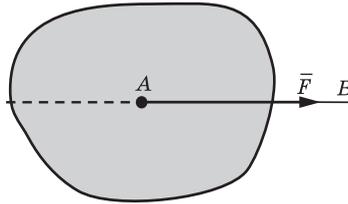


Рис. 2

В динамике наряду с постоянными силами рассматриваются и переменные, которые могут зависеть от времени  $t$ , скорости  $\vec{V}$ , положения в пространстве, определяемого радиус-вектором  $\vec{r}$ , или от совокупности этих величин, т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \overline{\text{const}}; \\ \vec{F} = \vec{F}(t); \\ \vec{F} = \vec{F}(\vec{V}); \\ \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}); \\ \vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V}). \end{array} \right.$$

Примеры таких сил приведены на рис. 3:  $a - \vec{G} = \overline{\text{const}}$  — вес тела;  $\bar{R} = \bar{R}(\vec{V})$  — сила сопротивления воздуха;  $b - \vec{F}_T = \vec{F}(t)$  — сила тяги электровоза;  $\bar{e} - \vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$  — сила отталкивания от центра  $O$  или притяжения к нему.

**Движение** в механике — это изменение положения тела в пространстве и во времени.

**Пространство** в классической механике трехмерное, в котором справедлива евклидова геометрия.

**Время** – скалярная величина, одинаково изменяющаяся в любых системах отсчета (системах координат).

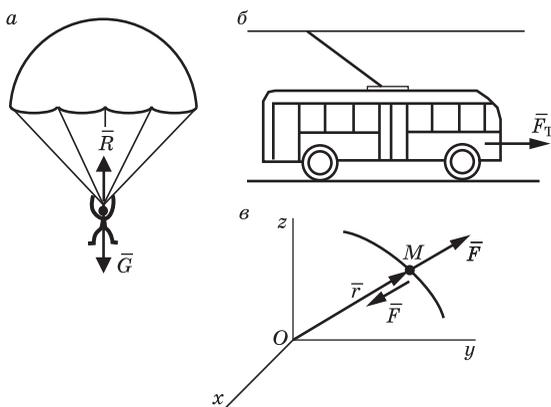


Рис. 3

**Система единиц** – это совокупность единиц измерения физических величин. Для измерения всех механических величин достаточно трех основных единиц: единиц длины, времени, массы или силы. Все остальные единицы измерения механических величин – производные от основных. Основным типом систем единиц является СИ – международная система единиц или более мелкая – СГС. Иногда встречается применение МКГС – технической системы единиц (табл. 1). В СИ за единицу силы принимается сила в 1 Н, в системе МКГС – 1кГ.

Таблица 1

Система единиц	СИ		СГС		МКГС	
	Размерность	Обозначение	Размерность	Обозначение	Размерность	Обозначение
Длина	метр	м	сантиметр	см	метр	м
Время	секунда	с	секунда	с	секунда	с
Масса	килограмм-масса	кг	грамм-масса	г	техническая единица массы	т. е. м.
Сила	ньютон	Н	дина	дин	килограмм-сила	кГ

**Сила в 1 Н** – это сила, сообщаящая массе в 1 кг ускорение  $1 \text{ м/с}^2$ , т.е.  $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг м/с}^2$  – производная единица; сила в  $1 \text{ кГ} \approx 9,8 \text{ Н}$ .

---

# ГЛАВА 1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

---

## 1.1. Законы динамики материальной точки (законы Галилея – Ньютона)

### 1.1.1. Первый закон – закон инерции

Изолированная от внешних воздействий или находящаяся под действием уравновешенной системы сил материальная точка сохраняет состояние покоя или движется равномерно и прямолинейно.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил или под действием уравновешенной системы сил, называется **движением по инерции**.

Например: движение тела по гладкой (сила трения равна нулю) горизонтальной поверхности (рис. 4:  $\vec{G}$  – вес тела;  $\vec{N}$  – нормальная реакция плоскости).

Так как  $\sum F_{kx} = 0$ , то при начальной скорости  $V_0 \neq 0$  тело будет двигаться с той же скоростью; т.е.  $V = V_0$ ; при  $V_0 = 0$  тело будет покоиться.

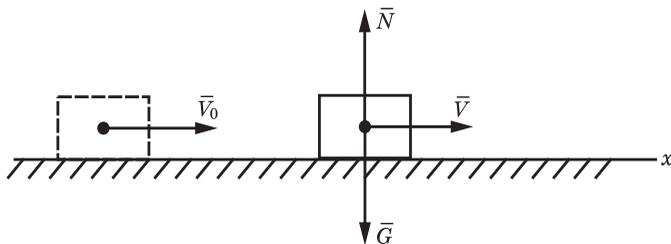


Рис. 4

### 1.1.2. Второй закон – основной закон динамики

Произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление вектора силы совпадает с направлением вектора ускорения.

Математически этот закон выражается векторным уравнением

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.1)$$

При  $\vec{F} = \text{const}$   $\vec{a} = \text{const}$  и, следовательно, движение точки равнопеременное (рис. 5:  $a$  – движение замедленное,  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ;  $b$  – движение ускоренное,  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ).

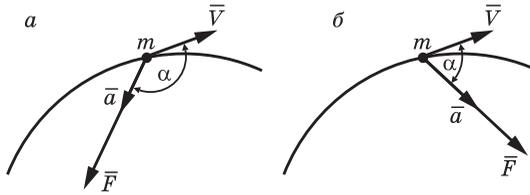


Рис. 5

При  $\vec{F} = 0$   $\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \text{const}$  – точка движется равномерно и прямолинейно или при  $\vec{V}_0 = 0$  – покоится (закон инерции). Второй закон позволяет установить связь между гравитационной массой  $m$  тела, находящегося вблизи земной поверхности, и его весом  $G$ , а именно,  $G = mg$ , где  $g$  – ускорение свободного падения.

Масса тела (точки), определенная из уравнения (1.1) при известных действующей силе  $\vec{F}$  и полученном под действием этой силы ускорении  $\vec{a}$ , называется инертной массой и является мерой инертности.

**Инертность** – свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.

Первый и второй законы динамики справедливы в инерциальных системах отсчета, о которых подробно будет сказано ниже.

### 1.1.3. Третий закон – закон равенства действия и противодействия

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Так как силы  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  приложены к разным точкам, то система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  не является уравновешенной (рис. 6).

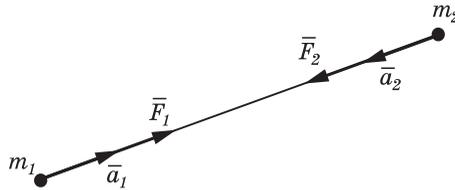


Рис. 6

В свою очередь  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \Rightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$  – отношение масс взаимодействующих точек обратно пропорционально их ускорениям.

### 1.1.4. Четвертый закон – закон независимости действия сил

Ускорение, получаемое точкой при действии на нее одновременно нескольких сил, равно геометрической сумме тех ускорений, которые получила бы точка при действии на нее каждой силы в отдельности.

**Пояснение** (рис. 7). Равнодействующая  $\vec{R}$  системы сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_k, \dots, \vec{F}_n)$ :

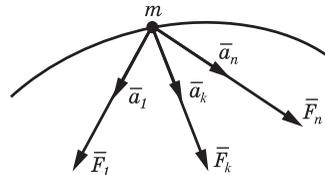


Рис. 7

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_k + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k .$$

Так как

$$m\bar{a} = \bar{R}; \quad m\bar{a}_1 = \bar{F}_1, \dots; \quad m\bar{a}_k = \bar{F}_k, \dots; \quad m\bar{a}_n = \bar{F}_n,$$

то

$$m(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n) = m\bar{a} = \bar{R}$$

или

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_k + \dots + \bar{a}_n = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k.$$

В разных учебниках и учебных пособиях по теоретической механике и физике законы динамики формулируются по-разному, но смысл их остается одним и тем же. Общим в формулировке первого закона является констатация того, что если силы, приложенные к материальной точке либо к телу, которое можно принять за материальную точку, взаимно уравновешиваются, то она (или оно) в инерциальной системе отсчета движется равномерно и прямолинейно либо покоится. Это свойство материальных тел, известное как принцип инерции, было установлено Галилеем в 1638 г. на основании многочисленных опытов и наблюдений над движением тел. До Галилея считалось, что если на тело не действуют силы или действует уравновешенная система сил, то тело (или материальная точка) будет покоиться.

Некоторые авторы при формулировке первого закона динамики на первое место ставят утверждение о том, что существует такая система отсчета, по отношению к которой изолированная от внешних воздействий материальная точка либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно. Такая система отсчета называется **инерциальной**. Поэтому суть первого закона сводится к констатации существования инерциальной системы отсчета. В качестве такой системы с большой степенью точности можно принять систему координат с началом в центре Солнца и осями, направленными на три «неподвижные» звезды (так называемая гелиоцентрическая система).

Если необходимо учитывать суточное вращение Земли, то за инерциальную систему отсчета принимают геоцентрическую систему осей координат с началом в центре Земли и осями, направленными к трем выбранным «неподвижным» звездам.

Для большинства технических задач в качестве инерциальной системы отсчета можно принять систему осей, связанных с Землей, считая ее в данном случае неподвижной.

Так как в окружающем нас мире все движется, то покой является относительным, условным понятием и инерциальная система — это условно неподвижная система.

Теперь представим, что в инерциальной системе отсчета тело покоится, а относительно этой системы движется равномерно и прямолинейно поступательно другая система координат со скоростью  $\vec{V}$ . Поэтому в этой движущейся системе координат данное тело будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью  $-\vec{V}$ , т.е. в этой системе координат будет справедлив принцип инерции.

Таким образом, системы координат, движущиеся относительно инерциальной системы координат (системы отсчета) поступательно, равномерно и прямолинейно, также являются инерциальными системами отсчета.

Общим в формулировке второго закона является утверждение о том, что сила, действующая на материальную точку, ее масса и ускорение, которое она получает под действием этой силы, взаимосвязаны, но эти связи разные авторы формулируют по-разному. Одни на первое место ставят силу, другие — ускорение, например, *вектор силы, действующий на материальную точку, равен произведению массы точки на вектор ее ускорения*, или *ускорение точки, получаемое под действием приложенной силы, прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе точки*.

**Из истории динамики.** Как известно, основы динамики были заложены и развиты итальянским ученым *Галилео Галилеем* (1564—1642) и английским ученым *Исааком Ньютоном* (1643—1727).

В 1687 г. Ньютон опубликовал фундаментальное сочинение «Математические начала натуральной философии», в котором обобщил все то, что было сделано в механике до него, а также результаты своих научных исследований и наблюдений. В этой работе были сформулированы основные понятия и законы классической механики, на основе которых дано систематическое изложение динамики и показано ее применение к решению задач, связанных с движением тел, брошенных под углом

к горизонту, с движением тел в результате их взаимодействия при ударе, с движением небесных тел, а также с установлением соотношений между силами и скоростями точек их приложения применительно к простейшим машинам-блокам, полипас-там, клиновым и винтовым прессам.

Приведем некоторые положения механики в том виде, как это изложено Ньютоном в «Математических началах...», русский перевод которых выполнен академиком А.Н. Крыловым (1863–1945) в 1915–1916 гг. В дословном переводе с латинско-го аксиомы или законы движения, как их называл Ньютон, сформулированы следующим образом.

### **ЗАКОН I**

Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

### **ЗАКОН II**

Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

### **ЗАКОН III**

Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

*Четвертый закон* не был сформулирован Ньютоном как отдельный закон механики, но его суть была изложена в одном из следствий, в котором дано обобщение правила параллелограмма сил. Систему отсчета (систему координат), в которой справедливы установленные им законы и принцип инерции, он не называл инерциальной, как это принято сейчас. Он исходил из представления об абсолютном пространстве, считал, что оно «по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему остается всегда одинаковым и неподвижным», и рассматривал движение в этом пространстве.

Для системы отсчета, связанной с этим пространством, он и считал справедливыми первый и второй законы динамики. Последующее развитие представлений о пространстве привело к полному отрицанию понятия абсолютного пространства.

Релятивистская механика (специальная теория относительности), созданная в начале XX в. немецким физиком *Альбертом Эйнштейном* (1879–1955) и рядом других ученых, коренным образом изменила представления механики о пространстве, времени и массе. В соответствии с этой механикой при скоростях движения тел, близких к скорости света в пустоте ( $3 \cdot 10^5$  км/с), масса тел увеличивается, течение времени замедляется, размеры тел изменяются и геометрия Евклида неприменима.

Вторым допущением, лежащим в основе ньютоновой механики, является утверждение существования абсолютного времени, которое «...само по себе и самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему протекает равномерно...».

## 1.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пусть на материальную точку  $M$  массой  $m$  действуют одновременно несколько сил, среди которых есть как постоянные, так и переменные силы.

Второй закон динамики запишем в виде

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \bar{R}(t, \bar{r}, \bar{V}). \quad (1.2)$$

Так как

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}, \quad \bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt},$$

где  $\bar{r}$  — радиус-вектор движущейся точки, то уравнение (1.2) содержит производные от  $\bar{r}$  по времени и представляет собой дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме, или основное уравнение динамики материальной точки.

Проекция векторного уравнения (1.2):

- на оси декартовых координат (рис. 8,  $a$ )

$$\left. \begin{aligned} ma_x &= m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \\ ma_y &= m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \\ ma_z &= m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}; \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

- на естественные оси (рис. 8, б)

$$\left. \begin{aligned} ma_\tau &= m \frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{k_\tau}; \\ ma_n &= m \frac{V^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_{k_n}; \\ ma_b &= m \cdot 0 = \sum_{k=1}^n F_{k_b}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

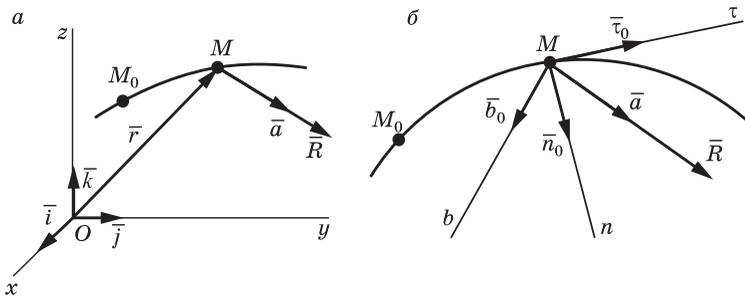


Рис. 8

Уравнения (1.3) и (1.4) являются дифференциальными уравнениями движения материальной точки соответственно в декартовых координатах и естественных осях. Последние называют естественными дифференциальными уравнениями движения, которые обычно применяются при криволинейном движении точки, если траектория точки известна.

Если при криволинейном движении точки в плоскости ее траектория неизвестна, то составляются два уравнения в проекциях на оси декартовых координат  $x$  и  $y$ , направленных в сторону движения.

При составлении дифференциальных уравнений движения в декартовых осях необходимо придерживаться такой последовательности.

1. Выбрать систему отсчета, поместив начало координат в начальном положении точки или в положении равновесия, если такое имеет место при движении точки. Оси направить в сторону движения.

2. Изобразить движущуюся точку в произвольном положении, но так, чтобы  $x > 0$ ,  $V_x > 0$  и т.д.

3. Показать активные силы, действующие на точку, и реакции связи, если точка несвободная.

4. Записать основное уравнение динамики в векторной форме с учетом всех сил, действующих на точку.

5. Спроецировать полученное векторное равенство на оси (или на одну из осей), определив проекции сил на оси координат и подставив сумму проекций сил в правую часть дифференциальных уравнений (или уравнения). При этом необходимо все переменные силы выразить через те величины ( $t, x, \dot{x}$  и т.д.), от которых эти силы зависят.

### 1.3. Две основные задачи динамики для материальной точки и их решение

#### 1.3.1. Первая (прямая) задача

|| Зная кинематический закон движения и массу точки, определить силу, действующую на точку.

Для решения этой задачи необходимо знать ускорение точки. В задачах этого типа оно может быть задано непосредственно либо задан кинематический закон движения точки, в соответствии с которым оно может быть определено.

1. Движение точки задано в декартовых координатах  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$  и  $z = f_3(t)$ . Определяются дифференцированием проекции ускорения на оси координат:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

а затем – проекции силы на эти оси:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m\ddot{x}; \\ F_y &= m\ddot{y}; \\ F_z &= m\ddot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Модуль и направление силы определяется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \\ \cos \left( \widehat{\vec{F}, \vec{i}} \right) &= \frac{F_x}{F}; \\ \cos \left( \widehat{\vec{F}, \vec{j}} \right) &= \frac{F_y}{F}; \\ \cos \left( \widehat{\vec{F}, \vec{k}} \right) &= \frac{F_z}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

**Пример 1.** Материальная точка массой  $m$  движется в плоскости  $Oxy$  согласно уравнениям  $x = 2t$  (м);  $y = 1 + 2t^2$  (м). Определить силу, действующую на точку.

**Решение.** Проекция силы на оси координат

$$F_x = m\ddot{x} = 0,$$

так как  $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2$ ;  $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 0$ ;

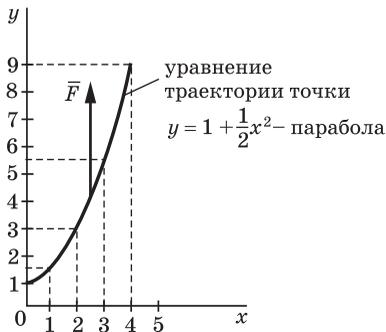


Рис. 9

$$F_y = m\ddot{y} = m \frac{d^2 y}{dt^2} = 4m,$$

так как  $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = 4t$ ;  $\ddot{y} = 4$ .

Сила, действующая на точку, направлена параллельно оси  $y$  (рис. 9) и  $F = |F_y| = 4m$ .

**2.** Точка совершает криволинейное движение, известен закон движения  $s = f(t)$ , траектория точки и ее радиус кривизны  $\rho$ . В этом случае удобно воспользоваться естественными осями. Проекция ускорения на эти оси определяются по известным формулам:

- на касательную ось

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \text{ — касательное ускорение;}$$

- на главную нормаль

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} \text{ — нормальное ускорение.}$$

Проекция ускорения на бинормаль равна нулю. Тогда проекции силы на естественные оси

$$\begin{aligned} F_\tau &= m \frac{dV}{dt}; \\ F_n &= m \frac{V^2}{\rho}; \quad F_b = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Модуль и направление силы определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}; \\ \cos \left( \hat{\bar{F}}, \hat{\bar{\tau}}_0 \right) &= \frac{F_\tau}{F}; \\ \cos \left( \hat{\bar{F}}, \hat{\bar{n}}_0 \right) &= \frac{F_n}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

**Пример 2.** Автомобиль массой  $m = 1000$  кг движется по выпуклому мосту со скоростью  $V = 20$  м/с. Радиус кривизны в середине моста  $\rho = 100$  м. Определить силу давления автомобиля на мост в момент, когда он находится на середине моста. Силами сопротивления пренебречь.

**Решение.** Считая автомобиль материальной точкой, изобразим его в середине моста и покажем силы: вес  $m\vec{g}$  и нормальную реакцию  $\vec{N}$  (рис. 10).

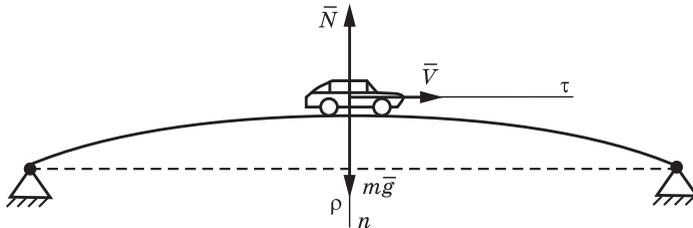


Рис. 10

Второй закон динамики в векторной форме

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Спроецируем это равенство на естественные оси  $\tau$  и  $n$ :

$$ma_{\tau} = m \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = \text{const};$$

$$\begin{aligned} ma_n &= m \frac{V^2}{\rho} = mg - N \Rightarrow N = mg - m \frac{V^2}{\rho} = \\ &= m \left( g - \frac{V^2}{\rho} \right) = 1000 \left( 9,8 - \frac{400}{100} \right) = 5,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Давление на мост равно по модулю реакции  $N$  и направлено вниз.

**3.** Точка совершает равнопеременное движение. Для определения ускорения используем формулы

$$\left. \begin{aligned} s &= V_0 t + \frac{a_{\tau} t^2}{2}; \\ V &= V_0 + a_{\tau} t, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

где  $t$  — время движения точки;  $s$  — пройденное за это время расстояние;  $V_0$  и  $V$  — начальная и конечная скорости точки;  $a_{\tau}$  — касательное ускорение.

При прямолинейном движении  $a_\tau = a$ ,  $a_n = 0$ . При  $V_0 = 0$  ускорение  $a$  определяется по одной из формул:

$$a = \frac{V}{t} \quad \text{или} \quad a = \frac{2s}{t^2}. \quad (1.10)$$

**Пример 3.** В кабине лифта, движущегося вверх равноускоренно без начальной скорости, стоит человек массой  $m$ . Определить давление человека на пол кабины, если за время  $t$  кабина поднялась на высоту  $h$ .

**Решение.** Объект исследования – человек. Ось  $Ox$  направим вверх. На человека действуют реакция пола  $\vec{N}$  и его вес  $\vec{G} = m\vec{g}$  (рис. 11).

Запишем второй закон динамики в векторной форме, а затем в проекции на ось  $x$ :

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}; \quad ma_x = N - G.$$

Проекция ускорения на ось  $x$  с учетом (1.10):

$$a_x = \frac{2h}{t^2}.$$

Реакция пола:

$$N = ma_x + G = m \left( g + \frac{2h}{t^2} \right).$$

Давление человека на пол равно реакции  $N$  и направлено в сторону, противоположную реакции, т.е. вниз.

**Примечание.** При движении лифта вниз ось  $x$  направляется также вниз. Тогда

$$ma_x = G - N \Rightarrow N = m \left( g - \frac{2h}{t^2} \right),$$

т.е. давление в этом случае меньше силы тяжести.

При решении первой (прямой) задачи динамики необходимо: а) определить объект движения, т.е. движение какого тела или точки следует рассматривать в данной задаче; б) изобра-

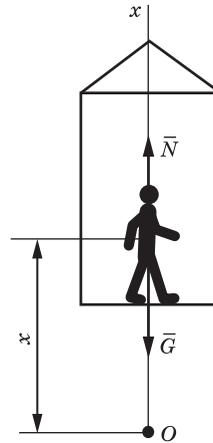


Рис. 11

зить на чертеже этот объект и показать все силы, действующие на него, включая и реакции связей; в) выбрать систему осей (декартовы или естественные). При этом оси (или ось) направить в сторону движения; г) записать второй закон динамики в векторной форме, а затем — в алгебраическом виде, спроецировав векторное уравнение на эти оси или на одну из осей; д) определить ускорение движения тела (точки), если оно не задано, в соответствии с выше приведенными уравнениями и подставить его в полученные алгебраические уравнения; е) найти в общем виде искомые величины, а затем подставить числовые значения, проверить правильность результата подсчетом размерностей.

### 1.3.2. Вторая (обратная) задача

Зная действующие на точку силы, ее массу и начальные условия движения, определить кинематический закон движения точки или какие-либо другие ее кинематические характеристики.

Начальные условия движения точки в декартовых осях — это координаты точки  $x_0, y_0, z_0$  и проекции начальной скорости  $\bar{V}_0$  на эти оси ( $V_{0x} = \dot{x}_0, V_{0y} = \dot{y}_0$  и  $V_{0z} = \dot{z}_0$ ) в момент времени, соответствующий началу движения точки и принимаемый равным нулю. Начальные условия движения позволяют из множества уравнений движения точки под действием одних и тех же сил получить единственное уравнение движения или определить соответствующие другие кинематические характеристики.

Решение задач этого типа сводится к составлению дифференциальных уравнений (или одного уравнения) движения материальной точки и их последующему интегрированию.

## 1.4. Интегрирование дифференциальных уравнений прямолинейного движения материальной точки

Для того чтобы материальная точка совершала прямолинейное движение, необходимо и достаточно, чтобы вектор действующей на нее силы был направлен все время вдоль одной и той же прямой, а начальная скорость была равна нулю или на-

правлена по линии действия силы. Не останавливаясь на доказательстве необходимости и достаточности условий прямолинейного движения, заметим, что если это условие не выполнено, движение точки под действием постоянной по направлению силы будет криволинейным. Примером тому служит движение тела под действием силы тяжести, брошенного под углом к горизонту с некоторой начальной скоростью.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки вдоль оси  $x$  под действием силы  $\vec{F}$ , которая, как указывалось выше, может быть постоянной или переменной, зависящей от времени, от скорости движения, от положения точки на оси или от совокупности этих величин (рис. 12).

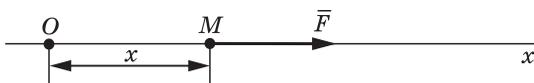


Рис. 12

В общем случае движение точки определяется дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}), \quad (1.11)$$

где  $\dot{x} = V_x$  — проекция скорости на ось  $x$ .

Интегрирование этого уравнения второго порядка производится методами, известными из курса высшей математики и зависящими от вида правой части дифференциального уравнения.

Следует заметить, что уравнение вида (1.11) может быть как линейным, содержащим линейные слагаемые функций  $(x, \dot{x}, \ddot{x})$ , т.е. слагаемые, в которые входят эти величины в первой степени, так и нелинейным. Не останавливаясь пока на методах интегрирования линейных дифференциальных уравнений, рассмотрим возможность решения путем понижения порядка дифференциального уравнения движения с последующим разделением переменных.

Понизить порядок дифференциального уравнения движения и затем разделить переменные можно при условии, что сила не зависит одновременно от координаты и времени.

Если сила  $F = F(t)$ , или  $F = F(\dot{x})$ , или  $F = F(\dot{x}, t)$ , то понижение порядка достигается подстановкой

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_x(t); \\ \ddot{x} &= \frac{dV_x}{dt}.\end{aligned}$$

В этом случае уравнение (1.11) принимает вид

$$m \frac{dV_x}{dt} = F(V_x, t). \quad (1.12)$$

Это уравнение допускает разделение переменных, если действует на точку только одна сила, которая одновременно является функцией  $\dot{x}$  и  $t$ .

Если сила  $F = F(x)$ , или  $F = F(\dot{x})$ , или  $F = F(\dot{x}, x)$ , то применяется подстановка

$$\left. \begin{aligned}\dot{x} &= V_x(x); \\ \ddot{x} &= \frac{dV_x(x)}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{V_x dV_x}{dx}.\end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

В этом случае уравнение (1.11) принимает вид

$$m \frac{V_x dV_x}{dx} = F(V_x, x). \quad (1.14)$$

Это уравнение допускает разделение переменных, если на точку действует только одна сила, зависящая от скорости и координаты точки.

Если в правую часть уравнений входят силы, одна из которых зависит от скорости, а вторая от времени или координаты, то проинтегрировать дифференциальные уравнения описанным выше путем не получается и необходимо применить другие методы решения дифференциальных уравнений.

Если дифференциальное уравнение является нелинейным, но допускает понижение порядка и разделение переменных, то его решение в некоторых случаях можно довести до конца в квадратурах.

Рассмотрим интегрирование уравнения (1.11) в следующих частных простейших случаях, понимая под  $F$  сумму проекций действующих на точку сил на ось  $x$ , стоящую в правой части дифференциального уравнения:

1-й –  $F = \text{const}$  – сила постоянная;

2-й –  $F = F(t)$  – сила является только функцией времени;

3-й –  $F = F(x)$  – сила является только функцией расстояния;

4-й –  $F = F(\dot{x})$  – сила является только функцией скорости.

**Первый случай:**

$$m\ddot{x} = F = \text{const} . \quad (1.15)$$

Понизим порядок дифференциального уравнения, заменив

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F . \text{ Разделим переменные и проинтегрируем:}$$

$$d\dot{x} = \frac{F}{m} dt \Rightarrow \dot{x} = \frac{F}{m} t + C_1 = f_1(t, C_1),$$

$$\text{где } \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t + C_1 .$$

Разделив в полученном выражении переменные и проинтегрировав, получим

$$dx = \frac{F}{m} t dt + C_1 dt \Rightarrow x = \frac{F}{2m} t^2 + C_1 t + C_2 \Rightarrow f(t, C_1, C_2) .$$

Постоянные интегрирования найдем с учетом начальных условий движения:  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ .

Тогда  $C_1 = \dot{x}_0$ ;  $C_2 = x_0$ .

Таким образом, решение дифференциального уравнения (1.15) в общем виде  $x = f(t, x_0, \dot{x}_0)$ .

**Пример 4.** На наклонную шероховатую плоскость поместили тяжелое тело и сообщили вверх вдоль плоскости начальную скорость  $V_0$ . Угол наклона плоскости равен  $\alpha$ , коэффициент трения скольжения –  $f$ . Определить: а) закон изменения скорости движения; б) закон движения тела по плоскости; в) время до остановки; г) расстояние, пройденное до остановки.

**Решение.** 1. Выберем начало координат в начальном положении тела, ось  $x$  направим в сторону движения тела.

2. Изобразим тело в произвольном положении на положительном направлении оси  $x$ , покажем силы, действующие на него: вес  $m\vec{g}$ , силу трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  и нормальную реакцию  $\vec{N}$  плоскости (рис. 13).

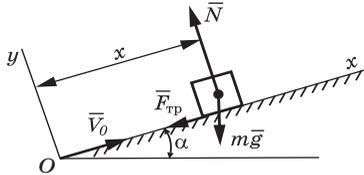


Рис. 13

3. Запишем дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось  $x$ :

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - F_{\text{тр}};$$

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg \cos \alpha.$$

Так как тело движется вдоль оси  $x$ , то  $m\ddot{y} = 0$ , или  $N - mg \cos \alpha = 0$ .

Отсюда  $N = mg \cos \alpha$ .

Тогда

$$\ddot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Проинтегрируем дважды это уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) &\Rightarrow \int d\dot{x} = \int -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + C_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + C_1 &\Rightarrow \int dx = \int -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t dt + \int C_1 dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Найдем постоянные интегрирования с учетом начальных условий движения:  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = V_0$ .

Тогда

$$\dot{x}_0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \dot{x}_0 = V_0;$$

$$x_0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0 = 0.$$

Закон изменения скорости

$$V = \dot{x} = V_0 - g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t.$$

Закон движения

$$x = V_0 t - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \frac{t^2}{2}.$$

Время до остановки определим из условия  $V = 0$  при  $t = T$ :

$$0 = V_0 - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot T \Rightarrow T = \frac{V_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

Пройденное расстояние до остановки

$$s = x_{|t=T} = V_0 T - g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \frac{T^2}{2} = \frac{V_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

**Примечание.** При движении тела по горизонтальной плоскости  $\alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0, \cos \alpha = 1$ .

**Второй случай:**

$$m\ddot{x} = F(t). \quad (1.16)$$

Преобразуем

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F(t) \Rightarrow d\dot{x} = \frac{1}{m} F(t) dt.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int F(t) dt + C_1.$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  найдем с учетом начальных условий движения:  $t = 0, \dot{x} = \dot{x}_0$ . Тогда

$$\dot{x} = f_1(t, \dot{x}_0),$$

где  $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f_1(t, \dot{x}_0)$ .

Отсюда  $dx = f_1(t, \dot{x}_0)dt$  и после интегрирования получим  $x = f(t, x_0, \dot{x}_0)$ .

**Пример 5.** На материальную точку массой  $m$ , находящуюся на гладкой горизонтальной плоскости, действует сила  $F = F_0 \sin kt$ , где  $k$  и  $F_0$  — постоянные величины. Точке из начала координат сообщили скорость  $V_0$  вдоль плоскости. Определить: а) закон изменения скорости движения; б) закон движения точки по плоскости.

**Решение.** 1. Выберем начало координат в начальном положении точки, ось  $x$  направим в сторону движения (рис. 14).

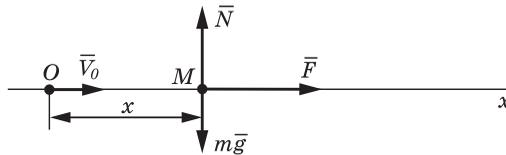


Рис. 14

2. Изобразим точку в произвольном положении на положительном направлении оси и покажем действующие на нее силы: вес  $m\bar{g}$ , нормальную реакцию плоскости  $\bar{N}$  и силу  $\bar{F}$ .

3. Запишем второй закон динамики в векторной форме и затем спроецируем это равенство на ось  $x$ :

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F};$$

$$ma_x = mg_x + N_x + F_x$$

или

$$m\ddot{x} = F = F_0 \sin kt.$$

Отсюда

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{F_0}{m} \sin kt.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$d\dot{x} = \frac{F_0}{m} \sin ktdt \Rightarrow \dot{x} = \int \frac{F_0}{m} \sin ktdt = -\frac{F_0}{mk} \cos kt + C_1.$$

Заменяем

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\frac{F_0}{mk} \cos kt + C_1.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$dx = -\frac{F_0}{mk} \cos ktdt + C_1 dt.$$

Отсюда

$$x = -\frac{F_0}{mk^2} \sin kt + C_1 t + C_2.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определим с учетом начальных условий движения:  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = V_0$ .

Тогда

$$V_0 = -\frac{F_0}{mk} \cos(0) + C_1 \Rightarrow C_1 = V_0 + \frac{F_0}{mk}, \quad C_2 = 0.$$

Закон изменения скорости

$$V = \dot{x} = V_0 + \frac{F_0}{mk} - \frac{F_0}{mk} \cos kt = V_0 + \frac{F_0}{mk} (1 - \cos kt).$$

Закон движения груза

$$x = \left( V_0 + \frac{F_0}{mk} \right) t - \frac{F_0}{mk^2} \sin kt.$$

**Третий случай:**

$$m\ddot{x} = F(x). \quad (1.17)$$

Понижим порядок, представив

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F(x).$$

В этом случае три переменные:  $\dot{x}$ ,  $x$  и  $t$ . Поэтому исключим одну переменную, оставив две, что позволит разделить переменные и затем проинтегрировать.

Для этого умножим и разделим на  $dx$  производную  $\frac{d\dot{x}}{dt}$ , получим

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}. \quad (1.18)$$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{m} F(x) \Rightarrow \dot{x}d\dot{x} = \frac{1}{m} F(x)dx.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{m} \int F(x)dx + C_1.$$

Решив это уравнение относительно  $\dot{x}$  после вычисления интеграла и определения постоянной интегрирования  $C_1$  с учетом начальных условий движения:  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0 = V_0$ , получим закон изменения скорости

$$\dot{x} = \varphi(x, x_0, \dot{x}_0).$$

Затем представив

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varphi(x, x_0, \dot{x}_0),$$

разделим переменные

$$\frac{dx}{\varphi(x, x_0, \dot{x}_0)} = dt$$

и проинтегрируем.

Если выражение, полученное после интегрирования, можно разрешить относительно  $x$ , то получим закон движения точки  $x = f(t, x_0, \dot{x}_0)$ .

**Пример 6.** Материальная точка движется вдоль оси  $x$  вблизи положения равновесия  $O$  под действием восстанавливающей силы  $\bar{F}$ , пропорциональной отклонению  $x$  точки от этого положения. Проекция этой силы на ось  $x$  следующая:

$$F_x = -cx,$$

где  $c$  – постоянный коэффициент пропорциональности.

В начальный момент при  $t = 0$  точка находилась от центра равновесия на расстоянии  $x_0$  и имела скорость  $\dot{x}_0 > 0$ . Определить закон движения точки.

**Решение.** 1. Выберем начало координат в положении равновесия и ось  $x$  направим в сторону движения (рис. 15).



Рис. 15

2. Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на эту ось:

$$m\ddot{x} = -cx, \text{ или } \ddot{x} = -\frac{c}{m}x.$$

Обозначим  $\frac{c}{m} = k^2$ . Тогда  $\ddot{x} = \frac{dx}{dt} = -k^2x$ . Исключим из этого уравнения время  $dt$ , используя (1.18):

$$\frac{\dot{x}dx}{dx} = -k^2x.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = -k^2 \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Определим  $C_1$  с учетом начальных условий движения:  $t = 0, x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$ .

$$\frac{\dot{x}_0^2}{2} = -k^2 \frac{x_0^2}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}(\dot{x}_0^2 + k^2x_0^2).$$

Найдем выражение для проекции скорости на ось  $x$ :

$$\dot{x} = \sqrt{\dot{x}_0^2 + k^2 x_0^2 - k^2 x^2} = k \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2} - x^2}.$$

Обозначим

$$x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2} = a^2.$$

Тогда

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = k \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int k dt \Rightarrow \arcsin \frac{x}{a} = kt + C_2.$$

С учетом начальных условий при  $t = 0$ ,  $x = x_0$

$$C_2 = \arcsin \frac{x_0}{a}.$$

Подставим  $C_2$  и решим полученное уравнение относительно  $x$ :

$$\arcsin \frac{x}{a} = kt + \arcsin \frac{x_0}{a} \Rightarrow \frac{x}{a} = \sin(kt + \arcsin \frac{x_0}{a}).$$

Обозначим

$$\arcsin \frac{x_0}{a} = \alpha.$$

Тогда закон движения точки

$$x = a \sin(kt + \alpha),$$

т.е. точка будет совершать гармонические колебания, подробный анализ которых приведен в гл. 2. Там же рассмотрен другой способ решения полученного в этом примере дифференциального уравнения.

**Четвертый случай:**

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}). \quad (1.19)$$

Возможны два способа интегрирования этого уравнения.  
*Первый способ.* Преобразуем уравнение, заменив

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F(\dot{x}).$$

Разделим переменные

$$\frac{d\dot{x}}{F(\dot{x})} = \frac{dt}{m}.$$

Проинтегрируем это уравнение и из полученного уравнения найдем  $\dot{x}$  :

$$\int \frac{d\dot{x}}{F(\dot{x})} = \frac{1}{m} \int dt \Rightarrow \dot{x} = f_1(t, C_1).$$

Представим  $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f_1(t, C_1)$ . После разделения переменных и интегрирования получим закон движения точки  $x = f(t, C_1, C_2)$ . Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  являются функциями начальных условий движения:  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0 = V_0$  при  $t = 0$ .

Тогда закон изменения скорости

$$\dot{x} = f_1(t, \dot{x}_0).$$

Закон движения точки

$$x = f(t, x, \dot{x}_0).$$

*Примечание.* Если в правой части уравнения (1.19) кроме силы, зависящей от скорости, содержатся некоторые постоянные силы, то нужно при разделении переменных всю правую часть считать функцией скорости.

Этот способ интегрирования дифференциального уравнения (1.19) позволяет найти не только закон движения точки, но и закон изменения скорости точки с течением времени, что позволяет определить время, в течение которого точка пройдет

некоторое заданное расстояние, и какую она будет иметь в это время скорость.

*Второй способ.* Если требуется найти зависимость скорости от координаты  $x$  или пройденное точкой расстояние при изменении скорости от  $V_0$  до  $V$ , уравнение (1.19) преобразуем, исключив время  $dt$ . Тогда

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{m}F(\dot{x}). \quad (1.20)$$

Разделим переменные:

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{F(\dot{x})} = \frac{dx}{m}.$$

Возьмем определенные интегралы от обеих частей равенства и из полученного выражения найдем  $\dot{x}$ :

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{\dot{x}d\dot{x}}{F(\dot{x})} = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x dx \Rightarrow \dot{x} = \varphi(x, x_0, \dot{x}_0).$$

Представим  $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varphi(x, x_0, \dot{x}_0)$ .

Разделим переменные, проинтегрируем и из полученного выражения найдем  $x$ :

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\varphi(x, x_0, \dot{x}_0)} = \int_0^t dt \Rightarrow x = f(t, x_0, \dot{x}_0).$$

Закон движения точки, полученный различными способами интегрирования дифференциального уравнения (1.19), безусловно, будет одним и тем же, но математические преобразования для получения этого уравнения будут разными.

**Пример 7.** Тело массой  $m$  движется горизонтально в среде, сила сопротивления которой  $\bar{R} = -k\bar{V}$ . В начальный момент телу сообщили начальную скорость  $V_0$ . Определить при  $k = \text{const}$ : а) закон изменения скорости движения; б) закон движения тела; в) время движения, за которое скорость уменьшилась в 2 раза; г) пройденное за это время расстояние.

**Решение.** 1. Выберем начало координат в начальном положении тела, ось  $x$  направим в сторону движения.

2. Покажем в произвольном положении тела силы, действующие на него: вес  $m\bar{g}$ , силу сопротивления  $\bar{R}$ , нормальную реакцию  $\bar{N}$  (или выталкивающую силу вязкой среды) (рис. 16).

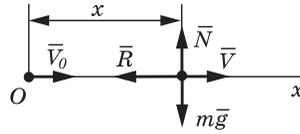


Рис. 16

3. Запишем дифференциальное уравнение движения тела вдоль оси  $x$ :

$$m\ddot{x} = -R,$$

где  $R = |\bar{R}| = kV$ .

Обозначим

$$\dot{x} = V, \quad \ddot{x} = \frac{dV}{dt}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} = -kV &\Rightarrow \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = -\int_0^t \frac{k}{m} dt \Rightarrow \ln V \Big|_{V_0}^V = -\frac{k}{m} t \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \frac{V}{V_0} = -\frac{k}{m} t &\Rightarrow V = V_0 e^{-\frac{k}{m} t}, \end{aligned}$$

что является законом изменения скорости.

Представим

$$V = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = V_0 e^{-\frac{k}{m} t}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int dx = \int V_0 e^{-\frac{k}{m} t} dt \Rightarrow x = -\frac{m}{k} V_0 e^{-\frac{k}{m} t} + C$$

(взяв неопределенный интеграл). Постоянную интегрирования  $C$  найдем с учетом того, что  $x_0 = 0$  при  $t = 0$ :

$$0 = -\frac{m}{k} V_0 e^0 + C \Rightarrow C = \frac{V_0 m}{k}.$$

Примечание:  $e^0 = 1$ .

Закон движения:

$$x = \frac{V_0 m}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right).$$

Находим время  $T$  при  $V = \frac{V_0}{2}$ :

$$\frac{V_0}{2} = V_0 e^{-\frac{k}{m} T} \Rightarrow 2 = e^{\frac{k}{m} T} \Rightarrow \ln 2 = \frac{k}{m} T \ln e \Rightarrow T = \frac{m}{k} \ln 2.$$

Примечание:  $\ln e = 1$ .

Пройденное за это время расстояние

$$\begin{aligned} s = x_{|t=T} &= \frac{V_0 m}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m} \frac{m}{k} \ln 2} \right) = \frac{V_0 m}{k} (1 - e^{-\ln 2}) = \\ &= \frac{V_0 m}{k} \left( 1 - \frac{1}{e^{\ln 2}} \right) = \frac{V_0 m}{k} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{V_0 m}{2k}. \end{aligned}$$

Примечание:  $e^{\ln 2} = b \Rightarrow \ln 2 \ln e = \ln b \Rightarrow b = 2$ .

**Пример 8.** При условии примера 7 определить: а) зависимость скорости точки от пройденного расстояния; б) закон движения тела; в) пройденное телом расстояние, на котором скорость уменьшилась в 2 раза.

**Решение.** 1. Запишем дифференциальное уравнение движения в виде

$$\frac{\dot{x} d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{m} F(\dot{x}).$$

Обозначим

$$\dot{x} = V;$$

$$F(\dot{x}) = -kV.$$

Тогда

$$\frac{V dV}{dx} = -\frac{1}{m} kV.$$

Сократим на  $V$ , разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_{V_0}^V dV = -\frac{k}{m} \int dx.$$

После преобразований получим зависимость скорости от расстояния:

$$V = V_0 - \frac{k}{m}x.$$

2. Заменяем  $V = \frac{dx}{dt} = V_0 - \frac{k}{m}x$ .

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int \frac{dx}{V_0 - \frac{k}{m}x} = \int dt \Rightarrow -\frac{m}{k} \ln \left( V_0 - \frac{k}{m}x \right) = t + C.$$

Найдем постоянную интегрирования  $C$ , учитывая, что при  $t = 0$ ,  $x = x_0 = 0$ :

$$-\frac{m}{k} \ln V_0 = 0 + C \Rightarrow C = -\frac{m}{k} \ln V_0.$$

Тогда

$$-\frac{m}{k} \ln \left( V_0 - \frac{k}{m}x \right) = t - \frac{m}{k} \ln V_0,$$

или

$$\ln \frac{V_0 - \frac{k}{m}x}{V_0} = -\frac{k}{m}t.$$

Потенцируем это выражение и полученное равенство решим относительно  $x$ :

$$\frac{V_0 - \frac{k}{m}x}{V_0} = e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Закон движения тела:

$$x = \frac{V_0 m}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

3. Расстояние  $s$  при  $V = \frac{V_0}{2}$  следующее:

$$\frac{V_0}{2} = V_0 - \frac{k}{m}s \Rightarrow s = \frac{V_0 m}{2k}.$$

Из анализа решения примеров 7 и 8 следует, что закон движения и пройденное телом расстояние не зависят от способа решения.

### 1.5. Криволинейное движение материальной точки

Криволинейное движение будет совершать тело, принимаемое за материальную точку, брошенное под углом к горизонту с некоторой начальной скоростью  $\vec{V}_0$ , без учета сопротивления воздуха (рис. 17, *а*) или с учетом сопротивления (рис. 17, *б*), либо материальная точка под действием силы притяжения к некоторому центру (рис. 18, *а*) или силы отталкивания от центра (рис. 18, *б*) с начальной скоростью  $\vec{V}_0$ , не совпадающий с направлением вектора силы.

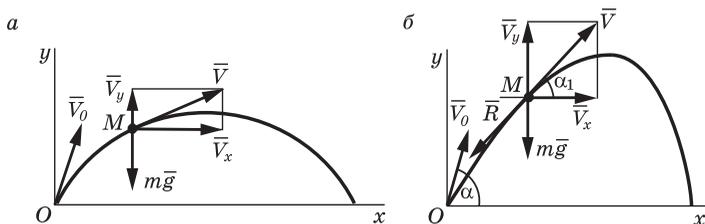


Рис. 17

Будем считать, что движение точки в обоих случаях происходит в плоскости  $Oxy$ , но эта плоскость в первом случае (рис. 17) – вертикальная, а во втором (рис. 18) – горизонтальная. Поэтому необходимо в каждом случае составить по два дифференциальных уравнения в проекциях на оси  $x$  и  $y$ . Для первого случая совместим начало координат  $O$  с точкой вылета тела, ось  $x$  направим по горизонтали вправо, а ось  $y$  – вверх по вертикали.

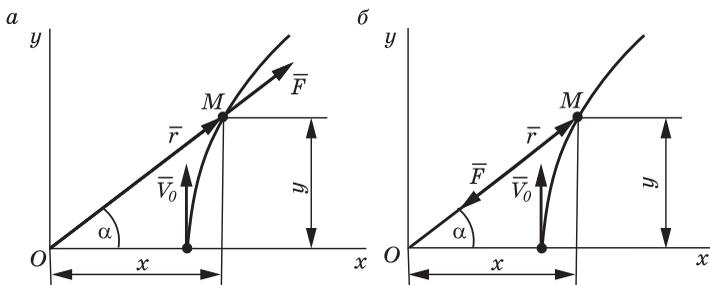


Рис. 18

Дифференциальные уравнения движения тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $\bar{V}_0$ , без учета сопротивления

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = -mg. \quad (1.21)$$

Из этих уравнений проекции ускорения на оси координат

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g. \quad (1.22)$$

Проинтегрировав дважды каждое уравнение при начальных условиях движения  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = V_0 \cos \alpha$ ,  $\dot{y}_0 = V_0 \sin \alpha$  при  $t = 0$ , получим

$$x = V_0 t \cos \alpha; \quad y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.23)$$

Исключив из этих уравнений время  $t$ , получим уравнение траектории в координатной форме

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1.24)$$

Траектория представляет собой параболу.

Составим дифференциальные уравнения движения точки с учетом сопротивления воздуха. В этом случае сила сопротивления  $\bar{R} = \bar{R}(\bar{V})$  направлена по касательной к траектории противоположно вектору скорости.

Запишем второй закон динамики в векторной форме:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{R}. \quad (1.25)$$

Спроецируем векторное равенство (1.25) на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= mg_x + R_x = 0 - |\bar{R}| \cos \alpha_1; \\ m\ddot{y} &= mg_y + R_y = -mg - |\bar{R}| \sin \alpha_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Определим  $\cos \alpha_1$  и  $\sin \alpha_1$  с учетом разложения вектора  $\bar{V}$  на составляющие (рис. 17, б):

$$\cos \alpha_1 = \frac{V_x}{V}; \quad \sin \alpha_1 = \frac{V_y}{V}. \quad (1.27)$$

Тогда дифференциальные уравнения движения примут вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -|\bar{R}| \frac{V_x}{V}; \\ m\ddot{y} &= -mg - |\bar{R}| \frac{V_y}{V}. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Пусть  $|\bar{R}| = |\bar{R}(V)| = \mu V$ , т.е. сила сопротивления пропорциональна скорости в первой степени.

Тогда дифференциальные уравнения с учетом (1.28)

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -\mu V \frac{V_x}{V} = -\mu V_x; \\ m\ddot{y} &= -mg - \mu V \frac{V_y}{V} = -mg - \mu V_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Понизим порядок этих уравнений, введя подстановку

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_x, \quad \ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}; \\ \dot{y} &= V_y, \quad \ddot{y} = \frac{dV_y}{dt}, \end{aligned}$$

и поделим на массу  $m$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= -\frac{\mu}{m} V_x; \\ \frac{dV_y}{dt} &= -g - \frac{\mu}{m} V_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Полученные уравнения являются уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными. Каждое из этих уравнений достаточно просто интегрируется независимо друг от друга аналогично рассмотренному в п. 1.4 случаю, когда сила зависит от скорости.

Если сила сопротивления зависит от скорости в иной степени, например, в квадрате, т.е.

$$|\bar{R}| = |\bar{R}(V)| = \mu V^2,$$

то ее проекции на оси координат

$$R_x = -|\bar{R}| \cos \alpha_1 = -\mu V^2 \frac{V_x}{V} = -\mu V_x V = -\mu V_x \sqrt{V_x^2 + V_y^2};$$

$$R_y = -|\bar{R}| \sin \alpha_1 = -\mu V^2 \frac{V_y}{V} = -\mu V_y \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

В этом случае дифференциальные уравнения движения можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= -\frac{\mu}{m} V_x \sqrt{V_x^2 + V_y^2}; \\ \frac{dV_y}{dt} &= -g - \frac{\mu}{m} V_y \sqrt{V_x^2 + V_y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

В этих уравнениях нельзя разделить переменные и их решение в квадратурах невозможно.

Не останавливаясь на решении уравнений (1.30) и подробном исследовании движения тела, брошенного под углом к горизонту, с учетом сопротивления, отметим, что в этом случае траекторией точки является баллистическая кривая. Проекции силы сопротивления  $\bar{R}$  на оси координат можно записать в более общем виде.

Для этого силу  $\bar{R}$  представим формулой

$$\bar{R} = -f(V) \frac{\bar{V}}{V}, \quad (1.32)$$

где  $\frac{\bar{V}}{V}$  – единичный вектор, направленный по вектору силы;

$f(V)$  – модуль силы  $R$ .

Пусть

$$f(V) = \mu V,$$

тогда

$$R_x = -\mu V \frac{V_x}{V} = -\mu V_x;$$

$$R_y = -\mu V \frac{V_y}{V} = -\mu V_y.$$

Если

$$f(V) = \mu V^2,$$

то

$$R_x = -\mu V^2 \frac{V_x}{V} = -\mu V V_x = -\mu V_x \sqrt{V_x^2 + V_y^2};$$

$$R_y = -\mu V^2 \frac{V_y}{V} = -\mu V_y V = -\mu V_y \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

что соответствует полученным ранее выражениям.

Аналогично можно определить проекции силы сопротивления, зависящей от скорости в любой степени. Например,

$$f(V) = \mu V^{5/3};$$

$$F_x = -\frac{f(V)}{V} V_x = -\mu V_x V^{2/3}.$$

При составлении дифференциальных уравнений движения точки под действием силы  $\vec{F} = \bar{F}(\vec{r})$  выберем начало координат  $O$  в центре, от которого отталкивается (рис. 18, а) или к которому притягивается (рис. 18, б) точка.

Пусть сила отталкивания задается формулой

$$\vec{F} = k^2 m \vec{r}. \quad (1.33)$$

Тогда проекции силы на оси координат следующие:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= |\bar{F}| \cos \alpha = k^2 m z \frac{x}{r} = k^2 m x; \\ F_y &= |\bar{F}| \sin \alpha = k^2 m z \frac{y}{r} = k^2 m y. \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

Сила притяжения к центру  $O$

$$\vec{F} = -k^2 m \vec{r}. \quad (1.35)$$

Ее проекции на оси координат

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -|\bar{F}| \cos \alpha = -k^2 m r \frac{x}{r} = -k^2 m x; \\ F_y &= -|\bar{F}| \sin \alpha = -k^2 m r \frac{y}{r} = -k^2 m y. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Дифференциальные уравнения движения точки при отталкивании от центра

$$m\ddot{x} = F_x = k^2 m x;$$

$$m\ddot{y} = F_y = k^2 m y,$$

или после сокращения на  $m$

$$\ddot{x} = k^2 x; \quad \ddot{y} = k^2 y. \quad (1.37)$$

Дифференциальные уравнения движения точки в случае притяжения к центру

$$m\ddot{x} = F_x = -k^2 m x;$$

$$m\ddot{y} = F_y = -k^2 m y,$$

или после сокращения на  $m$

$$\ddot{x} = -k^2 x; \ddot{y} = -k^2 y. \quad (1.38)$$

Уравнения (1.37) и (1.38) являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка, допускающими понижение порядка с последующим разделением переменных. Поэтому независимо друг от друга эти уравнения могут быть проинтегрированы описанным в п. 1.4 методом (см. пример 6). Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\ddot{x} - k^2 x = 0; \ddot{y} - k^2 y = 0 \quad (1.37')$$

и

$$\ddot{x} + k^2 x = 0; \ddot{y} + k^2 y = 0. \quad (1.38')$$

Представленные в таком виде уравнения (1.37) и (1.38) являются однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами\*.

## 1.6. Динамика несвободной материальной точки

*Несвободной материальной точкой* называется точка, на которую наложены связи. Связями могут быть поверхности тел, тела в виде линий, нитей и т.п. Примеры связей приведены на рис. 19:  $a$  — поверхность, ее уравнение  $f(x, y, z) = 0$ ;  $b$  — изогнутая трубка (желоб);  $в$  — плоская неподвижная линия.

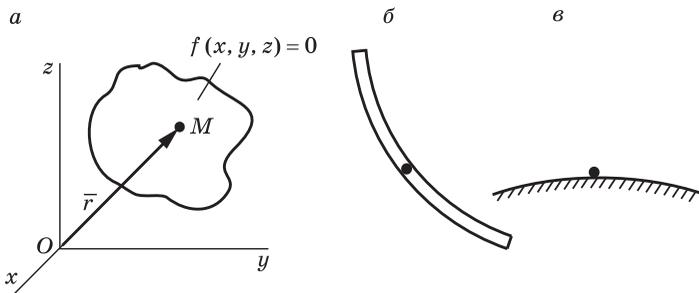


Рис. 19

**Примечание.** Подробная классификация связей изложена в п. 7.1.

\* Решение уравнений такого вида осуществляется с использованием теории дифференциальных уравнений и показано в примере 11 и п. 2.2.

В соответствии с принципом освобождения от связей их можно заменить силами — реакциями связей.

Основной закон динамики для несвободной материальной точки, ее дифференциальные уравнения движения записываются аналогично уравнениям для свободной, но при этом к действующим на точку активным силам добавляются силы реакции связи. Поэтому **вторая задача** динамики для несвободной точки формулируется так: по заданным активным силам, массе точки, начальным условиям движения и связям, наложенным на точку, определить кинематический закон или какие-либо другие кинематические характеристики движения этой точки и силу реакции связи.

Если связь представляет собой абсолютно гладкую поверхность, то реакция связи в этом случае направлена по нормали к поверхности и называется нормальной реакцией  $\bar{N}$ .

Тогда второй закон динамики для несвободной точки имеет вид

$$m\bar{a} = \Sigma \bar{F}_k + \bar{N}. \quad (1.39)$$

Спроецируем векторное равенство (1.39) на оси декартовых координат:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{k=1}^n F_{kx} + N_x; \\ m\ddot{y} &= \sum_{k=1}^n F_{ky} + N_y; \\ m\ddot{z} &= \sum_{k=1}^n F_{kz} + N_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Проекции  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$  силы  $\bar{N}$  определим по формулам

$$\left. \begin{aligned} N_x &= N \cos \left( \bar{N}, \hat{i} \right); \\ N_y &= N \cos \left( \bar{N}, \hat{j} \right); \\ N_z &= N \cos \left( \bar{N}, \hat{k} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

где  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  орты осей координат.

Косинусы углов, образованных направлением  $\bar{N}$  с осями координат, можно определить по формулам дифференциальной геометрии как направляющие косинусы внешней нормали к поверхности, уравнение которой  $f(x, y, z) = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{N}, \bar{i}) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}; \\ \cos(\bar{N}, \bar{j}) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}; \\ \cos(\bar{N}, \bar{k}) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f}, \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

где

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (1.43)$$

Учитывая выражения (1.41), (1.43) и введя обозначение отношения  $\frac{N}{\Delta f} = \lambda$  (неопределенный множитель Лагранжа), получим уравнения (1.40) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{k=1}^n F_{kx} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \\ m\ddot{y} &= \sum_{k=1}^n F_{ky} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \\ m\ddot{z} &= \sum_{k=1}^n F_{kz} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Уравнения (1.44) называются дифференциальными уравнениями движения несвободной материальной точки в форме Лагранжа. Из этих уравнений с учетом уравнения связи можно определить неизвестные величины – координаты  $x, y, z$  и множитель Лагранжа  $\lambda$ .

Алгебраическое значение нормальной реакции поверхности определяется по формуле

$$N = \lambda \Delta f. \quad (1.45)$$

При движении точки по гладкой кривой равенство (1.39) можно записать в проекциях на естественные оси — касательную, главную нормаль и бинормаль и получить дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки в форме Эйлера, аналогичные уравнениям (1.4) для свободной точки:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= \sum_{k=1}^n F_{k_t}; \\ m \frac{V^2}{\rho} &= \sum_{k=1}^n F_{k_n} + N_n; \\ 0 &= \sum_{k=1}^n F_{k_b} + N_b. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

При учете силы трения уравнения (1.44) и (1.46) и их решение значительно усложняются, а в ряде случаев их аналитическое решение невозможно.

**Пример 9.** На неподвижную гладкую сферическую поверхность радиуса  $R = 0,5$  м помещена тяжелая материальная точка. Определить, при каком значении угла  $\varphi$  точка при движении по этой поверхности из положения  $M_0$  без начальной скорости отделится от поверхности и чему будет равна скорость точки в этот момент времени (рис. 20, а).

**Решение.** 1. Изобразим точку на поверхности сферы в произвольном положении, определяемом углом  $\varphi$ . Будем считать, что плоскость, в которой движется точка, совпадает с плоскостью чертежа. Покажем действующие на точку  $M$  силы: нормальную реакцию  $\bar{N}$  поверхности и силу тяжести  $m\bar{g}$  (рис. 20, б).

2. Составим дифференциальные уравнения движения точки в форме Эйлера, т.е. в проекциях на естественные оси: главную нормаль  $n$  и касательную  $\tau$ :

$$m \frac{V^2}{R} = mg \cos \varphi - N; \quad (1)$$

$$m \frac{dV}{dt} = mg \sin \varphi. \quad (2)$$

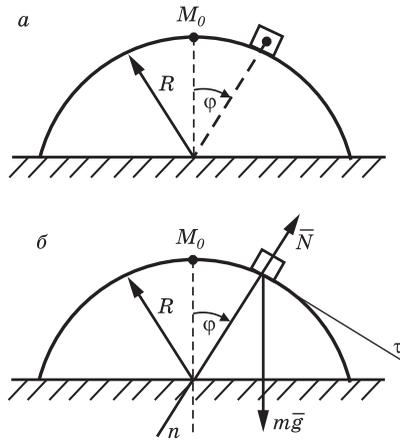


Рис. 20

В момент отрыва точки от поверхности нормальная реакция  $N = 0$ . Тогда из уравнения (1)

$$\cos \varphi_{\text{от}} = \frac{V_{\text{от}}^2}{Rg}, \quad (3)$$

где  $\varphi_{\text{от}}$  и  $V_{\text{от}}$  — угол и скорость в момент отрыва.

Для определения  $V_{\text{от}}$  проинтегрируем уравнение (2), в котором  $V = \omega R$ , где  $\omega$  — скорость изменения угла  $\varphi$ . С учетом этого уравнение примет вид

$$R \frac{d\omega}{dt} = g \sin \varphi.$$

Введем подстановку

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi}. \quad (4)$$

Тогда получим

$$\frac{\omega d\omega}{d\varphi} = \frac{g}{R} \sin \varphi.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_0^{\omega_{\text{от}}} \omega d\omega = \int_0^{\varphi_{\text{от}}} \frac{g}{R} \sin \varphi d\varphi.$$

Получим

$$\frac{\omega_{\text{от}}^2}{2} = \frac{g}{R}(1 - \cos \varphi_{\text{от}}). \quad (5)$$

Умножим это равенство на  $R^2$  и учтем, что  $R^2 \omega_{\text{от}}^2 = V_{\text{от}}^2$ . Тогда

$$V_{\text{от}}^2 = 2gR(1 - \cos \varphi_{\text{от}}). \quad (6)$$

Решив совместно уравнения (3) и (6), получим

$$V_{\text{от}} = \sqrt{\frac{2}{3}Rg} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 9,8} = 1,83 \text{ м/с}, \quad \cos \varphi_{\text{от}} = \frac{2}{3}$$

или  $\varphi_{\text{от}} = 48^\circ 11'$ .

## 1.7. Динамика относительного движения материальной точки

*Относительным движением* материальной точки называется движение точки в неинерциальной системе координат.

Пусть  $O_1x_1y_1z_1$  — инерциальная система, которую примем за условно неподвижную. В этой системе точка совершает абсолютное движение.

Система  $Oxyz$  — неинерциальная система, которая в общем случае может двигаться относительно инерциальной как свободное твердое тело (рис. 21).

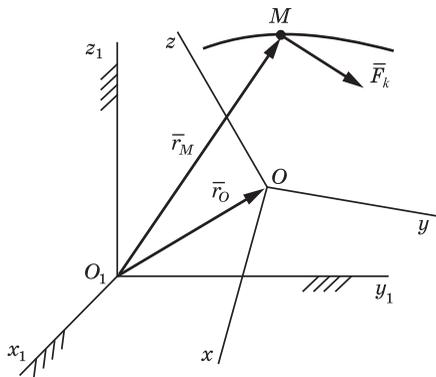


Рис. 21

Второй закон динамики в системе  $O_1x_1y_1z_1$  имеет вид

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \quad (1.47)$$

где  $\bar{a}$  — абсолютное ускорение точки, которое согласно теореме сложения ускорений может быть представлено как геометрическая сумма переносного  $\bar{a}_e$ , относительного  $\bar{a}_r$  и кориолисова  $\bar{a}_C$  ускорений, т.е.

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_C. \quad (1.48)$$

Подставив (1.48) в уравнение (1.47), получим второй закон динамики в системе  $Oxyz$ , т.е. в неинерциальной системе отсчета, или основное уравнение динамики относительного движения:

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_C, \quad (1.49)$$

где  $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$  и  $\bar{\Phi}_C = -m\bar{a}_C$  имеют размерность силы и называются *переносной* и *кориолисовой силами инерции*. Эти силы называют эйлеровыми силами инерции.

Проецируя уравнение (1.49) на подвижные оси  $Oxyz$ , получим дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки в декартовых осях:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{C_x}; \\ m\ddot{y} &= \sum F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{C_y}; \\ m\ddot{z} &= \sum F_{kz} + \Phi_{ez} + \Phi_{C_z}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

Уравнение (1.49) можно также записать в проекциях на естественные оси. Данное уравнение выражает динамическую теорему Кориолиса. Рассмотрим частные случаи этой теоремы.

**1.** Переносное движение — неравномерное вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

В этом случае переносное ускорение

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^{\text{II}} + \bar{a}_e^{\text{B}},$$

где  $\bar{a}_e^{\text{Ц}}$  и  $\bar{a}_e^{\text{В}}$  – соответственно центростремительное и вращательное ускорения.

Тогда переносная сила инерции в уравнении (1.49) будет представлена суммой переносной центробежной  $\bar{\Phi}_e^{\text{Ц}} = -m\bar{a}_e^{\text{Ц}}$  и переносной вращательной  $\bar{\Phi}_e^{\text{В}} = -m\bar{a}_e^{\text{В}}$  силами инерции, т.е.

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e = -m\bar{a}_e^{\text{Ц}} + (-m\bar{a}_e^{\text{В}}) = \bar{\Phi}_e^{\text{Ц}} + \bar{\Phi}_e^{\text{В}}.$$

**2.** Переносное движение – равномерное вращение тела вокруг неподвижной оси.

В этом случае  $\bar{\omega}_e = \overline{\text{const}}$ ,  $\bar{\varepsilon}_e = 0$  и  $\bar{a}_e^{\text{В}} = 0$ , а  $\bar{a}_e = \bar{a}_e^{\text{Ц}}$  и  $\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^{\text{Ц}}$ .

Этот случай имеет место при движении тел относительно Земли.

**3.** Переносное движение – поступательное криволинейное неравномерное.

В этом случае  $\bar{\omega}_e = 0$ ,  $\bar{a}_C = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r = 0$  и кориолисова сила инерции  $\bar{\Phi}_C = 0$ .

Переносная сила инерции

$$\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_e^\tau,$$

где  $\bar{\Phi}_e^n$  – нормальная переносная сила инерции,  $\bar{\Phi}_e^n = -m\bar{a}_e^n$ ;

$\bar{\Phi}_e^\tau$  – касательная переносная сила инерции,  $\bar{\Phi}_e^\tau = -m\bar{a}_e^\tau$ .

Модули нормального и касательного ускорений определяются по известным формулам

$$a_e^n = \frac{V_e^2}{\rho}; a_e^\tau = \frac{dV_e}{dt},$$

где  $V_e$  – переносная скорость;  $\rho$  – радиус кривизны траектории.

При равномерном поступательном криволинейном движении  $V_e = \text{const}$ , касательное ускорение  $a_e^\tau = 0$ , а переносная сила инерции  $\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^n$ .

4. Переносное движение – поступательное неравномерное прямолинейное.

В этом случае  $\bar{a}_e^n = 0$ ,  $\bar{a}_C = 0$ , переносная сила инерции  $\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^\tau = -m \frac{d\bar{V}_e}{dt}$ , кориолисова сила инерции  $\bar{\Phi}_C = 0$ .

5. Переносное движение – поступательное равномерное прямолинейное.

В этом случае  $\bar{a}_e^n = 0$ ,  $\bar{a}_e^\tau = 0$ ,  $\bar{a}_C = 0$ . Тогда абсолютное ускорение (1.48)  $\bar{a} = \bar{a}_r$ , а основное уравнение динамики относительного движения (1.49) примет вид

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \quad (1.51)$$

т.е. движение точки в подвижной и в неподвижной системах координат описывается одним и тем же уравнением и подвижная система координат в этом случае является также инерциальной.

Это положение было установлено Галилеем и известно в механике как принцип относительности классической механики. Его суть можно сформулировать следующим образом: никакими механическими экспериментами нельзя обнаружить поступательное прямолинейное равномерное движение или состояние покоя подвижной системы отсчета, участвуя вместе с ней в этом движении.

Если точка в подвижной системе покоится, то  $\bar{a}_r = 0$ ,  $\bar{V}_r = 0$  и  $\bar{\Phi}_C = -2m(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r) = 0$ . Тогда (1.49) примет вид

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e = 0. \quad (1.52)$$

Данное уравнение является уравнением относительного равновесия (покоя) точки (тела).

Например: тело покоится на земной поверхности (рис. 22). На тело действуют силы:  $\bar{P}$  – сила притяжения тела к центру Земли;  $\bar{\Phi}_e^\Pi$  – центробежная сила инерции и нормальная реакция  $\bar{N}$ .

Силы  $\vec{P}$  и  $\vec{\Phi}_e^{\text{ц}}$  обуславливают давление тела на поверхность Земли, и их равнодействующая  $\vec{G}$  представляет вес тела, т.е.  $\vec{G} = \vec{P} + \vec{\Phi}_e^{\text{ц}}$ . Поэтому при решении задач статики, принимая систему координат, связанную с Землей, за неподвижную, никаких поправок вследствие вращения Земли вводить не надо.

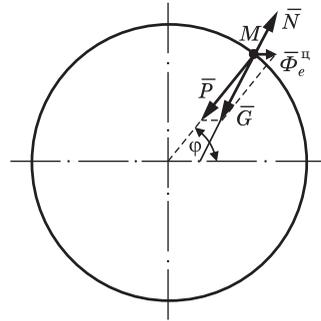


Рис. 22

При движении тел по поверхности Земли или вблизи нее с некоторой относительной скоростью  $\vec{V}_r$  будет иметь место кориолисова сила инерции (рис. 23):

$$\Phi_C = 2m\omega_e V_r \sin \left( \hat{\omega}_e, \vec{V}_r \right).$$

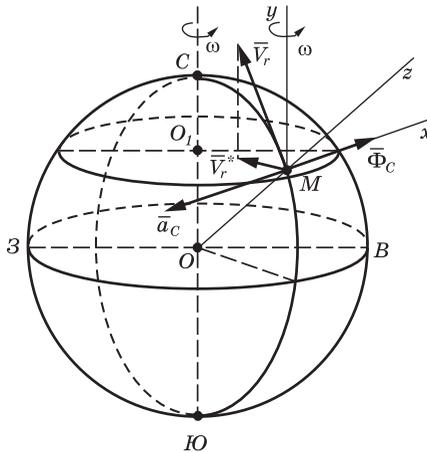


Рис. 23

В северном полушарии при движении тела по поверхности Земли кориолисова сила инерции  $\vec{\Phi}_C$  стремится отклонить тело вправо от направления движения. Этим объясняется боко-

вое давление поезда на рельсы, подмыв правого берега рек, отклонение от вертикали к востоку свободно падающего тела на Землю.

Считая систему отсчета, связанную с Землей, неподвижной, тем самым исключаем из числа сил, действующих на движущееся тело, кориолисову силу инерции, что не всегда оправданно.

**Пример 10.** Прямоугольная пластинка вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 24, а). Составить дифференциальное уравнение движения тяжелой материальной точки  $M$  вдоль направляющих  $OA$ .

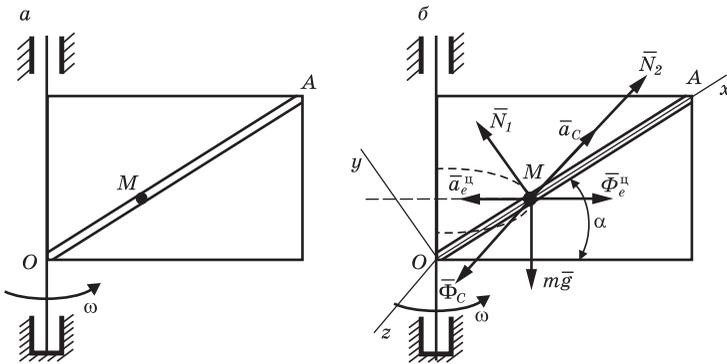


Рис. 24

**Решение.** 1. Вращение пластинки — переносное движение. Движение точки  $M$  по пластинке — относительное движение.

2. Свяжем подвижную систему координат  $Oxy$  с пластинкой, выбрав начало в точке  $O$  и направив ось  $x$  вдоль  $OA$ .

3. Изобразим точку в произвольном положении на оси  $x$  и покажем силы, действующие на нее: силу тяжести  $m\vec{g}$ , нормальные составляющие реакций  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$ , переносную  $\vec{\Phi}_e^{II}$  и кориолисову  $\vec{\Phi}_C$  силы инерции (рис. 24, б).

4. Запишем основное уравнение динамики относительного движения точки в векторной форме и затем в проекции на ось  $x$ :

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{\Phi}_e^{II} + \vec{\Phi}_C;$$

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + \Phi_e^{II} \cos \alpha;$$

$$\Phi_e^{II} = ma_e^{II} = m\omega^2 x \cos \alpha.$$

Тогда  $m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + m\omega^2 x \cos^2 \alpha$ . Сократив на  $m$  и обозначив  $\omega^2 \cos^2 \alpha = k^2$ , получим

$$\ddot{x} - k^2 x = -g \sin \alpha.$$

**Пример 11.** Используя условие примера 10, определить закон движения точки  $M$  по пластинке, если в начальный момент точка находилась на расстоянии  $a$  от начала координат и имела скорость, равную нулю.

**Решение.** Полученное в примере 10 дифференциальное уравнение движения материальной точки является линейным неоднородным. Его общее решение ищем в виде

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где  $\bar{x}$  — общее решение соответствующего однородного уравнения  $\ddot{\bar{x}} - k^2 \bar{x} = 0$ ;  $x^*$  — частное решение неоднородного уравнения.

Составляем характеристическое уравнение однородного уравнения

$$z^2 - k^2 = 0.$$

Его корни  $z_{1,2} = \pm k$  — вещественные разные. Поэтому

$$\bar{x} = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем по виду правой части дифференциального уравнения, т.е.  $x^* = C_3 = \text{const}$ . Так как  $\dot{x}^* = 0$ , то

$$-k^2 C_3 = -g \sin \alpha \Rightarrow C_3 = \frac{g}{k^2} \sin \alpha.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} + \frac{g}{k^2} \sin \alpha.$$

Продифференцируем по времени это уравнение:

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем из полученных уравнений с учетом начальных условий движения:  $x_0 = a$ ,  $\dot{x}_0 = 0$  при  $t = 0$ :

$$x_0 = C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{g}{k^2} \sin \alpha = a;$$

$$\dot{x}_0 = C_1 k e^0 - C_2 k e^0 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = C;$$

$$2C + \frac{g}{k^2} \sin \alpha = a \Rightarrow C = \frac{1}{2} \left( a - \frac{g}{k^2} \sin \alpha \right);$$

$$x = \frac{1}{2} \left( a - \frac{g}{k^2} \sin \alpha \right) \left( e^{kt} + e^{-kt} \right) + \frac{g}{k^2} \sin \alpha.$$

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какое движение называется движением по инерции?
2. При каком условии материальная точка будет покоиться или двигаться равномерно и прямолинейно?
3. Сила, действующая на материальную точку, постоянна по величине и направлению. Что можно сказать об ускорении точки?
4. Силу, действующую на материальную точку массой  $m$ , увеличили в два раза. Как при этом изменится ускорение точки?
5. Масса тела  $m = 1$  кг. Чему равен вес тела?
6. Две изолированные материальные точки массой  $m_1$  и  $m_2$  действуют друг на друга. Что можно сказать о силах взаимодействия и об ускорениях этих точек?
7. Сформулируйте первую основную задачу динамики материальной точки; вторую задачу.
8. Запишите естественные дифференциальные уравнения движения материальной точки.
9. Материальная точка массой  $m$  начинает движение из начала декартовой системы координат со скоростью  $V_0$ , направленной вдоль оси  $x$ . Укажите начальные условия движения точки.
10. Движение материальной точки описывается дифференциальным уравнением  $m\ddot{x} = mg - kmV_x$ . Преобразуйте это уравнение к виду, позволяющему его проинтегрировать.
11. При каких условиях материальная точка совершает криволинейное движение?
12. В каких случаях материальную точку называют несвободной?
13. Сформулируйте принцип освобожденности от связей.
14. Как формулируется основной закон динамики для несвободной материальной точки?
15. Какой вид имеют дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки в форме Лагранжа? в форме Эйлера?

16. Как определяется модуль и направление переносной и кориолисовой сил инерции материальной точки?

17. Как записываются основные законы динамики относительного и абсолютного движений материальной точки?

18. Круговой конус вращается вокруг вертикальной оси, совпадающей с его осью симметрии. По каналу вдоль образующей перемещается шарик массой  $m$ . Определите:

- какое из этих двух движений является относительным?
- переносную и кориолисову силы инерции, если конус вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , угол при вершине конуса равен  $2\alpha$ , шарик находится на расстоянии  $a$  от вершины конуса и движется вниз со скоростью  $V$ .

19. В каких случаях при переносном вращательном движении кориолисова сила инерции будет равна нулю?

20. Почему вращение Земли вокруг оси не влияет на равновесие тел на земной поверхности?

21. Что такое вес тела?

22. Как влияет вращение Земли на движение тел по земной поверхности и вблизи ее?

---

## ГЛАВА 2. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

---

### 2.1. Виды колебаний

**Колебание**, или **колебательное движение** материальной точки, — повторяющееся во времени движение точки около своего положения равновесия в двух противоположных направлениях. Необходимым условием такого движения является наличие *восстанавливающей силы*, которая стремится вернуть точку в положение равновесия, если ее вывести из этого положения.

Примером такой силы является сила упругости  $\vec{F}_{\text{упр}}$  пружин (рис. 25, а, б), рессоры (рис. 25, в), упругих оснований и т.п.

Величина силы упругости в соответствии с законом Гука пропорциональна деформации (удлинению пружины или прогибу балки). Проекция этой силы на ось  $Ox$ , направленную в сторону отклонения  $x$ , при выборе начала координат в конце недеформированной пружины (рис. 25, б) равна

$$F_{\text{упр}_x} = -cx \quad (2.1)$$

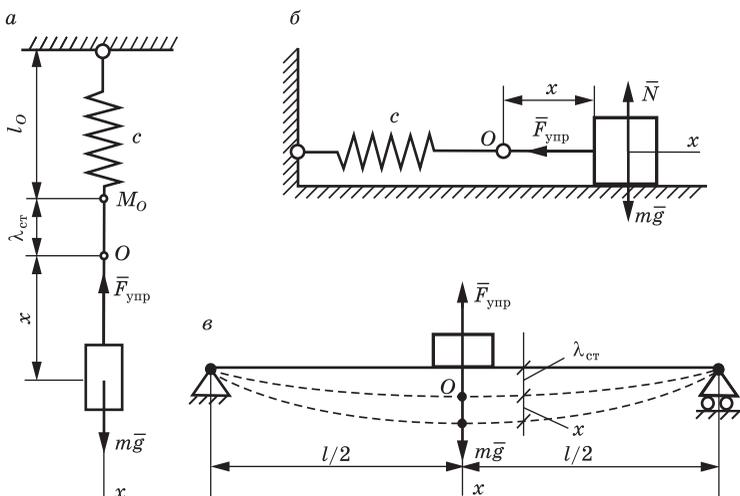


Рис. 25

и при выборе начала координат в положении статического равновесия (рис. 25, а, в) –

$$F_{\text{упр}_x} = -c (\lambda_{\text{ст}} + x). \quad (2.2)$$

В указанных формулах  $c$  – коэффициент жесткости пружины;  $\lambda_{\text{ст}}$  – статическая деформация под действием силы тяжести;  $x$  – отклонение точки от начала координат (текущая координата).

В положении равновесия (на рис. 25, а, в – точка  $O$ )

$$F_{\text{упр}} = mg \quad \text{или} \quad c\lambda_{\text{ст}} = mg. \quad (2.3)$$

При колебании на материальную точку кроме восстанавливающей силы могут действовать другие силы, в частности, сила сопротивления  $\bar{R}$  и возмущающая сила  $\bar{F}_B$ .

**Сила сопротивления** – сила, препятствующая движению материальной точки. Это сила либо вязкого трения, либо сухого трения. В случае вязкого трения силу сопротивления будем считать пропорциональной первой степени скорости и направленной противоположно вектору скорости, т.е.

$$\bar{R} = -\mu \bar{V}, \quad (2.4)$$

где  $\mu$  — коэффициент сопротивления.

**Возмущающая сила** — сила, зависящая от времени. Во многих технических задачах наибольший интерес представляют возмущающие силы, которые изменяются с течением времени по периодическому закону:

$$F_B = F_0 \sin pt, \quad (2.5)$$

где  $F_0$  — наибольшее значение силы (амплитуда);  $pt$  — фаза возмущающей силы ( $p$  — частота).

В зависимости от совокупности этих сил материальная точка может совершать *свободные гармонические* и *затухающие колебания*, а также *вынужденные колебания* без учета и с учетом сопротивления.

## 2.2. Свободные гармонические колебания материальной точки

*Свободными* называются колебания при отсутствии возмущающих сил.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки вдоль горизонтальной оси  $Ox$  под действием силы упругости (рис. 26).

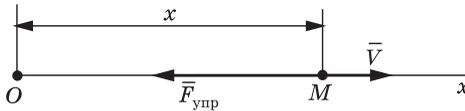


Рис. 26

Составим дифференциальное уравнение движения точки  $M$  с учетом (2.1) и найдем закон ее движения

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Разделим обе части равенства на  $m$ , обозначив  $\frac{c}{m} = k^2$ . Приведем уравнение к виду

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) является дифференциальным уравнением свободных колебаний без учета сопротивления. Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка находят в виде  $x = e^{zt}$ . Продифференцировав это выражение и подставив в уравнение (2.6), получим для определения  $z$  так называемое характеристическое уравнение  $z^2 + k^2 = 0$ , его корни  $z_{1,2} = \pm ik$ , где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Так как корни мнимые, то, как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение уравнения (2.6) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (2.7)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  продифференцируем по времени уравнение (2.7) и из полученного выражения и уравнения (2.7) с учетом начальных условий движения:  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  при  $t = 0$  находим

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt;$$

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Запишем решение (2.7) в амплитудной форме, для чего введем следующую подстановку:

$$C_1 = a \sin \alpha; \quad C_2 = a \cos \alpha,$$

где  $a$  и  $\alpha$  — новые постоянные интегрирования.

С учетом этого уравнение (2.7) примет вид

$$x = a \sin \alpha \cos kt + a \cos \alpha \sin kt = a \sin(kt + \alpha). \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.8) видно, что отклонения материальной точки от положения равновесия подчиняются гармоническому (синусоидальному) закону. Поэтому такие колебания называются *гармоническими*.

Построим график этих колебаний, отложив по оси ординат значения отклонений  $x$ , а по оси абсцисс — время  $t$ , т.е. как бы растянув это движение вдоль оси  $t$  (рис. 27). При этом  $a$  —

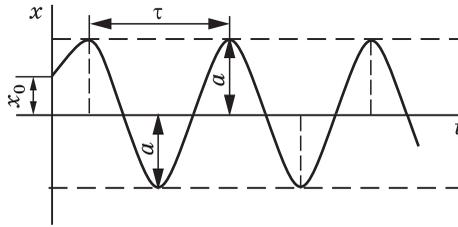


Рис. 27

амплитуда — наибольшее отклонение точки от положения равновесия:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}; \quad (2.9)$$

$(kt + \alpha)$  — фаза колебаний;  $\alpha$  — начальная фаза колебаний:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0 k}{\dot{x}_0} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{\dot{x}_0}. \quad (2.10)$$

Фаза колебаний определяет не только положение точки в данный момент времени, но и направление ее последующего движения. Это относится и к начальной фазе колебаний.

Пусть  $\alpha = 0$ ,  $x = a \sin kt$ . Колебания происходят по закону синуса, начинаются при  $t = 0$  от центра  $O$  со скоростью  $\dot{x} = ak > 0$ , направленной вправо.

О дальнейшем движении точки можно судить, увеличивая значение  $t$ . Так, при  $t = \frac{\pi}{2k}$   $x = a$ ,  $\dot{x} = 0$  (в крайнем правом положении точка останавливается). При  $t = \frac{\pi}{k}$   $x = 0$ ,  $\dot{x} = -ak < 0$  (точка проходит через положение равновесия со скоростью, направленной влево).

При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$   $x = a \sin \left( kt + \frac{\pi}{2} \right) = a \cos kt$ , т.е. колебания происходят по закону косинуса, начинаются при  $t = 0$  из положения  $x_0 = a$  со скоростью  $\dot{x}_0 = 0$ .

**Период колебаний** – время одного полного колебания. Формулу для определения периода  $\tau$  найдем из условия, что при колебании должно соблюдаться равенство координат и проекций скоростей через период  $\tau$ , т.е.

$$x(t) = x(t + \tau) \text{ и } \dot{x}(t) = \dot{x}(t + \tau), \quad (2.11)$$

или

$$\begin{cases} x = a \sin(kt + \alpha) = a \sin[k(t + \tau) + \alpha], \\ \dot{x} = ak \cos(kt + \alpha) = ak \cos[k(t + \tau) + \alpha]. \end{cases} \quad (2.12)$$

Это возможно, если

$$k\tau = 2\pi. \quad (2.13)$$

Тогда

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad (2.14)$$

где  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – *циклическая, или круговая, частота колебаний*.

Выясним физический смысл циклической частоты. Из формулы (2.14)

$$k = 2\pi \frac{1}{\tau}, \quad (2.15)$$

где  $\frac{1}{\tau} = \nu$  – *частота колебаний* – число колебаний за одну секунду.

Тогда из (2.15) следует, что  $k$  – число колебаний за время  $2\pi$  секунд.

Размерности:  $[k]$ , рад/с,  $[\nu]$ , Гц (Герц).

Как видно из соотношений (2.14) и (2.15), период и частота колебаний точки зависят только от ее массы и от коэффициента  $c$ , характеризующего восстанавливающую силу, и не зависят от начальных условий движения. Если колебание происходит на нескольких пружинах, соединенных между собой, то при опре-

делении периода колебаний в формуле (2.14) вместо коэффициента жесткости  $c$  нужно подставить эквивалентную жесткость  $c_{\text{ЭКВ}}$ , т.е. условно все пружины заменяются одной, жесткость которой эквивалентна жесткости всех пружин. Величина  $c_{\text{ЭКВ}}$  зависит от способа соединения пружин (см. примеры ниже).

При неизвестной жесткости пружины, но известной статической деформации  $\lambda_{\text{СТ}}$  коэффициент жесткости  $c$  можно определить из условия равенства в положении равновесия силы упругости и силы тяжести, т.е.  $c\lambda_{\text{СТ}} = mg$ .

Тогда  $c = \frac{mg}{\lambda_{\text{СТ}}}$ , а циклическая частота  $k$  и период  $\tau$  колебаний определяются соответственно по формулам

$$k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{СТ}}}}; \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{\text{СТ}}}{g}}. \quad (2.16)$$

При действии на точку некоторой постоянной силы  $\bar{Q}$ , направленной противоположно восстанавливающей силе (например, силе упругости (см. рис. 26)), дифференциальное уравнение (2.6) и характер колебаний не изменятся. Постоянная сила сместит только центр этих колебаний в сторону действия силы  $\bar{Q}$  на величину  $\lambda$ , определяемую из условия равенства силы упругости и этой постоянной силы, т.е.  $c\lambda = Q$ .

Дифференциальное уравнение в этом случае

$$m\ddot{x} = Q - F_{\text{упр}} = Q - c(\lambda + x) = -cx.$$

**Пример 12.** Груз массой  $m = 0,5$  кг подвешивают к недеформированной пружине жесткостью  $c = 98$  Н/м и сообщают ему при этом скорость  $V_0 = 1,4$  м/с, направленную вверх. Найти уравнение движения, частоту, круговую частоту и период колебаний груза.

**Решение.** Выберем начало координат в положении равновесия (точка  $O$ ), направим ось  $x$  вниз — в сторону отклонения груза на величину  $x$ . Покажем в этом положении силы:  $m\bar{g}$  и  $\bar{F}_{\text{упр}}$  (рис. 28). Дифференциальное уравнение движения груза по оси  $x$

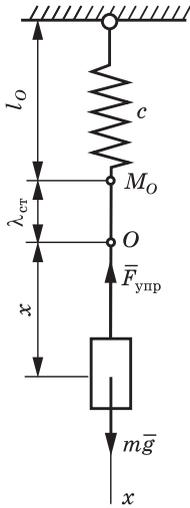


Рис. 28

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{упр}} = mg - c(\lambda_{\text{ст}} + x) =$$

$$= mg - c\lambda_{\text{ст}} - cx \Rightarrow \ddot{x} + k^2x = 0,$$

где  $mg = c\lambda_{\text{ст}} = 0$ ,  $k^2 = \frac{c}{m}$ .

Круговая частота

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{98}{0,5}} = 14 \text{ рад/с.}$$

Общее решение дифференциального уравнения движения

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  интегрирования найдем с учетом начальных условий движения. При  $t = 0$  груз находился в положении  $M_0$ , поэтому

$$x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{mg}{c} = -\frac{0,5 \cdot 9,8}{98} = -0,05 \text{ м;}$$

$$\dot{x}_0 = -V_0 = -1,4 \text{ м/с.}$$

Продифференцируем уравнение движения:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Тогда

$$C_1 = x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -0,05 \text{ м;}$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} = -\frac{1,4}{14} = -0,1 \text{ м.}$$

С учетом вычислений находим уравнение движения

$$x = -0,05 \cos 14t - 0,1 \sin 14t \text{ (м).}$$

В амплитудной форме

$$x = a \sin(kt + \alpha),$$

где амплитуда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{(-0,05)^2 + \frac{(-1,4)^2}{14^2}} = 0,112 \text{ м.}$$

Начальная фаза

$$\alpha = \arctg \frac{x_0 k}{\dot{x}_0} = \arctg \frac{-0,05 \cdot 14}{-1,4} = \arctg 0,5.$$

Отсюда

$$\alpha = 26,56^\circ, \text{ или } \alpha = 0,147\pi \text{ рад.}$$

Тогда  $x = 0,112 \sin(14t + 0,147\pi)$  (м).

Период колебаний

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{14} = 0,448 \text{ с.}$$

Частота колебаний

$$\nu = \frac{1}{\tau} = 2,25 \text{ Гц.}$$

**Пример 13.** Определить период колебаний груза массой  $m$ , подвешенного на двух пружинах жесткостью  $c_1$  и  $c_2$  для двух случаев:

- 1) пружины соединены параллельно (рис. 29);
- 2) пружины соединены последовательно (рис. 30).

**Решение.** 1. В этом случае в положении равновесия силы упругости пружин  $\bar{F}_{1\text{упр}}$  и  $\bar{F}_{2\text{упр}}$  уравниваются силой тяжести  $m\bar{g}$  груза. Поэтому

$$F_{1\text{упр}} + F_{2\text{упр}} = mg,$$

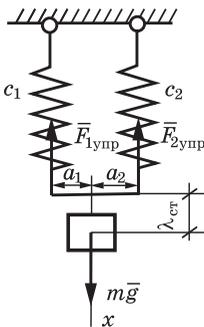


Рис. 29

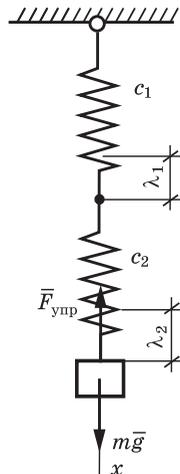


Рис. 30

где

$$F_{1\text{упр}} = c_1 \lambda_{1\text{ст}};$$

$$F_{2\text{упр}} = c_2 \lambda_{2\text{ст}}.$$

Балочка, которая соединяет концы пружин и к которой крепится груз, должна перемещаться поступательно. Поэтому

$$\lambda_{1\text{ст}} = \lambda_{2\text{ст}} = \lambda_{\text{ст}}.$$

Тогда

$$\lambda_{\text{ст}}(c_1 + c_2) = mg.$$

Для эквивалентной пружины, заменяющей эти две пружины,

$$F_{\text{упр. экв}} = c_{\text{экв}} \lambda_{\text{ст}} = mg.$$

Тогда  $c_{\text{экв}} = c_1 + c_2$ , при этом  $\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_2}{a_1}$ , что следует из условия равенства моментов сил упругости  $\bar{F}_{1\text{упр}}$  и  $\bar{F}_{2\text{упр}}$  относительно точки подвеса груза.

$$\text{Период } \tau = \frac{2\pi}{k}; \quad k = \sqrt{\frac{c_{\text{экв}}}{m}} = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}. \quad \text{Тогда}$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}.$$

2. При последовательном соединении пружин в положении статического равновесия каждая из пружин растягивается силой  $m\bar{g}$ , при этом

$$F_{1\text{упр}} = F_{2\text{упр}} = F_{\text{упр. экв}} = mg;$$

$$F_{1\text{упр}} = c_1 \lambda_{1\text{ст}} = mg;$$

$$F_{2\text{упр}} = c_2 \lambda_{2\text{ст}} = mg,$$

где

$$F_{\text{упр. экв}} = c_{\text{экв}} \lambda_{\text{экв}} = mg.$$

Удлинение эквивалентной пружины равно общему удлинению пружин, т.е.

$$\lambda_{\text{экв}} = \lambda_{1\text{ст}} + \lambda_{2\text{ст}}.$$

Тогда

$$\frac{mg}{c_{\text{экв}}} = \frac{mg}{c_1} + \frac{mg}{c_2} \Rightarrow c_{\text{экв}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

Период колебаний

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c_{\text{экв}}}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(c_1 + c_2)}{c_1 c_2}}.$$

**Примечание.** Если груз поместить между пружинами, а нижний конец второй пружины закрепить неподвижно, то деформации пружин под действием силы тяжести  $m\bar{g}$  груза будут одинаковыми, т.е.  $\lambda_{1ст} = \lambda_{2ст} = \lambda_{эқв.ст}$ . Силы упругости пружин будут разными и направлены в одну сторону, противоположно силе  $m\bar{g}$ . В положении равновесия

$$F_{1упр} + F_{2упр} = mg = F_{упр. экв}.$$

Тогда  $c_{эқв} = c_1 + c_2$ , как в случае параллельного соединения пружин.

Полученные выражения для эквивалентной жесткости при параллельном и последовательном соединении пружин справедливы для любых произвольных состояний, а не только для положения статического равновесия. Это следует из того, что если вместо силы  $m\bar{g}$  приложить некоторую силу  $\bar{F}$ , то при параллельном соединении пружин

$$F = F_1 + F_2$$

или

$$c_{эқв}\lambda = (c_1 + c_2)\lambda,$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — усилия в каждой пружине;  $\lambda$  — произвольная деформация пружин.

При последовательном соединении пружин

$$F = F_1 = F_2;$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

или

$$\frac{F}{c_{эқв}} = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2},$$

откуда

$$c_{эқв} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

### 2.3. Свободные колебания материальной точки с учетом сопротивления

Пусть материальная точка движется вдоль горизонтальной оси в среде с вязким сопротивлением под действием силы упругости (формула 2.1) и линейной силы сопротивления (формула 2.4) (рис. 31).

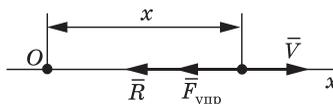


Рис. 31

Дифференциальное уравнение движения по оси  $x$

$$m\ddot{x} = R_x + F_{\text{упр } x} = -\mu\dot{x} - cx.$$

Разделив на  $m$  и обозначив  $\frac{c}{m} = k^2$ ,  $\frac{\mu}{m} = 2n$ , получим одно-  
родное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) представляет собой дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления, пропорциональной скорости точки.

Характеристическое уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению, имеет вид

$$z^2 + 2nz + k^2 = 0,$$

его корни

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (2.18)$$

Из (2.18) видно, что возможны три случая:

- 1)  $n < k$ ;
- 2)  $n > k$ ;
- 3)  $n = k$ .

Рассмотрим решение уравнения (2.17) для этих трех случаев.

- При  $n < k$ :

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm \sqrt{-1(k^2 - n^2)} = -n \pm ik_1,$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ ;  $i = \sqrt{-1}$ .

В этом случае корни комплексные и общее решение уравнения (2.17) имеет вид

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \quad (2.19)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  продифференцируем по времени уравнение (2.19):

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -ne^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \\ & + e^{-nt} (-C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

С учетом начальных условий движения:  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$  при  $t = 0$  из уравнений (2.19) и (2.20) находим:

$$\begin{aligned} C_1 &= x_0; \\ C_2 &= \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1}. \end{aligned}$$

Заменим  $C_1 = a_0 \sin \alpha$ ;  $C_2 = a_0 \cos \alpha$ . Тогда уравнение (2.19) можно представить в амплитудной форме:

$$x = a_0 e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (2.21)$$

Из уравнения (2.21) видно, что движение точки имеет колебательный характер, так как функция  $\sin(k_1 t + \alpha)$  является периодической. Наличие множителя  $e^{-nt}$  в уравнении (2.21) обуславливает уменьшение с течением времени отклонения  $x$  точки от положения равновесия. Такие колебания называются *затухающими*.

Максимальное отклонение от положения равновесия имеет место при  $\sin(k_1 t + \alpha) = \pm 1$ , т.е.  $|x|_{\max} = a_0 e^{-nt}$ , а все другие значения  $x$  заключены между экспонентами  $x = a_0 e^{-nt}$  и  $x = -a_0 e^{-nt}$  (рис. 32).

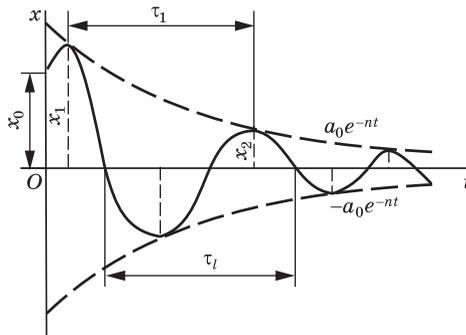


Рис. 32

*Амплитуда затухающих колебаний*

$$A_{\text{зат}} = a_0 e^{-nt}, \quad (2.22)$$

где  $n$  – коэффициент затухания.

При  $t = 0$  начальное значение амплитуды

$$A_{\text{зат}} = a_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}. \quad (2.23)$$

*Начальная фаза колебаний*

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2} = \operatorname{arctg} \frac{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{x}_0 + nx_0}. \quad (2.24)$$

*Период  $\tau_1$  затухающих колебаний* – промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки через положение равновесия в одном и том же направлении.

По аналогии с выражением (2.14)

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1}. \quad (2.25)$$

Связь между периодом  $\tau$  гармонических и  $\tau_1$  затухающих колебаний:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}. \quad (2.26)$$

Пусть  $\frac{n}{k} = 0,05$  (небольшое сопротивление), значит,

$$\tau_1 = \frac{\tau}{\sqrt{1 - 0,0025}} = \frac{\tau}{\sqrt{0,9975}} = 1,001\tau,$$

т.е. период колебаний с учетом сопротивления увеличился незначительно по сравнению с периодом гармонических колебаний.

Установим закон изменения амплитуды затухающих колебаний, например, через полупериод.

Пусть при  $t = t_1$

$$A_1 = a_0 e^{-n t_1}.$$

При  $t_2 = t_1 + \frac{\tau_1}{2}$

$$A_2 = a_0 e^{-n \left( t_1 + \frac{\tau_1}{2} \right)} = a_0 e^{-n t_1} e^{-\frac{n \tau_1}{2}} = A_1 e^{-\frac{n \tau_1}{2}}.$$

При  $t_3 = t_2 + \frac{\tau_1}{2}$

$$A_3 = a_0 e^{-n \left( t_2 + \frac{\tau_1}{2} \right)} = a_0 e^{-n t_2} e^{-\frac{2n \tau_1}{2}} = A_1 e^{-\frac{2n \tau_1}{2}}.$$

Значение амплитуды с индексом  $m$

$$A_m = A_1 e^{-\frac{n \tau_1 (m-1)}{2}}. \quad (2.27)$$

Из формулы (2.27) следует, что *изменение амплитуды* затухающих колебаний происходит по *закону убывающей геометрической прогрессии*, знаменателем  $q$  которой является  $e^{-\frac{n \tau_1}{2}}$ , так

как любой член прогрессии равен  $a_m = a_1 q^{m-1}$ . Величина  $e^{-\frac{n \tau_1}{2}}$  в теории колебаний называется *декрементом колебаний*. Обозначим его буквой  $D$ .

Декремент ( $D = e^{-\frac{n \tau_1}{2}}$ ) равен отношению амплитуды последующего колебания к амплитуде предыдущего колебания, если считать амплитуды через полупериод. При сравнении амплитуд через период декремент  $D = e^{-n \tau_1}$ . Если точка совершила  $N$  полных колебаний, то число амплитуд можно определить по формулам:

$m = 2N + 1$  – число амплитуд через полупериод;

$m = N + 1$  – то же через период.

**Пример 14.** Точка совершила четыре полных колебания. Отношение  $\frac{n}{k} = 0,05$ . Определить, во сколько раз уменьшилась последняя амплитуда по сравнению с первой.

**Решение.** Определяем число амплитуд через полупериод  $m = 2N + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ . Тогда

$$A_9 = A_1 D^8 = A_1 e^{-\frac{n\tau_1}{2} \cdot 8} \Rightarrow \frac{A_9}{A_1} = e^{-4n\tau_1} = e^{-4n \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}} =$$

$$= e^{-4n \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}} = e^{-\frac{8\pi}{\sqrt{400-1}}} \approx e^{-0,4\pi} = 0,285$$

или 
$$\frac{A_1}{A_9} = \frac{1}{0,285} \cong 3,5,$$

т.е. амплитуда уменьшилась в 3,5 раза.

*Логарифмическим декрементом* называется модуль натурального логарифма декремента колебаний, т.е.

$$|\ln D| = \left| \ln \left( e^{-\frac{n\tau_1}{2}} \right) \right| = \frac{n\tau_1}{2}. \quad (2.28)$$

**Пример 15.** Определить декремент и логарифмический декремент колебаний, если после четырех полных колебаний амплитуда уменьшилась в 12 раз. Определить также амплитуду после двух полных колебаний.

**Решение.** Определяем число амплитуд через полупериод:

$$m = 2N + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9.$$

Тогда

$$A_9 = A_1 D^8 = A_1 e^{-\frac{n\tau_1}{2} \cdot 8}.$$

Отсюда

$$\frac{A_1}{A_9} = e^{\frac{n\tau_1}{2} \cdot 8} = 12.$$

Прологарифмировав это выражение, определим логарифмический декремент:



Для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  эти уравнения следует продифференцировать по времени и в полученные выражения и в уравнения (2.29) и (2.30) подставить  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ .

Таким образом, когда  $n \geq k$ , движение материальной точки теряет колебательный характер и становится затухающим аperiodическим.

## 2.4. Вынужденные колебания материальной точки без учета сопротивления. Резонанс

Вынужденные колебания без учета сопротивления материальная точка будет совершать при действии на нее *восстанавливающей* и *возмущающей сил* (рис. 33, а), когда конец пружины (точка А) — неподвижен, действует возмущающая сила  $F_B = F_0 \sin pt$ . Возможно также кинематическое возмущение (рис. 33, б), когда сила  $\bar{F}_B$  отсутствует, но точка А крепления пружины совершает гармонические колебания по закону  $\xi = b \sin \omega t$ .

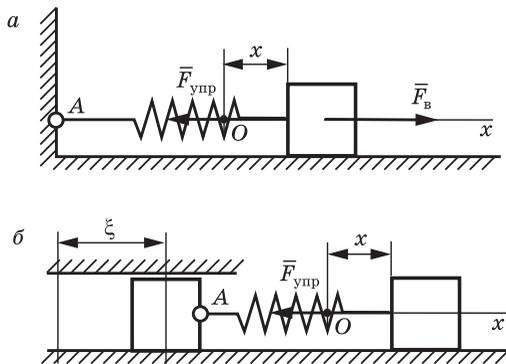


Рис. 33

Дифференциальное уравнение движения груза при наличии возмущающей силы имеет вид

$$m\ddot{x} = -F_{\text{упр}} + F_B = -cx + F_0 \sin pt$$

или после преобразования —

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (2.31, a)$$

где  $k^2 = \frac{c}{m}$ ;  $h = \frac{F_0}{m}$  — амплитуда возмущающей силы, отнесенная к единице массы.

В случае кинематического возмущения

$$m\ddot{x} = -F_{\text{упр}} = -c(x - \xi) = -c(x - b \sin \omega t)$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (2.31, б)$$

где  $k^2 = \frac{c}{m}$ ;  $h = \frac{cb}{m}$ ;  $p = \omega$ .

Уравнения (2.31) описывают вынужденные колебания материальной точки без учета сопротивления.

Общее решение этого неоднородного линейного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения  $\bar{x}$  соответствующего однородного уравнения (2.6) и частного решения  $x^*$  неоднородного уравнения, т.е.

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где  $\bar{x}$  описывает свободные гармонические колебания, а  $x^*$  — вынужденные. Общее решение  $\bar{x}$  однородного уравнения исследовано выше (см. п. 2.3).

Частное решение  $x^*$  неоднородного уравнения при  $p \neq k$  ищем по виду правой части уравнения (2.31, а, б)

$$x^* = A_B \sin pt, \quad (2.32)$$

где  $A_B$  — амплитуда вынужденных колебаний.

Для определения  $A_B$  продифференцируем выражение (2.32) дважды по времени и подставим выражения для  $\ddot{x}^*$  и  $x^*$  в уравнение (2.31) вместо  $\ddot{x}$  и  $x$ . Получим

$$-A_B p^2 \sin pt + k^2 A_B \sin pt = h \sin pt.$$

Коэффициенты при  $\sin pt$  в левой и правой частях должны быть одинаковыми, т.е.  $A_B(k^2 - p^2) = h$ .

Отсюда

$$A_B = \frac{h}{k^2 - p^2}. \quad (2.33)$$

Тогда частное решение, описывающее вынужденные колебания, имеет вид

$$x^* = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (2.34)$$

Из уравнения (2.34) следует, что при  $p < k$  (вынужденные колебания малой частоты) частота  $p$ , период  $\tau = \frac{2\pi}{p}$  и фаза  $pt$  вынужденных колебаний совпадают соответственно с частотой, периодом и фазой возмущающей силы.

При  $p > k$  (вынужденные колебания большой частоты)

$$x^* = -\frac{h}{p^2 - k^2} \sin pt = \frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt - \pi). \quad (2.35)$$

Из уравнения (2.35) следует, что фаза вынужденных колебаний отстает от фазы возмущающей силы на  $\pi$  (координата  $x^*$  и сила находятся в противофазе).

Амплитуда в этом случае

$$A_B = \frac{h}{p^2 - k^2}. \quad (2.36)$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.31) с учетом уравнений (2.7) или (2.8) и (2.32) при  $p < k$

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt, \quad (2.37)$$

или

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (2.38)$$

Продифференцировав эти уравнения по времени, из полученных выражений и уравнений (2.37) и (2.38) при начальных условиях  $t = 0, x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$  находим  $C_1$  и  $C_2$  или амплитуду  $a$  и начальную фазу  $\alpha$ .

Аналогично можно записать общее решение уравнения (2.31) при  $p > k$  и определить  $C_1, C_2$  или  $a$  и  $\alpha$ .

**Пример 16.** Груз массой  $m = 200$  г прикреплен к пружине, коэффициент жесткости которой  $9,8$  Н/см, может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости под действием возмущающей силы  $F_B = F_0 \sin pt$ , где  $F_0 = 20$  Н,  $p = 50$  рад/с. В начальный момент пружину растянули на  $5$  см и грузу сообщили скорость  $V_0 = 20$  см/с в направлении смещения. Найти уравнение движения груза по оси  $x$ , начало которой выбрано в конце недеформированной пружины.

**Решение.** Изобразим груз в произвольном положении на оси  $x$ , направив ее в сторону смещения груза. Покажем силы, действующие на груз: вес  $m\bar{g}$ , нормальную реакцию  $\bar{N}$  плоскости, силу упругости  $\bar{F}_{\text{упр}}$  пружины и возмущающую силу  $\bar{F}_B$  (рис. 34).

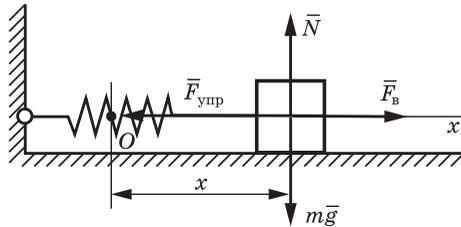


Рис. 34

Дифференциальное уравнение движения груза по оси  $x$

$$m\ddot{x} = -F_{\text{упр}} + F_2 = -cx + F_0 \sin pt.$$

Разделим на  $m$  и обозначим  $\frac{c}{m} = k^2; \frac{F_0}{m} = h$ , получим

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt.$$

Циклическая частота колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 10^2}{200 \cdot 10^{-3}}} = 70 \text{ рад/с.}$$

Частота возмущающей силы  $p = 50$  рад/с. Следовательно,  $p < k$ . Решение полученного дифференциального уравнения на основании формулы (2.37)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Найдем производную по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определим с учетом начальных условий:  $x_0 = 5$  см,  $\dot{x}_0 = V_0 = 20$  см/с при  $t = 0$ . Тогда  $C_1 = x_0 = 5$  см.

Найдем  $C_2$  из выражения

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= C_2 k + \frac{hp}{k^2 - p^2} \Rightarrow C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2}}{k} = \\ &= \frac{0,20 - \frac{50 \cdot 20}{(70^2 - 50^2) \cdot 0,2}}{70} = \frac{0,2 - \frac{5000}{2400}}{70} = -2,68 \text{ см}; \end{aligned}$$

$$\frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{F_0}{m(k^2 - p^2)} = \frac{20 \cdot 10^2}{0,2(70^2 - 50^2)} = 4,17 \text{ см}.$$

Уравнение движения груза

$$x = 5 \cos 70t - 2,68 \sin 70t + 4,17 \sin 50t \text{ см}.$$

*Резонанс* рассматривается как явление, при котором амплитуда вынужденных колебаний сильно возрастает в некоторой области возмущающих частот. В частности, при совпадении циклической частоты свободных колебаний  $k$  с частотой  $p$  возмущающей силы, как следует из уравнений (2.33) и (2.36), амплитуда вынужденных колебаний равна бесконечности и частное решение  $x^*$  нельзя представить в виде (2.34). Это решение ищем в виде

$$x^* = Bt \cos pt. \quad (2.39)$$

Найдем первую  $\dot{x}^*$  и вторую  $\ddot{x}^*$  производные по времени от этого выражения:

$$\begin{aligned}\dot{x}^* &= B \cos pt - Btp \sin pt; \\ \ddot{x}^* &= -2Bp \sin pt - Bp^2 t \cos pt.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Подставим выражения (2.39) и (2.40) в уравнение (2.31):

$$-2Bp \sin pt - Bp^2 t \cos pt + k^2 Bt \cos pt = h \sin pt.$$

Учитывая, что  $p = k$ , сократим подобные члены, получим

$$-2Bk \sin kt = h \sin kt.$$

Отсюда, приравняв коэффициенты при синусе в обеих частях равенства, найдем

$$B = -\frac{h}{2k}.\tag{2.41}$$

Тогда частное решение примет вид

$$x^* = -\frac{h}{2k} t \cos kt = \frac{h}{2k} t \sin \left( kt - \frac{\pi}{2} \right).\tag{2.42}$$

Из уравнения (2.42) следует, что фаза вынужденных колебаний при резонансе отстает от фазы возмущающей силы на  $\frac{\pi}{2}$ . Амплитуда колебаний увеличивается по линейному закону с течением времени и определяется по формуле

$$A_{\text{в.рез}} = \frac{h}{2k} t.\tag{2.43}$$

## 2.5. Вынужденные колебания материальной точки с учетом сопротивления

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки вдоль горизонтальной оси  $x$  в вязкой среде под действием силы упругости  $\vec{F}_{\text{упр}}$ , возмущающей силы  $F_{\text{в}} = F_0 \sin pt$  и силы линейного сопротивления  $\vec{R} = -\mu \vec{V}$  (рис. 35).

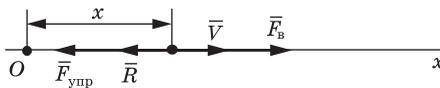


Рис. 35

Дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = -F_{\text{упр}} - R + F_{\text{в}} = -cx - \mu\dot{x} + F_0 \sin pt$$

или после преобразования получим

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin pt, \quad (2.44)$$

где  $2n = \frac{\mu}{m}$ ,  $k^2 = \frac{c}{m}$ ,  $h = \frac{F_0}{m}$ .

Общее решение этого уравнения

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где  $\bar{x}$  — общее решение однородного уравнения (2.17), которое в зависимости от соотношения между  $n$  и  $k$  может быть записано в виде (2.19) или (2.21) при  $n < k$  или (2.29) и (2.30) при  $n > k$  и  $n = k$  соответственно. Наличие множителя  $e^{-nt}$  в этих решениях указывает на то, что движения, описываемые этими уравнениями, быстро затухают и проявляются только на начальной стадии колебаний.

Поэтому частное решение  $x^*$ , описывающее вынужденные колебания, по существу является решением уравнения (2.44) при установившемся движении.

Ищем решение  $x^*$  по виду правой части уравнения (2.44):

$$x^* = A_{\text{в.с}} \sin(pt - \varepsilon), \quad (2.45)$$

где  $A_{\text{в.с}}$  — амплитуда вынужденных колебаний с учетом сопротивления;  $\varepsilon$  — величина сдвига (запаздывания) фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы.

Для определения  $A_{\text{в.с}}$  и  $\varepsilon$  найдем производные по времени  $\dot{x}^*$  и  $\ddot{x}^*$  от уравнения (2.45) и подставим полученные выражения и  $x^*$  из (2.45) в уравнение (2.44). Правую часть этого уравнения преобразуем к виду

$$\begin{aligned} h \sin pt &= h \sin(pt + \varepsilon - \varepsilon) = h \sin[(pt - \varepsilon) + \varepsilon] = \\ &= h \sin(pt - \varepsilon) \cos \varepsilon + h \cos(pt - \varepsilon) \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
 -A_{\text{в.с}} p^2 \sin(pt - \varepsilon) + 2nA_{\text{в.с}} p \cos(pt - \varepsilon) + k^2 A_{\text{в.с}} \sin(pt - \varepsilon) = \\
 = h \sin(pt - \varepsilon) \cos \varepsilon + h \cos(pt - \varepsilon) \sin \varepsilon.
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

Приравняв коэффициенты при  $\sin(pt - \varepsilon)$  и  $\cos(pt - \varepsilon)$  в левой и правой частях уравнения (2.46), получим два уравнения с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned}
 A_{\text{в.с}} (k^2 - p^2) &= h \cos \varepsilon; \\
 A_{\text{в.с}} \cdot 2np &= h \sin \varepsilon.
 \end{aligned} \right\}
 \tag{2.47}$$

Разделив второе уравнение на первое, находим

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.
 \tag{2.48}$$

Затем, возведя уравнения (2.47) в квадрат и сложив их правые и левые части, найдем  $A_{\text{в.с}}$ :

$$A_{\text{в.с}} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}.
 \tag{2.49}$$

## 2.6. Исследование фазы и амплитуды вынужденных колебаний

*Фаза вынужденных колебаний*  $(pt - \varepsilon)$  отстает от фазы возмущающей силы  $pt$  на величину  $\varepsilon$ . Проведем исследование этой величины.

При отсутствии сопротивления ( $n = 0$ )

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} = 0 \begin{cases} \nearrow \varepsilon = 0 & \text{при } p < k \\ \searrow \varepsilon = \pi & \text{при } p > k. \end{cases}$$

При любом значении  $n$  в случае резонанса

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \infty \Rightarrow \varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

Эти результаты были получены при исследовании вынужденных колебаний без учета сопротивления. При наличии сопротивления  $0 < \varepsilon < \pi$ .

Представим выражение (2.48) в виде

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2 \frac{n}{k} \frac{p}{k}}{1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2} = f_1\left(\frac{n}{k}, \frac{p}{k}\right), \quad (2.50)$$

где  $\frac{n}{k}$  — коэффициент демпфирования;  $\frac{p}{k}$  — коэффициент расстройки.

Используя функцию (2.50), построим *фаза-частотную характеристику* (рис. 36) колебательной системы. Для этого будем задаваться отношением  $\frac{n}{k}$  и для различных отношений  $\frac{p}{k}$  определять  $\varepsilon$ . Заметим, что с увеличением коэффициента демпфирования сдвиг фазы увеличивается при одном и том же значении коэффициента расстройки. Зная для колебательной системы  $k$ ,  $p$  и  $n$ , можно определить сдвиг фазы  $\varepsilon$  непосредственно по графику.

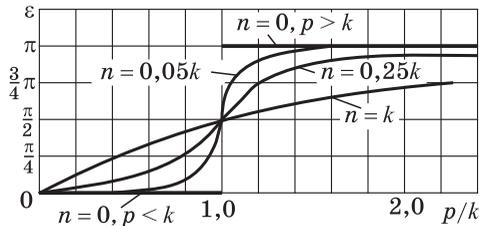


Рис. 36

Исследование амплитуды проводится следующим образом (см. (2.49)).

1. При  $n = 0$  получим

$$A_B = \frac{h}{\pm(k^2 - p^2)},$$

где  $A_B$  – амплитуда вынужденных колебаний без учета сопротивления.

$$\text{Выражения } A_B = \frac{h}{k^2 - p^2} \text{ при } p < k, A_B = \frac{h}{-(k^2 - p^2)} = \frac{h}{p^2 - k^2}$$

при  $p > k$  совпадают с полученными ранее (2.33) и (2.36).

2. При  $p = k$

$$A_{B.\text{рез}} = \frac{h}{2np} = \frac{h}{2nk}, \quad (2.51)$$

значит амплитуда вынужденных колебаний с учетом сопротивления на резонансной частоте имеет конечную величину.

3. Для определения максимальной амплитуды исследуем подкоренное выражение в (2.49)  $(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2 = f(p)$  на минимум и определим  $p$ , при котором это будет иметь место.

Для этого найдем производную по параметру  $p$   $f'(p)$  и приравняем ее нулю:

$$f'(p) = 2(k^2 - p^2)(-2p) + 4n^2 2p = 0. \quad (2.52)$$

Решив уравнение (2.52) относительно  $p$ , определим его корни. Один корень  $p_1 = 0$ . В этом случае амплитуда

$$A_{B.c} = \frac{h}{k^2}. \quad (2.53)$$

Физический смысл выражения (2.53) установим, подставив вместо  $h = \frac{F_0}{m}$  и  $k^2 = \frac{c}{m}$ .

Получим

$$A_{B.c} = \frac{F_0 \cdot m}{mc} = \frac{F_0}{c} = A_{ст},$$

где  $A_{ст}$  – статическое отклонение точки от положения равновесия под действием амплитуды  $F_0$  возмущающей силы. Следо-

вательно, при  $p = p_1 = 0$  точка не совершает вынужденных колебаний, а находится в равновесии:

$$cA_{\text{ст}} = F_0, \text{ т.е. } F_{\text{упр}} = F_0.$$

Два следующих корня уравнения (2.52)  $p_{2,3} = \pm\sqrt{k^2 - 2n^2}$ , где  $p_2 = -\sqrt{k^2 - 2n^2}$  не подходит по физическому смыслу (частота не может быть отрицательной).

Принимаем второй корень

$$p_3 = \sqrt{k^2 - 2n^2}. \quad (2.54)$$

При частоте  $p = p_3$  возмущающей силы подкоренное выражение в формуле (2.49) будет иметь минимальное значение, так как  $f''(p) > 0$ , а амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной:

$$\begin{aligned} A_{\text{в.с. max}} &= \frac{h}{\sqrt{\left(k^2 - (k^2 - 2n^2)\right)^2 + 4n^2(k^2 - 2n^2)}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_{\text{в.с. max}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Сравним  $A_{\text{в.с. рез}}$  и  $A_{\text{в.с. max}}$ , преобразовав выражение (2.55):

$$A_{\text{в.с. max}} = \frac{h}{2nk\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} = \frac{A_{\text{в.с. рез}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}. \quad (2.56)$$

Так как  $\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2} < 1$ , то  $A_{\text{в.с. max}} > A_{\text{в.с. рез}}$ . Однако при неболь-

шом сопротивлении, например  $\frac{n}{k} = 0,05$ ,  $A_{\text{в.с. max}} = 1,001 A_{\text{в.с. рез}} \approx$

$\approx A_{\text{в.с.рез}}$ . Заметим, что резонансная амплитуда имеет место при

$\frac{p}{k} = 1$ , а максимальная – при  $\frac{p}{k} = \sqrt{1 - 2\left(\frac{n}{k}\right)^2} < 1$ , что видно на

графиках амплитудно-частотной характеристики (рис. 37), построенной на основании зависимости (2.57).

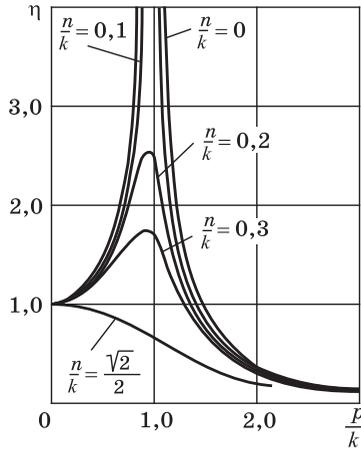


Рис. 37

Для построения этой характеристики введем в рассмотрение коэффициент динамичности, который равен отношению амплитуды вынужденных колебаний  $A_{\text{в.с}}$  (2.53) к статическому отклонению  $A_{\text{ст}}$  точки от положения равновесия под действием максимальной возмущающей силы, определяемому по формуле (2.53).

Тогда коэффициент динамичности

$$\eta = \frac{A_{\text{в.с}}}{A_{\text{ст}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{p}{k}\right)^2}} = f_2\left(\frac{n}{k}, \frac{p}{k}\right). \quad (2.57)$$

При отсутствии сопротивления ( $n = 0$ ) коэффициент динамичности

$$\eta = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2} \text{ при } p < k; \quad \eta = \frac{1}{\left(\frac{p}{k}\right)^2 - 1} \text{ при } p > k. \quad (2.58)$$

Из выражений (2.58) видно, что при резонансе  $\left(\frac{p}{k} = 1\right)$  коэффициент динамичности равен бесконечности. Если колебания происходят в среде с сопротивлением ( $n \neq 0$ ), то коэффициент динамичности при резонансе имеет конечную величину

$$\eta_{\text{рез}} = \frac{1}{2 \frac{n}{k}}. \quad (2.59)$$

Например, при  $\frac{n}{k} = 0,05$   $\eta_{\text{рез}} = 10$ , т.е. даже незначительное сопротивление в колебательной системе препятствует неограниченному увеличению амплитуды и коэффициента динамичности вынужденных колебаний.

Для построения графика, приведенного на рис. 37, будем задаваться отношением  $\frac{n}{k}$  и для различных отношений  $\frac{p}{k}$  определять  $\eta$ . Заметим, что с увеличением коэффициента демпфирования, т.е. с увеличением сопротивления, при одном и том же коэффициенте расстройки коэффициент динамичности уменьшается, а максимальные значения смещаются от значения  $\frac{p}{k} = 1$  влево и тем дальше, чем больше  $n$ .

Заметим также, что максимум амплитуд вынужденных колебаний при наличии сопротивления существует только при

$$\frac{n}{k} < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (см. (2.54)).}$$

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какое движение материальной точки называется колебательным?
2. Наличие какой силы является обязательным, чтобы материальная точка совершала колебательное движение?

3. Какой вид имеет дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки без учета сопротивления? с учетом сопротивления?

4. От каких факторов зависят частота, период, амплитуда и начальная фаза гармонических колебаний точки?

5. Груз подвешен на двух параллельных пружинах разной жесткости. Определите, чему равна жесткость эквивалентной пружины, заменяющей эти две. То же для двух последовательно соединенных пружин.

6. На материальную точку кроме восстанавливающей силы действует сила  $F = F_0 \sin \omega t$ . Какие колебания будет совершать точка? Какой вид при этом имеет дифференциальное уравнение движения?

7. Как влияет сопротивление движению на амплитуду и величину сдвига фаз вынужденных колебаний?

---

## ГЛАВА 3. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

---

### 3.1. Основные понятия и определения

*Механической системой* или *системой материальных точек* называют совокупность взаимодействующих материальных точек.

Примерами механических систем могут быть:

- материальное тело, в том числе и абсолютно твердое, как совокупность взаимодействующих материальных частиц;
- совокупность взаимосвязанных твердых тел;
- совокупность планет солнечной системы и т.д.

Стая летящих птиц не является механической системой, так как между птицами нет силового взаимодействия.

*Свободная механическая система* — система, на движение точек которой не наложено никаких связей (планеты солнечной системы).

*Несвободная механическая система* — система, на движение точек которой наложены связи (любой механизм, машина и т.п.).

Силы, действующие на несвободную механическую систему, можно разделить на задаваемые активные силы и реакции связей, либо на внешние и внутренние.

*Внешние силы* – это силы, действующие на точки данной механической системы со стороны точек, не входящих в данную систему. К ним относятся задаваемые активные силы и в некоторых случаях реакции связей.

*Внутренние силы* – это силы взаимодействия между точками одной механической системы. Это могут быть как активные силы, так и силы реакции связей. Примером внутренней активной силы служит сила давления газов на поршень в цилиндре или сила давления газов на снаряд в стволе орудия.

На произвольную точку  $M_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) системы (рис. 38) действуют:  $\vec{F}_k^e$  – равнодействующая внешних сил ( $e$  – первая буква французского слова *exterieur* – внешний);  $\vec{F}_k^i$  – равнодействующая внутренних сил ( $i$  – от слова *interieur* – внутренний). Одна и та же сила реакции связи в зависимости от условия задачи может быть как внешней, так и внутренней.

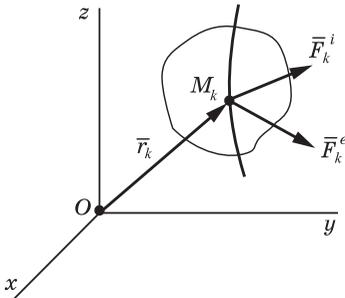


Рис. 38

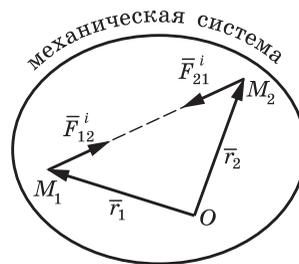


Рис. 39

Например, если рассматривать движение системы сочлененных тел, то силы взаимодействия тел этой системы (реакции внутренних связей) будут внутренними. При изучении движения какого-либо тела, выделенного из этой системы, те же силы будут рассматриваться как внешние.

$M_1$  и  $M_2$  – взаимодействующие точки механической системы (рис. 39). На основании третьего закона динамики

$$\vec{F}_{12}^i = -\vec{F}_{21}^i \Rightarrow \vec{F}_{12}^i + \vec{F}_{21}^i = 0,$$

но и

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{12}^i) + \vec{M}_O(\vec{F}_{21}^i) = 0.$$

Поскольку внутренние силы всегда появляются попарно, то *главный вектор* и *главный момент* внутренних сил механической системы равны нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = 0; \quad \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^i) = 0. \quad (3.1)$$

Однако нельзя утверждать, что внутренние силы взаимно уравновешиваются, поскольку они приложены к разным телам или точкам системы и могут вызывать перемещения этих точек относительно друг друга. Если система представляет твердое тело, то внутренние силы будут уравновешенными.

### 3.2. Дифференциальные уравнения движения механической системы

Основное уравнение динамики для произвольной  $k$ -й точки механической системы

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i. \quad (3.2)$$

В проекциях на оси декартовых координат имеем

$$\left. \begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{kx}^e + F_{kx}^i; \\ m_k \ddot{y}_k &= F_{ky}^e + F_{ky}^i; \\ m_k \ddot{z}_k &= F_{kz}^e + F_{kz}^i. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Для всей механической системы, состоящей из  $n$  материальных точек, необходимо составить  $3n$  уравнений, в которые войдут неизвестные внутренние силы. Аналитическое решение этих дифференциальных уравнений связано со значительными математическими трудностями, а зачастую и невозможно. Поэтому такой способ описания движения системы не всегда применяется. Кроме того, чтобы судить о том, как движется механическая система, не обязательно знать, как движется каждая ее точка. Во многих случаях достаточно знать некоторые суммарные характеристики движения системы, которые можно получить из *общих теорем динамики*:

- теоремы о движении центра масс механической системы;
- теорем об изменении количества движения, кинетического момента и кинетической энергии механической системы (см. далее).

Движение механической системы зависит не только от действующих на нее сил и ее массы, но и от того, как распределена масса системы, т.е. от геометрии масс.

Для характеристики распределения масс служат центр масс системы, осевые и центробежные моменты инерции твердых тел.

### 3.3. Центр масс механической системы

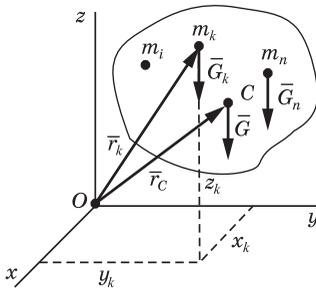


Рис. 40

На механическую систему (рис. 40), находящуюся в поле тяготения, действуют силы тяжести  $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_k, \dots, \bar{G}_n$  всех материальных точек. Центр тяжести и центр масс системы представляют одну и ту же точку  $C$ . Радиус-вектор  $\bar{r}_C$  центра  $C$  этих параллельных сил (центра тяжести системы)

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n G_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n G_k} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k g \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k g}. \quad (3.4)$$

Понятие «центр тяжести» применимо в том случае, если твердое тело или система твердых тел находятся в однородном поле сил тяжести.

Сократим выражение (3.4) на  $g$ , считая  $g = \text{const}$ , получим формулу для радиуса-вектора центра масс

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (3.5)$$

Понятие «центр масс системы» применимо для любой системы материальных точек независимо от того, находится она под действием каких-либо сил или нет.

Центр масс системы – это геометрическая точка, радиус-вектор которой определяется по формуле (3.5), а ее координаты по формулам

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad (3.6)$$

где  $m_k$  – масса каждой  $k$ -й точки (или тела);  $x_k, y_k, z_k$  – координаты  $k$ -й точки или центра тяжести  $k$ -го тела, входящих в механическую систему;  $\sum_{k=1}^n m_k = M$  – масса всей системы;

$\sum_{k=1}^n m_k x_k, \sum_{k=1}^n m_k y_k, \sum_{k=1}^n m_k z_k$  – соответственно статические моменты массы системы относительно координатных плоскостей  $Oyz, Ozx$  и  $Oxy$ .

**Пример 17.** Определить уравнения движения и траекторию центра масс кривошипно-шатунного механизма. Кривошип  $OA$  равномерно вращается вокруг оси  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ . Кривошип  $OA$  и шатун  $AB$  – однородные стержни одинаковой длины  $l$ , их массы  $m_{OA} = m_{AB} = 2$  кг, масса ползуна  $m_B = 1$  кг (рис. 41, а).

**Решение.** Координаты центра масс (рис. 41, б) механизма

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^3 m_k x_k}{\sum_{k=1}^3 m_k} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^3 m_k y_k}{\sum_{k=1}^3 m_k} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

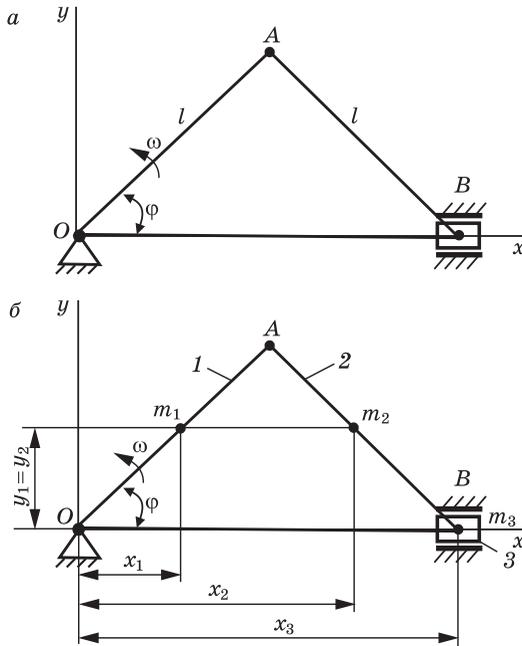


Рис. 41

Координаты центров масс звеньев в системе  $Oxy$

$$x_1 = \frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{l}{2} \cos \omega t; \quad x_2 = \frac{3}{2} l \cos \omega t; \quad x_3 = 2l \cos \omega t;$$

$$y_1 = \frac{l}{2} \sin \varphi = \frac{l}{2} \sin \omega t; \quad y_2 = \frac{l}{2} \sin \omega t; \quad y_3 = 0.$$

С учетом значений заданных масс

$$x_C = \frac{2 \cdot \frac{l}{2} \cos \omega t + 2 \cdot \frac{3}{2} l \cos \omega t + 1 \cdot 2l \cos \omega t}{2 + 2 + 1} = 1,2l \cos \omega t;$$

$$y_C = \frac{2 \cdot \frac{l}{2} \sin \omega t + 2 \cdot \frac{l}{2} \sin \omega t}{2 + 2 + 1} = 0,4l \sin \omega t.$$

Траектория движения центра масс – эллипс:  $\frac{x_C^2}{(1,2l)^2} + \frac{y_C^2}{(0,4l)^2} = 1.$

### 3.4. Моменты инерции твердого тела

Различают осевые, полярный, планарные и центробежные моменты инерции твердого тела.

*Осевые моменты инерции* — скалярные величины, равные сумме произведений масс всех точек тела на квадраты расстояний от этих точек до соответствующих координатных осей.

Возьмем в теле точку  $M_k$  (рис. 42) с координатами  $x_k, y_k, z_k$  и массой  $m_k$ . Тогда осевые моменты инерции

$$I_x = \sum_{k=1}^n m_k h_{kx}^2 = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2),$$

где  $h_{kx}$  — расстояние от точки  $M_k$  до оси  $x$ .

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} I_y &= \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2); \\ I_z &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Момент инерции твердого тела относительно оси может определяться по формуле

$$I_z = M i_z^2, \quad (3.8)$$

где  $i_z$  — радиус инерции тела относительно оси  $z$ . С геометрической точки зрения радиус инерции — это расстояние от оси  $z$  до такой точки тела, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции этой точки был равен моменту инерции всего тела. Поэтому при известном моменте инерции  $I_z$  тела относительно оси, например оси  $z$ , радиус инерции тела

относительно этой оси  $i_z = \frac{\sqrt{I_z}}{M}$ .

*Полярный момент инерции* — скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты расстояний от этих точек до начала координатных осей:

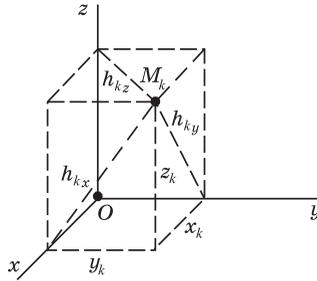


Рис. 42

$$I_O = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (3.9)$$

Из выражений (3.7) и (3.9) следует, что

$$2I_O = I_x + I_y + I_z. \quad (3.10)$$

Для шара  $I_x = I_y = I_z = I_{oc}$ , тогда

$$2I_O = 3I_{oc} \Rightarrow I_{oc} = 2/3I_O. \quad (3.11)$$

*Планарные моменты инерции* — скалярные величины, равные сумме произведений масс всех точек тела на квадраты расстояний от этих точек до соответствующих координатных плоскостей.

Общие формулы планарных моментов:

$$\left. \begin{aligned} I_{xOy} &= \sum_{k=1}^n m_k z_k^2; \\ I_{yOz} &= \sum_{k=1}^n m_k x_k^2; \\ I_{zOx} &= \sum_{k=1}^n m_k y_k^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Следует отметить, что сумма каких-либо двух планарных моментов инерции равна моменту инерции относительно той оси, которая образуется при пересечении этих плоскостей. Например,

$$I_{xOy} + I_{yOz} = \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2) = I_y. \quad (3.13)$$

*Центробежные моменты инерции\** — алгебраические величины, равные сумме произведений массы всех точек тела на произведение их координат по двум каким-либо осям:

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} &= \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k; \\ I_{yz} &= \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k; \\ I_{zx} &= \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

---

\* Подробно вопрос о центробежных моментах инерции твердого тела рассмотрен в п. 3.7.

### 3.5. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса – Штейнера)

#### Теорема

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями.

**Доказательство.** Выберем в центре масс  $C$  тела начало координатных осей  $x, y, z$ . Возьмем в теле точку  $M_k(x_k, y_k, z_k)$  массой  $m_k$ . Проведем на расстоянии  $d$  от оси  $z$  ось  $z_1$  (рис. 43). Тогда момент инерции относительно этой оси

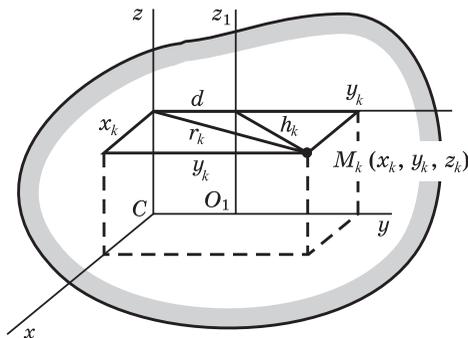


Рис. 43

$$\begin{aligned}
 I_{z_1} &= \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k \left[ x_k^2 + (y_k - d)^2 \right] = \\
 &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) - 2 \sum_{k=1}^n m_k y_k d + \sum_{k=1}^n m_k d^2,
 \end{aligned}$$

где  $\sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = I_{Cz}$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс;

$$\sum_{k=1}^n m_k d^2 = d^2 \sum_{k=1}^n m_k = Md^2;$$

$$\sum_{k=1}^n m_k y_k d = d \sum_{k=1}^n m_k y_k = dMy_C = 0,$$

так как  $y_C = 0$  (начало координат взято в центре масс). Тогда

$$I_{z_1} = I_{Cz} + Md^2. \quad (3.15)$$

### 3.6. Осевые моменты инерции некоторых однородных тел

#### 3.6.1. Тонкое кольцо

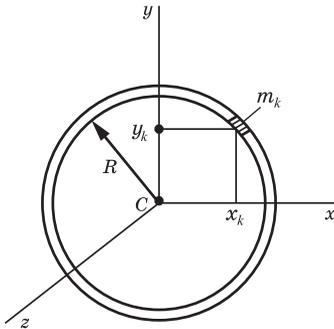


Рис. 44

Осевые моменты инерции тонкого кольца (рис. 44) рассчитаем следующим образом:  $I_x = I_y$  — в силу симметрии. С учетом формул (3.7) при  $z_k = 0$

$$I_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2; \quad I_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2;$$

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) = I_x + I_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_x = I_y = \frac{I_z}{2};$$

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) = \sum_{k=1}^n m_k R^2 = MR^2,$$

где  $M = \sum_{k=1}^n m_k$ .

$$\left. \begin{aligned} I_x = I_y = \frac{MR^2}{2}; \\ I_z = MR^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

### 3.6.2. Тонкий диск

Аналогично изложенному выше в п. 3.6.1

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2}.$$

Диск (рис. 45) разобьем на элементарные кольца. Масса выделенного кольца

$$\Delta m_k = 2\pi r_k \Delta r_k h \rho,$$

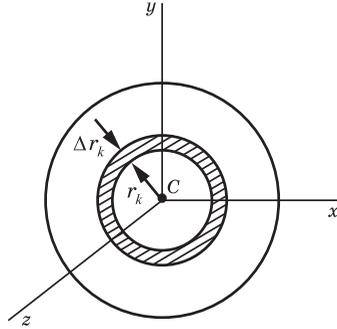


Рис. 45

где  $\rho$  — плотность тела,  $h$  — масса малая толщина диска. Тогда момент инерции относительно оси  $z$

$$I_z = \sum_{(S)} \Delta I_z = \sum_{(S)} \Delta m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^n 2\pi r_k \Delta r_k \rho r_k^2 h = \sum_{k=1}^n 2\pi \rho h r_k^3 \Delta r_k.$$

Переходим к пределу суммы:

$$\lim_{k=1}^{\infty} \sum 2\pi \rho h r_k^3 \Delta r_k = \int_0^R 2\pi \rho h r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{\pi R^4}{4} = \rho h \pi R^2 \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2},$$

где  $M = \pi R^2 \rho h$ .

Итак,

$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}, \quad I_z = \frac{MR^2}{2}. \quad (3.17)$$

### 3.6.3. Тонкий диск с отверстием

Масса диска (рис. 46)

$$M = \pi(R^2 - r^2)h\rho;$$

$$I_z = \frac{M_1 R^2}{2} - \frac{M_2 r^2}{2},$$

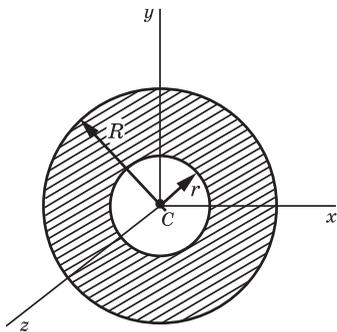


Рис. 46

где  $M_1 = \pi R^2 h \rho$  – масса диска радиуса  $R$ ;  $M_2 = \pi r^2 h \rho$  – масса диска радиуса  $r$ , т.е. масса вырезанной части.

Тогда

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{\pi R^2 h \rho R^2}{2} - \frac{\pi r^2 h \rho r^2}{2} = \\ &= \frac{\pi h \rho}{2} (R^2 + r^2) (R^2 - r^2) = \\ &= \frac{M(R^2 + r^2)}{2}; \end{aligned}$$

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{M(R^2 + r^2)}{4}.$$

В итоге

$$\left. \begin{aligned} I_x = I_y &= \frac{M(R^2 + r^2)}{4}; \\ I_z &= \frac{M(R^2 + r^2)}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

### 3.6.4. Прямоугольная тонкая пластина

Момент инерции прямоугольной тонкой пластины (рис. 47) относительно оси  $x$

$$I_x = \sum m_k y_k^2,$$

где  $m_k = a \Delta y_k h \rho$  – масса элементарной полоски. Вычисление этой суммы сведем к вычислению определенного интеграла:

$$I_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} a h \rho y^2 dy = a h \rho \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = a h \rho \frac{b^3}{3 \cdot 4} = a h \rho b \frac{b^2}{12} = \frac{M b^2}{12}.$$

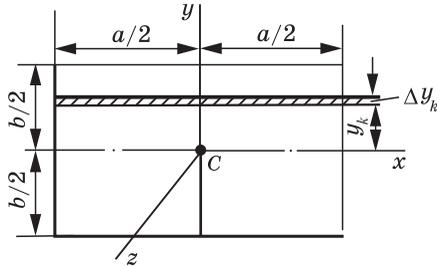


Рис. 47

Момент инерции относительно оси  $y$  найдем, разбив пластину на множество элементарных полосок, параллельных оси  $y$ . Тогда

$$I_y = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} bh\rho x^2 dx = bh\rho \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \frac{Ma^2}{12}.$$

Момент инерции относительно оси  $z$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{M(b^2 + a^2)}{12}.$$

В итоге

$$I_x = \frac{Mb^2}{12}; I_y = \frac{Ma^2}{12}; I_z = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}. \quad (3.19)$$

### 3.6.5. Круговой цилиндр

Цилиндр (рис. 48) разобьем на элементарные диски массой

$$\Delta m_k = \pi R^2 \rho \Delta z_k;$$

$$I_z = \Sigma \Delta I_z = \Sigma \frac{m_k R^2}{2} = \frac{MR^2}{2},$$

где  $M = \Sigma m_k$ ,  $\Delta I_z$  – момент инерции элементарного диска.

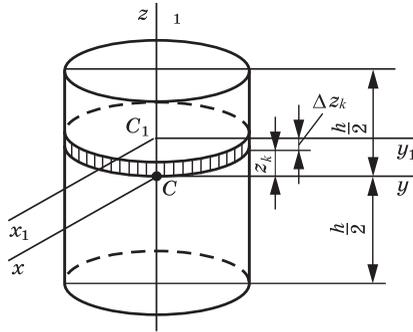


Рис. 48

$I_x = I_y$  в силу симметрии;

$$\begin{aligned}
 I_x &= \sum (V) \Delta I_x = \sum (V) (\Delta I_{x_1} + \Delta m_k z_k^2) = \sum (V) \left( \frac{\Delta m_k R^2}{4} + \Delta m_k z_k^2 \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\pi R^2 \rho R^2}{4} \Delta z_k + \sum_{k=1}^n \pi R^2 \rho z_k^2 \Delta z_k.
 \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , вычисление этих сумм сводим к вычислению определенных интегралов:

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\pi R^4 \rho}{4} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \pi R^2 \rho z^2 dz = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12},$$

где  $M = \pi R^2 h \rho$  — масса цилиндра.

$$\left. \begin{aligned}
 I_z &= \frac{MR^2}{2}; \\
 I_x = I_y &= \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

### 3.6.6. Тонкий длинный стержень

Для вычисления момента инерции тонкого длинного стержня (рис. 49) используем формулы для цилиндра, где  $h = l$ ,  $R \ll l \approx 0$ .

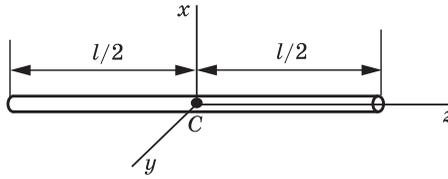


Рис. 49

Тогда

$$I_z = 0; \quad I_x = I_y = \frac{Ml^2}{12}. \quad (3.21)$$

### 3.6.7. Круговой конус

Определим момент инерции кругового конуса (рис. 50):

$$I_z = \sum_{(V)} \Delta I_z = \sum_{(V)} \frac{\Delta m_k r_k^2}{2},$$

где  $\Delta I_z$  – момент инерции;  $\Delta m_k = \pi r_k^2 \Delta z_k \rho$  – масса элементарного диска.

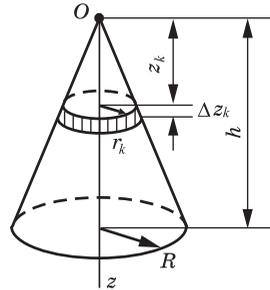


Рис. 50

$$\frac{z_k}{h} = \frac{r_k}{R} \Rightarrow r_k = \frac{Rz_k}{h};$$

$$I_z = \sum_{k=1}^n \frac{\pi R^2 z_k^2 \rho R^2 z_k^2 \Delta z_k}{2h^2 h^2}.$$

Переходя к пределу этой суммы при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$I_z = \frac{\pi R^4 \rho}{2h^4} \int_0^h z^4 dz = \frac{\pi R^4 \rho}{2h^4} \cdot \frac{h^5}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{\pi R^2 h \rho}{3} \cdot \frac{3}{10} R^2 = \frac{3}{10} MR^2,$$

где  $M = \frac{1}{3} \pi R^2 h \rho$  – масса конуса.

В итоге

$$I_z = \frac{3}{10} MR^2. \quad (3.22)$$

### 3.6.8. Шар

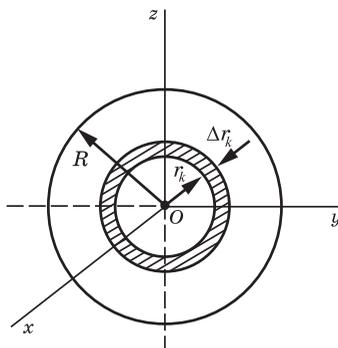


Рис. 51

Разобьем шар (рис. 51) на элементарные сферические оболочки радиуса  $r_k$  и толщиной  $\Delta r_k$ . Масса элементарной оболочки  $\Delta m_k = 4\pi r_k^2 \Delta r_k \rho$ , момент инерции этого элемента относительно полюса

$$\Delta I_O = \Delta m_k r_k^2.$$

Момент инерции шара относительно полюса

$$I_O = \sum_{(V)} \Delta I_O = \sum_{k=1}^n \Delta m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^n 4\pi r_k^4 \Delta r_k.$$

Переходя к пределу суммы, получим

$$I_O = \int_0^R 4\pi r^4 dr = 4\pi r \frac{R^5}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{3R^2}{5} = \frac{3}{5} MR^2,$$

где  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  — масса шара.

С учетом формулы (3.11)  $I_{oc} = \frac{2}{3} I_O = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} MR^2 = \frac{2}{5} MR^2.$

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} MR^2; \quad I_O = \frac{3}{5} MR^2. \quad (3.23)$$

**Пример 18.** Вычислить момент инерции однородного стержня длиной  $l$  и массой  $m$  относительно оси, проходящей через конец стержня.

**Решение.** Момент инерции стержня относительно оси  $Cx$  (см. рис. 49)

$$I_{Cx} = \frac{ml^2}{12}.$$

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через конец стержня, по теореме Гюйгенса – Штейнера

$$I_{x_1} = I_{Cx} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

### 3.7. Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси, проходящей через данную точку. Центробежные моменты инерции

Возьмем в теле точку  $O$  и примем ее за начало системы координат  $Oxyz$ . Проведем через эту точку произвольно направленную ось  $v$ , составляющую с осями  $x, y, z$  углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  соответственно (рис. 52).

Разобьем все тело на множество материальных точек  $M_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) массой  $m_k$ .

Опустим из каждой точки  $M_k$  перпендикуляры  $h_{v_k}$  на ось  $v$ .

Тогда момент инерции тела относительно оси  $v$

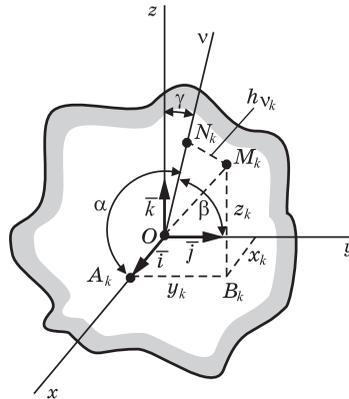


Рис. 52

$$I_v = \sum_{k=1}^n m_k h_{v_k}^2. \quad (3.24)$$

Соединим точку  $O$  с  $M_k$  радиусом-вектором  $OM_k$ , который можно представить как геометрическую сумму векторов  $\overline{OA_k}$ ,  $\overline{A_k B_k}$  и  $\overline{B_k M_k}$ , т.е.

$$\overline{OM_k} = \overline{OA_k} + \overline{A_k B_k} + \overline{B_k M_k},$$

или

$$\overline{OM_k} = \bar{i}x_k + \bar{j}y_k + \bar{k}z_k. \quad (3.25)$$

Расстояние от точек  $M_k$  до оси  $\nu$  найдем из прямоугольного треугольника  $OM_k N_k$ :

$$h_{\nu_k}^2 = OM_k^2 - ON_k^2, \quad (3.26)$$

где  $OM_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$ , а отрезок  $ON_k$  — это проекция вектора  $\overline{OM_k}$  на ось  $\nu$ , т.е.

$$\begin{aligned} ON_k &= \Pi_{p_\nu}(\overline{OM_k}) = \Pi_{p_\nu}(\overline{OA_k}) + \Pi_{p_\nu}(\overline{A_k B_k}) + \Pi_{p_\nu}(\overline{B_k M_k}) = \\ &= OA_k \cos \alpha + A_k B_k \cos \beta + B_k M_k \cos \gamma, \end{aligned}$$

или

$$ON_k = x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma. \quad (3.27)$$

Подставив в (3.25) вместо  $OM_k$  и  $ON_k$  полученные выше их значения, имеем:

$$h_{\nu_k}^2 = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - (x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma)^2.$$

Умножим сумму  $(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$  на величину  $(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$ , равную единице:

$$\begin{aligned} h_{\nu_k}^2 &= (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - \\ &\quad - (x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma)^2. \end{aligned}$$

Преобразуем это выражение, перемножив скобки и возведя в квадрат трехчлен. При этом учтем, что  $x_k^2 \cos^2 \alpha$ ,  $y_k^2 \cos^2 \beta$  и  $z_k^2 \cos^2 \gamma$ , входящие со знаками плюс и минус, сокращаются.

Тогда

$$h_{V_k}^2 = (y_k^2 + z_k^2) \cos^2 \alpha + (z_k^2 + x_k^2) \cos^2 \beta + (x_k^2 + y_k^2) \cos^2 \gamma - 2x_k y_k \cos \alpha \cos \beta - 2y_k z_k \cos \beta \cos \gamma - 2z_k x_k \cos \gamma \cos \alpha. \quad (3.28)$$

Подставив (3.27) в (3.23), вынесем за знак суммы косинусы углов и получим

$$I_V = \cos^2 \alpha \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \beta \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2) + \cos^2 \gamma \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k. \quad (3.29)$$

В уравнении (3.29) первые три слагаемые содержат суммы

$$\sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2) = I_x; \quad \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2) = I_y; \\ \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) = I_z,$$

которые являются осевыми моментами инерции твердого тела. Другие три слагаемые содержат суммы

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k y_k; \quad \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k; \quad \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k,$$

которые являются *центробежными моментами инерции тела* относительно соответствующей пары осей координат (см. (3.14)). С учетом этого формула для момента инерции тела относительно оси произвольного направления принимает вид

$$I_V = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \quad (3.30)$$

Центробежные моменты инерции учитывают асимметрию в распределении масс механической системы. Они вычисляются

относительно какой-либо пары координатных осей. Как видно из (3.14) и приведенного выше определения, центробежные моменты инерции симметричны относительно своих индексов, т.е.

$$I_{xy} = I_{yx}; I_{yz} = I_{zy}; I_{zx} = I_{xz}.$$

В отличие от осевых центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Это зависит не только от направления координатных осей, но и от выбора начала координат. Поэтому о центробежных моментах говорят как о моментах в данной точке, понимая, что в этой точке выбрано начало координат.

Ось, относительно которой центробежные моменты инерции, содержащиеся в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется *главной осью инерции тела*. Главная ось инерции, проходящая через центр масс тела, называется *главной центральной осью инерции*. Главными центральными осями инерции твердого тела являются его оси материальной симметрии. Если твердое тело имеет плоскость материальной симметрии, то любая ось, перпендикулярная к этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки, в которой ось пересекает эту плоскость. Эти оси обладают следующими свойствами:

- главная центральная ось инерции является главной осью инерции тела во всех своих точках;
- главная ось инерции, не проходящая через центр тяжести тела, является главной осью инерции тела лишь в одной своей точке.

Моменты инерции тела относительно главных и главных центральных осей инерции называются соответственно *главными* и *главными центральными моментами инерции*.

Если оси координат являются главными осями инерции, то

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

Тогда формула (3.30) принимает вид

$$I_v = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma. \quad (3.31)$$

Пусть в некоторой точке  $O$  твердого тела выбрано начало осей координат  $Oxyz$ . Если в этой точке известны главные моменты инерции относительно главных осей инерции  $Ox'y'z'$  и известна ориентация осей  $Oxyz$  относительно этих главных

осей инерции  $Ox'y'z'$ , то центробежные моменты инерции определяются по нижеприведенным формулам.

Рассмотрим три случая.

1. Ось  $Ox$  совпадает с главной осью инерции (рис. 53). Тогда

$$I_{xy} = I_{x'y'} = 0; \quad I_{zx} = I_{zx'} = 0,$$

а центробежный момент инерции

$$I_{yz} = \frac{I_{z'} - I_{y'}}{2} \sin 2\alpha \quad (3.32)$$

при повороте осей  $Oyz$  вокруг оси  $Ox$  на угол  $\alpha < 90^\circ$  до совпадения с главными осями  $Oy'z'$  против часовой стрелки, а при повороте по часовой стрелке

$$I_{yz} = \frac{I_{y'} - I_{z'}}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.33)$$

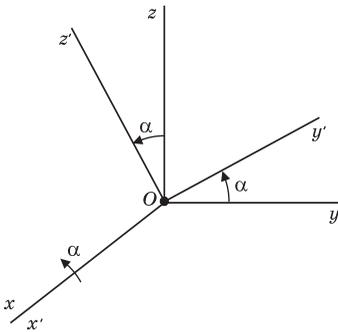


Рис. 53

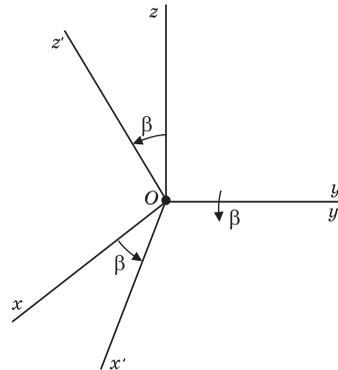


Рис. 54

2. При совпадении осей  $Oy$  и  $Oy'$  (рис. 54) и повороте осей  $Oxz$  вокруг  $Oy$  до совпадения с осями  $Ox'z'$  на угол  $\beta < 90^\circ$  в направлении против часовой стрелки имеем

$$I_{xy} = I_{xy'} = 0;$$

$$I_{yz} = I_{y'z} = 0;$$

$$I_{zx} = \frac{I_{x'} - I_{z'}}{2} \sin 2\beta. \quad (3.34)$$

3. При совпадении осей  $Oz$  и  $Oz'$  (рис. 55) и повороте вокруг оси  $Oz$  на угол  $\gamma < 90^\circ$  в направлении против часовой стрелки имеем

$$\begin{aligned} I_{xz} &= I_{xz'} = 0; \\ I_{yz} &= I_{yz'} = 0; \\ I_{xy} &= \frac{I_{y'} - I_{x'}}{2} \sin 2\gamma. \end{aligned} \quad (3.35)$$

**П р и м е ч а н и е.** Центробежные моменты инерции тел в виде стержней проще вычислять методом интегрирования (пример 19).

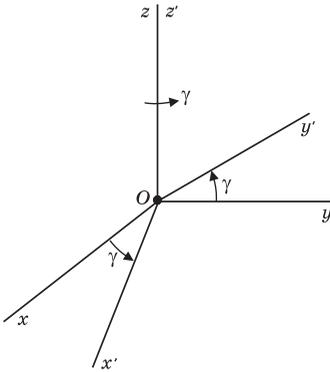


Рис. 55

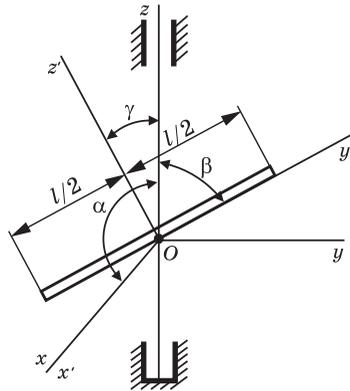


Рис. 56

**Пример 19.** Тонкий однородный стержень массой  $m$  и длиной  $l$  прикреплен в центре  $O$  к вертикальной оси и образует с этой осью угол  $\beta$ . Определить моменты инерции стержня относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  ( $I_x, I_y, I_z$ ) и центробежный момент инерции  $I_{yz}$ .

**Решение.** В данном примере определить моменты инерции можно двумя способами.

*Первый способ.* Оси  $Ox'y'z'$  — главные центральные (рис. 56). Моменты инерции стержня относительно этих осей

$$I_{x'} = \frac{ml^2}{12}; \quad I_{z'} = \frac{ml^2}{12}; \quad I_{y'} = 0.$$

Для вычисления  $I_z$  воспользуемся формулой (3.31):

$$I_z = I_{x'} \cos^2 \alpha_1 + I_{y'} \cos^2 \beta_1 + I_{z'} \cos^2 \gamma_1,$$

где в нашем случае  $\alpha_1 = 90^\circ$ ;  $\beta_1 = \beta$ ;  $\gamma_1 = \gamma = 90^\circ - \beta$ .

Тогда

$$I_z = \frac{ml^2}{12} \cos^2 90^\circ + 0 \cos^2 \beta + \frac{ml^2}{12} \cos^2 (90^\circ - \beta) = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \beta.$$

Для вычисления момента инерции относительно оси  $y$  воспользуемся той же формулой (3.31):

$$I_y = I_{x'} \cos^2 \alpha_2 + I_{y'} \cos^2 \beta_2 + I_{z'} \cos^2 \gamma_2.$$

В этом случае  $\alpha_2 = 90^\circ$ ;  $\beta_2 = 90^\circ - \beta$ ;  $\gamma_2 = 90^\circ + \gamma$ .

Тогда

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{ml^2}{12} \cos^2 90^\circ + 0 \cos^2 (90^\circ - \beta) + \frac{ml^2}{12} \cos^2 (90^\circ + \gamma) = \\ &= \frac{ml^2}{12} (-\sin \gamma)^2 = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \gamma = \frac{ml^2}{12} \sin^2 (90^\circ - \beta) = \frac{ml^2}{12} \cos^2 \beta. \end{aligned}$$

Ось  $x$  совпадает с главной осью инерции  $x'$ , поэтому

$$I_x = I_{x'} = \frac{ml^2}{12}.$$

Центробежный момент инерции  $I_{yz}$  определим, используя формулу (3.32):

$$I_{yz} = \frac{I_z - I_{y'}}{2} \sin 2\alpha,$$

где в нашем случае  $\alpha = 90^\circ - \beta$ .

Тогда

$$I_{yz} = \frac{\frac{ml^2}{12} - 0}{2} \sin (180^\circ - 2\beta) = \frac{ml^2}{24} \sin 2\beta.$$

*Второй способ.* Применим метод интегрирования (рис. 57). Разобьем стержень на элементарные участки длиной  $d\xi$  и массой  $dm = \frac{m d\xi}{l}$ . Тогда

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{(l)} h_z^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (\xi \sin \beta)^2 \frac{m d\xi}{l} = \frac{m}{l} \sin^2 \beta \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \xi^2 d\xi = \frac{m}{l} \sin^2 \beta \left. \frac{\xi^3}{3} \right|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \\ &= \frac{m}{3l} \sin^2 \beta \frac{l^3}{4} = \frac{ml^2}{12} \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

Аналогично

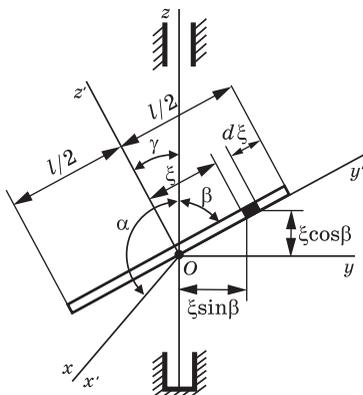


Рис. 57

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int (l) h_y^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (\xi \cos \beta)^2 \frac{m}{l} d\xi = \\
 &= \frac{m}{l} \cos^2 \beta \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \xi^2 d\xi = \\
 &= \frac{m}{l} \cos^2 \beta \left. \frac{\xi^3}{3} \right|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{m}{3l} \cos^2 \beta \frac{l^3}{4} = \\
 &= \frac{ml^2}{12} \cos^2 \beta.
 \end{aligned}$$

$$I_x = \int (l) \xi^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \xi^2 \frac{m}{l} d\xi = \frac{m \xi^3}{3l} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{12}.$$

Центробежный момент инерции  $I_{yz}$  определяем на основании формулы (3.14), сведя вычисление указанной суммы к вычислению определенного интеграла по длине  $l$ :

$$\begin{aligned}
 I_{yz} &= \int yz dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \xi \sin \beta \cdot \xi \cos \beta \frac{m}{l} d\xi = \frac{m}{l} \sin \beta \cos \beta \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \xi^2 d\xi = \\
 &= \frac{m}{l} \sin \beta \cos \beta \left. \frac{\xi^3}{3} \right|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{m}{3l} \sin \beta \cos \beta \frac{l^3}{4} = \frac{ml^2}{12} \sin \beta \cos \beta = \frac{ml^2}{24} \sin 2\beta.
 \end{aligned}$$

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Является ли твердое тело механической системой?
2. Как классифицируют силы, действующие на механическую систему?
3. В чем отличие центра масс механической системы от центра тяжести?
4. Чему равны координаты  $x_C$ ,  $y_C$  и  $z_C$  центра масс системы, состоящей из трех материальных точек одинаковой массы, если их положение в декартовой системе координат определяется координатами  $M_1(3, 7, 8)$ ,  $M_2(7, 8, 3)$ ,  $M_3(8, 3, 7)$ ?

5. Что такое осевой момент инерции твердого тела? Как он определяется?
6. Может ли единицей измерения момента инерции твердого тела в системе СИ являться  $\text{Н} \cdot \text{м}^2$ ?
7. Момент инерции однородного диска относительно некоторой оси равен  $MR^2/2$ . Что это за ось? Через какую точку диска она проходит? Чему равен момент инерции этого диска относительно другой оси, параллельной этой, но отстоящей от нее на расстоянии  $R/2$ ?
8. Что называется центробежным моментом инерции твердого тела? В чем его отличие от осевого?
9. При каких условиях некоторая ось является главной осью инерции?

## ГЛАВА 4. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

### 4.1. Теорема о движении центра масс системы

#### *Теорема*

Центр масс механической системы движется как любая материальная точка, масса которой равна массе механической системы и к которой приложена сила, равная главному вектору внешних сил, действующих на систему.

*Доказательство.* Запишем основное уравнение динамики для  $k$ -й материальной точки (рис. 58):

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

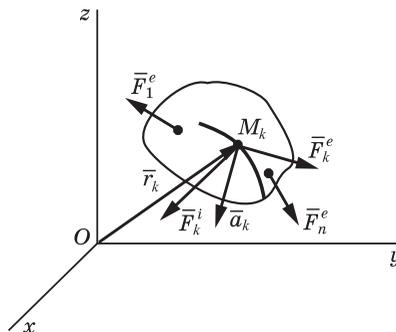


Рис. 58

Суммируя по точкам механической системы, получим

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i, \quad (4.1)$$

где  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = 0$  — по свойству внутренних сил;  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = \bar{R}^e$  — главный вектор внешних сил, приложенных к системе.

Преобразуем левую часть уравнения (4.1):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k &= \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k \right) = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} (M \bar{r}_C) = M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = M \bar{a}_C. \end{aligned}$$

С учетом этого уравнение (4.1) примет вид

$$M \bar{a}_C = \bar{R}^e. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) может быть записано в алгебраической форме в проекциях на оси декартовых координат или на естественные оси. В декартовых осях уравнение (4.2) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_C &= R_x^e = \Sigma F_{kx}^e; \\ M \ddot{y}_C &= R_y^e = \Sigma F_{ky}^e; \\ M \ddot{z}_C &= R_z^e = \Sigma F_{kz}^e, \\ k &= 1, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

### *Следствия из теоремы*

1. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то центр масс механической системы движется равномерно и прямолинейно либо покоится.

2. Если проекция главного вектора внешних сил, действующих на систему, на какую-либо ось, равна нулю, то проекция центра масс на эту ось либо покоится, либо движется равномерно, например, если  $R_x^e = 0$ , то  $\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = \text{const}$ .

Если в начальный момент система покоилась, то  $\dot{x}_{0C} = 0$ .

Так как  $\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = \dot{x}_{0C} = 0 \Rightarrow x_C = \text{const}$ , то проекция центра масс покоится. При  $\dot{x}_{0C} \neq 0$  центр масс будет двигаться вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью.

Эти следствия выражают закон сохранения движения центра масс механической системы. При  $x_C = \text{const}$  справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = 0, \quad (4.4)$$

где  $\Delta x_k$  — приращение координаты центра масс  $k$ -го тела при изменении положения тел в механической системе, равное проекции абсолютного перемещения этой точки на ось  $x$ .

3. Внутренние силы непосредственно не влияют на движение центра масс, хотя косвенное их влияние возможно в том случае, когда они являются причиной возникновения или изменения внешних сил.

**Пример 20.** Однородный цилиндр массой  $M=10$  кг скатывается по наклонной плоскости (рис. 59). Уравнение движения центра масс  $C$  цилиндра  $x_C = 2t^2$  м. Определить главный вектор внешних сил, действующих на цилиндр при движении.

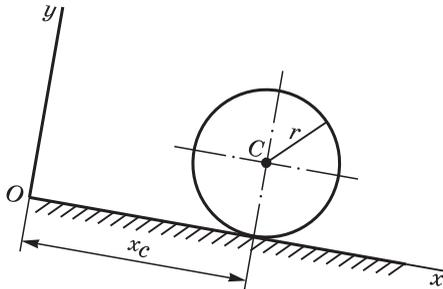


Рис. 59

**Решение.** Применим уравнения (4.3). Проекции главного вектора на  $x$  и  $y$

$$R_x^e = M\ddot{x}_C = M \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ Н}; \quad R_y^e = M\ddot{y}_C = 0,$$

так как  $y_C = r = \text{const} \Rightarrow \ddot{y}_C = 0$ .

Значит  $R^e = 40 \text{ Н}$ , направлен параллельно оси  $x$ .

**Пример 21.** Используя условие и решение примера 17, определить проекции главного вектора внешних сил на оси координат.

**Решение.** Уравнения движения центра масс, полученные при решении примера 17:

$$x_C = 1,2/\omega \cos \omega t; y_C = 0,4/\omega \sin \omega t.$$

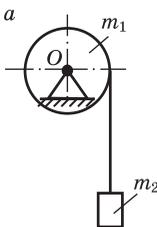
Проекции ускорения центра масс на оси координат

$$\ddot{x}_C = -1,2/\omega^2 \cos \omega t; \ddot{y}_C = -0,4/\omega^2 \sin \omega t.$$

Проекции главного вектора внешних сил на оси координат

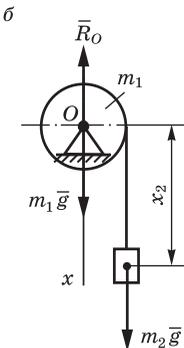
$$R_x^e = M\ddot{x}_C = -(m_{OA} + m_{AB} + m_B)1,2/\omega^2 \cos \omega t = -6/\omega^2 \cos \omega t;$$

$$R_y^e = M\ddot{y}_C = -(m_{OA} + m_{AB} + m_B)0,4/\omega^2 \sin \omega t = -2/\omega^2 \sin \omega t.$$



Из полученных выражений видно, что главный вектор внешних сил пропорционален квадрату угловой скорости.

**Пример 22.** К концу троса, навитого на барабан, подвешен груз массой  $m_2 = 20 \text{ кг}$ . Барабан массой  $m_1 = 10 \text{ кг}$  может вращаться вокруг горизонтальной оси. Определить реакцию оси, если груз начнет двигаться с постоянным ускорением  $a_2 = 2 \text{ м/с}^2$  (рис. 60, а).



**Решение.** Покажем внешние силы – вес барабана  $m_1\bar{g}$ , вес груза  $m_2\bar{g}$ , реакцию  $\bar{R}_O$  оси  $O$  (рис. 60, б). Запишем теорему о движении центра масс механической системы:

$$M\bar{a}_C = m_1\bar{g} + m_2\bar{g} + \bar{R}_O.$$

Выберем начало оси  $x$  в точке  $O$  и направим ее вниз. Спроецируем векторное уравнение на эту ось:

$$M\ddot{x}_C = (m_1 + m_2)g - R_O.$$

Отсюда

$$R_O = (m_1 + m_2)g - M\ddot{x}_C.$$

Рис. 60

Вычислим координату  $x_C$  центра масс:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 x_2}{M},$$

так как  $x_1 = 0$ , а  $m_1 + m_2 = M$ .

Продифференцируем дважды по времени это выражение и определим ускорение центра масс:

$$\ddot{x}_C = \frac{m_2 \ddot{x}_2}{M} = \frac{m_2 a_2}{M}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_O &= (m_1 + m_2)g - m_2 a_2 = m_1 g + m_2 (g - a_2) = \\ &= 10 \cdot 9,8 + 20(9,8 - 2) = 254 \text{ Н.} \end{aligned}$$

**Пример 23.** Призма  $A$  массой  $m_1 = 2$  кг покоится на гладкой горизонтальной плоскости. По гладкой наклонной плоскости призмы из состояния покоя начинает перемещаться груз  $B$  массой  $m_2 = 1$  кг. Определить перемещение призмы, когда груз опустится на высоту  $h = 10$  см, если  $\alpha = 30^\circ$  (рис. 61, а).

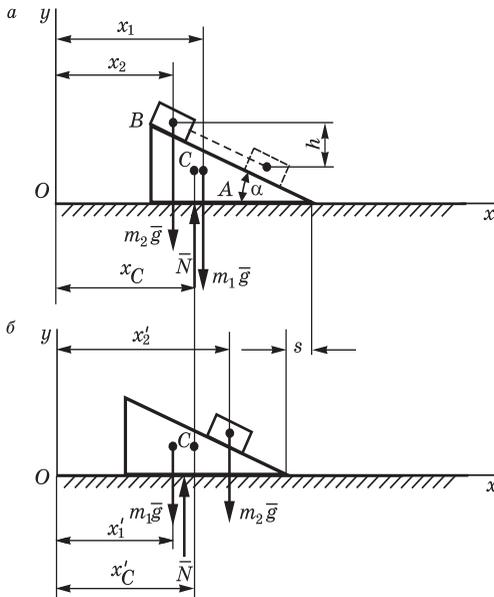


Рис. 61

**Решение.** Внешние силы, действующие на систему: вес  $m_1\bar{g}$  призмы, вес  $m_2\bar{g}$  груза и нормальная реакция  $\bar{N}$  плоскости (рис. 61, б) перпендикулярны к оси  $x$ . Поэтому  $\sum_{k=1}^3 F_{kx}^e = 0$ .

На основании второго следствия теоремы о движении центра масс

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \text{const},$$

при перемещении груза по призме координата  $x_2$  будет увеличиваться, а координата  $x_1$  должна уменьшаться, т.е. призма будет перемещаться влево. При опускании груза на высоту  $h$  призма переместится на  $s$ . Для определения этого перемещения воспользуемся формулой (4.4):

$$\sum_{k=1}^2 m_k \Delta x_k = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 = 0,$$

где проекции абсолютного перемещения центров масс тел

$$\Delta x_1 = x_1' - x_1 = x_1 - s - x_1 = -s;$$

$$\Delta x_2 = x_2' - x_2 = x_2 + h \text{ctg} \alpha - s - x_2 = h \text{ctg} \alpha - s.$$

Тогда

$$-m_1 s + m_2 (h \text{ctg} \alpha - s) = 0.$$

Отсюда

$$s = \frac{m_2 h \text{ctg} \alpha}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 10 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 5,8 \text{ см.}$$

## 4.2. Количество движения материальной точки и механической системы

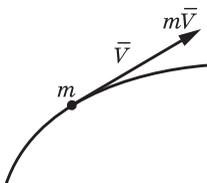


Рис. 62

*Количество движения материальной точки (или импульс точки) — векторная мера ее движения, равная произведению массы точки на вектор ее скорости (рис. 62):*

$$\bar{q} = m\bar{V}. \quad (4.5)$$

*Количество движения механической системы (или главный вектор количества дви-*

жения) — геометрическая сумма количеств движения всех материальных точек системы (рис. 63):

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k. \quad (4.6)$$

Преобразуем уравнение (4.6):

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k \right) = \\ &= \frac{d}{dt} (M\bar{r}_C) = M \frac{d\bar{r}_C}{dt} = M\bar{V}_C, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $\bar{V}_C$  — скорость центра масс механической системы.

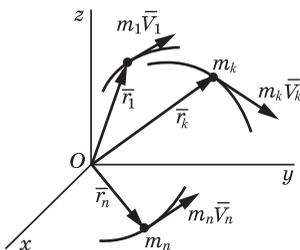


Рис. 63

Если механическая система состоит из твердых тел, то по формуле (4.7) определяется количество движения каждого  $k$ -го тела, а затем выполняется суммирование по телам системы:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_k = \sum_{k=1}^n M_k \bar{V}_{kC}, \quad (4.8)$$

где  $\bar{V}_{kC}$  — скорость центра масс  $k$ -го тела.

Модуль главного вектора количества движения системы определяется через его проекции на оси декартовых координат:

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{k=1}^n Q_{kx}; \quad Q_y = \sum_{k=1}^n Q_{ky}; \quad Q_z = \sum_{k=1}^n Q_{kz}; \\ Q &= \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Определим количество движения системы в следующих случаях.

1. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс (рис. 64). Так как  $V_C = 0$ , то  $Q = 0$ .

2. Твердое тело катится без скольжения по плоскости (рис. 65), совершая плоскопараллельное движение — поступательное вместе с центром масс,  $Q_{\text{пост}} = MV_C$ , и вращательное относительно оси, проходящей через центр масс —  $Q_{\text{вр}} = 0$  (см. рис. 65), так как  $\bar{Q}_{\text{вр}} = \sum m_k \bar{V}_{kC}$ , а скорости  $\bar{V}_{kC}$  попарно симметричных точек относительно центра масс имеют противоположные направления. В итоге

$$Q = MV_C.$$

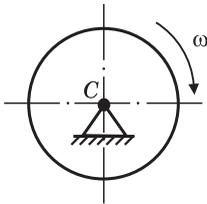


Рис. 64

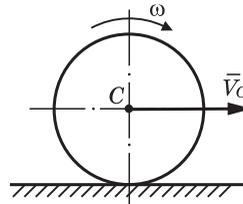


Рис. 65

3. Система состоит из двух ползунов, соединенных невесомым стержнем (рис. 66):

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= m_A \bar{V}_A + m_B \bar{V}_B; \\ Q_x &= m_B V_B;\end{aligned}$$

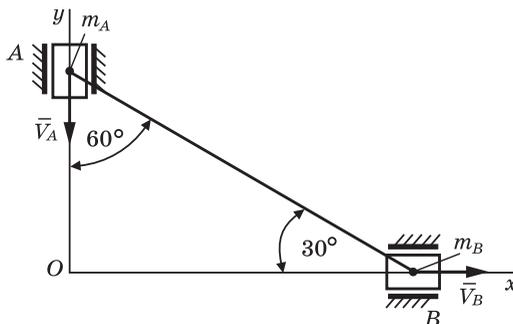


Рис. 66

$$Q_y = -m_A V_A;$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \sqrt{(m_B V_B)^2 + (-m_A V_A)^2}.$$

Пусть  $V_A = 2$  м/с,  $m_A = 1$  кг,  $m_B = 3$  кг. Из кинематики известно, что

$$V_A \cos 60^\circ = V_B \cos 30^\circ \Rightarrow V_B = \frac{V_A \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{V_A}{\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$Q = \sqrt{\left(3 \cdot \frac{V_A}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1 \cdot V_A)^2} = 2V_A = 2 \cdot 2 = 4 \text{ Н}\cdot\text{с}.$$

### 4.3. Импульс силы

*Импульс силы* — векторная мера действия силы за некоторый промежуток времени.

*Элементарный импульс  $d\vec{S}$  силы* — векторная величина, равная произведению вектора силы на элементарный промежуток времени  $dt$ , т.е.

$$d\vec{S} = \vec{F}dt. \quad (4.10)$$

Импульс  $\vec{S}$  силы  $\vec{F}$  за конечный промежуток времени  $t$  равен интегральной сумме соответствующих элементарных импульсов, т.е.

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}dt. \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) в проекциях на оси декартовых координат  $xuz$

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \int_0^t F_x dt; \\ S_y &= \int_0^t F_y dt; \\ S_z &= \int_0^t F_z dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Из равенств (4.10) – (4.12) следует, что можно определить только импульс постоянных сил и сил, зависящих от времени.

**Пример 24.** На материальную точку действует сила  $\vec{F} = 4t\vec{i} + 6\vec{j} - 2t^2\vec{k}$ . Определить импульс силы за промежуток времени  $t = 3$  с, начиная с  $t = 0$ .

**Решение.** Проекция силы на оси координат  $F_x = 4t$ ;  $F_y = 6$ ;  $F_z = -2t^2$ .

Проекция импульса силы на оси:

$$S_x = \int_0^t F_x dt = \int_0^3 4t dt = 4 \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^3 = 18 \text{ Н}\cdot\text{с};$$

$$S_y = \int_0^t F_y dt = \int_0^3 6 dt = 6 \cdot t \Big|_0^3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ Н}\cdot\text{с};$$

$$S_z = \int_0^t F_z dt = - \int_0^3 2t^2 dt = -2 \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^3 = -18 \text{ Н}\cdot\text{с}.$$

Модуль импульса силы

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} = \sqrt{18^2 + 18^2 + (-18)^2} = 18 \cdot \sqrt{3} = 31,14 \text{ Н}\cdot\text{с}.$$

Если на точку действует несколько сил, то они заменяются равнодействующей  $\vec{R}$ , импульс  $\vec{S}$  которой равен геометрической сумме импульсов всех сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n;$$

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{R} dt = \int_0^t (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) dt = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \dots + \vec{S}_n. \quad (4.13)$$

Действие внешних сил, приложенных к механической системе за некоторый промежуток времени  $t_2 - t_1$ , характеризуется импульсом главного вектора  $\vec{R}^e$  системы внешних сил:

$$\vec{S}^e = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}^e dt. \quad (4.14)$$

Векторному равенству (4.14) соответствуют три алгебраических:

$$S_x^e = \int_{t_1}^{t_2} R_x^e dt; S_y^e = \int_{t_1}^{t_2} R_y^e dt, S_z^e = \int_{t_1}^{t_2} R_z^e dt, \quad (4.15)$$

где  $R_x^e = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e$  и т.д. — проекции главного вектора внешних сил на оси координат.

Модуль импульса системы внешних сил

$$S^e = \sqrt{S_x^{e2} + S_y^{e2} + S_z^{e2}}. \quad (4.16)$$

#### 4.4. Теорема об изменении количества движения материальной точки

##### Теорема в дифференциальной форме

Производная по времени от количества движения материальной точки равна геометрической сумме сил, действующих на точку (рис. 67).

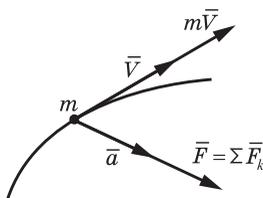


Рис. 67

**Доказательство.** Запишем основной закон динамики в виде

$$m\bar{a} = \Sigma \bar{F}_k;$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt};$$

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{V}) = \bar{F},$$

где  $m\bar{V} = q$ . Тогда

$$\frac{dq}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (4.17)$$

**Теорема в интегральной (конечной) форме**

Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов сил, действующих на точку, за тот же промежуток времени.

**Доказательство:**

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k,$$

или

$$\frac{d}{dt}(m\bar{V}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_{\bar{V}_0}^{\bar{V}} d(m\bar{V}) = \sum \int_0^t \bar{F}_k dt \Rightarrow m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k. \quad (4.18)$$

Векторные равенства (4.17) и (4.18) можно записать в проекциях на оси декартовых координат:

$$\frac{dq}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \Rightarrow \begin{cases} \frac{dq_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \\ \frac{dq_y}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \\ \frac{dq_z}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \end{cases} \quad (4.19)$$

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k \Rightarrow \begin{cases} mV_x - mV_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}; \\ mV_y - mV_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}; \\ mV_z - mV_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}. \end{cases} \quad (4.20)$$

При решении задач уравнения (4.19) следует применять в тех случаях, когда на точку кроме постоянных сил действуют

переменные силы. Решение сводится к интегрированию дифференциального уравнения движения (к вычислению первого интеграла).

**Пример 25.** Точка массой  $m = 2$  кг движется горизонтально под действием силы  $F = 20$  Н в среде, сопротивление которой определяется силой  $R = \alpha V$ , где  $\alpha = 0,4$  кг/с. Определить, какую скорость приобретет точка за время  $t = 10$  с, если движение началось без начальной скорости.

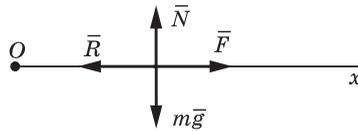


Рис. 68

**Решение.** Применим теорему об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме в проекции на ось  $x$ . Покажем силы  $\vec{F}$ ,  $\vec{R}$ ,  $m\vec{g}$  и  $\vec{N}$  (рис. 68):

$$\begin{aligned} \frac{dq_x}{dt} &= F - R; \quad \frac{d(mV_x)}{dt} = F - \alpha V_x \Rightarrow \int_0^V \frac{dV_x}{F - \alpha V_x} = \int_0^t \frac{dt}{m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{1}{\alpha} \ln(F - \alpha V_x) \Big|_0^V = \frac{t}{m} \Rightarrow \ln \frac{F - \alpha V}{F} = -\frac{\alpha}{m} t \Rightarrow \\ &\Rightarrow V = \frac{F}{\alpha} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t} \right) = \frac{20}{0,4} \left( 1 - e^{-\frac{0,4}{2} \cdot 10} \right) = 50 \left( 1 - \frac{1}{e^2} \right) = 43,5 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Уравнения (4.20) позволяют косвенным путем определить импульс сил, не зная ни сил, ни времени их действия, если при этом начальная и конечная скорости точки известны.

**Пример 26.** Материальная точка массой  $m = 1$  кг движется по окружности с постоянной скоростью  $V = 10$  м/с из точки  $M_O$  (рис. 69, а). Определить импульс сил, действующих на точку, за время, в течение которого точка пройдет  $\frac{3}{4}$  длины окружности.

**Решение.** Применим теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \vec{S}.$$

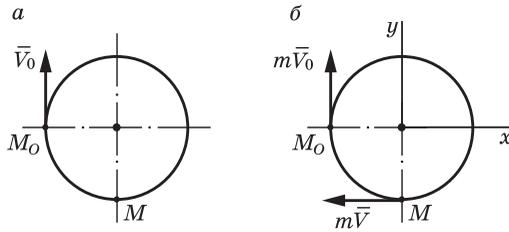


Рис. 69

Найдем проекции импульса  $\bar{S}$  на оси координат  $xy$  (рис. 69, б):

$$S_x = mV_x - mV_{0x} = -mV - 0 = -mV;$$

$$S_y = mV_y - mV_{0y} = 0 - mV_0 = -mV.$$

Импульс сил

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{(-mV)^2 + (-mV)^2} = mV\sqrt{2} = 1 \cdot 10 \cdot 1,41 = 14,1 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

#### 4.5. Теорема об изменении главного вектора количеств движения механической системы

##### *Теорема в дифференциальной форме*

Производная по времени от главного вектора количеств движения механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на эту систему.

**Доказательство.** На  $k$ -ю точку механической системы действуют силы  $\bar{F}_k^e$  и  $\bar{F}_k^i$ . Для этой точки в соответствии с уравнением (4.17)

$$\frac{d\bar{q}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

Суммируя по всем точкам системы, получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\bar{q}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i \Rightarrow \frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e, \quad (4.21)$$

так как

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\bar{q}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n \bar{q}_k \right) = \frac{d\bar{Q}}{dt}; \quad \sum \bar{F}_k^e = \bar{R}^e; \quad \sum \bar{F}_k^i = 0.$$

В проекциях на оси декартовых координат уравнение (4.21) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \\ \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e. \end{aligned} \quad (4.22)$$

### *Следствия из теоремы*

1. Если  $\bar{R}^e = 0$ , то  $\bar{Q} = \overline{\text{const}}$ .
2. Если проекция главного вектора на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось есть величина постоянная. Например, если  $R_x^e = 0$ , то  $Q_x = \text{const}$ .

### *Теорема в интегральной (конечной) форме*

Изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех внешних сил, действующих на точки механической системы, за тот же промежуток времени.

### *Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \Rightarrow d\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e dt \Rightarrow \int_{\bar{Q}_1}^{\bar{Q}_2} d\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_k^e dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^e, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где  $\sum_{k=1}^n \bar{S}_k^e = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_k^e dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \bar{R}^e dt = \bar{S}^e$  — импульс главного вектора системы внешних сил.

Векторному равенству (4.23) соответствуют три алгебраических равенства:

$$\left. \begin{aligned} Q_{2x} - Q_{1x} &= S_x^e; \\ Q_{2y} - Q_{1y} &= S_y^e; \\ Q_{2z} - Q_{1z} &= S_z^e. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

**Следствия из теоремы**

1. Если  $\bar{S}^e = 0$ , то  $\bar{Q}_2 = \bar{Q}_1 \Rightarrow \bar{Q} = \overline{\text{const}}$ .
2. Если  $S_x^e = 0$ , то  $Q_{2x} = Q_{1x} \Rightarrow Q_x = \text{const}$ .

**Пример 27.** Лодка массой  $M = 200$  кг, на корме которой стоял человек массой  $m = 80$  кг, двигалась со скоростью  $V_0 = 3$  м/с. Затем человек спрыгнул с лодки с абсолютной скоростью  $u = 1$  м/с против ее движения. Определить, с какой скоростью  $V$  после этого будет двигаться лодка.

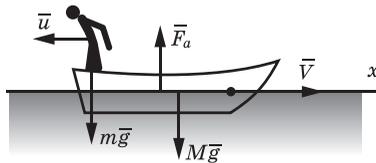


Рис. 70

**Решение.** Внешними силами являются вес лодки  $M\bar{g}$ , вес человека  $m\bar{g}$  и выталкивающая сила  $\bar{F}_a$  (рис. 70). Силой сопротивления движению пренебрегаем. Все силы перпендикулярны к оси  $x$ . Поэтому

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = R_x^e = 0 \Rightarrow S_x^e = 0 \Rightarrow Q_x = \text{const};$$

$$Q_{1x} = (M + m)V_0; \quad Q_{2x} = MV - mu;$$

$$Q_{2x} = Q_{1x} \Rightarrow MV - mu = (M + m)V_0 \Rightarrow V = \frac{M + m}{M}V_0 + \frac{m}{M}u =$$

$$= V_0 + \frac{m}{M}(V_0 + u) = 3 + \frac{80 \cdot 4}{200} = 4,6 \text{ м/с}.$$

## 4.6. Применение теоремы об изменении количества движения механической системы к сплошной среде.

### Теорема Эйлера

При изучении движения сплошной среды, например жидкости или газа, можно пользоваться теоремой об изменении количества движения механической системы в интегральной форме (4.23).

При движении жидкости в колене трубы (рис. 71) количества движения массы жидкости на входе  $\bar{Q}_1$  и на выходе  $\bar{Q}_2$  в силу неразрывности потока и несжимаемости жидкости одинаковы, т.е.  $M_1V_1 = M_2V_2$ .

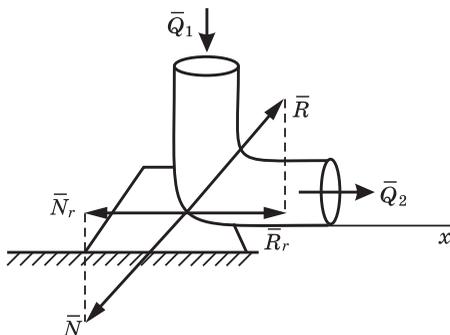


Рис. 71

Масса жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы за время  $t$ ,

$$M = \rho W = \rho \sigma V t ,$$

где  $W$  — объем жидкости, протекающей за время  $t$ ;  $\sigma$  — площадь поперечного сечения трубы;  $V$  — скорость протекания жидкости через поперечное сечение;  $\rho$  — плотность жидкости.

Тогда

$$Q_1 = \rho \sigma_1 t V_1^2; Q_2 = \rho \sigma_2 t V_2^2;$$

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow \rho \sigma_1 t V_1^2 = \rho \sigma_2 t V_2^2 \Rightarrow \sigma_1 V_1^2 = \sigma_2 V_2^2 .$$

При  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \Rightarrow V_1 = V_2 = V$ .

Вследствие искривления потока в колене возникает реакция  $\bar{R}$  стенок трубы, равная давлению жидкости на стенку трубы, что вызывает давление  $\bar{N}$  колена трубы на опору или при ее отсутствии колено будет стремиться повернуться в сторону, противоположную движению жидкости на выходе из трубы.

Записав теорему об изменении количества движения (4.23) для объема жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы за время  $t$ , в проекции на ось  $x$ , можно определить горизонтальную составляющую реакции  $\bar{R}$  стенок трубы и, следовательно, горизонтальную составляющую давления на опору:

$$\begin{aligned} Q_{2x} - Q_{1x} &= R_T \cdot t \Rightarrow Q_{2x} = \rho \sigma_2 t V_2^2 = \\ &= R_T \cdot t \Rightarrow R_T = \rho \sigma_2 V_2^2 = \rho \sigma V^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Горизонтальная составляющая  $\bar{N}_T$  давления на опору направлена в противоположную сторону горизонтальной составляющей  $\bar{R}_T$  реакции и равна ей по величине.

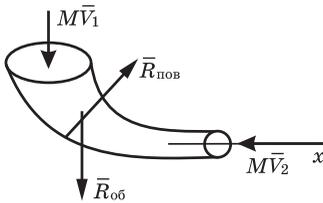


Рис. 72

Задачи такого типа можно также решать, используя теорему Эйлера. Допустим, жидкость движется в криволинейном канале переменного сечения. Рассмотрим объем жидкости между двумя сечениями. На выделенный объем действуют главные векторы  $\bar{R}_{об}$  объемных и  $\bar{R}_{пов}$  поверхностных сил (рис. 72).

**Теорема** (доказательство опущено).

Геометрическая сумма главного вектора объемных сил, главного вектора поверхностных сил и векторов количеств движения жидкости, протекающей через два каких-либо сечения в единицу времени, направленных внутрь выделенного объема, равна нулю, т.е.

$$\bar{R}_{об} + \bar{R}_{пов} + M\bar{V}_1 + (-M\bar{V}_2) = 0. \quad (4.26)$$

**Объемные (или массовые) силы** – силы, которые действуют на все частицы выделенного объема, например силы тяжести частиц.

**Поверхностные силы** – силы, действующие только на частицы, лежащие на внешней поверхности объема, например реакции твердых стенок, между которыми движется жидкость.

Покажем, что горизонтальную составляющую давления колена трубы на опору в приведенном выше примере можно также определить по теореме Эйлера, записав равенство (4.26) в проекции на ось  $x$

$$R_{об_x} + R_{пов_x} + MV_{1x} - MV_{2x} = 0,$$

или

$$R_{\Gamma} - MV_2 = 0,$$

так как  $R_{пов_x} = R_{\Gamma}$ ,  $R_{об_x} = 0$ ,  $MV_{1x} = 0$ ,  $MV_{2x} = MV_2$ .

Отсюда

$$R_{\Gamma} = MV_2,$$

где  $MV_2$  – количество движения жидкости, выходящей в единицу времени через поперечное сечение площадью  $\sigma$ , равное  $\rho\sigma V^2$ .

Тогда

$$N_{\Gamma} = \rho\sigma V^2.$$

## 4.7. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси

### 4.7.1. Алгебраический момент количества движения относительно центра

Пусть по плоской кривой (рис. 73) движется точка массой  $m_1$  со скоростью  $\vec{V}_1$  против хода часовой стрелки и точка массой  $m_2$  со скоростью  $\vec{V}_2$  по ходу часовой стрелки.

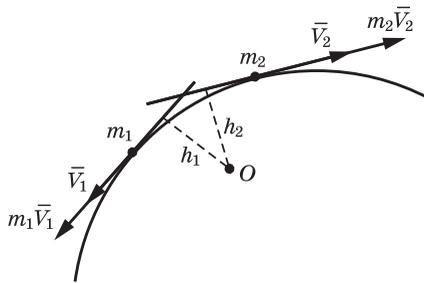


Рис. 73

Тогда

$$\text{mom}_O(m_1\bar{V}_1) = m_1V_1h_1 = l_{1O} > 0;$$

$$\text{mom}_O(m_2\bar{V}_2) = -m_2V_2h_2 = l_{2O} < 0.$$

**Правило знаков:**  $l_O > 0$  – при движении точки против хода часовой стрелки;  $l_O < 0$  – то же по ходу часовой стрелки.

*Алгебраический момент* количества движения материальной точки относительно некоторого центра  $O$  – алгебраическая величина, взятая со знаком (+) или (–) и равная произведению модуля количества движения  $m\bar{V}$  на расстояние  $h$  (длину перпендикуляра) от этого центра до линии, вдоль которой направлен вектор  $m\bar{V}$ :

$$l_O = \pm mVh. \quad (4.27)$$

#### 4.7.2. Векторный момент количества движения относительно центра

*Векторный момент* (рис. 74) количества движения материальной точки относительно некоторого центра  $O$  – вектор, приложенный в этом центре и направленный перпендикулярно к плоскости векторов  $m\bar{V}$  и  $\bar{r}$  в ту сторону, откуда движение точки видно против хода часовой стрелки.

В соответствии с приведенным определением  $\bar{l}_O$  можно представить в виде векторного произведения:

$$\bar{l}_O = \bar{r} \times m\bar{V}. \quad (4.28)$$

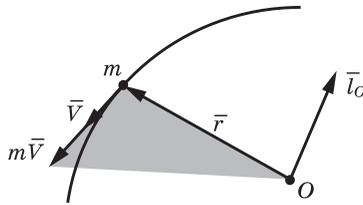


Рис. 74

### 4.7.3. Момент количества движения материальной точки относительно оси

Моментом количества движения материальной точки относительно некоторой оси  $z$  называется алгебраическая величина  $l_z$ , взятая со знаком (+) или (-) и равная произведению модуля  $m\bar{V}_{xy}$  проекции вектора  $m\bar{V}$  количества движения на плоскость, перпендикулярную к этой оси, на перпендикуляр  $h_1$ , опущенный из точки пересечения оси с плоскостью на линию, вдоль которой направлена указанная проекция (рис. 75, а):

$$l_z = \pm mV_{xy}h_1. \quad (4.29)$$

**Правило знаков** – при наблюдении с положительного конца оси  $z$  (рис. 75, а):

- $+l_z$  – момент количества движения относительно оси положительный при движении точки против хода часовой стрелки (рис. 75, б),  $l_z > 0$ ;

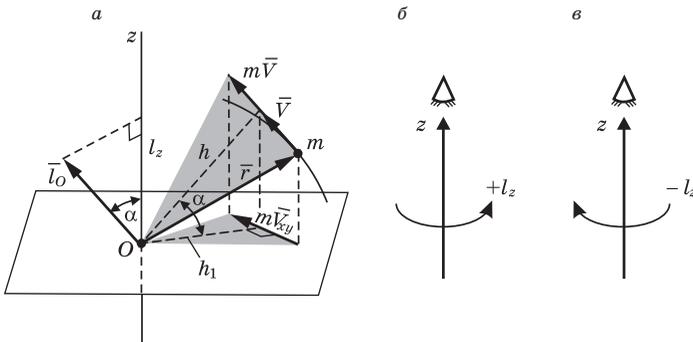


Рис. 75

- $-l_z$  – отрицательный при движении точки по ходу часовой стрелки (рис. 73, в),  $l_z < 0$ ;

- $l_z = 0$ , если  $\begin{cases} mV_{xy} = 0 \Rightarrow \text{вектор } m\vec{V} \parallel Oz; \\ h = 0 \Rightarrow \text{вектор } m\vec{V} \text{ пересекает ось } Oz. \end{cases}$

Между моментом количества движения материальной точки относительно центра и моментом количества движения относительно оси, проходящей через этот центр, существует зависимость: момент  $l_z$  равен проекции  $l_{Oz}$  вектора  $\vec{l}_O$  на ось  $z$  (рис. 75, а), т.е.

$$l_z = l_{Oz} = l_O \cos \alpha. \quad (4.30)$$

**Пример 28.** Круговой конус вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ . По образующей с вершины конуса движется со скоростью  $u$  материальная точка массой  $m$ . Определить момент количества движения точки относительно оси, когда она находится на расстоянии от вершины, равном половине длины образующей. Радиус основания конуса равен  $R$  (рис. 76).

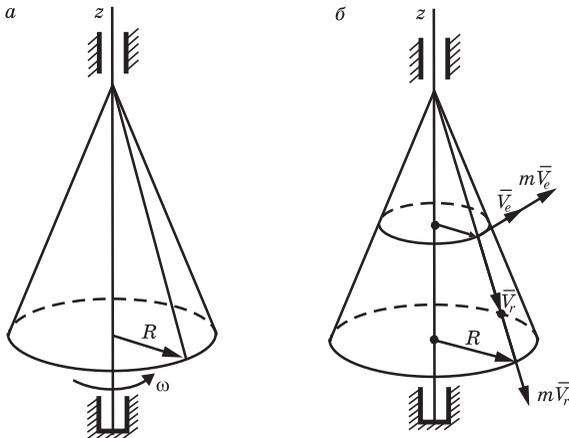


Рис. 76

**Решение.** Точка участвует в сложном движении: в относительном движении по образующей конуса и в переносном – вращении вместе с конусом. Относительная скорость  $V_r = u$ , переносная скорость  $V_e = \omega \frac{R}{2}$ . Момент количества движения точки относительно оси  $z$

$$l_z = \text{mom}_z(m\bar{V}_r) + \text{mom}_z(m\bar{V}_e).$$

Вектор  $m\bar{V}_r$  пересекает ось  $z$ , поэтому его момент относительно этой оси равен нулю, т.е.  $\text{mom}_z(m\bar{V}_r) = 0$ . Тогда

$$l_z = \text{mom}_z(m\bar{V}_e) = mV_e \frac{R}{2} = m\omega \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2} = \frac{m\omega R^2}{4}.$$

## 4.8. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси

### 4.8.1. Кинетический момент системы относительно центра

Для  $k$ -й точки системы векторный момент количества движения  $\bar{l}_{kO} = \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k$ . Кинетический момент системы (рис. 77)

$$\bar{L}_O = \sum_{k=1}^n \bar{l}_{kO}. \quad (4.31)$$

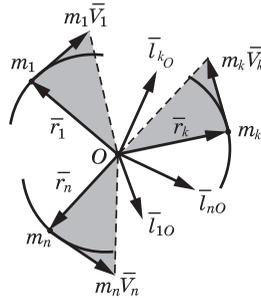


Рис. 77

Кинетическим моментом или главным моментом количеств движения механической системы относительно некоторого центра называется геометрическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно того же центра.

### 4.8.2. Кинетический момент системы относительно оси

Для  $k$ -й точки  $l_{kz} = l_{kO} \cos \alpha_k$  — алгебраическая величина. Кинетический момент системы (рис. 78)

$$L_z = \sum_{k=1}^n l_{kz}. \quad (4.32)$$

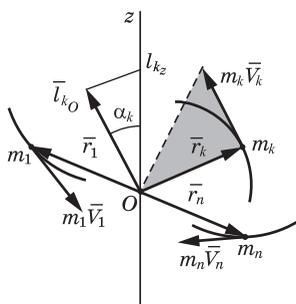


Рис. 78

Кинетическим моментом или главным моментом количества движения механической системы относительно некоторой оси называется алгебраическая сумма моментов количества движения всех материальных точек системы относительно той же оси.

### 4.8.3. Кинетический момент твердого тела

Определим кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 79):

для k-й точки тела

$$l_{k_z} = m_k V_k r_k;$$

$$V_k = \omega r_k \Rightarrow l_{k_z} = m_k \omega r_k^2;$$

суммируя по всем точкам тела, получим

$$L_z = \sum_{k=1}^n l_{k_z} = \sum_{k=1}^n m_k \omega r_k^2 = \omega \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \omega I_z,$$

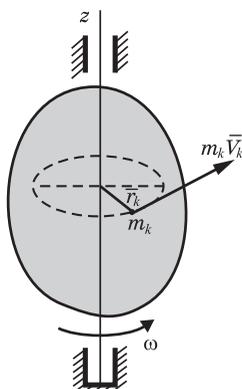


Рис. 79

где  $I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$  — момент инерции тела относительно оси вращения.

Итак, кинетический момент вращающегося вокруг неподвижной оси тела равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела:

$$L_z = I_z \omega. \quad (4.33)$$

#### 4.8.4. Кинетический момент механической системы в общем случае ее движения относительно неподвижных центра и осей

В общем случае механическая система может совершать сложное движение. Для вычисления кинетического момента это движение следует разложить на простейшие движения.

Введем две системы отсчета (системы координат): неподвижную  $Oxyz$  и подвижную  $Cx_1y_1z_1$ , связанные соответственно с неподвижным центром  $O$  и центром масс  $C$  системы (рис. 80).

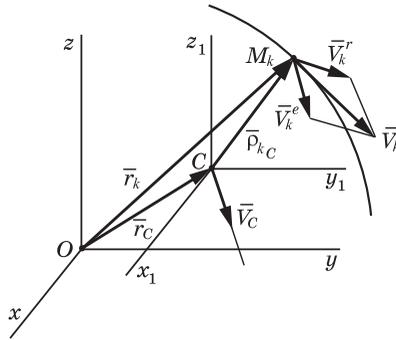


Рис. 80

Разложим сложное движение системы на переносное вместе с подвижной системой  $Cx_1y_1z_1$ , движущейся поступательно относительно неподвижной системы, и относительное по отношению к подвижной системе. Рассмотрим движение  $k$ -й точки этой системы. Положение этой точки по отношению к неподвижной системе определяем радиусом-вектором  $\vec{r}_k$ , положение этой точки по отношению к подвижной системе — радиусом-вектором  $\vec{\rho}_{kC}$ , проведенным из центра масс  $C$ , и положение подвижной системы отсчета относительно неподвижной определяем радиусом-вектором  $\vec{r}_C$ .

Тогда

$$\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_{kC}. \quad (4.34)$$

Воспользуемся теоремой сложения скоростей

$$\bar{V}_k = \bar{V}_k^e + \bar{V}_k^r,$$

где переносная скорость  $\bar{V}_k^e = \bar{V}_C$ , так как подвижная система координат движется поступательно.

Относительная скорость

$$\bar{V}_k^r = \frac{d\bar{\rho}_{kC}}{dt}.$$

Следовательно,

$$\bar{V}_k = \bar{V}_C + \bar{V}_k^r. \quad (4.35)$$

Кинетический момент механической системы относительно неподвижного центра  $O$

$$\bar{L}_O = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k. \quad (4.36)$$

Подставим в уравнение (4.36) выражения (4.34) и (4.35):

$$\begin{aligned} L_O &= \sum_{k=1}^n \left[ (\bar{r}_C + \bar{\rho}_{kC}) \times m_k (\bar{V}_C + \bar{V}_k^r) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n (\bar{r}_C \times m_k \bar{V}_C) + \sum_{k=1}^n (\bar{r}_C \times m_k \bar{V}_k^r) + \\ &+ \sum_{k=1}^n (\bar{\rho}_{kC} \times m_k \bar{V}_C) + \sum_{k=1}^n (\bar{\rho}_{kC} \times m_k \bar{V}_k^r). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Преобразуем каждую сумму в отдельности:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\bar{r}_C \times m_k \bar{V}_C) &= \bar{r}_C \times \sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_C = \\ &= \bar{r}_C \times \bar{V}_C \sum_{k=1}^n m_k = \bar{r}_C \times M \bar{V}_C = \bar{r}_C \times \bar{Q}, \end{aligned}$$

где  $\bar{Q} = M \bar{V}_C$  – главный вектор количеств движения системы;

$$\sum_{k=1}^n \left( \bar{r}_C \times m_k \bar{v}_k^r \right) = \bar{r}_C \times \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k^r = 0,$$

так как количество движения системы при движении относительно ее центра масс равно нулю:  $\sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k^r = M \bar{V}_C^r = 0$ .

$$\sum_{k=1}^n \left( \bar{\rho}_{kC} \times m_k \bar{v}_C \right) = \sum_{k=1}^n \left( m_k \bar{\rho}_{kC} \right) \times \bar{v}_C = M \bar{\rho}_C \times \bar{v}_C = 0,$$

так как  $\bar{\rho}_C = 0$  — начало координат подвижной системы выбрано в центре масс:

$$\sum_{k=1}^n \left( \bar{\rho}_{kC} \times m_k \bar{v}_k^r \right) = \bar{L}_C^r.$$

С учетом этого уравнение (4.37) примет вид

$$\bar{L}_O = \bar{r}_C \times \bar{Q} + \bar{L}_C^r. \quad (4.38)$$

Уравнение (4.38) представляет собой выражение кинетического момента механической системы в общем случае ее движения относительно неподвижного центра.

Слагаемое  $\bar{r}_C \times \bar{Q} = \overline{\text{mom}}_O(M \bar{V}_C)$  — есть момент главного вектора количеств движения, приложенного в центре масс, относительно центра  $O$  (собственный кинетический момент).

Слагаемое  $\bar{L}_C^r$  — это кинетический момент системы в ее относительном движении относительно центра масс (орбитальный кинетический момент).

*Кинетический момент* механической системы относительно неподвижного центра при любом ее движении равен геометрической сумме момента главного вектора количеств движения относительно этого центра, приложенного в центре масс, и кинетического момента системы в ее относительном движении относительно центра масс.

Уравнение (4.38) можно записать в проекциях на неподвижные оси и получить три алгебраических равенства:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= L_x(\bar{Q}) + L'_{x_1}; \\ L_y &= L_y(\bar{Q}) + L'_{y_1}; \\ L_z &= L_z(\bar{Q}) + L'_{z_1}, \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

где  $L_x(\bar{Q})$ ,  $L_y(\bar{Q})$ ,  $L_z(\bar{Q})$  – моменты главного вектора количества движения  $\bar{Q}$  механической системы, приложенного в ее центре масс, относительно осей  $x, y, z$ ;  $L'_{x_1}$ ,  $L'_{y_1}$ ,  $L'_{z_1}$  – кинетические моменты системы относительно подвижных осей  $x_1, y_1, z_1$ , проходящих через центр масс;  $L_x, L_y, L_z$  – кинетические моменты системы относительно неподвижных осей  $x, y, z$ .

**Пример 29.** Вычислить кинетический момент линейки  $AB$  механизма эллипсографа в абсолютном движении относительно оси  $x$ , совпадающей с осью вращения кривошипа  $OC$ , а также в относительном движении по отношению к оси, проходящей через центр масс  $C$  линейки параллельно оси  $x$ , т.е. оси  $x_1$ . Кривошип вращается с угловой скоростью  $\omega$ ; масса линейки равна  $m$ ;  $OC = AC = BC = l$  (рис. 81).

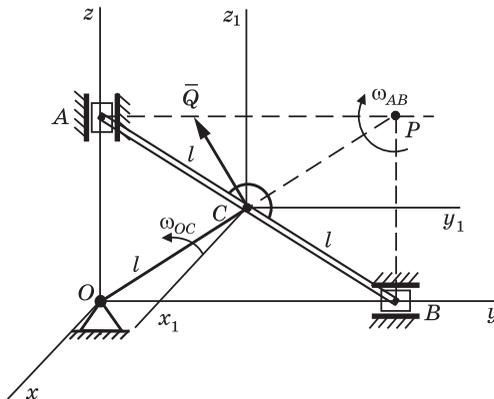


Рис. 81

**Решение.** Неподвижные оси  $Oxyz$  связаны с опорой  $O$ , начало подвижной системы координат  $Cx_1y_1z_1$  выбрано в центре масс  $C$  линейки и эта сис-

тема движется поступательно относительно неподвижной. Кинетический момент линейки  $AB$  относительно оси  $x$  на основании формулы (4.39)

$$L_{Ox} = L_x(\bar{Q}) + L'_{Cx_1} = OC \cdot Q - I_{Cx_1} \omega_{AB},$$

где  $I_{Cx_1}$  — момент инерции линейки относительно оси  $x_1$  :

$$I_{Cx_1} = \frac{m(2l)^2}{12} = \frac{ml^2}{3}.$$

Кинетический момент линейки в относительном движении относительно оси  $x_1$  взят со знаком минус, так как вращение происходит по ходу часовой стрелки, а  $L_{Ox}$  вычисляется как алгебраическая сумма.

Линейка совершает плоскопараллельное движение. Ее угловая скорость, при известном положении мгновенного центра скоростей (МЦС) (точка  $P$ )

$$\omega_{AB} = \frac{V_C}{PC} = \frac{\omega_{OC} \cdot OC}{PC} = \frac{\omega \cdot l}{l} = \omega.$$

Тогда кинетический момент линейки в относительном движении

$$L'_{Cx_1} = \frac{ml^2}{3} \omega.$$

Главный вектор количеств движения линейки  $AB$

$$Q = mV_C = m\omega l.$$

Следовательно,

$$L_{Ox} = l m \omega - \frac{ml^2}{3} \omega = \frac{2}{3} m \omega l^2.$$

#### **4.9. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и оси**

##### *Теорема об изменении момента относительно центра*

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого неподвижного центра равна моменту силы, действующей на точку, относительно того же центра.

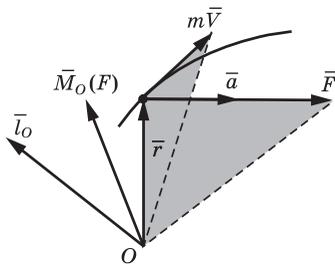


Рис. 82

**Доказательство** (рис. 82). Учтем, что

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k; \quad \vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{V};$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Продифференцируем по времени момент  $\vec{L}_O$ :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{V} \times m\vec{V} + \vec{r} \times \vec{F};$$

$$|\vec{V} \times m\vec{V}| = |\vec{V}| \cdot |m\vec{V}| \cdot \sin 0 = 0;$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F}),$$

где  $\vec{F}$  — момент силы относительно точки  $O$ . Итак,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}). \quad (4.40)$$

### Следствие из теоремы

Если линия действия равнодействующей приложенных к точке сил все время проходит через неподвижный центр, то момент количества движения материальной точки относительно этого центра остается постоянным.

**Примечание.** Такая сила называется центральной. Например, рассмотрим движение спутника вокруг Земли (рис. 83).  $F$  — сила притяжения, ее модуль зависит от расстояния между Землей и спутником. Так как  $\vec{M}_O(\vec{F}) = 0$ , то  $\vec{L}_O = \text{const} \Rightarrow mV_1r_1 = mV_2r_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{r_2}{r_1}$  — отношение скоростей обратно пропорционально расстояниям.

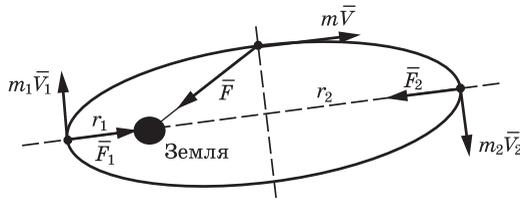


Рис. 83

**Теорема об изменении момента относительно оси**

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторой оси равна моменту силы, действующей на точку, относительно той же оси.

**Доказательство.** Запишем (4.40) в проекциях на оси декартовых координат, учитывая связь между моментом количества движения материальной точки относительно центра и оси (4.30) и связь между моментом силы относительно центра и оси, т.е., что

$$l_{O_x} = l_x; \quad l_{O_y} = l_y; \quad l_{O_z} = l_z;$$
$$M_{O_x}(\bar{F}) = M_x(\bar{F}); \quad M_{O_y}(\bar{F}) = M_y(\bar{F}); \quad M_{O_z}(\bar{F}) = M_z(\bar{F}).$$

Тогда

$$\bar{l}_O = \bar{i}l_x + \bar{j}l_y + \bar{k}l_z;$$
$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{i}M_x(\bar{F}) + \bar{j}M_y(\bar{F}) + \bar{k}M_z(\bar{F}).$$
(4.41)

Подставив (4.41) в (4.40) и продифференцировав, получим:

$$\frac{dl_x}{dt} = M_x(\bar{F}); \quad \frac{dl_y}{dt} = M_y(\bar{F}); \quad \frac{dl_z}{dt} = M_z(\bar{F}),$$
(4.42)

где  $l_x, l_y$  и  $l_z$  — моменты количества движения материальной точки относительно осей координат;  $M_x(\bar{F}), M_y(\bar{F}), M_z(\bar{F})$  — моменты силы относительно тех же осей.

**Следствие из теоремы**

Если момент равнодействующей сил, действующих на материальную точку, относительно некоторой оси равен нулю, то момент количества движения материальной точки относительно той же оси остается величиной постоянной.

**Пример 30.** К концу нити привязана тяжелая гирька. Второй конец нити переброшен через неподвижный блок. Когда нить с грузом отклонили от вертикали на некоторый угол и сообщили ему вокруг вертикальной оси скорость  $V_1 = 2$  м/с, направленную по касательной к траектории, нить начали укорачивать со скоростью  $u$ . Определить, с какой скоростью будет двигаться гирька вокруг оси  $z$ , когда расстояние до оси уменьшится в 2 раза (рис. 84, а).

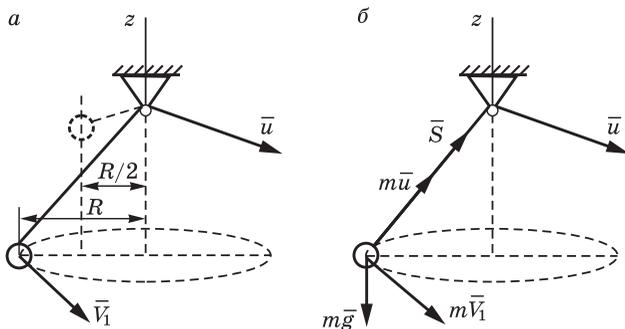


Рис. 84

**Решение.** На гирьку (рис. 84, б) действуют силы: натяжение  $\bar{S}$  нити и вес  $m\bar{g}$  гирьки. Применим теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси  $z$ :

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k).$$

Сила  $\bar{S}$  пересекает ось  $z$ ,  $m\bar{g}$  параллельна этой оси, поэтому

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow l_z = \text{const},$$

где  $l_z = \text{mom}_z(m\bar{V})$ ,  $\bar{V} = \bar{u} + \bar{V}_1$ . Вектор  $m\bar{u}$  пересекает ось  $z$ , его момент относительно оси равен нулю.

Тогда

$$l_z = \text{mom}_z(m\bar{V}) = mV_1 \cdot R = mV_2 \frac{R}{2} \Rightarrow V_2 = 2V_1 = 4 \text{ м/с.}$$

#### 4.10. Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно центра и оси

##### *Теорема об изменении кинетического момента относительно центра*

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра.

*Доказательство.* Для  $k$ -й точки системы

$$\frac{d\bar{l}_{kO}}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) + \bar{M}_O(\bar{F}_k^i).$$

Выполняя суммирование по всем точкам системы, получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\bar{l}_{kO}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n \bar{l}_{kO} \right) = \frac{d\bar{L}_O}{dt},$$

где  $\bar{L}_O = \sum_{k=1}^n \bar{l}_{kO}$ ;  $\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) = \bar{M}_O^e$  – главный момент внешних сил относительно центра  $O$ ;  $\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^i) = 0$  – по свойству внутренних сил.

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^e = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e). \quad (4.43)$$

***Следствие из теоремы***

Если главный момент внешних сил относительно некоторого центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра не изменяется (закон сохранения кинетического момента).

***Теорема об изменении кинетического момента относительно оси***

|| Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторой неподвижной оси равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно этой оси.

*Доказательство.* Спроецируем векторное равенство (4.43) на оси декартовых координат, получим

$$\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k^e) = M_x^e; \\ \frac{dL_y}{dt} &= \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k^e) = M_y^e; \\ \frac{dL_z}{dt} &= \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e) = M_z^e, \end{aligned} \quad (4.44)$$

где  $L_x, L_y, L_z$  — кинетические моменты механической системы относительно осей координат;  $M_x^e, M_y^e, M_z^e$  — главные моменты внешних сил относительно осей координат.

**Следствие из теоремы**

Если главный момент внешних сил относительно некоторой оси равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси не изменяется. Например,

$$M_z^e = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e) = 0,$$

тогда

$$L_z = \text{const.}$$

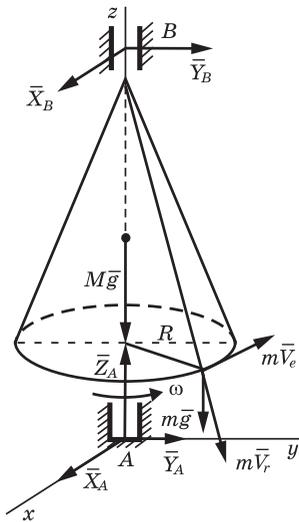


Рис. 85

**Пример 31.** Используя условие примера 28, определить угловую скорость вращения конуса в момент, когда материальная точка будет находиться на основании конуса, если в начальный момент она находилась в вершине конуса, а его угловая скорость была равна  $\omega_0 = 10$  рад/с. Масса точки  $m = 0,5$  кг, масса конуса  $M = 5$  кг.

**Решение.** Внешними силами, действующими на механическую систему (конус + материальная точка), являются силы тяжести  $M\bar{g}$  конуса и  $m\bar{g}$  точки, реакции подпятника  $A - \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$  и подшипника  $B - \bar{X}_B$  и  $\bar{Y}_B$  (рис. 85).

Применим теорему об изменении кинетического момента относительно оси  $z$ :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e).$$

Так как внешние силы либо параллельны оси  $z$ , либо пересекают ее, то  $\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e) = 0 \Rightarrow L_z = \text{const}$ , т.е.  $L_{0z} = L_{1z}$ , где  $L_{0z} = I_z \omega_0 = \frac{3MR^2}{10} \omega_0$  — кинетический момент конуса.

Кинетический момент системы в конечном положении

$$L_{1z} = L_{z \text{ кон}} + L_{z \text{ точки}} = I_z \omega_1 + mV_e R = \frac{3MR^2}{10} \omega_1 + m\omega_1 R^2,$$

так как вектор  $m\vec{V}_r$  пересекает ось  $z$  и его момент относительно этой оси равен нулю.

Тогда

$$\left( \frac{3}{10} MR^2 + mR^2 \right) \omega_1 = \frac{3}{10} MR^2 \omega_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{3M\omega_0}{10 \left( \frac{3}{10} M + m \right)} = \frac{3M}{3M + 10m} \omega_0 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 10}{3 \cdot 5 + 10 \cdot 0,5} = 7,5 \text{ рад/с.}$$

## 4.11. Теорема Резаля

### Теорема

Скорость конца вектора кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему, относительно того же центра (рис. 86).

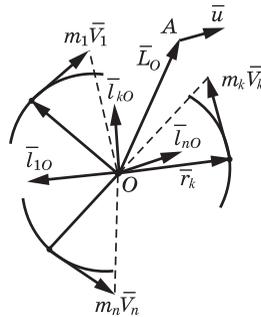


Рис. 86

*Доказательство.*

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^n \vec{l}_{kO};$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O \left( \vec{F}_k^e \right) = \vec{M}_O^e,$$

где  $\vec{M}_O^e$  — главный момент внешних сил.

Вместе с тем

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{OA})}{dt} = \vec{V}_A = \vec{u},$$

где  $\vec{u}$  — скорость конца вектора  $\vec{L}_O$  кинетического момента. Следовательно,

$$\bar{u} = \bar{M}_O^e. \quad (4.45)$$

Из равенства (4.45) следует, что размерность скорости  $\bar{u}$  совпадает с размерностью момента силы (Н · м). Это подтверждается и тем, что размерность кинетического момента  $\bar{L}_O$  (Н·с·м), а размерность производной по времени  $\frac{d\bar{L}_O}{dt}$  (Н · м).

Эта теорема используется в теории гироскопов.

## 4.12. Работа и мощность сил

**Работа силы** — скалярная мера действия силы.

### 4.12.1. Работа силы

**Элементарная работа силы** — это бесконечно малая скалярная величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор бесконечно малого перемещения точки приложения силы (рис. 87):

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (4.46)$$

Следует заметить, что элементарная работа силы в общем случае не является дифференциалом функции и принятое обозначение  $dA$  — условно. В том случае, когда элементарную работу можно считать дифференциалом функции, что характерно для потенциальных сил, будем обозначать ее  $d'A$  (см. п. 4.18).

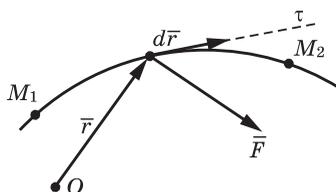


Рис. 87

В уравнении (4.46)  $d\bar{r}$  — приращение радиуса-вектора  $\bar{r}$  точки приложения силы, годографом которого является траек-

тория этой точки. Элементарное перемещение  $ds$  точки по траектории равно модулю вектора  $d\vec{r}$  в силу их малости. Поэтому

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Fds \cos \left( \vec{F}, \hat{d\vec{r}} \right). \quad (4.47)$$

Так как  $F \cos \left( \vec{F}, \hat{d\vec{r}} \right)$  — проекция силы на направление перемещения точки (при криволинейной траектории — на касательную ось  $\tau$  к траектории), то

$$dA = F_\tau ds, \quad (4.48)$$

т.е. работу совершает только касательная сила, а работа нормальной силы равна нулю.

Из выражения (4.47) следует:

$$\text{если } \left( \vec{F}, \hat{d\vec{r}} \right) < \frac{\pi}{2}, \text{ то } dA > 0;$$

$$\text{если } \left( \vec{F}, \hat{d\vec{r}} \right) = \frac{\pi}{2}, \text{ то } dA = 0;$$

$$\text{если } \left( \vec{F}, \hat{d\vec{r}} \right) > \frac{\pi}{2}, \text{ то } dA < 0.$$

**Аналитическое выражение элементарной работы.**

Представим векторы  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$  через их проекции на оси декартовых координат:

$$\vec{F} = \bar{i}F_x + \bar{j}F_y + \bar{k}F_z; \quad d\vec{r} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz$$

и подставим в уравнение (4.46). Учитывая, что  $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$ , получим

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (4.49)$$

**Работа силы на конечном перемещении** равна интегральной сумме элементарных работ на этом перемещении:

$$A_{M_1-M_2} = \int_{M_1 M_2} F ds \cos \left( \widehat{\vec{F}, d\vec{r}} \right) = \int_{M_1 M_2} F_{\tau} ds, \quad (4.50)$$

или

$$A_{M_1-M_2} = \int_{M_1 M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (4.51)$$

Интегралы в уравнениях (4.50) и (4.51) являются криволинейными интегралами первого и второго рода соответственно.

Если сила постоянная, а точка ее приложения перемещается прямолинейно, то

$$A_{M_1-M_2} = F s \cos \left( \widehat{\vec{F}, \vec{s}} \right). \quad (4.52)$$

Например, дано:  $F = 20$  Н,  $s = 0,5$  м,  $\alpha = 30^\circ$ .

$$A = F s \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,66 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

**Работа силы тяжести** (рис. 88) определяется по формуле (4.51):

$$F_x = F_y = 0; \quad F_z = -G = -mg;$$

$$A_{M_1-M_2} = \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2) = mgh,$$

где  $h$  – перемещение точки приложения силы по вертикали (разность высот), т.е.  $h = z_1 - z_2$ .

При перемещении точки приложения силы тяжести вверх  $A_{M_1-M_2} = -mgh$  (точка  $M_1$  – внизу,  $M_2$  –верху, тогда  $z_1 - z_2 = -(z_2 - z_1) = -h$ ). Итак,

$$A(m\vec{g}) = \pm mgh. \quad (4.53)$$

Таким образом, *работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения.*

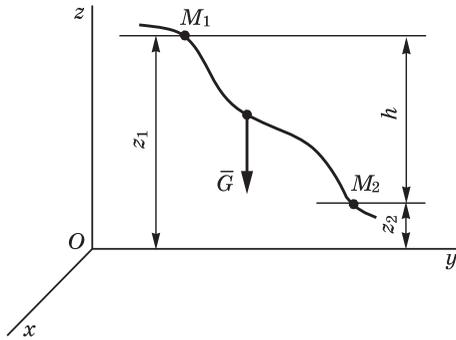


Рис. 88

Работа силы тяжести не зависит от формы траектории. При движении по замкнутой траектории ( $M_2$  совпадает с  $M_1$ ) работа силы тяжести равна нулю.

**Пример 32.** Тяжелый шарик массой  $m = 50$  г переместился из положения  $M_1$  в положение  $M_2$  внутри трубки, расположенной в вертикальной плоскости. Определить работу силы тяжести шарика на этом перемещении, если  $r = 0,5$  м (рис. 89).

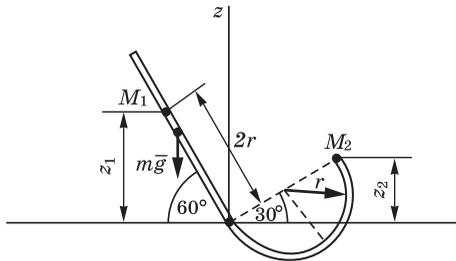


Рис. 89

**Решение.**

$$\begin{aligned}
 A_{M_1-M_2} &= mg(z_1 - z_2) = mg(2r \sin 60^\circ - 2r \sin 30^\circ) = \\
 &= 2mgr (\sin 60^\circ - \sin 30^\circ) = 2 \cdot 0,05 \cdot 9,8 \cdot 0,5 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \\
 &= 0,49 \cdot 0,366 \cong 0,18 \text{ Н} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

**П р и м е ч а н и е.** Если бы прямолинейный участок был наклонен к горизонту под углом  $45^\circ$  и оставался перпендикулярным к диаметру полуокружности, то точки  $M_1$  и  $M_2$  были бы на одной высоте и  $z_1 - z_2 = 0$ , т.е. работа силы тяжести была бы равна нулю.

**Работа силы упругости пружины** (рис. 90).

Пусть пружина растягивается только вдоль оси  $x$ . Используем выражение (4.51):

$$F_y = F_z = 0, F_x = -F_{\text{упр}} = -cx;$$

$$A_{M_1-M_2} = \int_0^\lambda F_x dx = \int_0^\lambda -cxdx = -\frac{\lambda^2}{2},$$

где  $\lambda$  — величина деформации пружины. При перемещении точки приложения силы  $\vec{F}_{\text{упр}}$  из нижнего положения в верхнее, т.е. в положение равновесия, направление силы и направление перемещения совпадают, тогда  $A_{21} = \frac{c\lambda^2}{2}$ .

Поэтому работа силы упругости в общем случае

$$A = \pm \frac{c\lambda^2}{2}. \quad (4.54)$$

Если начальная деформация пружины  $\lambda_0 \neq 0$ , то работа силы упругости при перемещении из положения равновесия равна

$$A_{M_1-M_2} = -\frac{c}{2}(\lambda^2 - \lambda_0^2).$$

**Примечание.** При перемещении точки приложения силы упругости по криволинейной траектории из положения  $M_1$  в положение  $M_2$  (рис. 91) работа определяется по формуле

$$A_{M_1-M_2} = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} c\lambda d\lambda.$$

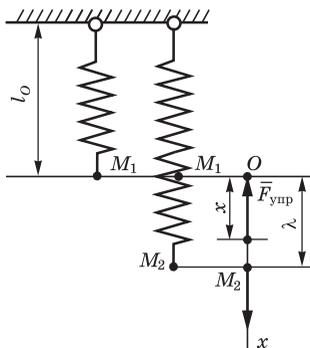


Рис. 90

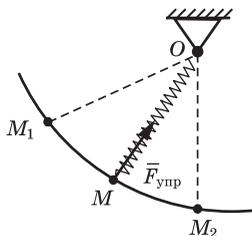


Рис. 91

Тогда

$$A_{M_1-M_2} = -\frac{c}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2), \quad (4.55)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – деформации пружины в этих положениях. При  $\lambda_2 < \lambda_1$  деформация пружины уменьшается при перемещении из положения  $M_1$  в положение  $M_2$ , работа силы упругости положительная и при  $\lambda_2 > \lambda_1$  деформация увеличивается, работа силы упругости отрицательная.

Рассмотрим работу сил, приложенных к твердому телу:

• **работа внутренних сил.** Для двух взаимодействующих точек тела

$dA_k^i = -F_{12}^i ds_1 \cos \alpha + F_{21}^i ds_2 \cos \beta = 0$ , так как  $\bar{F}_{12}^i = -\bar{F}_{21}^i$  и  $ds_1 \cos \alpha = ds_2 \cos \beta$  (рис. 92) на основании теоремы о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки.

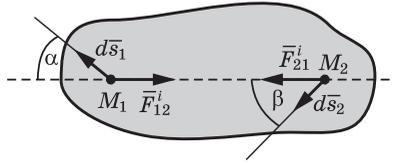


Рис. 92

Элементарная работа всех внутренних сил в твердом теле равна нулю:

$$dA^i = \sum_{k=1}^n dA_k^i = 0. \quad (4.56)$$

Следовательно, на любом конечном перемещении твердого тела работа внутренних сил

$$A^i = \sum_{k=1}^n A_k^i = 0; \quad (4.57)$$

• **работа внешних сил.** При поступательном движении тела элементарная работа  $k$ -й силы

$$dA_k^e = \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k = F_k^e ds_k \cos \left( \bar{F}_k^e, d\bar{r}_k \right).$$

Для всех сил, действующих на тело,

$$dA^e = \sum_{k=1}^n dA_k^e = \sum_{k=1}^n F_k^e ds_k \cos \left( \widehat{\bar{F}_k^e, d\bar{r}_k} \right).$$

Так как при поступательном движении перемещения всех точек одинаковы, т.е.

$$d\bar{r}_1 = d\bar{r}_2 = \dots = d\bar{r}_k = d\bar{r},$$

то

$$dA^e = \sum_{k=1}^n \left[ F_k^e \cos \left( \widehat{\bar{F}_k^e, d\bar{r}_k} \right) \right] ds = R_e^\tau ds, \quad (4.58)$$

где  $R_e^\tau = \sum_{k=1}^n F_k^e \cos \left( \widehat{\bar{F}_k^e, d\bar{r}_k} \right)$  — проекция главного вектора внеш-

них сил на направление перемещения;  $ds = |d\bar{r}|$ .

Работа внешних сил на конечном перемещении  $s$  тела при поступательном движении

$$A^e = \int_{(s)} R_e^\tau ds. \quad (4.59)$$

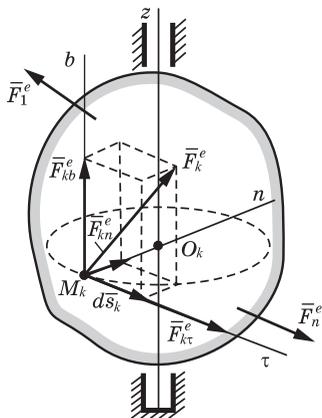


Рис. 93

При вращении тела вокруг неподвижной оси (рис. 93) элементарная работа  $k$ -й силы

$$dA_k^e = \bar{F}_k^e \cdot d\bar{s}_k = \left( \bar{F}_{k\tau}^e + \bar{F}_{kn}^e + \bar{F}_{kb}^e \right) d\bar{s}_k,$$

где  $\bar{F}_{k\tau}^e$ ,  $\bar{F}_{kn}^e$  и  $\bar{F}_{kb}^e$  — составляющие силы  $\bar{F}_k^e$  по естественным осям  $\tau nb$  (рис. 93).

Так как  $\bar{F}_{kn}^e \perp d\bar{s}_k$ ,  $\bar{F}_{kb}^e \perp d\bar{s}_k$ , то работа этих сил на перемещении  $d\bar{s}_k$  точки приложения силы равна нулю.

Тогда

$$dA_k^e = \bar{F}_{k\tau}^e \cdot d\bar{s}_k = F_{k\tau}^e ds_k = F_{k\tau}^e r_k d\varphi = M_z \left( \bar{F}_{k\tau}^e \right) d\varphi,$$

где  $ds_k$  — элементарная дуга при повороте тела на угол  $d\varphi$ ;  $r_k$  — радиус окружности, описываемой  $k$ -й точкой при вращении тела вокруг оси;  $M_z \left( \bar{F}_{k\tau}^e \right) = M_z \left( \bar{F}_k^e \right) = F_{k\tau}^e r_k$ , так как моменты сил  $\bar{F}_{k_n}^e$  и  $\bar{F}_{k_b}^e$  относительно оси вращения равны нулю.

Элементарная работа  $k$ -й внешней силы  $\bar{F}_k^e$  равна произведению момента этой силы относительно оси вращения  $M_z \left( \bar{F}_k^e \right)$  на элементарный угол поворота  $d\varphi$  тела вокруг оси.

Элементарная работа всех внешних сил

$$dA^e = \sum_{k=1}^n dA_k^e = \sum_{k=1}^n M_z \left( \bar{F}_k^e \right) d\varphi, \quad (4.60)$$

где  $\sum_{k=1}^n M_z \left( \bar{F}_k^e \right) = M_z^e$  — главный момент внешних сил относительно оси.

Работа сил на конечном перемещении тела

$$A^e = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^e d\varphi. \quad (4.61)$$

Если  $M_z^e = \text{const}$ , то

$$A^e = M_z^e (\varphi_2 - \varphi_1) = M_z^e \varphi_{\text{пов}}, \quad (4.62)$$

где  $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{\text{пов}}$  — конечный угол поворота;  $\varphi_{\text{пов}} = 2\pi n$  ( $n$  — число оборотов тела вокруг оси).

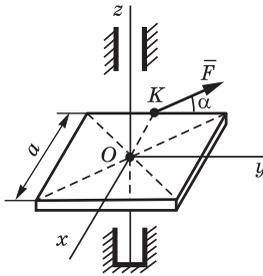


Рис. 94

**Пример 33.** Квадратная пластина со стороной  $a = 20$  см вращается вокруг вертикальной оси  $z$  под действием силы  $F = 30$  Н, образующей с плоскостью пластины угол  $\alpha = 30^\circ$ . Определить работу этой силы, если тело совершило 10 оборотов вокруг оси, а  $\vec{F} \perp OK$  (рис. 94).

**Решение.**

$$A(\vec{F}) = M_z(\vec{F})\varphi_{\text{пов}} = F \frac{a}{2} 2\pi n \cos \alpha = \\ = 30 \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cos 30^\circ = 166 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

#### 4.12.2. Мощность силы

**Мощность силы** — это работа, выполненная силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность

$$N = \frac{A}{t}, \quad (4.63)$$

где  $A$  — работа, совершенная силой на конечном перемещении, за время  $t$ .

В более общем случае мощность силы можно определить как отношение элементарной работы силы  $dA$  к элементарному промежутку времени  $dt$ , за который совершена эта работа. Поэтому

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F ds \cos \left( \vec{F}, \hat{d\vec{r}} \right)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( F s \cos \left( \vec{F}, \hat{d\vec{r}} \right) \right) = \\ = FV \cos \left( \vec{F}, \hat{\vec{V}} \right). \quad (4.64)$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси мощность

$$N = \frac{M_z^e d\varphi}{dt} = M_z^e \omega = \sum_{k=1}^n M_z \left( \vec{F}_k^e \right) \omega, \quad (4.65)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения тела.

**Коэффициент полезного действия** (КПД)  $\eta$  – отношение выполненной полезной работы  $A_{\text{пол}}$  ко всей затраченной работе  $A_{\text{зат}}$ , т.е.

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{зат}}}. \quad (4.66)$$

**Единица измерения работы силы** в системе СИ – джоуль (1 Дж = 1 Н·м), в системе МКГС (кГМ). **Единица измерения мощности** соответственно ватт (1 Вт = 1 Дж/с) и (кГМ/с); 75 кГМ/с = 1 л.с. (лошадиная сила); 1 кВт = 1000 Вт = 1,36 л.с.

Докажем это соотношение:

$$1 \text{ кГМ} = 9,8 \text{ Н} \cdot \text{м} = 9,8 \text{ Дж} = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ кДж} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \text{ кДж} = \frac{1 \text{ кГМ}}{9,8 \cdot 10^{-3}} = 102 \text{ кГМ};$$

$$1 \text{ кВт} = 1 \text{ кДж/с} = 102 \text{ кГМ/с} = \frac{102}{75} = 1,36 \text{ л.с.}$$

**Пример 34.** Определить мощность двигателя для привода механизма подъема молота массой  $m = 600$  кг на высоту  $h = 0,8$  м, если КПД передачи  $\eta = 0,8$ , а груз в течение одной минуты нужно поднять  $n = 60$  раз.

**Решение.** Мощность с учетом формулы (4.63)

$$N = \frac{A_{\text{зат}}}{t}; \quad A_{\text{зат}} = \frac{A_{\text{пол}}}{\eta}.$$

Полезная работа затрачивается на подъем груза (работа силы тяжести):

$$A_{\text{пол}} = mgh \cdot n.$$

Тогда

$$N = \frac{mgh \cdot n}{\eta \cdot t} = \frac{600 \cdot 9,8 \cdot 0,8 \cdot 60}{0,8 \cdot 60} = 5,8 \cdot 10^3 \text{ Дж/с} = 5,8 \text{ кДж/с} = 5,8 \text{ кВт}.$$

### 4.13. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы.

#### Теорема Кенига

**Кинетическая энергия** – скалярная мера механического движения.

**Кинетическая энергия материальной точки** — скалярная положительная величина, равная половине произведения массы

точки на квадрат ее скорости, т.е.  $\frac{mV^2}{2}$ .

**Кинетическая энергия механической системы** — арифметическая сумма кинетических энергий всех материальных точек этой системы (рис. 95):

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n V_n^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}. \quad (4.67)$$

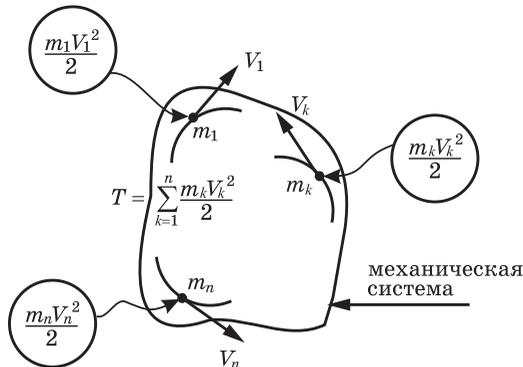


Рис. 95

Кинетическая энергия системы, состоящей из  $n$  тел, равна арифметической сумме кинетических энергий всех тел этой системы:

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n = \sum_{k=1}^n T_k. \quad (4.68)$$

Так как кинетическая энергия является положительной скалярной величиной, то она не зависит от направлений движения частей системы. Этим она отличается от количества движения  $\bar{Q}$  и кинетического момента  $\bar{L}_O$  системы. Кроме того, на ее изменение могут влиять как внешние, так и внутренние силы, действующие на механическую систему.

Рассмотрим определение кинетической энергии механической системы в общем случае ее движения. Пусть механическая система, состоящая из  $n$  материальных точек, движется как угодно в пространстве. В самом общем случае это движение можно рассматривать как сложное, состоящее из переносного и относительного движений. За переносное движение возьмем поступательное движение системы  $Cx_1y_1z_1$  вместе с центром масс  $C$  относительно неподвижных осей  $Oxyz$  (см. рис. 80), а за относительное движение — движение механической системы относительно этой подвижной системы отсчета.

Тогда по теореме сложения скоростей в сложном движении скорость любой  $k$ -й точки (см. 4.35)

$$\vec{V}_k = \vec{V}_k^e + \vec{V}_k^r = \vec{V}_C + \vec{V}_k^r.$$

На основании формул (4.67) и (4.35) кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \vec{V}_k^2 = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} (\vec{V}_C + \vec{V}_k^r)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \left( \vec{V}_C^2 + 2\vec{V}_C \cdot \vec{V}_k^r + (\vec{V}_k^r)^2 \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \vec{V}_C^2 + \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_C \cdot \vec{V}_k^r + \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} (\vec{V}_k^r)^2. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \vec{V}_C^2 &= \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \vec{V}_C \cdot \vec{V}_C = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} V_C \cdot V_C \cdot \cos 0 = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} V_C^2 = \frac{1}{2} V_C^2 \sum_{k=1}^n m_k = \frac{M V_C^2}{2}, \end{aligned}$$

что является кинетической энергией системы при движении вместе с центром масс;

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_C \cdot \vec{V}_k^r &= \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_C \cdot \frac{d\vec{\rho}_{kC}}{dt} = \vec{V}_C \cdot \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{\rho}_{kC}}{dt} = \\ &= \vec{V}_C \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n m_k \vec{\rho}_{kC} \right) = \vec{V}_C \cdot \frac{d}{dt} (M \vec{\rho}_C) = 0, \end{aligned}$$

так как  $\bar{r}_C = 0$  (начало координат подвижной системы выбрано в центре масс  $C$  системы);

$$\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} (\bar{V}_k^r)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} (V_k^r)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_{kC}^2}{2},$$

что является кинетической энергией системы при движении относительно центра масс.

С учетом полученных выше результатов кинетическая энергия механической системы в общем случае ее движения принимает вид

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_{kC}^2}{2}. \quad (4.70)$$

Формула (4.70) выражает теорему о кинетической энергии системы в общем случае ее движения, предложенную в 1751 г. голландским математиком С. Кенигом.

Кинетическая энергия механической системы в общем случае ее движения равна сумме кинетической энергии движения системы вместе с центром масс и кинетической энергии системы при ее движении относительно центра масс.

## 4.14. Кинетическая энергия твердого тела в различных частных случаях движения

### 4.14.1. Поступательное движение

При поступательном движении тела (рис. 96)

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \dots = \bar{V}_n = \bar{V}_C.$$

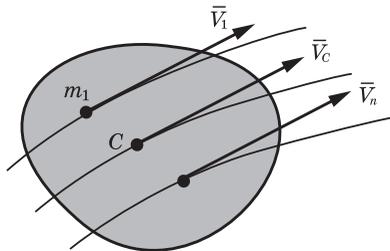


Рис. 96

С учетом (4.67)

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{V_C^2}{2} \sum_{k=1}^n m_k = \frac{M V_C^2}{2}. \quad (4.71)$$

Этот результат можно получить из (4.70), где для этого движения скорость точек тела относительно центра масс  $\vec{V}_{kC} = 0$ .

#### 4.14.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси на примере рис. 97:

$$V_k = \omega r_k.$$

С учетом (4.67)

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k r_k^2 \omega^2}{2} = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

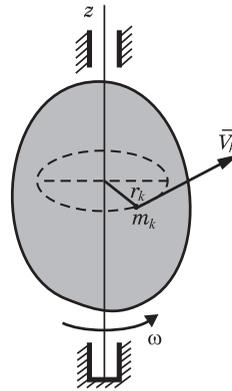


Рис. 97

где  $I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$  — момент инерции тела относительно оси вращения.

#### 4.14.3. Плоскопараллельное движение

На основании теоремы Кенига (4.70) с учетом того, что  $V_{kC} = V_k^r = \omega C M_k$  (рис. 98),

$$T = \frac{M V_C^2}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{m_k (C M_k)^2 \omega^2}{2} = \frac{M V_C^2}{2} + \frac{I_{C_z} \omega^2}{2},$$

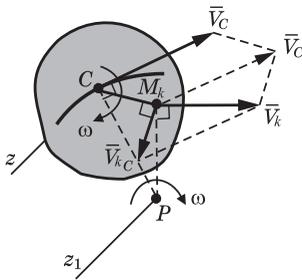


Рис. 98

где  $\sum_{k=1}^n m_k (CM_k)^2 = I_{Cz}$  – момент инерции плоской фигуры относительно оси, перпендикулярной к ее плоскости и проходящей через центр масс.

При плоском движении тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью центра

масс  $\frac{MV_C^2}{2}$  и кинетической энергии

вращательного движения вокруг оси  $z$ , перпендикулярной к плоскости чертежа и проходящей через центр масс,  $\frac{I_{Cz}\omega^2}{2}$ :

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2}. \quad (4.73)$$

Плоскопараллельное движение эквивалентно мгновенному вращательному вокруг оси, проходящей через МЦС (см. рис. 98). Поэтому  $V_C = \omega \cdot PC$ . С учетом этого уравнение (4.73) примет вид

$$T = \frac{M(PC)^2 \omega^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} (I_{Cz} + M(PC)^2),$$

где  $I_{Cz} + M(PC)^2 = I_{Pz_1}$  – момент инерции относительно оси  $z_1$ , перпендикулярной к плоскости чертежа и проходящей через МЦС (точка  $P$ ).

Тогда

$$T = \frac{I_{Pz_1}\omega^2}{2}. \quad (4.74)$$

**Пример 35.** Вычислить кинетическую энергию однородного диска массой  $M = 10$  кг, катящегося без скольжения со скоростью  $V_C = 5$  м/с.

**Решение.** Диск совершает плоскопараллельное движение (рис. 99).

1. По формуле (4.73)

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2},$$

где  $I_{Cz} = \frac{MR^2}{2}$ ;  $\omega = \frac{V_C}{R}$ .

Тогда

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{MR^2V_C^2}{2 \cdot 2R^2} = T = \frac{3}{4}MV_C^2 = \frac{3}{4} \cdot 10 \cdot 5^2 = 187,5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2. По формуле (4.74) получим тот же результат:

$$T = \frac{I_{Pz_1}\omega^2}{2} = \left( I_{Cz} + MR^2 \right) \left( \frac{V_C}{R} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \left( \frac{MR^2}{2} + MR^2 \right) \frac{V_C^2}{2R^2} \Rightarrow T = \frac{3}{4}MV_C^2.$$

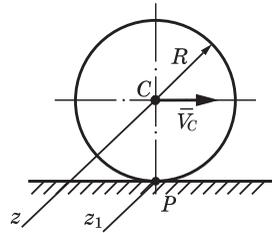


Рис. 99

## 4.15. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

### *Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме*

Дифференциал от кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.

**Доказательство.** Применим второй закон динамики

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

Представим ускорение  $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt}$  и умножим скалярно на  $d\bar{r}$

правую и левую части выражения второго закона:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

или

$$m d\bar{V} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

где  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$ .

Тогда

$$m\vec{V} \cdot d\vec{V} = d\left(\frac{m\vec{V}^2}{2}\right) = d\left(\frac{mV^2}{2}\right);$$
$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = dA.$$

Таким образом,

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA. \quad (4.75)$$

**Теорема об изменении кинетической энергии в интегральной (конечной) форме**

|| Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором перемещении равно работе силы, действующей на точку, на том же перемещении.

**Доказательство.** Дифференциал от кинетической энергии точки равен элементарной работе:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = mVdV = dA.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int_{V_0}^V mVdV = \int_{(s)} dA \Rightarrow \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A. \quad (4.76)$$

**Пример 36.** Тяжелое тело поместили на горизонтальную шероховатую плоскость и сообщили скорость  $V_1 = 5$  м/с. Какое расстояние пройдет тело до остановки (рис. 100, а), если коэффициент трения  $f = 0,1$ .

**Решение.** Применим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A.$$

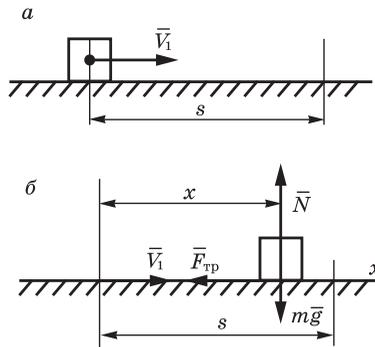


Рис. 100

Конечная скорость  $V_2 = 0$ . Работу совершает только сила трения (рис. 100, б):

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg;$$

$$-\frac{mV_1^2}{2} = -F_{\text{тр}} \cdot s \Rightarrow s = \frac{mV_1^2}{2F_{\text{тр}}} = \frac{mV_1^2}{2fmg} = \frac{5^2}{2 \cdot 0,1 \cdot 9,8} \cong 12,8 \text{ м.}$$

#### 4.16. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

##### *Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме*

Первая формулировка

Дифференциал от кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, действующих на систему.

*Доказательство.* Для  $k$ -й точки системы

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i,$$

где  $dA_k^e$ ,  $dA_k^i$  — соответственно элементарная работа внешних и внутренних сил, приложенных к  $k$ -й точке.

Для системы просуммируем предыдущее выражение по всем точкам:

$$\sum_{k=1}^n d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^n dA_k^e + \sum_{k=1}^n dA_k^i;$$

$$\sum_{k=1}^n d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = d\left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = dT,$$

где  $T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}$  — кинетическая энергия системы;

$\sum_{k=1}^n dA_k^e = dA^e$ ,  $\sum_{k=1}^n dA_k^i = dA^i$  — соответственно элементарная работа всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе. Таким образом,

$$dT = dA^e + dA^i. \quad (4.77)$$

Для системы твердых тел с учетом (4.56)

$$dA^i = \sum_{k=1}^n dA_k^i = 0.$$

Тогда

$$dT = dA^e. \quad (4.78)$$

Разделим выражение (4.77) на  $dt$ :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dA^e}{dt} + \frac{dA^i}{dt},$$

где  $\frac{dA^e}{dt} = N^e$  — мощность внешних сил;  $\frac{dA^i}{dt} = N^i$  — мощность внутренних сил.

Тогда

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i \quad (4.79)$$

или с учетом (4.78)

$$\frac{dT}{dt} = N^e. \quad (4.80)$$

## Вторая формулировка

Производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на систему (или только внешних (4.80)).

### *Теорема об изменении кинетической энергии в интегральной (конечной) форме*

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, приложенных к системе, на том же перемещении.

*Доказательство.* Запишем теорему в интегральной форме для  $k$ -й точки системы:

$$\frac{m_k V_{2k}^2}{2} - \frac{m_k V_{1k}^2}{2} = A_k^e + A_k^i,$$

где  $A_k^e$ ,  $A_k^i$  — соответственно работа внешней и внутренней сил, приложенных к  $k$ -й точке, на некотором перемещении.

Суммируя по всем точкам системы, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_{2k}^2}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_{1k}^2}{2} &= \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i \Rightarrow \\ \Rightarrow T_2 - T_1 &= \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i. \end{aligned} \quad (4.81)$$

В отличие от других рассмотренных ранее общих теорем динамики системы внутренние силы в общем случае не исключаются из уравнений (4.77) и (4.81), выражающих теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной и интегральной формах.

Например, при выстреле из орудия силы давления в стволе действуют как на снаряд, заставляя его двигаться, так и на откатающиеся части орудия, совершая положительную работу. В результате этого кинетическая энергия системы изменится от  $T_1 = 0$  в начале выстрела до  $T_2 = T_{\text{сн}} + T_{\text{ор}}$  в конце.

Другим примером внутренней силы, работа которой не равна нулю, может служить сила упругости пружины, связывающая твердые тела. Работа сил взаимодействия между точками внутри каждого тела при этом будет равна нулю.

Для системы твердых тел, в том числе и нерастяжимых нитей, связывающих эти тела, сумма работы внутренних сил

$$\sum_{k=1}^n A_k^i = 0 \quad (\text{по свойству внутренних сил}). \quad \text{Тогда}$$

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A_k^e. \quad (4.82)$$

**Пример 37.** Каток  $A$  приводится в движение из состояния покоя посредством нерастяжимого троса, который одним концом намотан на каток, а вторым — на барабан  $B$ . Каток  $A$  считать однородным цилиндром массой  $m_A = 50$  кг и радиусом  $r_1 = 0,4$  м. Масса барабана  $m_B = 20$  кг распределена по его ободу радиусом  $r_2 = 0,2$  м. К барабану приложен вращающий момент  $M_{\text{вп}} = 100$  Н·м. Пренебрегая скольжением и трением качения катка по горизонтальной плоскости и весом троса (рис. 101,  $a$ ), определить скорость центра катка, когда он переместится на расстояние  $s = 2$  м.

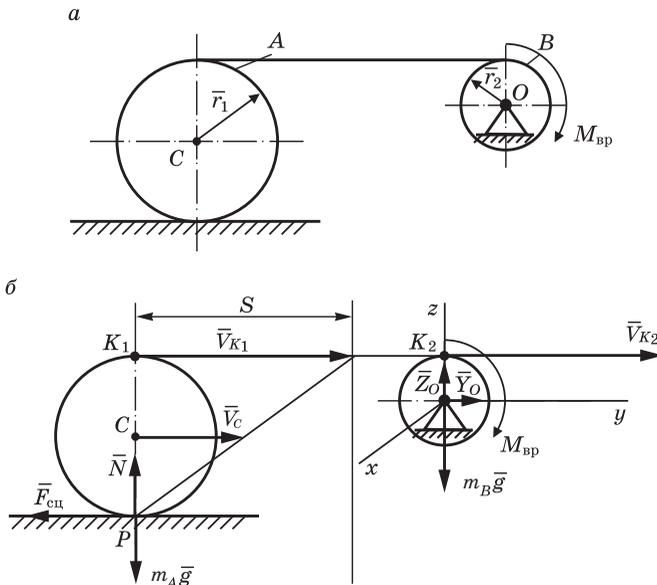


Рис. 101

**Решение.** Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i,$$

где  $T_1 = 0$  — система движется из состояния покоя (рис. 101, б);  $\sum_{k=1}^n A_k^i = 0$  — по свойству внутренних сил, так как тело твердое, а трос нерастяжимый.

Тогда  $T_2 = \sum_{k=1}^n A_k^e$ ;  $T_2 = T_A + T_B$ . Каток  $A$  совершает плоскопараллельное движение.

Кинетическая энергия катка

$$T_A = \frac{m_A V_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_A^2}{2},$$

где  $I_C$  — момент инерции катка относительно оси, проходящей через

центр масс:  $I_C = \frac{m_A r_1^2}{2}$ ;  $\omega_A$  — угловая скорость катка:  $\omega_A = \frac{V_C}{r_1}$ .

Тогда

$$T = \frac{m_A V_C^2}{2} + \frac{m_A r_1^2 V_C^2}{2 \cdot 2 \cdot r_1^2} = \frac{3}{4} m_A V_C^2.$$

Барабан  $B$  совершает вращательное движение.

Кинетическая энергия барабана

$$T_B = \frac{I_x \omega_B^2}{2},$$

где  $I_x$  и  $\omega_B$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} I_x &= m_B r_2^2; \\ V_{k_2} &= V_{k_1} = 2V_C; \\ \omega_B &= \frac{V_{k_2}}{r_2} = \frac{2V_C}{r_2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$T_B = \frac{m_B r_2^2}{2} \cdot \frac{4V_C^2}{r_2^2} = 2m_B V_C^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{3}{4}m_A V_C^2 + 2m_B V_C^2 = \frac{V_C^2}{2} \left( \frac{3}{2}m_A + 4m_B \right) = \frac{m_{\text{пр}} V_C^2}{2},$$

где  $m_{\text{пр}} = \frac{3}{2}m_A + 4m_B$  – приведенная масса системы.

Внешними силами являются силы тяжести  $m_A \bar{g}$ ,  $m_B \bar{g}$ , нормальная реакция  $\bar{N}$ , сила сцепления  $\bar{F}_{\text{сц}}$ , вращающий момент  $M_{\text{вр}}$ , реакции  $\bar{Z}_O$  и  $\bar{Y}_O$  (рис. 101, б).

$$\sum A_k^e = A(m_A \bar{g}) + A(\bar{F}_{\text{сц}}) + A(\bar{N}) + A(m_B \bar{g}) + A(M_{\text{вр}}) + A(\bar{Z}_O) + A(\bar{Y}_O),$$

где  $A(m_A \bar{g}) = 0$ , так как  $m_A \bar{g} \perp \bar{s}$ ;  $A(\bar{F}_{\text{сц}}) = 0$ ,  $A(\bar{N}) = 0$ , так как силы  $\bar{F}_{\text{сц}}$  и  $\bar{N}$  приложены в МЦС;  $A(m_B \bar{g}) = 0$ ,  $A(\bar{Z}_O) = 0$ ,  $A(\bar{Y}_O) = 0$  – точки приложения сил не перемещаются.

$$A(M_{\text{вр}}) = M_{\text{вр}} \cdot \varphi_{\text{пов}},$$

где  $\varphi_{\text{пов}} = \frac{2s}{r_2}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{V_C^2}{2} \left( \frac{3}{2}m_A + 4m_B \right) &= M_{\text{вр}} \cdot \frac{2s}{r_2} \Rightarrow V_C = \sqrt{\frac{4M_{\text{вр}} s}{r_2(1,5m_A + 4m_B)}} = \\ &= \sqrt{\frac{4 \cdot 100 \cdot 2}{0,2(1,5 \cdot 50 + 4 \cdot 20)}} = 5,04 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

#### 4.17. Потенциальное силовое поле и потенциальная энергия

**Силовым полем** называется физическое пространство, в котором на точки механической системы, находящейся в этом пространстве, действуют силы, зависящие от положения этих точек или от их положения и времени. Силовое поле может быть задано проекциями силы на оси координат:

$$F_x = F_x(x, y, z, t);$$

$$F_y = F_y(x, y, z, t);$$

$$F_z = F_z(x, y, z, t).$$

*Стационарное силовое поле* — поле, в котором силы не зависят явно от времени.

*Потенциальное силовое поле* — стационарное силовое поле, в котором работа сил поля, действующих на механическую систему, не зависит от формы траекторий ее точек, а зависит только от начального и конечного их положений. Такие силы называются потенциальными или консервативными (сила тяжести, сила упругости, сила электростатического поля и др.).

*Консервативная механическая система* — это механическая система, на которую действуют только потенциальные силы.

*Потенциальная энергия  $\Pi$  точки или механической системы* — это энергия, численно равная работе, которую совершают потенциальные силы, приложенные к материальной точке или механической системе, при перемещении ее из заданного положения в некоторое нулевое положение (в нулевой уровень) — положение, в котором потенциальная энергия принимается равной нулю.

Поэтому потенциальную энергию механической системы в любом ее положении следует рассматривать как сумму работ сил потенциального поля, приложенных к ее точкам, при перемещении ее из данного положения в другое, принятое за нулевое, т.е. как результат изменения положений системы по отношению к другим телам в потенциальном силовом поле.

Возьмем какую-нибудь точку  $O$  в потенциальном поле (рис. 102) и будем называть ее нулевым положением. Выберем в этой точке начало осей координат  $x, y, z$ . На некоторую материальную точку  $M$  с координатами  $(x, y, z)$  в этом поле действует потенциальная сила  $\vec{F}$ .

Так как работа этой силы по перемещению точки  $M$  из заданного положения в положение  $O$  (нулевой уровень) не зависит от формы траектории и представляет собой потенциальную энергию  $\Pi$ , то

$$\Pi = \Pi(x, y, z). \quad (4.83)$$

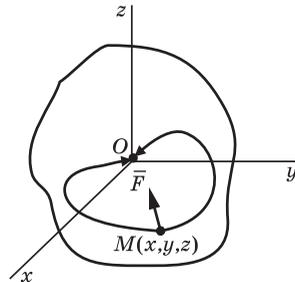


Рис. 102

Геометрическое место точек пространства, в которых потенциальная энергия имеет одинаковое значение, представляет собой поверхность, уравнение которой

$$\Pi(x, y, z) = C. \quad (4.84)$$

Такая поверхность называется *поверхностью равного потенциала* или *эквипотенциальной поверхностью*. Эта поверхность может быть сферической или иметь иную форму, например плоскую (поле силы тяжести).

Придавая параметру  $C$  всевозможные значения, можно получить бесконечное множество эквипотенциальных поверхностей.

Определим работу силы поля, приложенной к материальной точке, по перемещению ее из положения  $M_1$  в положение  $M_2$  (рис. 103):

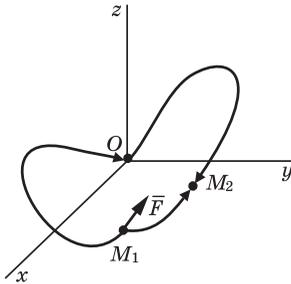


Рис. 103

$$A_{M_1-M_2} = A_{M_1-0} + A_{0-M_2},$$

но

$$A_{M_1-0} = \Pi_1;$$

$$A_{0-M_2} = -A_{M_2-0},$$

где  $A_{M_2-0} = \Pi_2$ .

Тогда

$$A_{M_1-M_2} = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (4.85)$$

Таким образом, работа, которая совершается при перемещении материальной точки из положения  $M_1$  в положение  $M_2$  в потенциальном силовом поле, равна разности потенциальных энергий точки в этих положениях.

Найдем проекцию силы  $\vec{F}$  на оси координат в потенциальном силовом поле. Допустим, что материальная точка имеет в данный момент координаты  $(x, y, z)$ . Точка перемещается только вдоль оси  $x$  и через некоторое время  $dt$  ее координаты будут равны  $(x + dx, y, z)$ , т.е. будет изменяться только координата  $x$ , координаты  $y$  и  $z$  остаются постоянными. При этом совершаемая элементарная работа

$$dA = \Pi(x, y, z) - \Pi(x + dx, y, z). \quad (4.86)$$

Вместе с тем элементарная работа силы

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F_x dx, \quad (4.87)$$

так как  $dy = dz = 0$ .

Поэтому  $F_x dx = \Pi(x, y, z) - \Pi(x + dx, y, z)$ ,

или

$$F_x dx = -[\Pi(x + dx, y, z) - \Pi(x, y, z)]. \quad (4.88)$$

Разделив уравнение (4.88) на  $dx$  и перейдя к пределу при  $dx \rightarrow 0$ , получим производную от потенциальной энергии только по аргументу  $x$ , т.е. частную производную. Рассуждая аналогичным образом в отношении координат  $y$  и  $z$ , получим проекции силы на оси координат:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \\ F_y &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \\ F_z &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Продифференцируем полученные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x}; \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial y}; \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

Анализируя эти выражения и принимая во внимание независимость смешанных производных от порядка дифференцирования, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= \frac{\partial F_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= \frac{\partial F_z}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

Равенства (4.91) являются необходимыми и достаточными условиями потенциальности силового поля. Если эти условия выполняются, то элементарная работа силы в потенциальном силовом поле представляет дифференциал

$$\begin{aligned} d'A &= F_x dx + F_y dy + F_z dz = \\ &= - \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \right) = -d\Pi, \end{aligned} \quad (4.92)$$

т.е. равна со знаком  $(-)$  полному дифференциалу от потенциальной энергии.

Работа потенциальных сил, действующих на материальную точку или на механическую систему, в потенциальном поле на конечном перемещении из положения  $M_1$  в положение  $M_2$ :

$$A_{M_1-M_2} = \int_{(M_1-M_2)} d'A = - \int_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi = -(\Pi_2 - \Pi_1) = \Pi_1 - \Pi_2, \quad (4.93)$$

что соответствует полученному выше значению (4.85).

Выразим вектор силы  $\vec{F}$  через потенциальную энергию:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = - \left( \vec{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) = -\overline{\text{grad}}\Pi, \quad (4.94)$$

т.е. равен вектору градиента скалярной функции  $\Pi$ .

Введем понятие вектора  $\vec{\Omega}$  вихря вектора силы  $\vec{F}$ .

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} = \text{rot}\bar{F} &= \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4.95)$$

Так как для потенциального силового поля выражения, стоящие в скобках (4.95), удовлетворяют условиям (4.91), то

$$\text{rot}\bar{F} = 0,$$

т.е. потенциальное поле безвихревое.

Установим направление силы поля в каждой точке по отношению к эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку.

Пусть точка  $M$  перемещается по эквипотенциальной поверхности в бесконечно близкое положение  $M'$  (рис. 104). Тогда элементарная работа силы  $\bar{F}$  поля на перемещении  $MM'$

$$dA = \bar{F} \cdot \overline{MM'} = FMM' \cos(\widehat{\bar{F}, MM'});$$

Вместе с тем эта работа

$$dA = \Pi - \Pi' = 0;$$

так как точки  $M$  и  $M'$  принадлежат одной и той же эквипотенциальной поверхности, то  $\Pi = \Pi'$ . Так как  $F \neq 0$ ,  $MM' \neq 0$ , то  $\cos(\widehat{\bar{F}, MM'}) = 0$ , т.е.  $\bar{F} \perp \overline{MM'}$ . Отсюда следует,

что сила  $\bar{F}$  направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку.

Теперь допустим, что точка получает элементарное перемещение  $MM''$  по направлению силы. Тогда

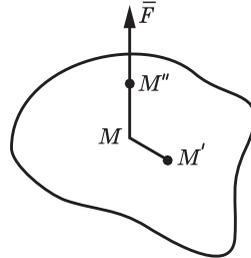


Рис. 104

$$dA = F \cdot MM'' \cos 0 = F \cdot MM'' > 0.$$

Вместе с тем

$$dA = \Pi - \Pi''.$$

Сопоставив эти два выражения элементарной работы, приходим к выводу:

$$\Pi - \Pi'' > 0, \text{ или } \Pi > \Pi''.$$

Отсюда следует, что сила  $\vec{F}$  направлена в сторону уменьшения значений потенциальной энергии.

Последнее хорошо иллюстрируется полем силы тяжести тела, которая направлена по вертикали вниз, а потенциальная энергия тела тем больше, чем выше оно находится по отношению к некоторой горизонтальной поверхности, принятой за нулевой уровень.

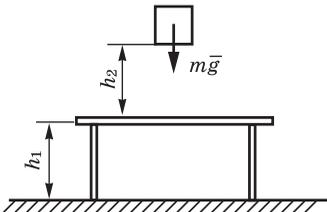


Рис. 105

**Пример 38.** Груз массой  $m = 10$  кг находится на высоте  $h_2 = 1$  м от стола. Высота стола  $h_1 = 0,5$  м. Определить потенциальную энергию груза по отношению к столу и по отношению к полу, принимая их за нулевой уровень.

**Решение.** По отношению к столу (рис. 105)

$$\Pi = mgh_2 = 10 \cdot 9,8 \cdot 1 = 98 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

По отношению к полу

$$\Pi = mg(h_1 + h_2) = 10 \cdot 9,8 \cdot 1,5 = 147 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

**Пример 39.** На середину закрепленной по концам упругой балки, коэффициент жесткости которой  $c = 39,2$  Н/см, положили груз массой 100 кг. Под действием силы тяжести груза балка прогнулась на величину  $\lambda = 25$  см. Определить потенциальную энергию консервативной системы, принимая за нулевой уровень недеформированное состояние балки.

**Решение.** С учетом указанного выше нулевого уровня потенциальная энергия (рис. 106)

$$\begin{aligned} \Pi &= A(m\bar{g}) + A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -mg\lambda + \frac{c\lambda^2}{2} = \\ &= -100 \cdot 9,8 \cdot 0,25 + \frac{39,2 \cdot 10^2 \cdot 0,25^2}{2} = -122,5 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

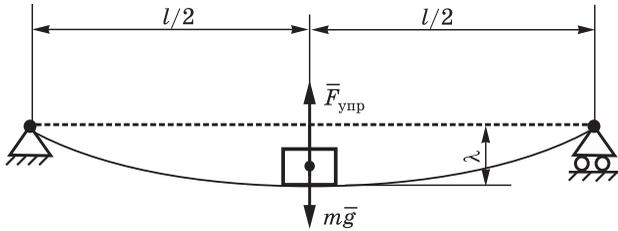


Рис. 106

#### 4.18. Закон сохранения механической энергии материальной точки и механической системы

Если на материальную точку или механическую систему действуют только консервативные силы, то в любом положении точки или системы сумма кинетической и потенциальной энергий остается величиной постоянной.

*Доказательство.* Для материальной точки на основании теоремы об изменении кинетической энергии (см. (4.75))

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA.$$

Вместе с тем  $dA = -d\Pi$  (см. (4.92)).

Тогда

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = -d\Pi \Rightarrow d\left(\frac{mV^2}{2} + \Pi\right) = 0 \Rightarrow \frac{mV^2}{2} + \Pi = \text{const.}$$

Для механической системы в предположении, что все внешние и внутренние силы потенциальны, аналогично

$$dT = dA, \text{ а } dA = -d\Pi,$$

тогда

$$dT = -d\Pi \Rightarrow d(T + \Pi) = 0 \Rightarrow T + \Pi = E = \text{const.},$$

где  $E = T + \Pi$  – механическая энергия системы.

Или на основании теоремы об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме

$$T_2 - T_1 = A = \Pi_1 - \Pi_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1 = T + \Pi = E = \text{const},$$

где  $A$  – работа внешних и внутренних сил в предположении, что все они потенциальны.

**Пример 40.** Шарик падает на стол с высоты  $h = 2$  м без начальной скорости. Определить скорость шарика в момент достижения стола.

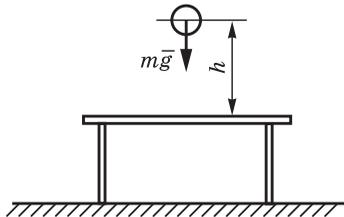


Рис. 107

**Решение.** Примем уровень стола за нулевой. Механическая энергия шарика в начальном положении (рис. 107)

$$\frac{mV_0^2}{2} + mgh_0 = mgh,$$

так как  $V_0 = 0$ ,  $h_0 = h$ .

То же по достижении стола:

$$\frac{mV^2}{2} + mgh_k = \frac{mV^2}{2},$$

так как  $h_k = 0$ .

Тогда

$$mgh = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 2} = 2\sqrt{9,8} = 2 \cdot 3,13 \approx 6,26 \text{ м/с.}$$

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о движении центра масс механической системы.

2. При каких условиях центр масс системы находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно?
3. Когда проекция центра масс на какую-либо ось не будет перемещаться вдоль этой оси?
4. Могут ли внутренние силы привести в движение центр масс механической системы?
5. Как определяется количество движения материальной точки и механической системы?
6. Чему равно количество движения маховика, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр тяжести?
7. Как направлен главный вектор количества движения механической системы?
8. Что такое импульс силы и как он вычисляется?
9. В каком виде и какими формулами записывается теорема об изменении количества движения материальной точки? механической системы?
10. При каких условиях количество движения или его проекция на какую-либо ось не изменяется?
11. Могут ли внутренние силы изменить количество движения системы?
12. Как формулируется теорема Эйлера о движении потока жидкости?
13. Как определяются моменты количества движения материальной точки относительно центра и оси?
14. При каком расположении вектора количества движения материальной точки его момент относительно оси равен нулю?
15. Какая зависимость между моментом количества движения материальной точки и моментом силы, действующей на нее, относительно некоторого центра и оси?
16. Что такое кинетический момент механической системы относительно центра и оси?
17. Как вычисляется кинетический момент твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси?
18. Сформулируйте теоремы об изменении кинетического момента механической системы относительно центра и оси.
19. При каких условиях кинетический момент относительно центра или оси остается постоянным?
20. Сформулируйте теорему Резаля.
21. Что такое элементарная работа силы и как она вычисляется?
22. Что такое мощность силы и как она вычисляется при поступательном и вращательном движении твердого тела?
23. Что такое кинетическая энергия материальной точки, чему она равна и как вычисляется при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движении?
24. В каких видах и какими формулами записывается теорема об изменении кинетической энергии материальной точки? механической системы?
25. Какое силовое поле называется потенциальным?
26. Что такое потенциальная энергия?
27. Чему равна работа силы на некотором перемещении в потенциальном силовом поле?

28. Какие поверхности называется эквипотенциальными?
29. Как определяются проекции на координатные оси силы, действующей в потенциальном поле на материальную точку?
30. Как определяется вектор вихря вектора силы? Чему он равен для потенциального силового поля?
31. Как направлен вектор силы, действующей на материальную точку в потенциальном поле, по отношению к эквипотенциальной поверхности?

## ГЛАВА 5. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

### 5.1. Силы инерции в динамике материальной точки и механической системы

Силой инерции  $\bar{\Phi}$  материальной точки называется произведение массы точки на ее ускорение, взятое со знаком минус, т. е.

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}. \quad (5.1)$$

Силы инерции в динамике применяются в следующих случаях:

- при исследовании движения материальной точки в *неинерциальной (подвижной) системе координат*, т.е. относительного движения. Это переносная и кориолисова силы инерции, которые часто называют эйлеровыми (см. п. 1.5);
- при решении задач динамики с использованием метода кинестатики. В основу этого метода положен принцип Даламбера, в соответствии с которым вводятся силы инерции материальной точки или системы материальных точек, движущихся с некоторым ускорением в *инерциальной системе отсчета*. Эти силы инерции называются даламберовыми.

Даламберовы силы инерции применяются также при решении задач динамики с использованием принципа Лагранжа — Даламбера или общего уравнения динамики (см. п. 7.4).

Выражение (5.1) в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x &= -m\ddot{x}; \\ \Phi_y &= -m\ddot{y}; \\ \Phi_z &= -m\ddot{z}, \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

где  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$  – модули проекций ускорения точки на оси декартовых координат.

При криволинейном движении точки силу инерции можно разложить на касательную  $\bar{\Phi}_\tau$  и нормальную  $\bar{\Phi}_n$  (рис. 108):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}_\tau &= -m\bar{a}_\tau; \\ \bar{\Phi}_n &= -m\bar{a}_n, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

где  $a_\tau = \frac{dV}{dt}$ ;  $a_n = \frac{V^2}{\rho}$  – соответственно модуль касательного и нормального ускорений;  $\rho$  – радиус кривизны траектории;  $V$  – скорость точки.

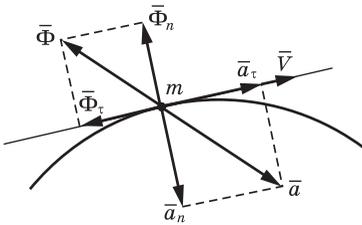


Рис. 108

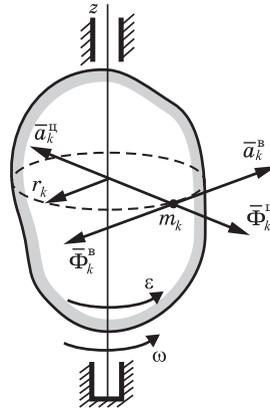


Рис. 109

При вращении тела вокруг неподвижной оси силы инерции точек (частиц) этого тела раскладываются на вращательную  $\bar{\Phi}_B$  и центробежную  $\bar{\Phi}_{II}$  (рис. 109).

Для  $k$ -й точки тела

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}_k^B &= -m_k \bar{a}_k^B; \\ \bar{\Phi}_k^{II} &= -m_k \bar{a}_k^{II}, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

где  $m_k$  – масса  $k$ -й точки;  $\bar{a}_k^B$ ,  $\bar{a}_k^{II}$  – вращательное и центростремительное ускорения этой точки, определяемые по формулам

$$a_k^B = \varepsilon r_k;$$

$$a_k^H = \omega^2 r_k,$$

где  $r_k$  — расстояние от точки до оси вращения.

## 5.2. Принцип Даламбера для материальной точки

Если к несвободной материальной точке, движущейся под действием приложенных активных сил и сил реакций связей, приложить ее силу инерции, то в любой момент времени полученная система сил будет уравновешенной, т.е. геометрическая сумма указанных сил будет равна нулю.

*Доказательство.* Из формулы второго закона динамики

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}$$

перенесем член  $m\bar{a}$  из левой части уравнения в правую:

$$\bar{F} + \bar{R} - m\bar{a} = 0 \Rightarrow \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0, \quad (5.5)$$

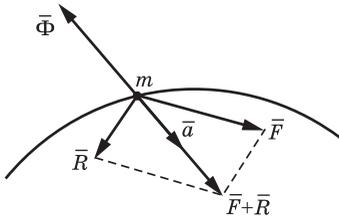


Рис. 110

где  $\bar{F}$  — равнодействующая активных сил, приложенных к точке;  $\bar{R}$  — равнодействующая реакций связей, наложенных на точку;  $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$  — сила инерции материальной точки (рис. 110). Таким образом, уравнению динамики по содержанию придан по форме вид уравнения статики.

**Примечание.** На самом деле сила инерции материальной точки приложена не к самой точке, а к тому телу, которое сообщает ускорение данной точке. Например, с помощью нити сообщаем ускорение  $\bar{a}$  телу, нить может разорваться, так как на нее действуют сила  $\bar{F}$  и сила инерции  $\bar{\Phi}$  тела, которая также приложена к нити и направлена противоположно силе  $\bar{F}$  (рис. 111). Но приложив условно силу инерции к телу, можно записать вместо уравнения динамики  $m\ddot{x} = F$  по форме уравнение статики:

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow F - \Phi = 0.$$

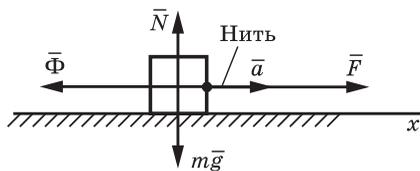


Рис. 111

**Пример 41.** На гладкую наклонную плоскость призмы поместили тяжелый груз. С каким ускорением следует перемещать призму по горизонтальной плоскости, чтобы груз не перемещался относительно призмы? Угол наклона плоскости равен  $\alpha$  (рис. 112, а).

**Решение.** При неподвижной призме груз будет скользить вниз. Чтобы он не перемещался относительно призмы, ее нужно с некоторым ускорением  $\bar{a}$  перемещать вправо. Тогда к грузу следует приложить силу инерции  $\bar{\Phi}$ , направленную влево.

Приложим к грузу его силу тяжести  $m\bar{g}$ , силу инерции  $\bar{\Phi}$  и нормальную реакцию  $\bar{N}$  (рис. 112, б). Тогда в соответствии с принципом Даламбера

$$m\bar{g} + \bar{N} + \bar{\Phi} = 0.$$

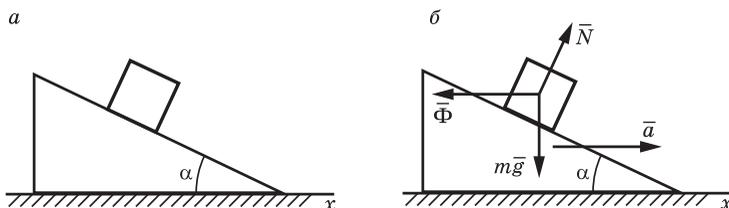


Рис. 112

Спроецировав силы на ось  $x$ , получим:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 &\Rightarrow mg \sin \alpha - \Phi \cos \alpha = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow mg \sin \alpha - ma \cos \alpha &= 0 \Rightarrow a = g \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

### 5.3. Принцип Даламбера для механической системы

Принцип Даламбера для механической системы имеет три формулировки.

### Первая формулировка

Если ко всем точкам несвободной механической системы, движущимся с некоторыми ускорениями, приложить равнодействующие активных сил, сил реакций связей и силы инерции этих точек, то полученная система сил будет уравновешенной, т.е. эквивалентной нулю:

$$(\bar{F}_1, \bar{R}_1, \bar{\Phi}_1, \dots, \bar{F}_k, \bar{R}_k, \bar{\Phi}_k, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}_n, \bar{\Phi}_n) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.6)$$

Из статики известно, что для уравновешенной системы сил геометрическая сумма этих сил (главный вектор) и геометрическая сумма моментов этих сил относительно некоторого центра (главный момент) равны нулю. Поэтому принцип Даламбера для механической системы можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k + \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = 0; \quad (5.7)$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{R}_k) + \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (5.8)$$

Суммы в (5.7) – главные векторы активных сил, сил реакций связей и сил инерции, а суммы в (5.8) – главные моменты указанных сил относительно некоторого центра  $O$ .

### Вторая формулировка

Геометрическая сумма главных векторов активных сил, сил реакций связей и сил инерции всех точек системы, а также геометрическая сумма главных моментов указанных сил относительно некоторого центра для несвободной механической системы в любой момент времени равны нулю.

Если силы, действующие на механическую систему, разделить на внешние и внутренние, то в число внешних сил кроме активных сил войдут реакции внешних связей, а внутренние силы – это силы взаимодействия между точками системы и, по свойству внутренних сил, их главный вектор и главный момент равны нулю.

### Третья формулировка

Геометрическая сумма главных векторов внешних сил, действующих на систему, и сил инерции всех точек системы, а также геометрическая сумма главных моментов этих сил относительно некоторого центра для несвободной механической системы в любой момент времени равны нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = 0; \quad (5.9)$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (5.10)$$

## 5.4. Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела

Главный вектор и главный момент сил инерции точек системы определяются отдельно для каждого твердого тела, входящего в данную механическую систему. Их определение основывается на известном из статики методе Пуансо о приведении произвольной системы сил к заданному центру.

На основании этого метода силы инерции всех точек тела в общем случае его движения можно привести к центру масс и заменить их главным вектором  $\bar{\Phi}^*$  и главным моментом  $\bar{M}_C^\Phi$  относительно центра масс (рис. 113). Главный вектор сил инерции

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^* &= \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = - \sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k = - \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \\ &= - \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k \right) = - \frac{d^2}{dt^2} (M \bar{r}_C) = -M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = -M \bar{a}_C, \quad (5.11) \end{aligned}$$

т.е. при любом движении твердого тела главный вектор сил инерции равен произведению массы тела на ускорение  $\bar{a}_C$  центра масс тела и направлен в противоположную вектору ускорения сторону.

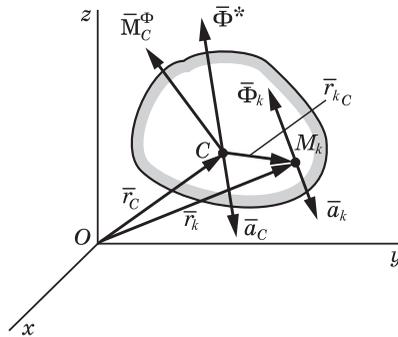


Рис. 113

Главный момент сил инерции относительно центра масс

$$\bar{M}_C^\Phi = \sum_{k=1}^n \bar{M}_C(\bar{\Phi}_k) = - \sum_{k=1}^n (\bar{r}_{kC} \times m_k \bar{a}_k), \quad (5.12)$$

где  $\bar{r}_{kC}$  — радиус-вектор  $k$ -й точки, проведенный из центра масс.

Формулы (5.11) и (5.12) в частных случаях движения твердого тела бывают следующих видов:

- *поступательное движение*. Главный вектор сил инерции

$$\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C.$$

С учетом формулы (5.12) и поскольку при поступательном движении ускорение всех точек одинаковы и равны ускорению  $\bar{a}_C$  центра масс, главный момент сил инерции

$$\bar{M}_C^\Phi = - \sum_{k=1}^n (\bar{r}_{kC} \times m_k \bar{a}_C) = - \left( \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_{kC} \right) \times \bar{a}_C = -M\bar{r}_C \times \bar{a}_C = 0,$$

так как радиус-вектор центра масс  $\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_{kC}}{M}$  относительно центра масс равен нулю.

Тогда,

$$\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C; \quad \bar{M}_C^\Phi = 0; \quad (5.13)$$

• *вращение тела вокруг оси, проходящей через центр масс.*  
 Будем рассматривать только случай, когда ось вращения  $z$  (рис. 114, *a*) является главной центральной осью инерции.  
 В этом случае  $\bar{a}_C = 0$  и главный момент сил инерции  $\Phi^* = 0$ .

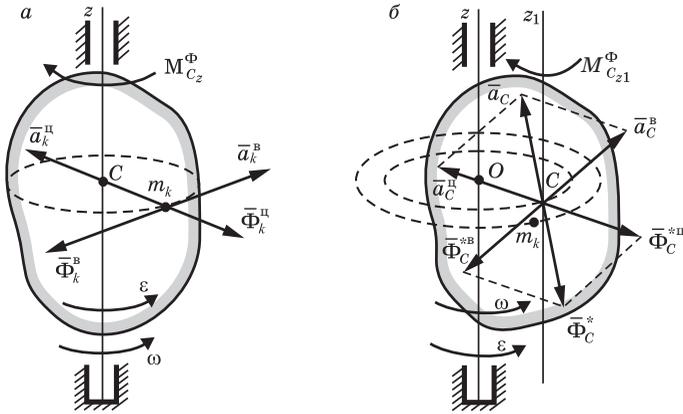


Рис. 114

Главный момент сил инерции относительно оси

$$M_{C_z}^{\Phi} = \sum_{k=1}^n M_{C_z} \left( \bar{\Phi}_k^{\Pi} \right) + \sum_{k=1}^n M_{C_z} \left( \bar{\Phi}_k^{\text{B}} \right).$$

Так как линии действия центробежных сил инерции точек тела пересекают ось вращения, то

$$\sum_{n=1}^n M_{C_z} \left( \bar{\Phi}_k^{\Pi} \right) = 0.$$

Тогда главный момент сил инерции равен сумме моментов вращательных сил инерции. Для  $k$ -й точки

$$M_{C_z} \left( \bar{\Phi}_k^{\text{B}} \right) = -r_k m_k a_k^{\text{B}} = -r_k^2 m_k \epsilon.$$

Для всего тела

$$M_{C_z}^{\Phi} = \sum_{k=1}^n M_{C_z} \left( \bar{\Phi}_k^{\text{B}} \right) = -\epsilon \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = -\epsilon I_{C_z},$$

где  $\varepsilon$  — алгебраическая величина углового ускорения тела;  
 $I_{Cz}$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ .

Таким образом, в этом случае

$$\bar{\Phi}^* = 0; \quad M_{Cz}^{\Phi} = -\varepsilon I_{Cz}; \quad (5.14)$$

• *вращение тела вокруг оси, не проходящей через его центр масс.* Будем считать, что ось вращения  $z$  является главной осью инерции тела в точке  $O$  (рис. 114, б).

В этом случае  $\bar{a}_C \neq 0$  и главный вектор сил (см. рис. 112, б)

$$\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C = -M(\bar{a}_C^B + \bar{a}_C^H) = \bar{\Phi}_C^B + \bar{\Phi}_C^H.$$

Модуль главного вектора сил инерции

$$|\bar{\Phi}^*| = \sqrt{\Phi_B^{*2} + \Phi_H^{*2}} = M \cdot OC \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

По аналогии с предыдущим случаем главный момент сил инерции

$$M_{Cz_1}^{\Phi} = \sum_{k=1}^n M_{Cz_1} (\bar{\Phi}_k^B) = -\varepsilon I_{Cz_1};$$

$$\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C = \bar{\Phi}_C^*; \quad M_{Cz_1}^{\Phi} = -\varepsilon I_{Cz_1}. \quad (5.15)$$

Вектор  $\bar{\Phi}^*$  приложен в центре масс. При приведении сил инерции к точке  $O$ , лежащей на оси вращения, главный вектор и главный момент сил инерции определяются по формулам:

$$\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C = \bar{\Phi}_O^*;$$

$$M_{Oz}^{\Phi} = -\varepsilon I_{Oz}. \quad (5.16)$$

Вектор  $\bar{\Phi}^*$  в этом случае приложен в точке  $O$ , главный момент сил инерции  $M_{Oz}^{\Phi}$  определяется относительно оси вращения  $Oz$ .

Из статики известно, что силу и пару сил, расположенных в одной плоскости, можно заменить равнодействующей, равной главному вектору.

В этом случае совокупность  $(\bar{\Phi}_{C^*}^*, M_{Cz_1}^\Phi)$  или  $(\bar{\Phi}_O^*, M_{Oz}^\Phi)$

можно заменить одной силой – равнодействующей  $\bar{\Phi}' = \bar{\Phi}^*$ , линия действия которой находится от точки  $C$  на расстоянии

$$d_1 = \frac{M_{Cz_1}^\Phi}{\Phi^*}, \text{ а от точки } O - d_2 = \frac{M_{Oz}^\Phi}{\Phi^*}.$$

Например: однородный диск массой  $M$  и радиусом  $R$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\varepsilon$  вокруг горизонтальной оси  $Oz$  (рис. 115).

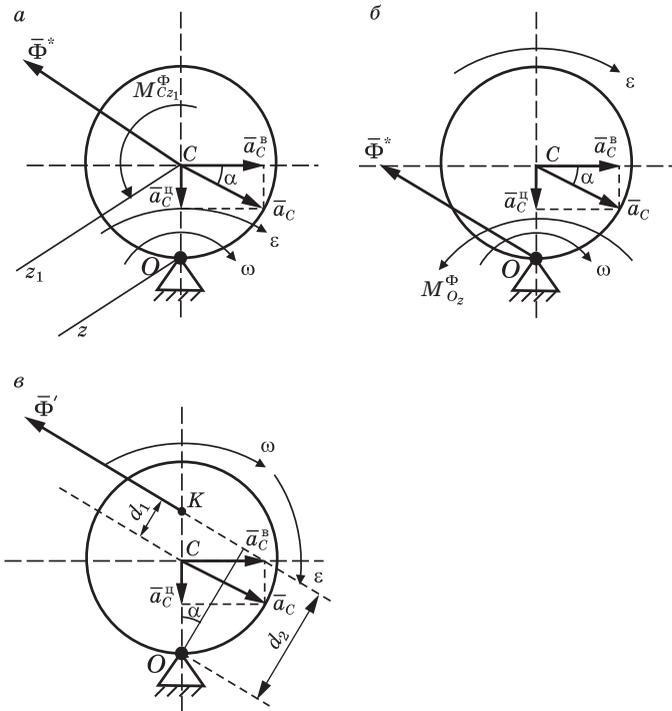


Рис. 115

Вычислим главные моменты сил инерции диска относительно осей  $Cz_1$  и  $Oz$   $M_{Cz_1}^\Phi$  и  $M_{Oz}^\Phi$ :

$$M_{Cz_1}^{\Phi} = I_{Cz_1} \varepsilon = \frac{MR^2}{2} \varepsilon \quad (\text{рис. 115, а});$$

$$M_{Oz}^{\Phi} = I_{Oz} \varepsilon = \left( \frac{MR^2}{2} + MR^2 \right) \varepsilon = \frac{3}{2} MR^2 \varepsilon \quad (\text{рис. 115, б}).$$

Во всех случаях главный вектор сил инерции в соответствии с (5.11) одинаковый и равен  $\Phi^* = Ma_C = MR\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{M_{Cz_1}^{\Phi}}{\Phi^*} = \frac{MR^2 \varepsilon}{2MR\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{R}{2} \cdot \frac{R\varepsilon}{R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{R}{2} \cdot \frac{a_C^B}{a_C} = \\ &= \frac{R}{2} \cos \alpha = CK \cos \alpha \Rightarrow CK = \frac{R}{2} \quad (\text{рис. 115, в}), \end{aligned}$$

где  $\cos \alpha = \frac{a_C^B}{a_C} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ ;

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{M_{Oz}^{\Phi}}{\Phi^*} = \frac{3MR^2 \varepsilon}{2MR\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{3}{2} \cdot R \cos \alpha = \\ &= OK \cos \alpha \Rightarrow OK = \frac{3}{2} R \quad (\text{рис. 115, в}). \end{aligned}$$

Покажем, что сумма моментов всех сил инерции, приложенных к диску, относительно точки  $O$  имеет одно и то же значение во всех трех случаях:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Sigma M_O(\bar{\Phi}_k) &= \Phi_C^* \cdot R \cos \alpha + M_{Cz_1}^{\Phi} = MR\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot R \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} + \\ &+ \frac{MR^2}{2} \varepsilon = \frac{3}{2} MR^2 \varepsilon; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \Sigma M_O(\bar{\Phi}_k) = M_{Oz}^{\Phi} = I_{Oz} \varepsilon = \frac{3}{2} MR^2 \varepsilon, \text{ а } M_O(\bar{\Phi}_O^*) = 0;$$

$$\text{в) } \Sigma M_O(\bar{\Phi}_k) = \Phi' \cdot d_2 = MR \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot \frac{3}{2} \cdot R \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{3}{2} MR^2 \varepsilon;$$

• *плоскопараллельное движение* (рис. 116) эквивалентно совокупности двух движений: поступательному вместе с центром масс и мгновенному вращательному вокруг оси, проходящей через центр масс. Поэтому силы инерции точек тела приводятся к главному вектору  $\bar{\Phi}^*$  и главному моменту сил инерции  $M_C^*$ :

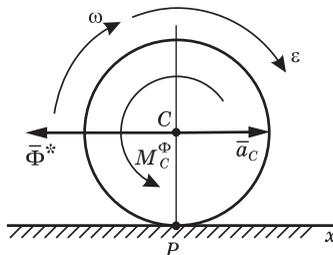


Рис. 116

$$\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_C;$$

$$M_C^{\Phi} = -I_C \varepsilon. \quad (5.17)$$

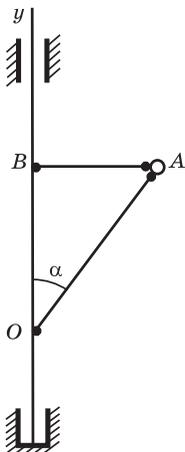
### 5.5. Определение с помощью принципа Даламбера реакций связей при несвободном движении материальной точки и механической системы

При исследовании движения несвободной материальной точки или механической системы с некоторым ускорением в ряде случаев требуется определить реакции связей, которыми являются нити, поверхности, шарниры и др. Величина реакций связей зависит не только от статических нагрузок, но и от сил инерции. Применение принципа Даламбера для определения реакций связей позволяет придать уравнениям динамики вид уравнений статики и в зависимости от системы сил составить соответствующие уравнения равновесия. Для этого нужно ко всем точкам (телам) приложить их силы инерции, чтобы получить уравновешенную систему сил\*.

\* Определение с помощью принципа Даламбера реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси подробно рассмотрено в гл. 6.

**Пример 42.** Тяжелый шарик  $A$  массой  $m_1 = 2$  кг прикреплен к вертикальному валу шарнирно с помощью однородного стержня  $OA$  массой  $m_2 = 5$  кг и длиной  $l = 30$  см и привязан к валу нитью  $AB$ . Вал вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 2\pi$  рад/с. Определить натяжение нити и реакцию шарнира  $O$ , если  $\alpha = 45^\circ$  (рис. 117, *a*).

*a*



*б*

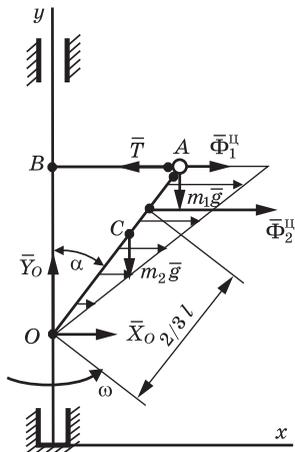


Рис. 117

**Решение.** Приложим к шару со стержнем силы тяжести  $m_1\bar{g}$  и  $m_2\bar{g}$ , силу натяжения нити  $\bar{T}$ , реакции шарнира  $O - \bar{X}_O$  и  $\bar{Y}_O$ , центробежные силы инерции шарика  $\bar{\Phi}_1^{II}$  и стержня  $\bar{\Phi}_2^{II}$  (рис. 115, *б*).

Для плоской произвольной системы сил составим уравнения статики

$$\Sigma X = 0; X_O - T + \Phi_1^{II} + \Phi_2^{II} = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0; Y_O - m_1g - m_2g = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma M_O = 0; -m_1gl \sin \alpha - m_2g \frac{l}{2} \sin \alpha - \Phi_1^{II} l \cos \alpha - \Phi_2^{II} \frac{2}{3} \cos \alpha + Tl \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

где  $\Phi_1^{II} = m_1 a_A^{II} = m_1 \omega^2 l \sin \alpha$ ;  $\Phi_2^{II} = m_2 a_C^{II} = m_2 \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha$ .

Силы инерции точек стержня распределены по линейному закону (по закону треугольника), поэтому равнодействующая такой распределенной нагрузки приложена на расстоянии  $\frac{2}{3}OA$  от точки  $O$ .

Из уравнения (3)

$$\begin{aligned} T &= \Phi_1^{\text{II}} + \frac{2}{3}\Phi_2^{\text{II}} + m_1 g \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2}m_2 g \operatorname{tg} \alpha = \\ &= m_1 \left( \omega^2 l \sin \alpha + g \operatorname{tg} \alpha \right) + m_2 \left( \frac{1}{2} \omega^2 l \sin \alpha + \frac{1}{2} g \operatorname{tg} \alpha \right) = \\ &= 2 \left( 4\pi^2 \cdot 0,3 \frac{\sqrt{2}}{2} + 9,8 \cdot 1 \right) + 5 \left( \frac{1}{3} \cdot 0,3 \cdot 4\pi^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 1 \right) = 74,81 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Из уравнения (1) определим

$$\begin{aligned} X_0 &= T - \Phi_1^{\text{II}} - \Phi_2^{\text{II}} = \Phi_1^{\text{II}} + \frac{2}{3}\Phi_2^{\text{II}} + m_1 g \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2}m_2 g \operatorname{tg} \alpha - \\ &\quad - \Phi_1^{\text{II}} - \Phi_2^{\text{II}} = -\frac{1}{3}\Phi_2^{\text{II}} + g \operatorname{tg} \alpha \left( m_1 + \frac{1}{2}m_2 \right) = \\ &= -\frac{1}{3}m_2 \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha + g \operatorname{tg} 45^\circ \left( m_1 + \frac{1}{2}m_2 \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 4\pi^2 \cdot 0,15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9,8 \cdot 1 \cdot 4,5 = -6,98 + 44,1 = 37,12 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Из уравнения (2) определим

$$Y_O = m_1 g + m_2 g = 9,8 \cdot 7 = 68,6 \text{ Н.}$$

Реакция  $Y_O$  не зависит от сил инерции шарика и стержня.

**Пример 43.** Механическая система состоит из груза 3 массой  $m_3$ , ступенчатого шкива 2 массой  $m_2$  с радиусами ступеней  $r_2$  и  $R_2$  и радиусом инерции относительно оси, проходящий через точку  $O_2$ ,  $i_{O_2}$  и однородного катка 1 массой  $m_1$  и радиусом  $R_1$ . Груз 3 привязан к тросу, второй конец которого навит на шкив радиусом  $r_2$ . Второй трос навит на шкив радиусом  $R_2$  и на каток 1. Система приводится в движение с помощью постоянной силы  $F$ , приложенной к грузу и направленной параллельно

наклонной шероховатой плоскости, по которой движется груз. Угол наклона плоскости равен  $\alpha$ , коэффициент трения груза о плоскость —  $f$ .

При качении катка по горизонтальной плоскости возникает момент сопротивления качению, коэффициент трения качения равен  $\delta$ .

Пренебрегая скольжением катка, трением на оси шкива, весом и растяжением троса, определить с каким ускорением  $a_3$  движется груз (рис. 118, а).

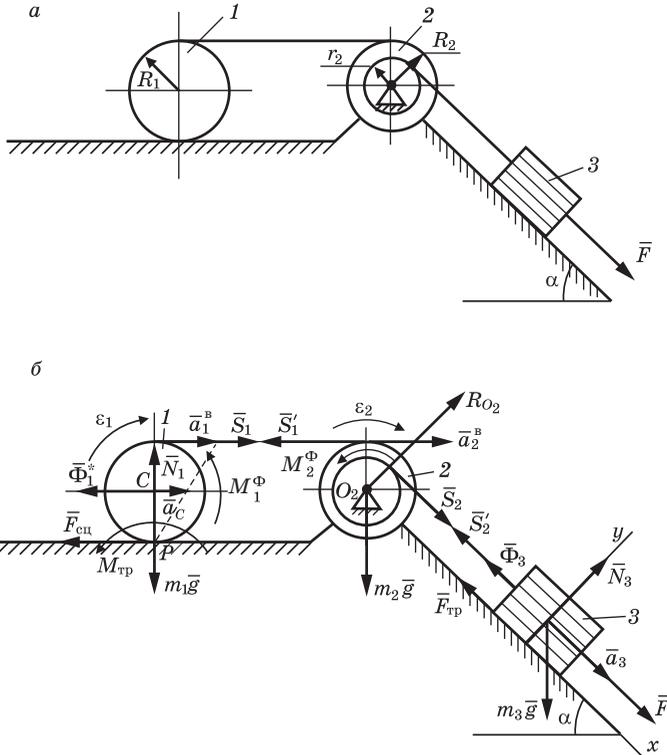


Рис. 118

**Решение.** Данная система имеет одну степень свободы. Тело 1 совершает плоскопараллельное движение, тело 2 — вращательное вокруг неподвижной оси, тело 3 движется поступательно. Приложим к каждому телу заданные активные силы  $\bar{F}$ ,  $m_1\bar{g}$ ,  $m_2\bar{g}$  и  $m_3\bar{g}$ ; реакция связей — силы:  $\bar{N}_3$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}}$ ,  $\bar{R}_{O_2}$ ,  $\bar{F}_{\text{си}}$ ,  $M_{\text{тр}}$ ,  $\bar{N}_1$ , а также силы инерции: к телу 1 главный вектор  $\bar{\Phi}_1^*$  и главный момент  $M_C^{\Phi}$  сил инерции; к телу 2 — главный момент сил инерции  $M_{O_2}^{\Phi}$ , к телу 3 — силу инерции  $\bar{\Phi}_3$ .

В соответствии с принципом Даламбера данная система в этом случае будет находиться в состоянии динамического равновесия.

Расчленим систему на три отдельных тела, усилия  $\bar{S}_1, \bar{S}'_1, \bar{S}_2, \bar{S}'_2$  в тросах, связывающих тела, приложим к каждому телу. Для каждого тела составим уравнения статики.

Для тела 3:

$$\Sigma X = 0; \quad F + m_3 g \sin \alpha - F_T - \Phi_3 - S'_2 = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0; \quad N_3 - m_3 g \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2)  $N_3 = m_3 g \cos \alpha$ .

Учтем, что  $\Phi_3 = m_3 a_3$ ;  $F_T = f N_3 = f m_3 g \cos \alpha$  и подставим в уравнение (1), получим:

$$F + m_3 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) m_3 - a_3 - S_2 = 0. \quad (3)$$

Для тела 2:

$$\Sigma M_{O_2} = 0; \quad S'_1 R_2 - S_2 r_2 + M_{O_2}^\Phi = 0. \quad (4)$$

Главный момент сил инерции шкива

$$M_{O_2}^\Phi = I_{O_2} \varepsilon_2 = m_2 i_{O_2}^2 \frac{a_3}{r_2},$$

где  $I_{O_2}$  — момент инерции шкива;  $\varepsilon_2$  — угловое ускорение шкива;  $i_{O_2}$  — радиус инерции шкива.

Тогда уравнение (4) примет вид

$$S'_1 R_2 - S_2 r_2 + m_2 \frac{i_{O_2}^2}{r_2} a_3 = 0. \quad (5)$$

В уравнение (5) дополнительно вошла еще одна неизвестная сила  $S'_1 = S_1$ . Поэтому для тела 1 составим уравнение статики, в которое войдет эта сила  $S_1$ , но другие неизвестные силы не войдут. Таким уравнением является

$$\Sigma M_P = 0; \quad M_C^\Phi + M_{тр} + \Phi_1 \cdot R_1 - S_1 2R_1 = 0, \quad (6)$$

где точка  $P$  — мгновенный центр скоростей.

В уравнении (6) главный момент сил инерции

$$M_C^\Phi = I_C \varepsilon_1;$$

момент трения качения

$$M_{\text{тр}} = N_1 \delta = m_1 g \delta.$$

где  $\delta$  – коэффициент трения качения;

$$I_C = \frac{m_1 R_1^2}{2}; \quad \Phi_1^* = m_1 a_C.$$

Выразим угловое ускорение  $\varepsilon_1$  и ускорение центра масс  $a_C$  через ускорение  $a_3$  груза 3. Так как трос нерастяжимый, то

$$a_1^B = a_2^B,$$

но

$$a_1^B = \varepsilon_1 2R_1;$$

$$a_2^B = \varepsilon_2 R_2.$$

Тогда

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 R_2}{2R_1} = \frac{a_3 R_2}{r_2 2R_1}; \quad a_C = \frac{a_1}{2} = \frac{a_3 R_2}{2r_2}.$$

С учетом этого уравнение (6) имеет вид

$$\frac{m_1 R_1^2}{2} \frac{a_3 R_2}{r_2 2R_1} + m_1 g \delta + m_1 \frac{a_3 R_2}{2r_2} R_1 - S_1 2R_1 = 0, \quad (7)$$

или

$$\frac{3m_1 R_2 a_3}{4r_2} + m_1 g \frac{\delta}{R_1} - 2S_1 = 0. \quad (8)$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} F + m_3 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_3 a_3 - S_2' = 0; & (3') \\ S_1' R_2 - S_2 r_2 + m_2 \frac{i_{O_2}^2}{r_2} a_3 = 0; & (5') \\ \frac{3}{4} m_1 \frac{R_2}{r_2} a_3 + m_1 g \frac{\delta}{R_1} - 2S_1 = 0. & (8') \end{cases}$$

Выразим из уравнения (3')  $S'_2$ , а из уравнения (8') —  $S_1$  и подставим в уравнение (5'); учитывая, что  $S'_2 = S_2$  и  $S_1 = S'_1$ , получим:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} m_1 \frac{R_2}{r_2} a_3 + m_1 g \frac{\delta}{R_1} \right) R_2 - [F + m_3 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_3 a_3] r_2 + m_2 \frac{i_{O_2}^2}{r_2} a_3 = 0. \quad (9)$$

Отсюда

$$a_3 = \frac{8r_2^2 [F + m_3 g (\sin \alpha - f \cos \alpha)] - m_1 g \frac{\delta R_2}{2r_2 R_1}}{3m_1 R_2^2 + 8m_2 i_{O_2}^2 + 8m_3 r_2^2}. \quad (10)$$

Так как все величины, входящие в выражение ускорения  $a_3$ , постоянные, то груз 3 будет двигаться равноускоренно при условии, если

$$8r_2^2 [F + m_3 g (\sin \alpha - f \cos \alpha)] > m_1 g \frac{\delta R_2}{2r_2 R_1}.$$

При известном ускорении  $a_3$  из уравнения (3') можно определить

$$S'_2 = S_2,$$

а из уравнения (8') —

$$S_1 = S'_1.$$

$$S_2 = F + m_3 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_3 a_3;$$

$$S_1 = \frac{1}{2} m_1 g \frac{\delta}{R_1} + \frac{3}{8} m_1 \frac{R_2}{r_2} a_3.$$

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение силе инерции материальной точки.
2. В чем отличие даламберовых и эйлеровых сил инерции?
3. В чем заключается принцип Даламбера для материальной точки и для механической системы?
4. Как вычисляются главный вектор и главный момент сил инерции при различных движениях твердого тела?

5. Можно ли определить главный вектор и главный момент сил инерции в целом для всей механической системы?

6. В чем особенность решения задач при определении реакций связей, наложенных на тела, движущиеся с некоторым ускорением?

---

## ГЛАВА 6. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

---

### 6.1. Дифференциальные уравнения движения твердого тела в простейших случаях

Дифференциальные уравнения можно получить из общих теорем динамики механической системы.

*Уравнения поступательного движения тела* — из теоремы о движении центра масс механической системы:

$$M\bar{a}_C = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = \bar{R}^e. \quad (6.1)$$

Так как при поступательном движении твердого тела ускорения всех точек тела одинаковы по модулю и направлению, то  $\bar{a}_C = \bar{a}$ , где  $\bar{a}$  — ускорение любой точки тела. С учетом этого, опустив индекс  $C$  и спроецировав уравнение (6.1) на оси координат, получим дифференциальные уравнения движения твердого тела в декартовых осях координат:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} &= \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \\ M\ddot{y} &= \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \\ M\ddot{z} &= \sum_{k=1}^n F_{kz}^e. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Используя эти дифференциальные уравнения, можно решать две основные задачи динамики:

- по известным массе тела и закону его движения определить главный вектор внешних сил или какую-либо одну из неизвестных внешних сил, действующих на тело;

- по известным массе тела, силам, действующим на него, и начальным условиям движения определить закон движения.

Так как дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела аналогичны дифференциальным уравнениям движения материальной точки, то решение этих задач аналогично решению первой и второй задач динамики материальной точки.

*Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси* — из теоремы об изменении кинетического момента механической системы относительно оси, например относительно оси  $z$ :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e). \quad (6.3)$$

Так как кинетический момент  $L_z$  твердого тела относительно оси  $L_z = I_z\omega$ , то

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z\omega)}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e). \quad (6.4)$$

Тогда дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела имеет вид

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e). \quad (6.5)$$

Так как  $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ , или  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\dot{\phi})}{dt} = \ddot{\phi}$ , то уравнение (6.5) можно записать в виде

$$I_z \varepsilon = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e) \quad (6.6)$$

или

$$I_z \ddot{\phi} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e). \quad (6.7)$$

Форма записи уравнения зависит от того, что следует определить в конкретной задаче.

Применяя дифференциальное уравнение вращательного движения тела, можно решать следующие задачи:

- по известным закону вращения тела и его моменту инерции  $I_z$  относительно оси определить момент внешних сил (используются формулы (6.6) или (6.7));
- по известным моменту инерции  $I_z$  тела, моменту внешних сил относительно оси вращения и начальным условиям вращения  $\varphi_0$  и  $\omega_0$  найти закон движения тела (используются формулы (6.5) или (6.7));
- по известным закону вращения тела и моменту внешних сил определить момент инерции тела относительно оси вращения.

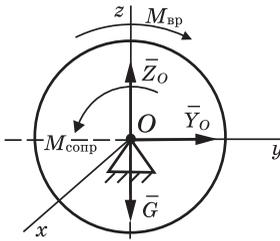


Рис. 119

**Пример 44.** Момент инерции вала с насаженным на него маховиком относительно оси вращения равен  $20 \text{ кгм}^2$ . Вал приводится в движение вращающим моментом  $40 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Определить момент сопротивления в опорах вала, если он вращается с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon = 1,5 \text{ рад/с}^2$ .

**Решение.** Дифференциальное уравнение вращения запишем в виде  $I_x \varepsilon = \Sigma M_{k_x}$ , или  $I_x \varepsilon = M_{\text{вп}} - M_{\text{сопр}}$  (рис. 119). Отсюда

$$M_{\text{сопр}} = M_{\text{вп}} - I_x \varepsilon = 40 - 20 \cdot 1,5 = 10 \text{ Н}\cdot\text{м} = \text{const.}$$

**Пример 45.** Твердое тело, находящееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси постоянным моментом  $M$ . При этом возникает момент сопротивления  $M_1$ , пропорциональный угловой скорости вращения:  $M_1 = \alpha \omega$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Определить закон изменения угловой скорости  $\omega = f(t)$ . Момент инерции тела относительно оси вращения равен  $I$ .

**Решение.** Запишем дифференциальное уравнение вращения тела (рис. 120) в виде

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \Sigma M_{k_z},$$

или

$$I \frac{d\omega}{dt} = M - \alpha \omega.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{M - \alpha\omega} = \int_0^t \frac{1}{I} dt \Rightarrow -\frac{1}{\alpha} \ln(M - \alpha\omega) \Big|_0^{\omega} = \frac{t}{I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{M - \alpha\omega}{M} = -\frac{\alpha t}{I} \quad \text{или} \quad \frac{M - \alpha\omega}{M} = e^{-\frac{\alpha t}{I}},$$

отсюда

$$\omega = \frac{M}{\alpha} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha t}{I}} \right).$$

Из полученного закона изменения угловой скорости следует, что при увеличении времени  $t$  скорость увеличивается по экспоненциальному закону.

При  $t = 0$   $\omega = 0$ , при  $t = \infty$   $\omega = \omega_{\max} = \frac{M}{\alpha}$ .

Характерное время выхода на стационарный режим  $\omega \approx \omega_{\max}$  определяется из выражения  $t = -\frac{I}{\alpha} \ln(1 - \gamma)$ , где  $\gamma = \omega / \omega_{\max}$ . Например, если  $\gamma = 0,9999$ , то  $t = 9,21I / \alpha$ .

*Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела* представляют собой совокупность уравнений поступательного движения плоской фигуры вместе с центром масс и вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно к ее плоскости:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \Sigma F_{k_x}^e; \\ M\ddot{y}_C &= \Sigma F_{k_y}^e; \\ I_{C_z} \ddot{\phi} &= \Sigma M_{C_z} (\bar{F}_k^e), \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

где  $\ddot{x}_C$  и  $\ddot{y}_C$  — проекции ускорения центра масс на оси координат;  $I_{C_z}$  — момент инерции тела относительно оси, проходя-

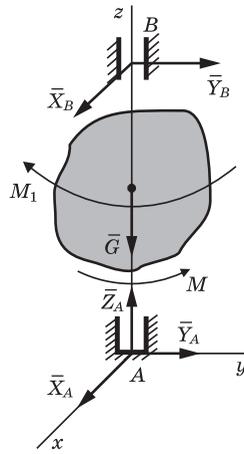


Рис. 120

щей через центр масс;  $\Sigma F_{k_x}^e$ ,  $\Sigma F_{k_y}^e$ ,  $\Sigma M_{C_z}(\bar{F}_k^e)$  – суммы проекций внешних сил на оси координат и сумма моментов внешних сил, приложенных к телу, относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс тела.

Уравнения (6.8) позволяют решить две основные задачи динамики плоского движения:

- по известным массе тела, закону движения центра масс определить главный вектор  $\bar{R}^e$  внешних сил или какую-либо одну неизвестную внешнюю силу, а по известному закону вращательного движения определить главный момент  $M_{C_z}^e$  внешних сил;

- по известным внешним силам, массе тела, моменту инерции  $I_{C_z}$  и начальным условиям движения  $x_{0_C}$ ,  $\dot{x}_{0_C}$ ,  $y_{0_C}$ ,  $\dot{y}_{0_C}$ ,  $\Phi_0$  и  $\dot{\Phi}_0$  найти закон движения центра масс тела и закон его вращения вокруг центра масс.

**Пример 46.** Однородный круглый цилиндр массой  $M$  обмотан по середине тонкой нитью, конец которой закреплен неподвижно. Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить. Определить скорость оси цилиндра после того, как он опустится на высоту  $h$ , и найти натяжение  $\bar{S}$  нити (рис. 121, а), пренебрегая ее массой.

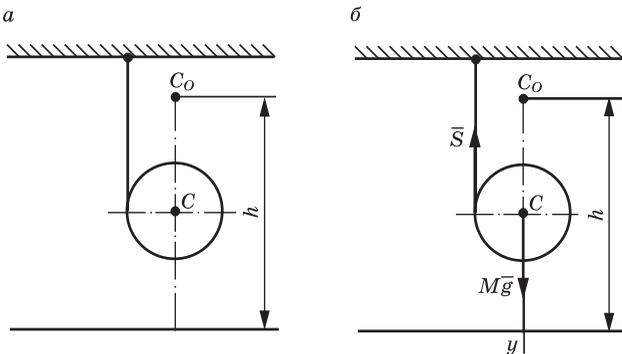


Рис. 121

**Решение.** Условие данного примера включает в себя как первую, так и вторую задачу динамики плоского движения. Поэтому сначала найдем угловое ускорение  $\ddot{\phi}$ , исключив неизвестную силу  $\bar{S}$ , а затем уже эту силу.

Изобразим цилиндр в произвольном положении. Покажем силы: вес  $M\bar{g}$  и силу  $\bar{S}$  натяжения нити (рис. 121, б). Запишем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения:

$$\begin{aligned} M\ddot{y}_C &= Mg - S; \\ I_C\ddot{\phi} &= SR. \end{aligned}$$

Заменим  $\ddot{y}_C = \ddot{\phi}R$ ,  $I_C = \frac{MR^2}{2}$  и умножим первое уравнение на  $R$ , а затем сложим его со вторым. Получим

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{\phi}R^2 &= MgR - SR \\ \frac{1}{2}MR^2\ddot{\phi} &= SR \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2}\ddot{\phi}R = g \Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{2}{3}\frac{g}{R}.$$

Заменим  $\ddot{\phi} = \frac{\dot{\phi}d\phi}{d\phi} = \frac{2}{3}\frac{g}{R}$ .

После интегрирования получим

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} \Big|_0^{\omega} = \frac{2}{3}\frac{g}{R} \phi \Big|_0^{h/R} \Rightarrow \omega^2 R^2 = \frac{4}{3}gh.$$

Так как  $\omega R = V$ , то  $V = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$ .

Натяжение нити

$$S = Mg - M\ddot{y}_C = Mg - M\ddot{\phi}R = Mg - M\frac{2}{3}g = \frac{1}{3}Mg.$$

**П р и м е ч а н и е.** Скорость оси цилиндра можно определить, применив теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e,$$

где  $T = \frac{3}{4}MV^2$ ;  $T_0 = 0$ ;  $\sum A_k^e = Mgh \Rightarrow V = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$ .

## 6.2. Физический маятник

**Физическим маятником** называется твердое тело, вращающееся под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела (рис. 122).

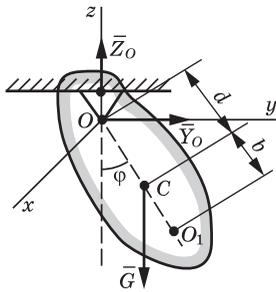


Рис. 122

Дифференциальное уравнение вращения маятника под действием только восстанавливающей силы — силы тяжести вокруг оси  $Ox$ , называемой осью привеса, имеет вид

$$I_x \ddot{\varphi} = -Gd \sin \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{Gd}{I_x} \sin \varphi = 0.$$

В случае малых колебаний  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (6.9)$$

где  $k = \sqrt{\frac{Gd}{I_x}}$ .

Общее решение этого однородного уравнения следующее:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Пусть при  $t = 0$   $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$ . Тогда  $C_1 = \varphi_0$ ,  $C_2 = 0$ , а уравнение гармонических колебаний

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt. \quad (6.10)$$

Период колебаний маятника

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_x}{Gd}}. \quad (6.11)$$

Из формулы (6.11) при известных весе  $G$ , расстоянии  $d$  от точки подвеса до центра масс и периоде колебаний  $\tau$ , которые могут быть определены экспериментально, найдем момент инерции тела относительно оси вращения.

*Приведенная длина физического маятника* — это длина такого математического маятника, период колебаний  $\tau_M$  которого равен периоду колебаний  $\tau$  физического маятника. Для математического маятника  $I_x = ml^2$ ,  $G = mg$  и  $d = l$ , тогда из формулы (6.11)

$$\tau_M = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.12)$$

Приравняем правые части уравнений (6.11) и (6.12), получим

$$l_{\text{пр}} = \frac{gI_x}{Gd} = d + \frac{i_C^2}{d}, \quad (6.13)$$

где  $I_x = I_C + md^2$ , или  $I_x = mi_C^2 + md^2$ ;  $G = mg$  и  $i_C$  – радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс  $C$ .

Обозначим

$$i_C^2 / d = b,$$

тогда

$$l_{\text{пр}} = d + b,$$

что определяет расстояние от точки  $O$  привеса маятника до точки  $O_1$ . Точка  $O_1$  называется центром качаний физического маятника, а ось, проходящая через эту точку параллельно оси  $Ox$ , называется осью качаний.

Если маятник закрепить в точке  $O_1$ , то точка  $O$  и ось  $Ox$  привеса будут соответственно центром и осью качаний. Приведенная длина маятника при этом не изменится, что видно из формулы

$$l_{\text{пр}} = \frac{i_C^2}{b} + b = d + b, \quad (6.14)$$

так как  $i_C^2 = d \cdot b$ .

Следовательно, и периоды качаний обоих маятников будут одинаковы.

Если на тело, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения, не проходящую через его центр тяжести, кроме силы тяжести действуют другие постоянные или переменные силы или моменты сил, то такое тело не является физическим маятником.

Дифференциальное уравнение вращательного движения этого тела кроме момента силы тяжести будет содержать моменты других сил и может быть проинтегрировано в некоторых частных случаях в соответствии с методикой, которая применяется при интегрировании дифференциальных уравнений прямолинейного движения материальной точки (см. п. 1.4).

### 6.3. Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

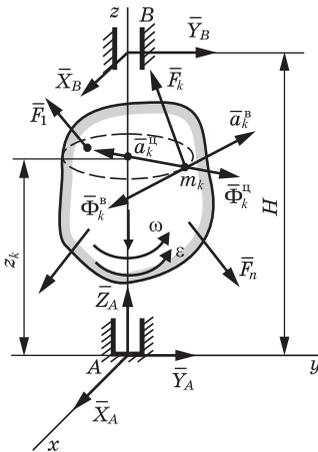


Рис. 123

Пусть твердое тело вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\varepsilon$  под действием приложенных активных сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_k, \dots, \bar{F}_n)$ . Покажем реакции подпятника  $A - \bar{X}_A, \bar{Y}_A$  и  $\bar{Z}_A$  и подшипника  $B - \bar{X}_B$  и  $\bar{Y}_B$  (рис. 123).

Если ко всем точкам этого тела приложить их силы инерции, то в соответствии с принципом Даламбера получим уравновешенную систему сил, произвольно расположенных в пространстве.

Для этой системы сил составим уравнения равновесия

$$\sum X = 0; X_A + X_B + \sum_{k=1}^n F_{kx} + \sum_{k=1}^n \Phi_{kx}^B + \sum_{k=1}^n \Phi_{kx}^U = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y = 0; Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^n F_{ky} + \sum_{k=1}^n \Phi_{ky}^B + \sum_{k=1}^n \Phi_{ky}^U = 0; \quad (2)$$

$$\sum Z = 0; Z_A + \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_x = 0; -Y_B H + \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^n M_x(\bar{\Phi}_k^B) + \sum_{k=1}^n M_x(\bar{\Phi}_k^U) = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_y = 0; X_B H + \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^n M_y(\bar{\Phi}_k^B) + \sum_{k=1}^n M_y(\bar{\Phi}_k^U) = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_z = 0; \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) + \sum_{k=1}^n M_z(\bar{\Phi}_k^B). \quad (6)$$

} 6.15

В этих формулах вращательная  $\Phi_k^B$  и центробежная  $\Phi_k^H$   $k$ -й точки соответственно равны

$$\Phi_k^B = m_k a_k^B = m_k \varepsilon r_k;$$

$$\Phi_k^H = m_k a_k^H = m_k \omega^2 r_k.$$

Для вычисления сумм проекций этих сил на оси координат и их моментов относительно этих осей изобразим на горизонтальной плоскости сечение тела, проведенное через  $k$ -ю точку перпендикулярно к оси вращения, и покажем силы инерции этой точки (рис. 124).

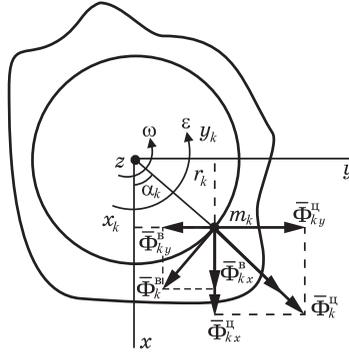


Рис. 124

Найдем суммы проекций сил инерции на оси координат:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Phi_{kx}^H &= \sum_{k=1}^n \Phi_k^H \cos \alpha_k = \sum_{k=1}^n m_k \omega^2 r_k \frac{x_k}{r_k} = \sum_{k=1}^n m_k \omega^2 x_k = \\ &= \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k x_k = \omega^2 M x_C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Phi_{ky}^B &= \sum_{k=1}^n \Phi_k^B \sin \alpha_k = \sum_{k=1}^n m_k \varepsilon r_k \frac{y_k}{r_k} = \sum_{k=1}^n m_k \varepsilon y_k = \\ &= \varepsilon \sum_{k=1}^n m_k y_k = \varepsilon M y_C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Phi_{ky}^H &= \sum_{k=1}^n \Phi_k^H \sin \alpha_k = \sum_{k=1}^n m_k \omega^2 r_k \frac{y_k}{r_k} = \sum_{k=1}^n m_k \omega^2 y_k = \\ &= \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k y_k = \omega^2 M y_C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Phi_{ky}^B &= - \sum_{k=1}^n \Phi_k^B \cos \alpha_k = - \sum_{k=1}^n m_k \varepsilon r_k \frac{x_k}{r_k} = - \sum m_k \varepsilon x_k = \\ &= - \varepsilon \sum_{k=1}^n m_k x_k = - \varepsilon M x_C. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Здесь  $x_C$  и  $y_C$  – координаты центра масс тела (см. п. 3.4).

Теперь найдем суммы моментов сил инерции относительно осей координат:

$$\sum_{k=1}^n M_x \left( \bar{\Phi}_k^B \right) = \sum_{k=1}^n \Phi_{ky}^B z_k = \sum_{k=1}^n m_k \varepsilon x_k z_k = \varepsilon \sum m_k x_k z_k = \varepsilon I_{zx};$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_x \left( \bar{\Phi}_k^U \right) &= - \sum_{k=1}^n \Phi_{ky}^U z_k = - \sum_{k=1}^n m_k \omega^2 y_k z_k = \\ &= -\omega^2 \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k = -\omega^2 I_{yz}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_y \left( \bar{\Phi}_k^B \right) &= \sum_{k=1}^n \Phi_{kx}^B z_k = \sum_{k=1}^n m_k \varepsilon y_k z_k = \\ &= \varepsilon \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k = \varepsilon I_{yz}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_y \left( \bar{\Phi}_k^U \right) &= \sum_{k=1}^n \Phi_{kx}^U z_k = \sum_{k=1}^n m_k \omega^2 x_k z_k = \\ &= \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k = \omega^2 I_{zx}; \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n M_z \left( \bar{\Phi}_k^B \right) = - \sum_{k=1}^n m_k \varepsilon r_k^2 = - \sum_{k=1}^n m_k \varepsilon r_k^2 = -\varepsilon I_z. \quad (6.17)$$

$\sum_{k=1}^n M_z \left( \bar{\Phi}_k^U \right) = 0$ , так как центробежные силы инерции пересекают ось  $z$ .

В (6.17)  $I_{yz}$  и  $I_{zx}$  – центробежные моменты инерции тела относительно осей  $yz$  и  $zx$ .

Подставив в систему уравнений (6.15) найденные суммы проекций и суммы моментов сил инерции, получим

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n F_{kx} + X_A + X_B + \varepsilon M y_C + \omega^2 M x_C &= 0; & (1) \\
 \sum_{k=1}^n F_{ky} + Y_A + Y_B - \varepsilon M x_C + \omega^2 M y_C &= 0; & (2) \\
 \sum_{k=1}^n F_{kz} + Z_A &= 0; & (3) \\
 \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) - Y_B \cdot H + \varepsilon I_{zx} - \omega^2 I_{yz} &= 0; & (4) \\
 \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) + X_B \cdot H + \varepsilon I_{yz} + \omega^2 I_{zx} &= 0; & (5) \\
 \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) - \varepsilon I_z &= 0. & (6)
 \end{aligned} \right\} (6.18)$$

Третье уравнение не содержит слагаемых, зависящих от сил инерции. Поэтому реакция  $\bar{Z}_A$  обусловлена только приложенными к телу внешними силами.

Последнее уравнение системы (6.18) не содержит реакций опор. Записав его в виде

$$I_z \varepsilon = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k),$$

получим дифференциальное уравнение вращения тела относительно оси  $z$  (6.6). Это уравнение позволяет определить угловое ускорение тела по известным приложенным силам.

Таким образом, от сил инерции зависят реакции  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Y}_A$  и  $\bar{Y}_B$ . Решив уравнения (1), (2), (4) и (5) системы (6.18), найдем эти реакции.

Составляющие  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Y}_A$  и  $\bar{Y}_B$  обусловлены как приложенными силами, так и силами инерций. Каждую из этих реакций разложим на статическую и динамическую составляющие:

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_A &= \bar{X}_A^{\text{ст}} + \bar{X}_A^D; \quad \bar{X}_B = \bar{X}_B^{\text{ст}} + \bar{X}_B^D; \\
 \bar{Y}_A &= \bar{Y}_A^{\text{ст}} + \bar{Y}_A^D; \quad \bar{Y}_B = \bar{Y}_B^{\text{ст}} + \bar{Y}_B^D.
 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Если по условию задачи требуется определить только динамические реакции (или динамические давления на опоры), то к телу прикладываем динамические реакции опор и силы инерции. Тогда уравнения (1), (2), (4) и (5) системы (6.18) в этом случае будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} X_A^D + X_B^D + M\omega^2 x_C + M\epsilon y_C &= 0; \\ Y_A^D + Y_B^D + M\omega^2 y_C - M\epsilon x_C &= 0; \\ -Y_B^D H - \omega^2 I_{yz} + \epsilon I_{zx} &= 0; \\ X_B^D H + \omega^2 I_{zx} + \epsilon I_{yz} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

где  $x_C, y_C$  — координаты центра масс тела;  $H$  — расстояние между опорами;  $I_{zx}, I_{yz}$  — центробежные моменты инерции тела относительно осей  $zx$  и  $yz$ .

Решив эти уравнения, получим

$$\left. \begin{aligned} X_A^D &= \frac{1}{H} (\omega^2 I_{zx} + \epsilon I_{yz}) - M\omega^2 x_C - M\epsilon y_C; \\ Y_A^D &= \frac{1}{H} (\omega^2 I_{yz} + \epsilon I_{zx}) - M\omega^2 y_C + M\epsilon x_C; \\ X_B^D &= -\frac{1}{H} (\omega^2 I_{zx} + \epsilon I_{yz}); \\ Y_B^D &= -\frac{1}{H} (\omega^2 I_{yz} - \epsilon I_{zx}). \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

Из системы уравнений (6.20) следует, что динамические реакции опор, а значит, и динамические давления будут равны нулю, если  $x_C = y_C = 0$  и  $I_{zx} = I_{yz} = 0$ , т.е. если ось вращения является *главной центральной осью инерции*.

Если  $x_C = y_C = 0$ ,  $I_{zx} \neq 0$ ,  $I_{yz} \neq 0$ , т.е. ось вращения  $z$  проходит через центр масс тела, но не является главной осью инерции, то

$$\left. \begin{aligned} X_A^D &= \frac{1}{H} (\omega^2 I_{zx} + \epsilon I_{yz}) \\ X_B^D &= -\frac{1}{H} (\omega^2 I_{zx} + \epsilon I_{yz}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow X_A^D = -X_B^D;$$

$$\left. \begin{aligned} Y_A^D &= \frac{1}{H} (\omega^2 I_{yz} - \varepsilon I_{zx}) \\ Y_B^D &= -\frac{1}{H} (\omega^2 I_{yz} - \varepsilon I_{zx}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y_A^D = -Y_B^D. \quad (6.22)$$

При равномерном вращении  $\varepsilon = 0$

$$X_A^D = -X_B^D = \frac{1}{H} \omega^2 I_{zx}; \quad Y_A^D = -Y_B^D = \frac{1}{H} \omega^2 I_{yz}. \quad (6.23)$$

Таким образом, динамические давления на опоры возникают при статической неуравновешенности вращающегося тела, когда центр масс тела не находится на оси вращения и при динамической неуравновешенности, когда центробежные моменты инерции относительно осей, содержащих в своих индексах обозначение оси вращения, не равны нулю, т.е. когда ось вращения не является главной центральной осью инерции.

Динамические реакции, а также и динамические давления на опоры вращающегося вокруг неподвижной оси тела обуславливают дополнительные нагрузки, значительно превышающие во многих случаях статические. Это приводит к более быстрому износу опор вала, износу шин колес автомобиля, вибрации шпинделей металлорежущих станков при обработке материалов, что ухудшает качество обработки деталей, и другим нежелательным явлениям. Для исключения этого производится статическая и динамическая балансировка вращающихся тел на специальных стендах.

**П р и м е ч а н и е.** Динамические реакции опор горизонтального или вертикального вращающегося вокруг оси вала, к которому прикреплены однородные стержни (рис. 125, *а*) или с помощью невесомых стержней — точечные массы (рис. 125, *б*), можно определить методом кинетостатики. Для этого к вращающимся объектам (стержням, точечным телам) прикладывают их силы инерции  $\bar{\Phi}$ , показывают динамические реакции в опорах и составляют необходимые уравнения равновесия. Пусть  $\omega = \text{const}$ .

Для схемы на рис. 125, *б* силы инерции точечных масс  $m_1$  и  $m_2$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= m_1 \omega^2 l_1; \\ \Phi_2 &= m_2 \omega^2 l_2. \end{aligned}$$

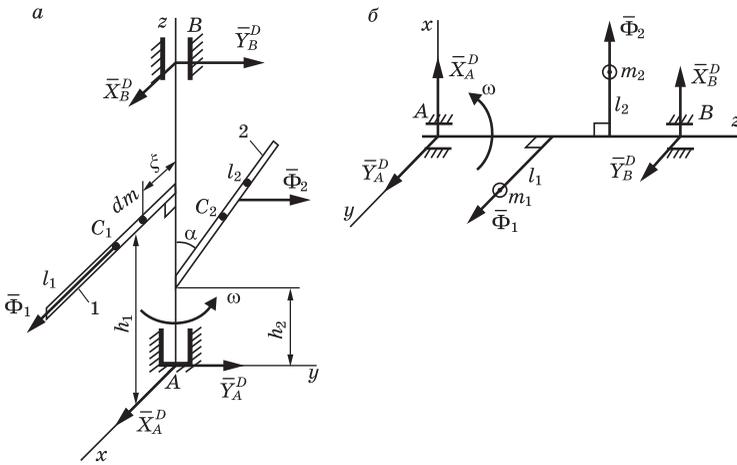


Рис. 125

Для схемы на рис. 125, а

$$\Phi_1 = m_1 a_{C_1}^{\text{ц}} = m_1 \omega^2 \frac{l_1}{2};$$

$$\Phi_2 = m_2 a_{C_2}^{\text{ц}} = m_2 \omega^2 \frac{l_2}{2} \sin \alpha .$$

Сила инерции  $\bar{\Phi}_1$  стержня 1 направлена вдоль стержня. Сила инерции стержня 2  $\bar{\Phi}_2$  приложена на расстоянии  $\frac{2}{3}l_2$  от точки крепления стержня 2 к валу и направлена перпендикулярно к оси вращения (см. пример 42).

Этим же методом можно определять динамические реакции, если к валу несимметрично прикреплены тонкие прямоугольные или круглые пластинки, расположенные либо в одной плоскости с валом (рис. 126, а, в), либо перпендикулярно к оси вала (рис. 126, б).

Во всех этих случаях линия действия силы инерции каждого тела проходит через его центр масс и равна

$$\Phi = Ma_C^{\text{ц}} = M\omega^2 OC,$$

где  $a_C^{\text{ц}}$  — центростремительное ускорение центра масс.

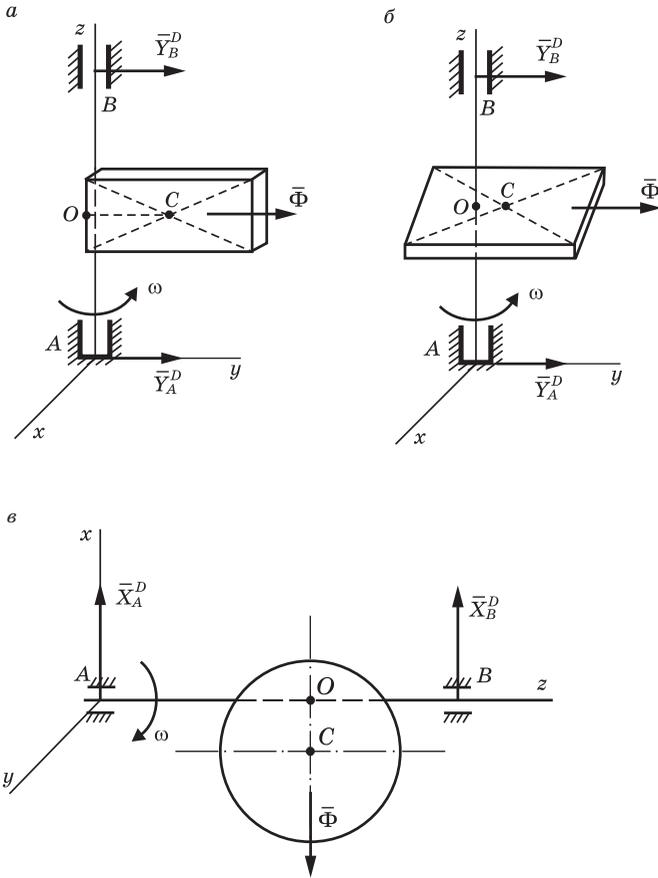


Рис. 126

Покажем, что описанные выше методы определения динамических реакций дают один и тот же результат.

**Пример 47.** Для схемы (см. рис. 125, а) определить динамические реакции опор – подпятника А и подшипника В.

**Решение.** *Первый способ:* используем уравнения (6.20), положив  $\varepsilon = 0$ :

$$X_A^D = \frac{1}{H} \omega^2 I_{zx} - M \omega^2 x_C;$$

$$Y_A^D = \frac{1}{H} \omega^2 I_{yz} - M \omega^2 y_C;$$

$$X_B^D = -\frac{1}{H} \omega^2 I_{zx}; Y_B^D = -\frac{1}{H} \omega^2 I_{yz}.$$

Определим координаты центра масс  $x_C$  и  $y_C$  и центробежные моменты инерции  $I_{yz}$ ,  $I_{zx}$  для каждого стержня.

Для первого стержня (см. рис. 125, а)

$$x_{C_1} = \frac{l_1}{2};$$

$$y_{C_1} = 0;$$

$$I_{yz} = 0;$$

$$I_{zx} = \int_{l_1} dm h_1 \xi = \int_0^{l_1} \frac{m_1}{l_1} d\xi h_1 \xi = \frac{m_1}{l_1} h_1 \frac{l_1^2}{2} = \frac{1}{2} m_1 h_1 l_1 = m_1 x_{C_1} z_{C_1}.$$

Для второго стержня

$$x_{C_2} = 0;$$

$$y_{C_2} = \frac{l_2}{2} \sin \alpha;$$

$$I_{zx} = 0;$$

$$I_{yz} = \int_{l_2} dm \xi \sin \alpha (h_2 + \xi \cos \alpha) = \int_0^{l_2} \frac{m_2}{l_2} d\xi \cdot \xi \sin \alpha (h_2 + \xi \cos \alpha) =$$

$$= \int_0^{l_2} \frac{m_2}{l_2} h_2 \sin \alpha \xi d\xi + \int_0^{l_2} \frac{m_2}{l_2} \sin \alpha \cos \alpha \xi^2 d\xi = \frac{1}{2} m_2 h_2 l_2 \sin \alpha + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \sin 2\alpha.$$

С учетом этого

$$X_A^D = \frac{1}{H} \omega^2 \frac{1}{2} m_1 h_1 l_1 - m_1 \omega^2 \frac{l_1}{2} = \frac{1}{2} m_1 l_1 \omega^2 \left( \frac{h_1}{H} - 1 \right);$$

$$Y_A^D = \frac{1}{H} \omega^2 \left( \frac{1}{2} m_2 h_2 l_2 \sin \alpha + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \sin 2\alpha \right) -$$

$$- m_2 \omega^2 \frac{l_2}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha \left( \frac{h_2}{H} + \frac{2}{3} \frac{l_2}{H} \cos \alpha - 1 \right);$$

$$X_B^D = -\frac{1}{H} \omega^2 \frac{1}{2} m_1 h_1 l_1; Y_B^D = -\frac{1}{H} \omega^2 I_{yz} = -\frac{1}{H} \omega^2 \frac{1}{2} m_2 l_2 \sin \alpha \left( h_2 + \frac{2}{3} l_2 \cos \alpha \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha \left( \frac{h_2}{H} + \frac{2}{3} \frac{l_2}{H} \cos \alpha \right).$$

*Второй способ:* составляем уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\Sigma X = 0; \quad X_A^D + X_B^D + \Phi_1 = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0; \quad Y_A^D + Y_B^D + \Phi_2 = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma M_x = 0; \quad -Y_B^D H - \Phi_2 \left( h_2 + \frac{2}{3} l_2 \cos \alpha \right) = 0; \quad (3)$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad X_B^D H + \Phi_1 h_1 = 0. \quad (4)$$

Из (3)

$$\begin{aligned} Y_B^D &= -\frac{1}{H} \Phi_2 \left( h_2 + \frac{2}{3} l_2 \cos \alpha \right) = -\frac{1}{H} m_2 \omega^2 \frac{l_2}{2} \sin \alpha \left( h_2 + \frac{2}{3} l_2 \cos \alpha \right) = \\ &= -\frac{1}{2} m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha \left( \frac{h_2}{H} + \frac{2}{3} \frac{l_2}{H} \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

Из (4)

$$X_B^D = -\Phi_1 \frac{h_1}{H} = -m_1 \omega^2 \frac{l_1}{2} \frac{h_1}{H} = -\frac{1}{H} \omega^2 \frac{1}{2} m_1 h_1 l_1.$$

Из (1)

$$X_A^D = -X_B^D - \Phi_1 = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 l_1 \frac{h_1}{H} - m_1 \omega^2 l_1 \frac{l_1}{2} = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 l_1 \left( \frac{h_1}{H} - 1 \right).$$

Из (2)

$$\begin{aligned} Y_A^D &= -Y_B^D - \Phi_2 = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha \left( \frac{h_2}{H} + \frac{2}{3} \frac{l_2}{H} \cos \alpha \right) - \\ &- m_2 \omega^2 \frac{l_2}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha \left( \frac{h_2}{H} + \frac{2}{3} \frac{l_2}{H} \cos \alpha - 1 \right). \end{aligned}$$

Результаты совпали.

Второй способ более простой, требуется только умение определять модуль и направление сил инерции и составлять уравнения равновесия. Однако этот способ не всегда применим. Например, при вращении цилиндра, расположенного под углом к оси вращения, более просто решить задачу не получится и необходимо будет воспользоваться первым способом.

**Пример 48.** Определить боковые силы давления  $\bar{N}_1$  на подпятник  $A$  и  $\bar{N}_2$  на подшипник  $B$  при вращении с постоянной угловой скоростью  $\omega = 5\pi$  рад/с вокруг вертикальной оси однородного цилиндра массой  $m = 24$  кг, радиусом  $r = 10$  см и длиной  $l = 30$  см, расположенного под углом  $\alpha = 45^\circ$  к оси вращения. Расстояние между подпятником и подшипником  $h = 50$  см;  $AO = OO_1 = 15$  см (рис. 127).

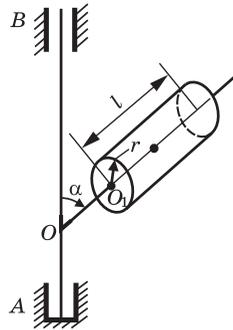


Рис. 127

**Решение.** 1. Выберем начало осей координат  $Axyz$  в точке  $A$  (рис. 128).

2. Расположим цилиндр в плоскости  $yAz$ . В этом случае боковые силы давления  $\bar{N}_1$  и  $\bar{N}_2$  будут расположены параллельно оси  $y$ , направлены в противоположные стороны реакциям  $\bar{Y}_A$  и  $\bar{Y}_B$  и равны им по величине.

Для определения реакций  $\bar{Y}_A$  и  $\bar{Y}_B$  воспользуемся уравнениями (2) и (4) системы уравнений (6.18), которые в данном случае будут иметь вид

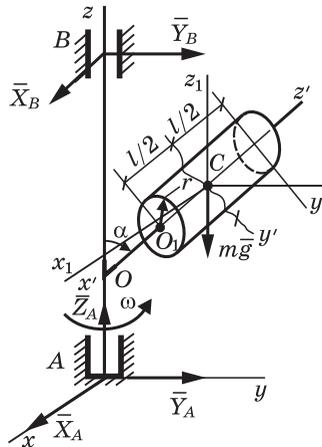


Рис. 128

$$\Sigma Y = 0; Y_A + Y_B + \omega^2 m y_C = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma M_x = 0; -Y_B h - mg(OO_1 + l/2) \sin \alpha - \omega^2 I_{yz} = 0. \quad (2)$$

Отсюда

$$Y_B = -\frac{mg(OO_1 + l/2) \sin \alpha + \omega^2 I_{yz}}{h}. \quad (3)$$

Для определения центробежного момента  $I_{yz}$  применим теорему Гюйгенса – Штейнера:

$$I_{yz} = I_{y_1z_1} + m y_C z_C, \quad (4)$$

где  $I_{y_1z_1}$  — центробежный момент инерции относительно осей  $y_1$  и  $z_1$ , параллельных осям  $y$  и  $z$  и проходящих через центр масс цилиндра, который вычисляем по формуле (3.32):

$$I_{y_1z_1} = \frac{I_{y'} - I_{z'}}{2} \sin 2\alpha; \quad (5)$$

$y_C, z_C$  — координаты центра масс цилиндра в осях  $Axyz$ ;  $I_{y'}, I_{z'}$  — моменты инерции цилиндра относительно главных центральных осей  $y'$  и  $z'$ .

Главные моменты инерции определяются по формулам

$$I_{y'} = \frac{ml^2}{12} + \frac{mr^2}{4};$$

$$I_{z'} = \frac{mr^2}{2}.$$

Тогда

$$I_{y_1z_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{ml^2}{12} + \frac{mr^2}{4} - \frac{mr^2}{2} \right) \sin 2\alpha = \frac{m}{8} \left( \frac{l^2}{3} - r^2 \right) \sin 90^\circ = \frac{m}{8} \left( \frac{l^2}{3} - r^2 \right).$$

Координаты центра масс цилиндра

$$y_C = (OO_1 + l/2) \sin \alpha = (15 + 15) \sin 45^\circ = 15\sqrt{2} \text{ см};$$

$$z_C = AO + (OO_1 + l/2) \cos \alpha = 15 + 15\sqrt{2} = 15(1 + \sqrt{2}) \text{ см}.$$

С учетом этого центробежный момент инерции

$$I_{yz} = \frac{m}{8} \left( \frac{l^2}{3} - r^2 \right) + m \cdot 15\sqrt{2} \cdot 15(1 + \sqrt{2}) =$$

$$= \frac{24}{8} \left( \frac{30^2}{3} - 10^2 \right) + 24 \cdot 15^2 (\sqrt{2} + 2) = 19\,036,75 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

По формуле (3) определяем  $Y_B$  :

$$Y_B = -\frac{24 \cdot 9,8(0,15 + 0,15) \sin 45^\circ + 19036,75 \cdot 10^{-4}}{0,5} = \frac{519,5}{0,5} = -1039 \text{ Н} = -1,039 \text{ кН.}$$

Знак (-) указывает на то, что реакция  $\bar{Y}_B$  в действительности направлена противоположно указанному на рисунке направлению, т.е. влево. Давление  $\bar{N}_2 = -\bar{Y}_B$ , следовательно, будет направлено вправо и равно 1,039 кН.

Из уравнения (1) реакция  $\bar{Y}_A$

$$Y_A = -Y_B - \omega^2 m y_C = 1039 - (5\pi)^2 \cdot 24 \cdot 0,15\sqrt{2} = -217,2 \text{ Н} = -0,217 \text{ кН}$$

и направлена влево, а давление  $\bar{N}_1 = -\bar{Y}_A$ , следовательно, направлено вправо.

Если бы осью вращения являлась ось Cz, т.е. проходящая через центр масс, то  $y_C = z_C = 0$  и  $M_x(m\bar{g}) = 0$ .

Тогда

$$I_{yz} = I_{y_1z_1} = \frac{m}{8} \left( \frac{l^2}{3} - r^2 \right) = \frac{24}{8} \left( \frac{30^2}{3} - 10^2 \right) = 600 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

В этом случае  $\bar{Y}_A = -\bar{Y}_B = -\bar{Y}_B^D$

$$Y_B^D = -\frac{1}{h} \omega^2 I_{yz} = -\frac{1}{0,5} \cdot (5\pi)^2 \cdot 0,06 = -29,61 \text{ Н} = -0,0296 \text{ кН,}$$

т.е. примерно в 35 раз меньше, чем в первом случае.

## 6.4. Элементарная теория гироскопа

**Гироскопом** называется симметричное твердое тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии, одна точка которой остается неподвижной.

Такое движение является сферическим. Положение тела в неподвижной системе координат  $Oxyz$  определяется углами Эйлера (рис. 129:  $\psi$  — угол прецессии;  $\phi$  — угол собственного вращения;  $\theta$  — угол нутации).

Подвижная система координат  $Ox_1y_1z_1$  связана с телом. В общем случае тело может участвовать в трех вращениях: вокруг оси z с угловой скоростью  $\omega_\psi$  прецессии, вокруг оси  $z_1$  с угловой скоростью  $\omega_\phi$  собственного вращения и вокруг линии узлов  $OK$  с угловой скоростью  $\omega_\theta$  нутации.

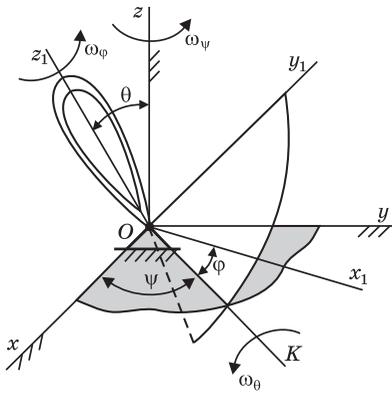


Рис. 129

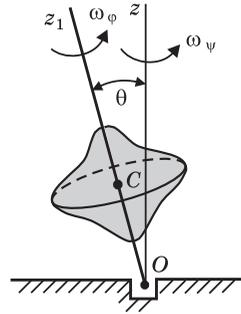


Рис. 130

Сферическое движение совершает волчок (рис. 130), а также тяжелый однородный диск, который одновременно вращается вокруг двух пересекающихся в одной точке осей (рис. 131).

Волчок (см. рис. 130) – гироскоп с тремя степенями свободы при  $\theta \neq \text{const}$ , и двумя – если  $\theta = \text{const}$ . Диск (рис. 131) – гироскоп с двумя степенями свободы – независимые вращения вокруг осей  $AA'$  и  $BB'$ , т.е.  $z_1$  и  $z$ .

**Астатический гироскоп** – уравновешенный гироскоп, неподвижная точка  $O$  которого совпадает с центром масс  $C$  (рис. 132), в противном случае гироскоп называется тяжелым, например волчок.

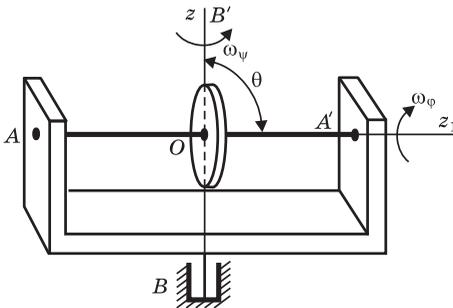


Рис. 131

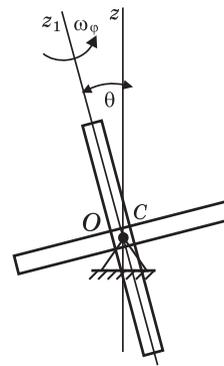


Рис. 132

Суть *элементарной*, или *приближенной*, теории гироскопа состоит в том, что у быстро вращающегося гироскопа угловая скорость  $\omega_\psi$  прецессии мала по сравнению с угловой скоростью  $\omega_\phi$  собственного вращения, а угол нутации  $\theta$  остается практически постоянным. Абсолютная угловая скорость тела при сферическом движении равна геометрической сумме угловых скоростей прецессии, собственного вращения и нутации, т.е

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_\psi + \bar{\omega}_\phi + \bar{\omega}_\theta. \quad (6.24)$$

Поэтому абсолютная угловая скорость гироскопа, принимая во внимание

$$\begin{aligned} \omega_\psi &\approx 0; \\ \omega_\theta &\approx 0; \\ \bar{\omega} &\approx \bar{\omega}_\phi, \end{aligned} \quad (6.25)$$

т.е. вектор  $\bar{\omega}$  направлен по  $z_1$  (оси собственного вращения).

Тогда кинетический момент быстро вращающегося гироскопа относительно неподвижной точки  $O$  равен

$$\bar{L}_O = I_O \bar{\omega} \approx I_{z_1} \bar{\omega}_\phi \quad (6.26)$$

и направлен по оси собственного вращения (ось  $z_1$ ) в сторону, откуда это вращение видно против часовой стрелки.

**Примечание.** В общем случае модуль кинетического момента при вращении тела вокруг неподвижной точки определяется через его проекции на оси координат, например, на подвижные  $Ox_1y_1z_1$ , по формуле

$$L_O = \sqrt{L_{O_{x_1}}^2 + L_{O_{y_1}}^2 + L_{O_{z_1}}^2}. \quad (6.27)$$

Так как для гироскопа подвижные оси являются главными осями инерции для точки  $O$ , то проекции вектора  $\bar{L}_O$  на подвижные оси

$$L_{O_{x_1}} = L_{x_1} = I_{x_1} \omega_{x_1};$$

$$L_{O_{y_1}} = L_{y_1} = I_{y_1} \omega_{y_1};$$

$$L_{Oz_1} = L_{z_1} = I_{z_1} \omega_{z_1}.$$

Но

$$\omega_{x_1} = 0; \quad \omega_{y_1} = 0;$$

$$\omega_{z_1} = \omega_\varphi \Rightarrow L_O = L_{z_1} = I_{z_1} \omega_\varphi.$$

В основу теории гироскопа положена теорема Резаля, рассмотренная в п. 4.12.

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) = \bar{u}, \quad (6.28)$$

где  $\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) = \bar{M}_O^e$  — главный момент внешних сил относительно точки  $O$ ;  $\bar{u}$  — скорость конца вектора  $\bar{L}_O$ .

т.е. вектор  $\bar{L}_O$  остается постоянным по величине и направлению в инерциальной системе отсчета (ось  $z_1$  не изменяет свое-

**Основные свойства гироскопа.** Рассмотрим установившееся вращательное движение астатического гироскопа с угловой скоростью  $\omega_\varphi$  (рис. 133).

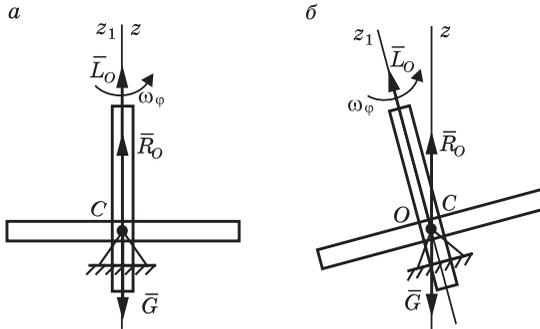


Рис. 133

Сила тяжести  $\bar{G}$  и реакция  $\bar{R}_O$  оси уравновешены и приложены в точке  $O$ . Поэтому

$$\bar{M}_O^e = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{L}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{L}_O = \overline{\text{const}},$$

т.е. вектор  $\bar{L}_O$  остается постоянным по величине и направлению в инерциальной системе отсчета (ось  $z_1$  не изменяет свое-

го первоначального положения независимо от того, в каком положении она находилась) (рис. 133).

**Первое свойство гироскопа.** Ось быстро вращающегося уравновешенного с тремя степенями свободы гироскопа устойчиво сохраняет свое направление в инерциальной системе отсчета. Удары или толчки могут вызвать вибрацию оси гироскопа, но не отклонение от первоначального положения. Это свойство широко используется в различных навигационных приборах и стабилизаторах движения.

Рассмотрим действие некоторой силы  $\vec{F}$  (или пары сил) на уравновешенный гироскоп, находящийся в состоянии покоя (рис. 134, а).

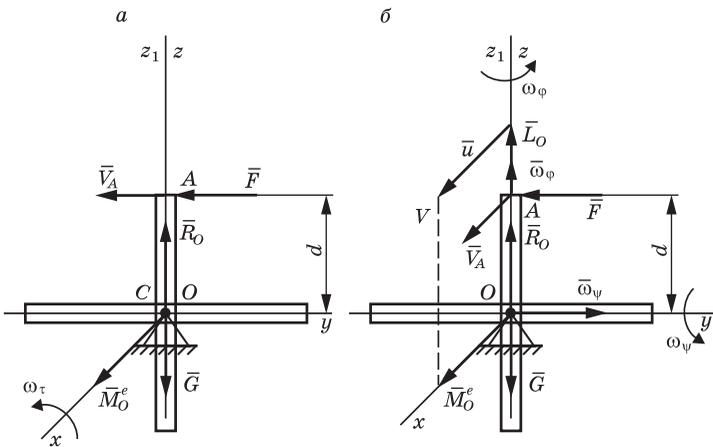


Рис. 134

Пусть сила  $\vec{F}$  приложена перпендикулярно к оси покоящегося гироскопа в точке  $A$ , отстоящей от точки  $O$  на расстоянии  $d$ , параллельно оси  $y$ . Тогда эта сила создаст относительно оси  $x$  момент  $M_x = |\vec{M}_0^e| = Fd$ . Вектор  $\vec{M}_0^e$  направлен вдоль оси  $x$ , вокруг которой гироскоп будет вращаться с некоторой угловой скоростью  $\omega$ . Движение гироскопа можно описать дифференциальным уравнением вращательного движения

$$I_x \frac{d\omega}{dt} = M_x = \text{const.}$$

Проинтегрируем это уравнение, разделив переменные, найдем угловую скорость вращения гироскопа:

$$\int_0^{\omega_\tau} d\omega = \int_0^t \frac{M_x}{I_x} dt \Rightarrow \omega_\tau = \frac{M_x}{I_x} \tau, \quad (6.29)$$

где  $\tau$  — время действия силы;  $I_x$  — момент инерции гироскопа относительно оси  $x$ .

После прекращения действия силы  $\bar{F}$  гироскоп будет продолжать вращаться по инерции вокруг оси  $Ox$  с постоянной угловой скоростью, которую он приобрел за время  $\tau$  действия силы.

Теперь рассмотрим влияние постоянной силы или пары сил, действующих на ось быстро вращающегося гироскопа (рис. 134, б).

При действии силы  $\bar{F}$  (или пары сил) на тот же гироскоп, вращающийся вокруг оси симметрии (оси  $z_1$ ) с большой угловой скоростью  $\omega_\phi$ , он в соответствии с теоремой Резаля начнет вращаться вокруг оси  $y$  с некоторой угловой скоростью  $\omega_\psi$ , так как главный момент внешних сил относительно точки  $O$   $\bar{M}_O^e$  направлен по оси  $x$ , а скорость  $\bar{u}$  конца вектора кинетического момента  $\bar{L}_O$  совпадает по направлению с  $\bar{M}_O^e$ .

Таким образом, в этом случае смещение оси быстро вращающегося гироскопа происходит не по направлению силы, а по направлению ее момента относительно точки  $O$ . Движение, совершаемое осью гироскопа при действии постоянной силы, называется *прецессией*, а угловая скорость этого вращения называется *угловой скоростью прецессии*.

Скорость  $\bar{u}$  точки конца вектора  $\bar{L}_O$ , который вращается вокруг оси  $y$ , определим по формуле Эйлера:

$$\bar{u} = \bar{\omega}_\psi \times \bar{L}_O = \bar{\omega}_\psi \times I_O \bar{\omega}_\phi. \quad (6.30)$$

Так как  $\bar{u} = \bar{M}_O^e$ , то

$$|\vec{u}| = |\vec{\omega}_\psi \times I_{z_1} \vec{\omega}_\varphi| = I_{z_1} \omega_\psi \omega_\varphi \sin \left( \vec{\omega}_\varphi, \vec{\omega}_\psi \right). \quad (6.31)$$

Отсюда угловая скорость прецессии

$$\omega_\psi = \frac{|\vec{M}_O^e|}{I_{z_1} \omega_\varphi \sin \left( \vec{\omega}_\varphi, \vec{\omega}_\psi \right)} - \text{закон прецессии.} \quad (6.32)$$

**Второе свойство гироскопа.** При действии силы (или пары сил) на ось быстро вращающегося гироскопа она отклонится от первоначального положения в направлении, перпендикулярном к этой силе, и начнет вращаться вокруг оси, параллельной силе, с постоянной угловой скоростью. Это свойство характерно также и для тяжелого гироскопа типа волчка (см. рис. 130). Однако в этом случае прецессия будет происходить вокруг оси  $z$  (рис. 135, б).

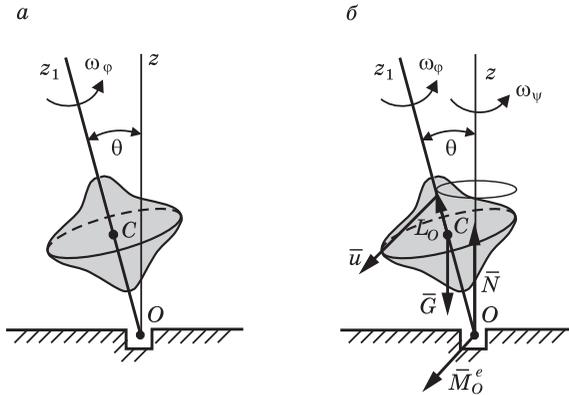


Рис. 135

В момент прекращения действия силы  $\vec{F}$  главный момент внешних сил относительно точки  $O$  равняется нулю и в дальнейшем остается равным нулю. Поэтому начиная с этого момента  $u = M_O^e = 0$ , т.е. ось симметрии гироскопа мгновенно останавливается в том положении, которое она занимала в момент прекращения действия силы. Угол отклонения за время  $\tau$  действия силы можно определить следующим образом:

$$\alpha = \omega_{\psi} \tau = \frac{|\bar{M}_O^e| \tau}{I_{z_1} \omega_{\varphi}} = \frac{Fd\tau}{I_{z_1} \omega_{\varphi}}. \quad (6.33)$$

Из уравнения (6.33) следует, что угол  $\alpha$  тем меньше, чем больше собственный кинетический момент гироскопа. Поэтому при достаточно большом кинетическом моменте гироскопа и кратковременном действии силы ось гироскопа почти не отклоняется от своего первоначального положения.

Таким образом, быстрое вращение сообщает гироскопу способность противодействовать силам, стремящимся изменить направление его оси вращения.

**Пример 49.** Волчок весом  $G$  вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью  $\omega_{\varphi}$ , отклонившись под действием силы тяжести от вертикали на угол  $\theta$ .

Расстояние от неподвижной точки  $O$  до центра масс  $OC = d$ , момент инерции волчка относительно оси  $z_1 - I_{z_1}$  (рис. 135, а). Определить, с какой угловой скоростью вокруг вертикальной оси вращается ось симметрии гироскопа.

**Решение.** На волчок действуют внешние силы: сила тяжести  $\bar{G}$  и сила реакции  $\bar{R}$  (рис. 135, б). Главный момент внешних сил  $|\bar{M}_O^e| = GOC \sin \theta = Gd \sin \theta$ . На основании формулы (6.32)

$$\omega_{\psi} = \frac{|\bar{M}_O^e|}{I_{z_1} \omega_{\varphi} \sin \theta} = \frac{Gd \sin \theta}{I_{z_1} \omega_{\varphi} \sin \theta} = \frac{Gd}{I_{z_1} \omega_{\varphi}}.$$

Из полученного выражения следует, что чем быстрее вращается гироскоп вокруг собственной оси, тем меньше его угловая скорость прецессии.

*Регулярная прецессия гироскопа* — движение гироскопа с постоянными угловыми скоростями  $\omega_{\varphi}$  собственного вращения,  $\omega_{\psi}$  прецессии и постоянным углом  $\theta$  нутации.

## 6.5. Гироскопический момент, гироскопические реакции

Рассмотрим движение гироскопа с двумя степенями свободы.

Гироскоп (рис. 136) представляет собой диск, вращающийся вокруг пересекающихся в точке  $O$  осей  $z_1$  и  $z$ . Ось собственного вращения закреплена в опорах  $A$  и  $B$ .

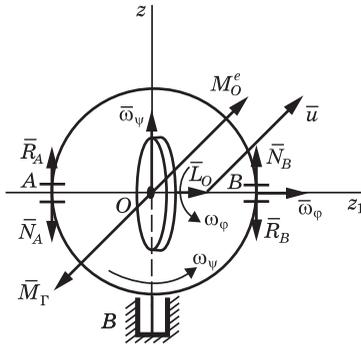


Рис. 136

Пусть угловая скорость собственного вращения  $\omega_\varphi$  и угловая скорость прецессии  $\omega_\psi$  заданы по величине и направлению. Требуется определить реакции  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$  опор  $A$  и  $B$ .

В соответствии с теоремой Резаля  $-\bar{u} = \bar{M}_O^e$ . Момент внешних сил относительно точки  $O$   $\bar{M}_O^e$  будет создаваться реакциями  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$  опор, расположенных в плоскости, к которой  $\bar{M}_O^e$ , а следовательно, и вектор  $\bar{u}$  будут перпендикулярны. Так как гироскоп расположен симметрично относительно опор, то  $R_A = R_B$ , а

$$M_O^e = M(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = R_A AB.$$

Поэтому с учетом формулы (6.31)

$$R_A = R_B = \frac{I_{z_1} \omega_\psi \omega_\varphi \sin \theta}{AB}. \quad (6.34)$$

Так как в нашем случае  $\theta = 90^\circ$ , то  $\sin \theta = 1$ . Тогда

$$R_A = R_B = \frac{I_{z_1} \omega_\psi \omega_\varphi}{AB}. \quad (6.35)$$

В свою очередь в опорах будут возникать давления  $\bar{N}$ , равные по величине реакциям, но направленные в противоположные им стороны, т.е.  $\bar{N}_A = -\bar{R}_A$  и  $\bar{N}_B = -\bar{R}_B$ .

Реакции  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$  и давления  $\bar{N}_A$ ,  $\bar{N}_B$  называются соответственно *гироскопическими реакциями* и *гироскопическими давлениями*.

Если к вращающемуся гироскопу приложить главный момент сил инерции  $\bar{M}_O^\Phi$  гироскопа относительно неподвижной

его точки, то в соответствии с принципом Даламбера получим уравновешенную систему сил, т.е.

$$\bar{M}_O^e + \bar{M}_O^\Phi = 0 \Rightarrow \bar{M}_O^\Phi = -\bar{M}_O^e, \quad (6.36)$$

где  $\bar{M}_O^e = \bar{\omega}_\Psi \times \bar{L}_O = \bar{\omega}_\Psi \times I_{z_1} \bar{\omega}_\Phi = I_{z_1} (\bar{\omega}_\Psi \times \bar{\omega}_\Phi)$ .

Тогда

$$\bar{M}_O^\Phi = -I_{z_1} (\bar{\omega}_\Psi \times \bar{\omega}_\Phi) = I_{z_1} (\bar{\omega}_\Phi \times \bar{\omega}_\Psi). \quad (6.37)$$

Гироскопическим моментом  $\bar{M}_\Gamma$  — называется выражение  $I_{z_1} (\bar{\omega}_\Phi \times \bar{\omega}_\Psi)$ , которое представляет собой главный момент сил инерции гироскопа относительно его неподвижной точки  $O$ .

Таким образом,

$$\bar{M}_\Gamma = \bar{M}_O^\Phi = I_{z_1} (\bar{\omega}_\Phi \times \bar{\omega}_\Psi). \quad (6.38)$$

Гироскопический момент можно представить как момент гироскопической пары сил, которыми и являются силы давления в опорах, т.е.  $\bar{M}_\Gamma = \bar{M} (\bar{N}_A, \bar{N}_B)$ .

Значение этих сил равно

$$N_A = N_B = \frac{|\bar{M}_\Gamma|}{AB} = \frac{I_{z_1} \omega_\Phi \omega_\Psi \sin \theta}{AB}, \quad (6.39)$$

что аналогично (6.34).

Под действием гироскопической пары сил давления на подшипники система может перемещаться. Пара сил  $(\bar{N}_A, \bar{N}_B)$  стремится совместить ось вращения гироскопа с осью прецессии.

**Правило Н.Е. Жуковского.** Если быстро вращающемуся гироскопу сообщить вынужденное прецессионное движение, то возникает гироскопическая пара сил давления на опоры, стремящаяся кратчайшим путем расположить ось гироскопа параллельно оси прецессии так, чтобы векторы  $\bar{\omega}_\Phi$  и  $\bar{\omega}_\Psi$  совпадали.

Это правило хорошо иллюстрируется рис. 136, из которого видно, что гироскопическая пара сил  $(\bar{N}_A, \bar{N}_B)$  стремится повернуть ось  $AB$  (вектор  $\bar{\omega}_\Phi$ ) до совпадения с осью  $z$  (с вектором  $\bar{\omega}_\Psi$ ) против хода часовой стрелки.

## Вопросы и задания для самоконтроля

1. Приведите дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела.
2. При каких условиях тело вращается вокруг неподвижной оси: а) ускоренно; б) равномерно; в) замедленно?
3. В чем отличие физического маятника от математического?
4. Что такое приведенная длина физического маятника? Как она вычисляется?
5. С помощью каких общих теорем динамики можно получить дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела?
6. Чем обусловлены динамические реакции подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси?
7. При каких условиях динамические реакции или динамические давления на опоры при вращении тела вокруг неподвижной оси будут отсутствовать?
8. Что представляет собой гироскоп?
9. В чем особенность элементарной теории гироскопов?
10. Приведите физические свойства астатического быстро вращающегося гироскопа с тремя степенями свободы.
11. Что такое регулярная прецессия гироскопа?
12. Как определяются гироскопические реакции опор?

---

## ГЛАВА 7. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ

---

### 7.1. Основные понятия аналитической механики

**Аналитическая механика** — область (раздел) механики, в котором изучается движение или равновесие механических систем с помощью общих, единых аналитических методов, применяемых для любых механических систем.

Методы аналитической механики базируются на использовании многих понятий и теоретических положений кинематики и динамики.

В свою очередь применение методов аналитической механики предполагает введение ряда новых понятий, таких как:

- возможные (виртуальные) и действительные перемещения;
- обобщенные координаты, скорости и силы;

- идеальные связи;
- возможная работа силы и др.

В основе аналитической механики лежат общие принципы механики.

**Принципы механики** — положения (утверждения), из которых аналитическим путем получают уравнения движения или равновесия механических систем. Как и аксиомы, они используются в дальнейшем для теоретических обоснований, доказательств и выводов.

### 7.1.1. Связи и их классификация

**Связи** — любые ограничения в виде тел или каких-либо кинематических условий, накладываемые на движения точек механической системы. Эти ограничения могут быть записаны в виде уравнений или неравенств. Например, связь в виде некоторой поверхности описывается уравнением

$$f(x, y, z) = 0. \quad (7.1)$$

*Геометрические связи* — связи, уравнения которых содержат только координаты точек, т.е. ограничения накладываются только на координаты точек. Это связи в виде тел, поверхностей, линий и т.п.

*Дифференциальные, или кинематические, связи* — связи, накладывающие ограничения не только на координаты точек, но и на их скорости.

Уравнение такой связи

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \quad (7.2)$$

В данном случае уравнения связей являются дифференциальными уравнениями для координат точек.

*Голономные связи* — все геометрические связи и те дифференциальные, уравнения которых могут быть проинтегрированы.

*Неголономные связи* — дифференциальные неинтегрируемые связи. Например, связь, накладываемая на движение конька фигуриста по льду (рис. 137), является дифференциальной, так как накладывает ограничение на направление скорости точки  $C$  касания конька со льдом (конек имеет выпуклую форму), а именно, скорость должна быть направлена по касательной к траектории, а ее проекция на нормаль должна быть равна нулю, т.е. не должно быть бокового скольжения.

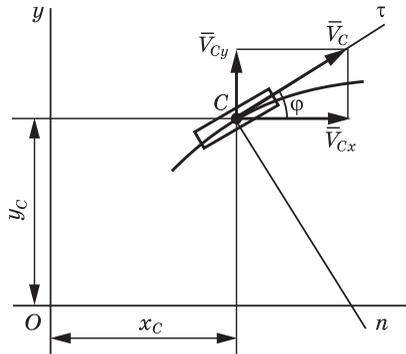


Рис. 137

Данное условие может быть записано уравнением

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{V_{Cy}}{V_{Cx}} = \frac{\dot{y}_C}{\dot{x}_C}. \quad (7.3)$$

Если угол  $\varphi$  остается постоянным при движении, то такая дифференциальная связь является интегрируемой.

Для этого запишем уравнение (7.3) в виде

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy_C / dt}{dx_C / dt} \Rightarrow dy_C = \operatorname{tg}\varphi dx_C. \quad (7.4)$$

Проинтегрировав уравнение (7.4), получим

$$y_C = x_C \operatorname{tg}\varphi. \quad (7.5)$$

Полученное уравнение является уравнением геометрической связи, и связь, описываемая уравнением (7.4), является голономной. Если бы угол  $\varphi$  не оставался постоянным, то уравнение (7.4) нельзя было бы проинтегрировать, связь являлась бы неголономной. Таким образом, продифференцировав уравнение геометрической связи, можно получить дифференциальную связь.

Из дифференциальных, или кинематических, связей геометрические связи не всегда можно получить, так как уравнения дифференциальных связей не всегда могут быть проинтегрированы.

*Стационарные связи* — связи, в уравнения которых не входит явно время. Например, геометрическая стационарная связь в

виде невесомого жесткого стержня длины  $l$ , ограничивающего перемещение материальной точки  $M(x, y, z)$  (рис. 138), описывается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (7.6)$$

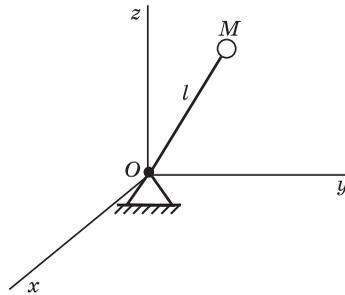


Рис. 138

В этом случае на стержень наложена связь в виде шарового шарнира  $O$ , позволяющего перемещаться стержню в пространстве. Поэтому точка  $M$ , для которой связь является жесткий стержень, будет перемещаться по сферической поверхности.

*Нестационарные связи* — связи, изменяющиеся с течением времени, т.е. в уравнения которых явно входит время.

Если в рассмотренном выше примере вместо стержня будет нить, длина которой с течением времени изменяется, т.е.  $l = l(t)$ , то такая связь будет геометрической нестационарной. Эта связь позволяет точке  $M$  совершать движение не только по поверхности сферы радиуса, равного длине  $l$ , но и внутри этой сферы. Поэтому такая связь не является удерживающей и описывается неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) \leq 0. \quad (7.7)$$

*Двусторонние (удерживающие) связи* — связи, ограничивающие движение точки в двух противоположных направлениях (рис. 139, а). Такие связи описываются уравнениями. Например, связь в виде жесткого стержня (см. рис. 138, (7.6)).

*Односторонние (неудерживающие) связи* — связи, ограничивающие движение только в одном направлении (рис. 139, б). Такие связи описываются неравенствами. Например, связь в виде нити вместо жесткого стержня (см. рис. 138).

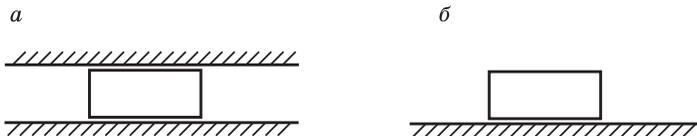


Рис. 139

Примером односторонней неудерживающей или освобождающей стационарной связи является сферическая поверхность (рис. 140).

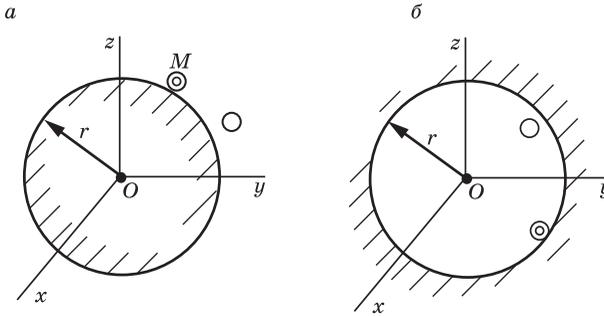


Рис. 140

Точка  $M$ , двигаясь по внешней поверхности шара (рис. 140,  $a$ ), может отделиться от этой поверхности и перемещаться свободно во внешней области связи. Такая связь описывается неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \geq 0. \quad (7.8)$$

Если точка движется внутри сферической оболочки (рис. 140,  $b$ ), то отделившись от связи, она может свободно перемещаться внутри сферы. Такая связь описывается неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \leq 0. \quad (7.9)$$

### 7.1.2. Возможные (виртуальные) и действительные перемещения

*Возможными (виртуальными) перемещениями* точек механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, которые допускают наложенные на систему связи.

Возможным перемещением механической системы называется совокупность одновременных возможных перемещений точек системы, совместимых со связями.

Пусть механическая система — кривошипно-шатунный механизм (рис. 141). Возможным перемещением точки  $A$  являет-

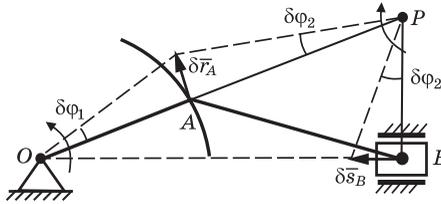


Рис. 141

ся перемещение  $\delta \vec{r}_A$ , которое в силу его малости считается прямолинейным и направленным перпендикулярно к  $OA$ . Возможным перемещением точки  $B$  (ползуна) является перемещение  $\delta \vec{s}_B$  в направляющих. Возможным перемещением кривошипа  $OA$  является поворот на угол  $\delta \varphi_1$ , а шатуна  $AB$  — на угол  $\delta \varphi_2$  вокруг МЦС (точка  $P$ ).

Все эти перемещения могут быть направлены так, как указано на рисунке, либо в обратные стороны.

Если материальная точка находится на некоторой поверхности (рис. 142), то она имеет множество возможных перемещений, расположенных в плоскости, касательной к этой поверхности.

Действительными перемещениями точек системы называются также элементарные перемещения, которые допускают наложенные связи, но с учетом начальных условий движения и действующих на систему сил.

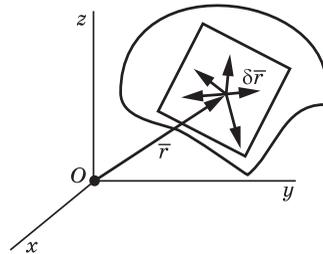


Рис. 142

Если положение точки определяется радиусом-вектором  $\vec{r}$ , то ее возможное перемещение будем обозначать  $\delta \vec{r}$ , а действительное —  $d\vec{r}$ .

В случае стационарных связей действительное перемещение точки совпадает с одним из ее возможных перемещений. Для нестационарных связей под возможными перемещениями точек системы понимаются воображаемые бесконечно малые перемещения при мгновенно остановленных (замороженных) связях. В этом случае действительное перемещение точки не может совпадать ни с одним из множества ее возможных перемещений, которые допускает наложенная связь.

### 7.1.3. Возможная работа силы

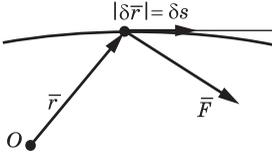


Рис. 143

Возможная работа силы — бесконечно малая скалярная величина, равная скалярному произведению вектора силы  $\vec{F}$  на вектор возможного перемещения  $\delta\vec{r}$  точки ее приложения, т.е.

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}, \quad (7.10)$$

где  $\delta\vec{r}$  — приращение радиуса-вектора  $\vec{r}$ , модуль которого  $\delta s$  равен перемещению точки по траектории (рис. 143).

Тогда

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = F \delta s \cos \left( \vec{F}, \delta\vec{r} \right). \quad (7.11)$$

Возможная работа силы  $\vec{F}$  при вращательном движении тела

$$\delta A = M_z(\vec{F}) \delta\varphi, \quad (7.12)$$

где  $M_z(\vec{F})$  — момент силы относительно оси вращения;  $\delta\varphi$  — возможное угловое перемещение тела.

Возможная работа сил, приложенных к точкам механической системы,

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k, \quad (7.13)$$

где  $\delta A_k$  — возможная работа  $k$ -й силы  $\vec{F}_k$ .

**Пример 50.** Для заданного положения кривошипно-шатунного механизма определить возможную работу приложенного к кривошипу вращающего момента  $M_{\text{вр}}$  и силы  $\vec{F}$ , приложенной к ползуну.

**Решение.** Сообщим кривошипу поворот на угол  $\delta\varphi$ , точка  $A$  получит перемещение  $\delta\vec{s}_A$ , а точка  $B$  —  $\delta\vec{s}_B$  (рис. 144). Тогда

$$\delta A = \sum_{k=1}^2 \delta A_k = \delta A(M_{\text{вр}}) + \delta A(\vec{F}) = M_{\text{вр}} \delta\varphi - F \delta s_B.$$

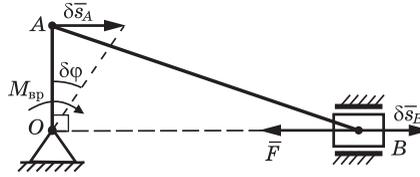


Рис. 144

Так как  $\delta s_B = \delta s_A = OA \delta \varphi$ , то

$$\delta A = (M_{\text{вп}} - F \cdot OA) \delta \varphi.$$

### 7.1.4. Идеальные связи

*Идеальными связями* называются связи, алгебраическая сумма элементарных работ реакций которых на любых возможных перемещениях точек системы равна нулю, т.е.

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^n R_k \delta s_k \cos \left( \bar{R}_k, \delta \bar{r}_k \right) = 0. \quad (7.14)$$

Идеальными являются связи без трения. В этом случае силы реакций связей и возможные перемещения точек их приложения взаимно перпендикулярны ( $\bar{R}_k \perp \delta \bar{r}_k$ ) и  $\cos \left( \bar{R}_k, \delta \bar{r}_k \right) = 0$ .

Например, движение ползуна в гладких направляющих.

Если поверхность шероховатая, то полная реакция  $\bar{R}$  не перпендикулярна  $\delta \bar{r}$ . Однако в аналитической механике такую связь условно рассматривают как идеальную, но при этом полную реакцию  $\bar{R}$  раскладывают на нормальную составляющую  $\bar{N}$  и на касательную — силу трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$ , которую относят к числу задаваемых сил  $\bar{F}$  (рис. 145).

Тогда

$$\delta A^R = \bar{N} \cdot \delta \bar{r} = 0,$$

значит, связь идеальная.

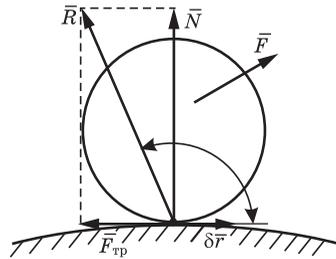


Рис. 145

При качении катка без скольжения по шероховатой поверхности она может рассматриваться всегда как идеальная связь независимо от того, есть сопротивление качению или нет (рис. 146, 147).

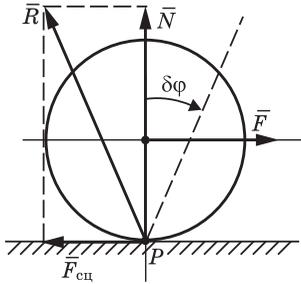


Рис. 146

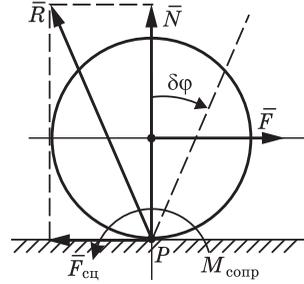


Рис. 147

Скольжение и трение качения отсутствуют (см. рис. 146):

$$\delta A^R = M_P(\bar{R})\delta\varphi = 0,$$

значит, связь идеальная.

На рис. 147 скольжение отсутствует, есть сопротивление качению. Отнесем  $M_{\text{сопр}} \neq 0$  к числу задаваемых сил  $\bar{F}$ . Тогда остается реакция  $\bar{R}$ :

$$\delta A^R = M_P(\bar{R})\delta\varphi = 0,$$

значит, связь идеальная.

Здесь  $M_P(\bar{R})$  – момент реакции связи относительно точки  $P$  – мгновенного центра скоростей.

В двух этих случаях работа сил  $\bar{N}$  и  $\bar{F}_{\text{сц}}$  равна нулю еще и потому, что они приложены в неподвижной точке  $P$ , которая является МЦС катка.

### 7.1.5. Обобщенные координаты и скорости. Число степеней свободы механической системы

Обобщенные координаты – независимые друг от друга величины, которыми однозначно определяется положение механической системы. В качестве обобщенных координат обычно

выбираются угловые или линейные перемещения тел, входящих в систему. Общее их обозначение  $q$ . Например, для кривошипно-шатунного механизма (см. рис. 141) за обобщенную координату можно принять угол  $\varphi$  поворота кривошипа  $OA$ , т.е.  $q = \varphi$ . Для эллиптического маятника (рис. 148) — две обобщенные координаты  $q_1 = x$ ;  $q_2 = \varphi$ .

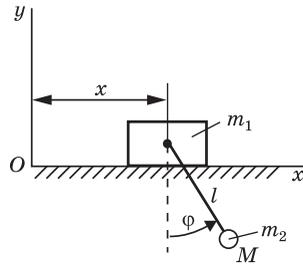


Рис. 148

Обобщенными скоростями называются производные по времени от обобщенных координат

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} \text{ и т.д.}$$

Число степеней свободы  $S$  механической системы — это число ее независимых возможных перемещений, которые можно сообщить точкам системы в фиксированный момент времени.

Для механической системы с голономными связями число степеней свободы равно числу обобщенных координат. Для такой системы, состоящей из  $n$  точек, в декартовой системе координат необходимо задать  $3n$  координат. Пусть на систему наложено  $k$  связей. Тогда число степеней свободы  $S$  механической системы

$$S = 3n - k. \quad (7.15)$$

На практике число степеней свободы механической системы удобно определять по числу дополнительно накладываемых ограничений (связей), обеспечивающих неподвижность тел системы. Например, для эллиптического маятника (рис. 148)  $S = 2$ , значит, чтобы система не двигалась, необходимо наложить два ограничения — на движение ползуна и на движение нити с грузом.

### 7.1.6. Связь обобщенных и декартовых координат

Декартовы координаты точек механической системы могут быть выражены через обобщенные. Например, для кривошипно-шатунного механизма обобщенная координата  $q = \varphi$  (рис. 149).

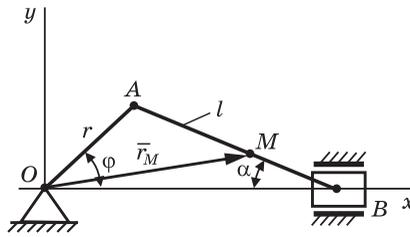


Рис. 149

Декартовы координаты точек  $A$  и  $B$

$$x_A = r \cos \varphi = r \cos q;$$

$$y_A = r \sin q.$$

$$x_B = r \cos \varphi + l \cos \alpha,$$

где  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ , а по теореме синусов  $\sin \alpha = \frac{r \sin \varphi}{l}$ .

Тогда

$$x_B = r \cos q + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 q}.$$

Аналогично для точки  $M$

$$\left. \begin{aligned} x_M &= r \cos \varphi + AM \cos \alpha = r \cos q + AM \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 q}; \\ y_M &= MB \sin \alpha = MB \frac{r \sin \varphi}{l} = MB \frac{r}{l} \sin q \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{r}_M = \bar{r}(q).$$

Для эллиптического маятника (см. рис. 148) координаты точки  $M$

$$x_M = x + l \sin \varphi = q_1 + l \sin q_2;$$

$$y_M = -l \cos \varphi = -l \cos q_2.$$

В общем случае координаты каждой точки механической системы с  $S$  степенями свободы и голономыми, удерживающими нестационарными связями являются функциями обобщенных координат и времени:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_S, t);$$

$$y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_S, t);$$

$$z_k = z_k(q_1, q_2, \dots, q_S, t)$$

или радиус-вектор  $k$ -й точки

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_S, t). \quad (7.16)$$

Если связи стационарные, то  $\bar{r}_k$  является функцией только обобщенных координат.

### 7.1.7. Обобщенные силы и способы их вычисления

Выразим возможную работу сил, приложенных к механической системе, в обобщенных координатах. Для этого найдем выражение возможного перемещения  $\delta\bar{r}_k$  в этих координатах. Для  $k$ -й точки возможное перемещение  $\delta\bar{r}_k$  представляет собой бесконечно малое приращение радиуса-вектора  $\bar{r}_k$  (7.16), вызванное изменением обобщенных координат при фиксированном времени  $t$ .

Такое приращение радиуса-вектора  $k$ -й точки называется *вариацией* и определяется по формуле

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_S} \delta q_S. \quad (7.17)$$

Выражение (7.17) можно представить в свернутом виде:

$$\delta\bar{r}_k = \sum_{j=1}^S \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (7.18)$$

С учетом этого преобразуем выражение (7.13) возможной работы сил, приложенных к механической системе:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \sum_{j=1}^S \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^S \left( \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j, \end{aligned} \quad (7.19)$$

где  $Q_j$  – обобщенная сила:

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}; \quad (7.20)$$

$\delta q_j$  – приращение (вариация) обобщенной координаты с индексом  $j$ .

Представим (7.19) в виде

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_S \delta q_S, \quad (7.21)$$

где  $Q_1, Q_2, \dots, Q_S$  – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам  $q_1, q_2, \dots, q_S$ ;  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_S$  – вариации обобщенных координат.

*Обобщенные силы* – величины, стоящие при соответствующих вариациях обобщенных координат в выражении возможной работы активных сил, приложенных к механической системе.

**Способы вычисления обобщенных сил.** Для определения обобщенной силы по какой-либо обобщенной координате необходимо все другие обобщенные координаты считать неизменными. Тогда их вариации (приращения) будут равны нулю, за исключением вариации той обобщенной координаты, для которой вычисляется обобщенная сила.

Например: определяем  $Q_1$ . Тогда

$$q_1 \neq \text{const}; \delta q_1 \neq 0;$$

$$q_2 = \dots = q_S = \text{const} \Rightarrow \delta q_2 = \dots = \delta q_S = 0.$$

Из (7.21) следует:

$$(\delta A)_{q_1} = \left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_{q_1} = Q_1 \cdot \delta q_1 \Rightarrow Q_1 = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_{q_1}}{\delta q_1}.$$

Аналогично

$$Q_2 = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_{q_2}}{\delta q_2},$$

где  $q_2 \neq \text{const}$ ;  $\delta q_2 \neq 0$ .

*Первый способ*

Обобщенная сила по некоторой обобщенной координате равна отношению возможной работы сил, приложенных к системе на изменении этой координаты, к ее вариации.

$$Q_j = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_{q_j}}{\delta q_j}, \quad j = 1, \dots, S. \quad (7.22)$$

**Пример 51.** Призма массой  $m_1$  движется по гладкой наклонной плоскости, угол наклона плоскости равен  $\alpha$ . По призме перемещается груз массой  $m_2$ . Пренебрегая трением груза о плоскость призмы, угол наклона которой равен  $\beta$ , определить обобщенные силы действующих на систему сил.

**Решение.** Система имеет две степени свободы: перемещение призмы по наклонной плоскости и перемещение груза по призме. Введем две обобщенные координаты  $q_1 = x$  и  $q_2 = s$ . На систему действуют силы тяжести призмы  $m_1 \vec{g}$  и груза  $m_2 \vec{g}$  (рис. 150).

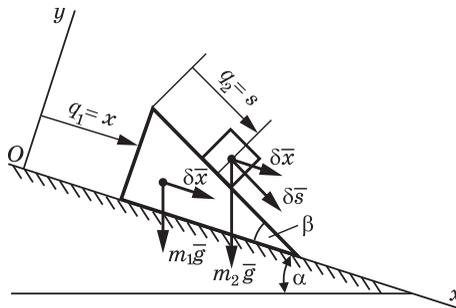


Рис. 150

Определим обобщенную силу, отнесенную к обобщенной координате  $q_1$ . Считаем, что

$$q_1 = x \neq \text{const}; \delta x \neq 0;$$

$$q_2 = s = \text{const}; \delta s = 0.$$

Применим формулу (7.22):

$$Q_x = \frac{(\Sigma \delta A_k)_x}{\delta x} = \frac{m_1 g \sin \alpha \delta x + m_2 g \sin \alpha \delta x}{\delta x} = g \sin \alpha (m_1 + m_2).$$

Определим обобщенную силу, отнесенную к обобщенной координате  $q_2$ .

Считаем, что

$$q_1 = x = \text{const}, \delta x = 0;$$

$$q_2 = s \neq \text{const}, \delta s \neq 0;$$

$$Q_s = \frac{(\Sigma \delta A_k)_s}{\delta s} = \frac{m_2 g \sin \beta \delta s}{\delta s} = m_2 g \sin \beta.$$

### *Второй способ*

Обобщенные силы на основании (7.21) можно вычислять как коэффициенты при соответствующих вариациях обобщенных координат в выражении для возможной работы. Для механической системы, рассмотренной в примере 51, составим выражение возможной работы действующих сил на возможных перемещениях точек их приложения:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{k=1}^2 \delta A_k = m_1 g \sin \alpha \delta x + m_2 g \sin \alpha \delta x + m_2 g \sin \beta \delta s = \\ &= g \sin \alpha (m_1 + m_2) \delta x + m_2 g \sin \beta \delta s = Q_x \delta x + Q_s \delta s, \end{aligned}$$

где  $Q_x = g \sin \alpha (m_1 + m_2)$ ;  $Q_s = m_2 g \sin \beta$ .

### *Третий способ*

Если на механическую систему действуют только потенциальные силы, то обобщенные силы можно вычислять как частные производные по обобщенным координатам от потенциальной энергии системы, взятые со знаком минус, т.е.

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, S. \quad (7.23)$$

В примере 51 на систему действуют только потенциальные силы. Потенциальная энергия механической системы (тел 1 и 2) определяется как работа сил тяжести по перемещению тел из заданного положения в начальное (нулевой уровень) (рис. 151):

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_1 + \Pi_2 = -m_1 g h_{\text{пр}} - m_2 g (h_1 + h_2) = \\ &= -g \sin \alpha (m_1 + m_2) x - m_2 g \sin \beta s. \end{aligned}$$

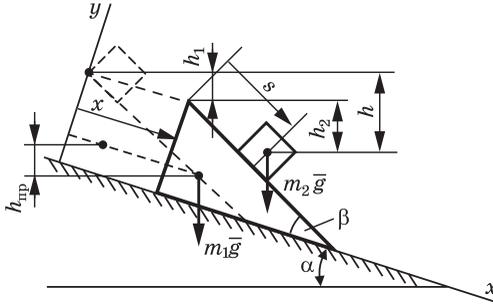


Рис. 151

Тогда

$$\begin{aligned} Q_x &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = g \sin \alpha (m_1 + m_2); \\ Q_s &= -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = m_2 g \sin \beta. \end{aligned}$$

Таким образом, во всех трех случаях результаты совпадают.

## 7.2. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Принцип возможных перемещений, или принцип Лагранжа, выражает условие равновесия несвободной механической системы, находящейся под действием приложенных активных сил.

### Принцип

Для равновесия несвободной механической системы с двусторонними, стационарными, голономными и идеальными связями, находящейся под действием приложенных активных сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил равнялась нулю на любом возможном перемещении системы из рассматриваемого положения равновесия.

**Доказательство необходимости.** Пусть на механическую систему действует уравновешенная система сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$  (рис. 152).

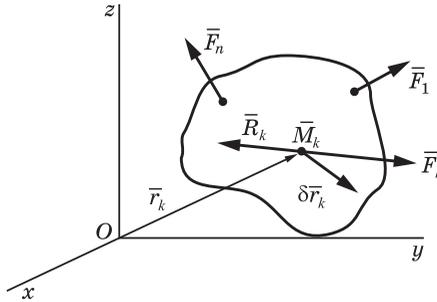


Рис. 152

На некоторую  $M_k$ -ю точку действует активная сила  $\bar{F}_k$  и реакция связи  $\bar{R}_k$ , под действием которых данная точка находится в равновесии. Поэтому  $\bar{F}_k = -\bar{R}_k$ , а

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7.24)$$

Сообщим системе возможное перемещение. Тогда  $k$ -я точка получит возможное перемещение  $\delta\bar{r}_k$ .

Умножая скалярно уравнение (7.24) на  $\delta\bar{r}_k$  и суммируя по всем точкам системы, получим

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0. \quad (7.25)$$

Так как связи идеальные, то  $\sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$ . Тогда для равновесия системы необходимо, чтобы  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$  или

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a = 0. \quad (7.26)$$

Необходимость доказана.

*Доказательство достаточности* уравнения (7.26) производится от обратного, т.е. в предположении, что при условии (7.26) система не находится в равновесии. Тогда  $\bar{F}_k + \bar{R}_k \neq 0$  и  $k$ -я точка придет в движение из предполагаемого состояния покоя и за малый промежуток времени совершит некоторое действительное перемещение  $d\bar{r}_k$ , которое в силу стационарности связей будет совпадать с одним из возможных перемещений  $\delta\bar{r}_k$ .

Так как перемещения отдельных точек системы будут направлены в сторону равнодействующей сил  $\bar{F}_k$  и  $\bar{R}_k$ , то возможная работа сил, приложенных к системе,

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k > 0. \quad (7.27)$$

В силу идеальности связей  $\sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0$ .

Тогда  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k > 0$ , что противоречит условию (7.26).

Выражение (7.26) можно записать в аналитическом виде:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k = \sum_{k=1}^n (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = 0 \quad (7.28)$$

или в виде значения скалярного произведения:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k = \sum_{k=1}^n F_k \delta r_k \cos \left( \bar{F}_k, \hat{\delta\bar{r}_k} \right) = 0. \quad (7.29)$$

Разделив уравнение (7.27) на  $dt$ , получим

$$\sum_{k=1}^n F_k V_k \cos \left( \bar{F}_k, \hat{\bar{V}_k} \right) = 0, \quad (7.30)$$

что можно трактовать как принцип возможных скоростей или как принцип возможных мощностей и записать (7.30) в виде

$$\sum_{k=1}^n N_k^a = 0, \quad (7.31)$$

т.е. при равновесии механической системы под действием приложенных активных сил *сумма возможных мощностей этих сил равна нулю*.

Установим условие равновесия механической системы в обобщенных силах. Так как возможная работа сил, приложенных к механической системе, в обобщенных силах определяется формулой (7.21), то принцип возможных перемещений в обобщенных силах можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j = 0. \quad (7.32)$$

Из уравнения (7.32) следует условие равновесия механической системы в обобщенных силах

$$Q_j = 0, j = 1, \dots, S, \quad (7.33)$$

т.е. для равновесия механической системы с идеальными, стационарными, двусторонними и голономными связями необходимо и достаточно, чтобы *обобщенные силы по каждой из обобщенных координат были равны нулю*.

Для равновесия консервативных систем с учетом (7.23)

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, j = 1, \dots, S. \quad (7.34)$$

Принцип возможных перемещений позволяет в общей форме установить условие равновесия механической системы, не расчлняя ее на отдельные тела, что дает возможность исключить из рассмотрения неизвестные реакции идеальных связей и внутренние силы взаимодействия *тел, входящих в данную механическую систему*, не выполняющих виртуальную работу.

Например, необходимо установить зависимость между вращающим моментом  $M_{вр}$ , приложенным к кривошипу  $OA$ , и силой  $\bar{F}$ , приложенной к ползуну кривошипно-шатунного механизма (см. пример 50) при условии его равновесия. Для этого рассматриваем равновесие всего механизма, не расчлняя его на отдельные звенья. Запишем принцип возможных перемещений:

$$\delta A^a = \sum_{k=1}^n \delta A_k^a = 0 \Rightarrow M_{\text{вр}} \cdot \delta\varphi - F \delta s_B = 0.$$

Если

$$\delta s_B = \delta s_A = OA \cdot \delta\varphi,$$

получим

$$M_{\text{вр}} = F \cdot OA.$$

Принцип возможных перемещений можно применять для определения реакций связей в статически определимых конструкциях. Для этого надо освободить систему от одной из связей и заменить ее искомой реакцией, отнеся ее к числу задаваемых активных сил. Система, лишенная одной связи, может получить возможное перемещение, что позволяет составить сумму возможных работ приложенных к системе сил, приравняв которую нулю, можно из полученного уравнения определить неизвестную реакцию. Поочередно определяют другие реакции связей.

**Пример 52.** Для балки, изображенной на рисунке 153, а, определить реакции опор  $A$  и  $B$ . Силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  приложены в серединах участков  $AC$  и  $CB$ , причем  $AC = BC = l$ ;  $\bar{F}_1 \perp AC$ ,  $\bar{F}_2$  — горизонтальна, т.е.  $\bar{F}_2 \parallel AC$ .

**Решение.** 1. Опора  $A$  — шарнирно-подвижная. Отбрасываем связь и заменяем ее действие реакцией  $\bar{R}_A$  этой опоры, которая направлена вверх перпендикулярно к опорной поверхности (рис. 153, б). Возможным перемещением балки является поворот на угол  $\delta\varphi$  вокруг точки  $B$ . Возможную работу запишем как работу момента каждой силы относительно точки  $B$  и приравняем сумму возможных работ всех сил нулю:

$$-R_A(l + l \cos \alpha) \delta\varphi + F_1 \left( \frac{l}{2} + l \cos \alpha \right) \delta\varphi + F_2 \frac{l}{2} \sin \alpha \delta\varphi = 0.$$

Так как  $\delta\varphi \neq 0$ , то сократив на  $\delta\varphi$ , получим

$$R_A = \frac{F_1(1 + 2 \cos \alpha) + F_2 \sin \alpha}{2(1 + \cos \alpha)}.$$

2. Опора  $B$  — шарнирно-неподвижная. Направление реакции этой опоры неизвестно, поэтому реакцию  $\bar{R}_B$  разложим на составляющие: вертикальную  $\bar{Y}_B$  и горизонтальную  $\bar{X}_B$  (рис. 153, в, г).

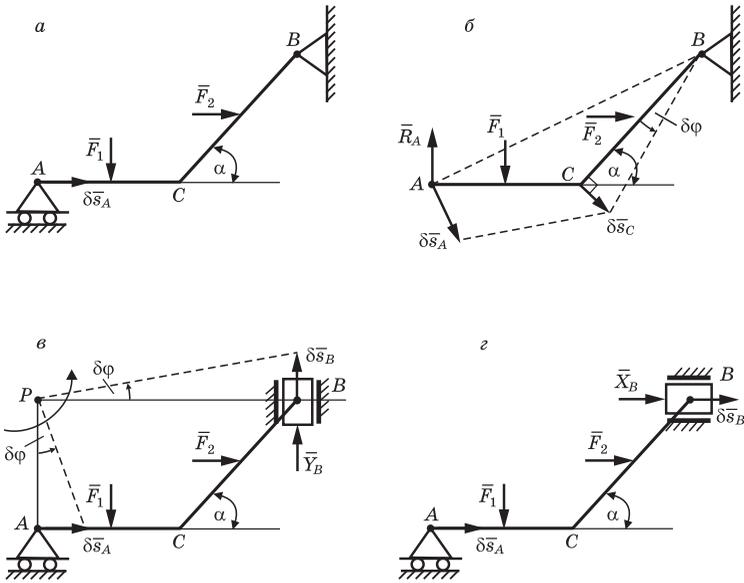


Рис. 153

Для определения  $\bar{Y}_B$  (рис. 153, в) заменяем шарнир ползуном в вертикальных направляющих и прикладываем реакцию  $\bar{Y}_B$ .

Возможным перемещением опор  $A$  и  $B$  являются  $\delta \bar{s}_A$  и  $\delta \bar{s}_B$ . Проведя к ним перпендикуляры, получим мгновенный центр ( $P$ ) поворота балки на угол  $\delta \varphi$ .

Возможная работа сил

$$\sum_{k=1}^3 \delta A_k^a = 0; Y_B(l + l \cos \alpha) \delta \varphi - F_1 \frac{l}{2} \delta \varphi + F_2 \frac{l}{2} \sin \alpha \delta \varphi = 0.$$

$$\text{Отсюда } Y_B = \frac{F_1 - F_2 \sin \alpha}{2(1 + \cos \alpha)}.$$

Для определения  $\bar{X}_B$  (рис. 153, з) заменяем шарнир ползуном в горизонтальных направляющих и прикладываем реакцию  $\bar{X}_A$ .

Возможное перемещение балки – поступательное движение. Поэтому  $\delta s_A = \delta s_B = \delta s$ .

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a = 0; P_2 \delta s + X_B \delta s = 0 \Rightarrow X_B = -F_2,$$

т.е.  $\bar{X}_B$  направлено в противоположную указанной на рисунке сторону.

Работа силы  $\bar{F}_1$  равна нулю, так как  $\bar{F}_1 \perp \delta\bar{s} \Rightarrow F_1 \delta s \cos 90^\circ = 0$ .

**Пример 53.** Сочлененная конструкция состоит из балок  $AB$  и  $BC$ , соединенных шарнирно в точке  $C$ . Конец  $A$  балки  $AC$  жестко заделан в стенку, а конец  $B$  балки  $BC$  опирается на шарнирно-подвижную опору. К балке  $AC$  приложен момент  $M$ , а к середине балки  $BC$  перпендикулярно приложена сила  $\bar{P}$ . Длина балки  $AC$  равна  $l_1$ , длина балки  $BC$  равна  $l_2$ . Балка  $BC$  наклонена к горизонту под углом  $\beta$ . Определить реакции связей в точках  $A$  и  $B$  (рис. 154).

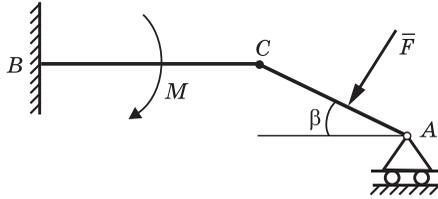


Рис. 154

**Решение.** Связями являются жесткая заделка  $A$  и шарнирно-подвижная опора  $B$ .

В жесткой заделке неизвестными реакциями являются составляющие  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$  и момент заделки  $M_A$ , в опоре  $B$  – реакция  $\bar{R}_B$ , направленная вверх перпендикулярно к опорной плоскости. Для определения этих реакций воспользуемся принципом возможных перемещений.

Для определения  $\bar{X}_A$  (рис. 155, а) опору  $A$  заменим ползуном в горизонтальных направляющих, опору  $B$  оставим без изменения. К ползуну  $A$  приложим реакцию  $\bar{X}_A$ . Сообщим системе возможное перемещение. Конструкция совершает поступательное движение (рис. 155, а). Поэтому  $\delta s_A = \delta s_C = \delta s_K = \delta s_B$ . Составим уравнение возможных работ приложенных к системе сил:

$$\Sigma \delta A_k = 0; X_A \delta s_A - F \cos(90^\circ - \beta) \delta s_K = 0.$$

Отсюда

$$X_A = F \sin \beta.$$

Для определения  $\bar{Y}_A$  (рис. 155, б) опору  $A$  заменим ползуном, связанным жестко с балкой  $AC$ , в вертикальных направляющих и приложим

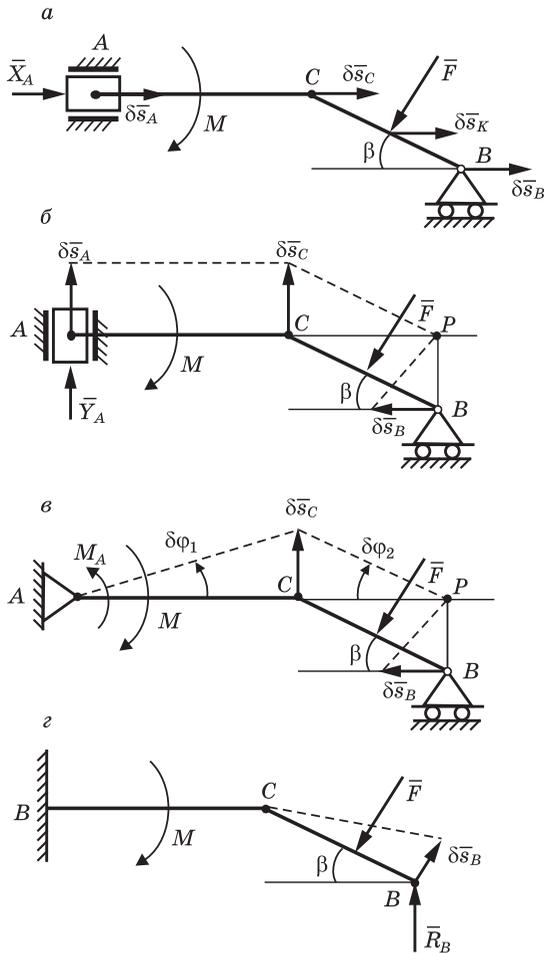


Рис. 155

к нему реакцию  $\bar{Y}_A$ . Опору  $B$  оставим без изменения. Сообщим системе возможное перемещение. Балка  $AC$  переместится поступательно, а балка  $BC$  повернется на угол  $\delta\varphi$  вокруг мгновенного центра вращения  $P$ . Положение его найдем на пересечении перпендикуляров, восстановленных в точках  $B$  и  $C$  к направлению их перемещений  $\delta\bar{s}_C$  и  $\delta\bar{s}_B$  (рис. 155, б).

Составим сумму возможных работ:

$$\Sigma \delta A_k = 0;$$

$$Y_A \delta s_A - F \cos \beta \frac{l_2}{2} \cos \beta \delta \varphi + F \sin \beta \frac{l_2}{2} \sin \beta \delta \varphi = 0;$$

$$\delta s_A = \delta s_C = PC \delta \varphi = l_2 \cos \beta.$$

Тогда

$$Y_A l_2 \cos \beta \delta \varphi - F \cos \beta \frac{l_2}{2} \cos \beta \delta \varphi + F \sin \beta \frac{l_2}{2} \sin \beta \delta \varphi = 0.$$

Отсюда

$$Y_A = \frac{1}{2} F \cos \beta - \frac{1}{2} F \sin \beta \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} F \frac{\cos 2\beta}{\cos \beta}.$$

Для определения  $M_A$  (рис. 155, в) опору  $A$  заменим шарниром и приложим к балке  $AC$  момент заделки  $M_A$ , опору  $B$  оставляем без изменения. Сообщим системе возможное перемещение. Балка  $AC$  повернется вокруг точки  $A$  на угол  $\delta \varphi_1$ , а балка  $BC$  повернется вокруг мгновенного центра вращения  $P$  на угол  $\delta \varphi_2$  (рис. 155, в). Составим сумму возможных работ:

$$\Sigma \delta A_k = 0;$$

$$M_A \delta \varphi_1 - M \delta \varphi_1 - F \cos \beta \frac{l_2}{2} \cos \beta \delta \varphi_2 + F \sin \beta \frac{l_2}{2} \sin \beta \delta \varphi_2 = 0.$$

Свяжем  $\delta \varphi_1$  и  $\delta \varphi_2$ , учитывая, что

$$\delta s_C = AC \delta \varphi_1 = PC \delta \varphi_2$$

или

$$l_1 \delta \varphi_1 = l_2 \cos \beta \delta \varphi_2.$$

Отсюда

$$\delta \varphi_2 = \frac{l_1 \delta \varphi_1}{l_2 \cos \beta}.$$

Тогда

$$M_A \delta \varphi_1 - M \delta \varphi_1 - F \cos^2 \beta \frac{l_2}{2} \frac{l_1 \delta \varphi_1}{l_2 \cos \beta} + F \sin^2 \beta \frac{l_2}{2} \frac{l_1 \delta \varphi_1}{l_2 \cos \beta} = 0.$$

Так как  $\delta\varphi_1 \neq 0$ , то сократим на  $\delta\varphi_1$  и запишем выражение для  $M_A$ :

$$M_A = M + \frac{l_1}{2} F (\cos\beta - \sin\beta \operatorname{tg}\beta) = M + \frac{1}{2} Fl_1 \frac{\cos 2\beta}{\cos\beta}.$$

Для определения реакции  $\bar{R}_B$  (рис. 155, з) опору  $B$  отбросим и приложим в точке  $B$  реакцию  $R_B$ . Сообщим возможное перемещение. Балка  $AC$  останется неподвижной, а балка  $BC$  повернется вокруг точки  $C$  на угол  $\delta\varphi$  (рис. 155, з).

Составим сумму возможных работ сил, приложенных к этой балке, как работу момента этих сил относительно точки  $C$ :

$$\Sigma\delta A_k = \Sigma M_C(\bar{F}_k)\delta\varphi;$$

$$R_B l_2 \cos\beta \delta\varphi - F \frac{l_2}{2} \delta\varphi = 0.$$

Отсюда

$$R_B = \frac{F}{2 \cos\beta}.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{ky} = R_B + Y_A - F \cos\beta &= \frac{F}{2 \cos\beta} + \frac{F \cos 2\beta}{2 \cos\beta} - F \cos\beta = \\ &= \frac{F}{2 \cos\beta} (1 + \cos 2\beta - 2 \cos^2\beta) = \\ &= \frac{F}{2 \cos\beta} (\cos^2\beta + \sin^2\beta + \cos^2\beta - \sin^2\beta - 2 \cos^2\beta) = 0. \end{aligned}$$

Реакции определены верно.

### 7.3. Применение принципа возможных перемещений к расчету ферм

Принцип возможных перемещений можно применять и при расчете плоских ферм для определения опорных реакций и усилий в стержнях фермы. Методика определения опорных реакций такая же, как и при определении реакций внешних

связей любых статически определимых конструкций, находящихся в равновесии под действием плоской произвольной системы сил.

Для определения усилия в каком-либо стержне внешнего контура этот стержень разрезается, усилия прикладываются в узлах, которые соединяются этим стержнем, и направляются от узлов, считая, что стержень работает на растяжение.

В результате этого ферму можно рассматривать как некоторую конструкцию, состоящую из двух геометрически неизменяемых частей. Для каждой части определяется положение мгновенного центра вращения. В качестве этих центров вращения для одной части служит шарнирно-неподвижная опора, а для другой – точка пересечения перпендикуляров, проведенных к направлениям возможных перемещений какой-либо общей для обеих частей точки и опорной точки другой части (шарнирно-подвижной опоры) (см. пример 54).

Затем для обеих частей составляется сумма возможных работ сил, приложенных к каждой части, как сумма работ моментов этих сил относительно мгновенных центров вращения, т.е. момент каждой силы умножается на возможный угол  $\delta\varphi$  поворота каждой части относительно своего мгновенного центра вращения, и сумма работ приравнивается нулю. При этом опорные реакции не входят в уравнение возможных работ, так как моменты этих сил относительно мгновенных центров поворота равны нулю и поэтому для определения усилий в стержнях внешнего контура фермы с помощью принципа возможных перемещений определять опорные реакции необязательно.

В ряде случаев усилие в перерезанном стержне может войти в уравнение возможных работ только для одной части, так как это усилие, приложенное к другой части, может не создавать момента относительно центра поворота этой части.

Если в уравнение возможных работ входит усилие в перерезанном стержне для обеих частей, то необходимо связать углы поворота  $\delta\varphi_1$  и  $\delta\varphi_2$  этих частей через возможное перемещение общей точки. Исключив из уравнения возможных работ угол  $\delta\varphi$  и решив полученное алгебраическое уравнение, определим искомое усилие.

При определении усилий во внутренних стержнях фермы (стойках и раскосах) разрезаем стержень, в котором требуется определить усилие, и прикладываем в узлах вместо удаленного

стержня усилия  $\bar{S} = -\bar{S}^1$ , направив их от узлов, считая, что стержень работает на растяжение. При этом одна из частей фермы будет геометрически неизменяемой, а другая — геометрически изменяемой. Определив возможные перемещения точек этих частей, составляем сумму возможных работ приложенных к ферме сил и приравниваем нулю. Из полученного уравнения работ определяем искомое усилие.

**Пример 54.** Для заданной фермы (рис. 156) определить усилия во всех стержнях.

**Дано:**  $a = 4$  м,  $b = 3$  м,  $F_1 = 10$  кН,  $F_2 = 20$  кН.

**Решение.** Для определения усилия в стержне 1 (рис. 157) разрежем стержень 1, возможное перемещение левой части фермы — поворот на угол  $\delta\varphi_1$  вокруг точки  $A$ , правой — на  $\delta\varphi_2$  вокруг МЦС (точка  $P_1$ ) (рис. 157).

$$\Sigma \delta A_k = S'_1 \cdot BP_1 \delta\varphi_2 - F_1 2a \delta\varphi_2 + F_2 \cos \alpha P_1 B \delta\varphi_2 - F_2 \sin \alpha a \delta\varphi_2 = 0.$$

Учтем, что  $\delta\varphi_2 \neq 0$ ,  $S'_1 = S_1$ ,  $P_1 B = 3a \operatorname{tg} \alpha = 3a \frac{b}{a} = 3b$ .

Тогда

$$S_1 = \frac{F_1 2a - F_2 3b \cos \alpha + F_2 a \sin \alpha}{3b} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 4 - 20 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 0,8 + 20 \cdot 4 \cdot 0,6}{3 \cdot 3} = -1,78 \text{ кН}.$$

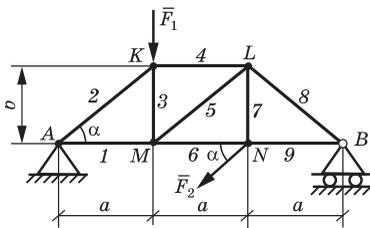


Рис. 156

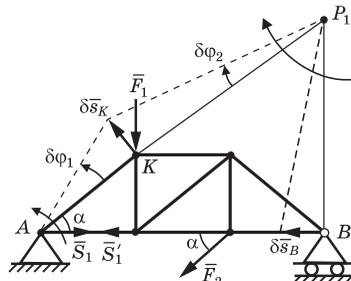


Рис. 157

Стержень 1 сжат.

Для определения усилия в стержне 2 (рис. 158) разрежем стержень 2, возможное перемещение левой части фермы — поворот на угол  $\delta\varphi_1$  вокруг точки  $A$ , правой — на  $\delta\varphi_2$  вокруг МЦС (точка  $P_2$ , совпадающая с точкой  $B$ ) (рис. 158).

$$\begin{aligned} \Sigma \delta A_k^a &= S'_2 \cos \alpha \cdot b \delta \varphi_2 + S'_2 \sin \alpha \times \\ &\times 2a \delta \varphi_2 + F_1 2a \delta \varphi_2 + F_2 \sin \alpha a \delta \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Сократим на  $\delta \varphi_2 \neq 0$  и выразим  $S'_2 = S_2$ :

$$S_2 = \frac{-F_2 2a - F_2 \sin \alpha a}{b \cos \alpha + 2a \sin \alpha} = -\frac{10 \cdot 2 \cdot 4 + 20 \cdot 4 \cdot 0,6}{3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 0,6} = -17,78 \text{ кН.}$$

Стержень 2 сжат.

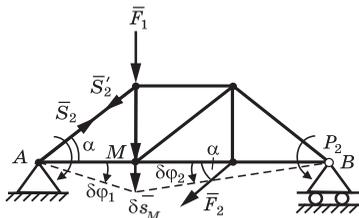


Рис. 158

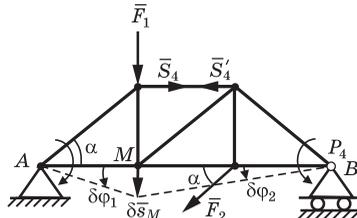


Рис. 159

Для определения усилия в стержне 4 (рис. 159) разрежем стержень 4, возможное перемещение левой части фермы – поворот на угол  $\delta \varphi_1$  вокруг точки  $A$ , правой – на  $\delta \varphi_2$  вокруг МЦС (точка  $P_4$ , совпадающая с точкой  $B$ ) (рис. 159).

Перемещение общей точки  $M$  для обеих частей

$$\delta s_M = a \delta \varphi_1 = 2a \delta \varphi_2.$$

Поэтому

$$\delta \varphi_1 = 2 \delta \varphi_2;$$

$$\Sigma \delta A_k = S_4 b \delta \varphi_1 + F_1 a \delta \varphi_1 + S'_4 b \delta \varphi_2 + F_2 \sin \alpha \cdot a \delta \varphi_2 = 0,$$

или

$$S_4 b \cdot 2 \delta \varphi_2 + F_1 a \cdot 2 \delta \varphi_1 + S'_4 b \delta \varphi_2 + F_2 \sin \alpha \cdot a \delta \varphi_2 = 0.$$

Сократим на  $\delta \varphi_2 \neq 0$  и выразим  $S_4 = S'_4$ :

$$S_4 = \frac{-F_2 2a - F_2 \sin \alpha \cdot a}{3b} = -\frac{10 \cdot 2 \cdot 4 + 20 \cdot 0,6 \cdot 4}{3 \cdot 3} = -14,22 \text{ кН.}$$

Стержень 4 сжат.

Для определения усилия в стержне 8 (рис. 160) разрежем стержень 8, возможное перемещение левой части фермы – поворот на угол  $\delta\varphi_1$  вокруг точки  $A$ , правой – на  $\delta\varphi_2$  вокруг МЦС (точка  $P_8$ , совпадающая с точкой  $B$ ) (рис. 160). Перемещение общей точки  $N$

$$\delta S_N = 2a\delta\varphi_1 = a\delta\varphi_2.$$

Отсюда

$$\delta\varphi_2 = 2\delta\varphi_1;$$

$$\Sigma\delta A_k = F_1 a \delta\varphi_1 + S_8 \cos \alpha \cdot b \delta\varphi_1 + S_8 \sin \alpha \cdot 2a \delta\varphi_1 + F_2 \sin \alpha \cdot 2a \delta\varphi_1 = 0.$$

Сократим на  $\delta\varphi_1 \neq 0$  и выразим  $S_8$ :

$$S_8 = \frac{-F_1 a - F_2 \sin \alpha \cdot 2a}{b \cos \alpha + 2a \sin \alpha} = \frac{10 \cdot 4 + 20 \cdot 0,6 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 0,8 + 2 \cdot 4 \cdot 0,6} = -18,89 \text{ кН}.$$

Стержень 8 сжат.

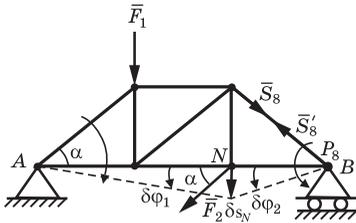


Рис. 160

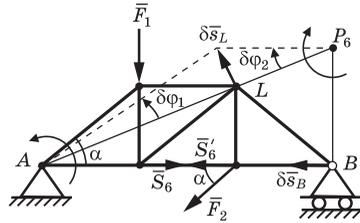


Рис. 161

Для определения усилия в стержне 6 (рис. 161) разрежем стержень 6, возможное перемещение левой части фермы – поворот на угол  $\delta\varphi_1$  вокруг точки  $A$ , правой – на  $\delta\varphi_2$  вокруг МЦС (точка  $P_6$ ) (рис. 161):

$$\Sigma\delta A_k^a = -F_1 a \delta\varphi_1 + S'_6 P_6 B \delta\varphi_2 + F_2 \cos \alpha \cdot P_6 B \delta\varphi_2 - F_2 \sin \alpha \cdot a \delta\varphi_2 = 0.$$

Установим связь между  $\delta\varphi_1$  и  $\delta\varphi_2$ .

Перемещение общей точки  $L$

$$\delta s_L = AL \delta\varphi_1 = P_6 L \delta\varphi_2,$$

$$\text{где } AL = \frac{2}{3} AP_6; P_6 L = \frac{1}{3} AP_6; P_6 B = \frac{3}{2} b.$$

Тогда

$$\delta s_L = \frac{2}{3} AP_6 \delta \varphi_1 = \frac{1}{3} AP_6 \delta \varphi_2 \Rightarrow \delta \varphi_2 = 2 \delta \varphi_1 .$$

С учетом этого сократим на  $\delta \varphi_2 \neq 0$  и выразим  $S'_6 = S_6$ :

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{F_1 a \cdot \frac{1}{2} - F_2 \cos \alpha \cdot \frac{3}{2} b + F_2 \sin \alpha \cdot a}{\frac{3}{2} b} = \\ &= \frac{10 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot 0,8 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 20 \cdot 0,6 \cdot 4}{3 \cdot \frac{3}{2}} = -0,89 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Стержень 6 растянут.

Для определения усилия в стержне 9 (рис. 162) разрежем стержень 9, возможное перемещение левой части фермы – поворот на угол  $\delta \varphi_1$  вокруг точки  $A$ , правой – на угол  $\delta \varphi_2$  вокруг МЦС (точка  $P_9$ ) (рис. 162). Перемещение общей точки  $L$

$$\delta s_L = AL \delta \varphi_1 = P_9 L \delta \varphi_2 .$$

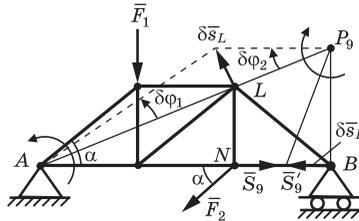


Рис. 162

Так как в этом случае точка  $P_9$  оказалась в том же положении, что и точка  $P_6$ , то

$$\delta s_L = \frac{2}{3} AP_9 \delta \varphi_1 = \frac{1}{3} AP_9 \delta \varphi_2 \Rightarrow \delta \varphi_2 = 2 \delta \varphi_1 .$$

$$\Sigma \delta A_k^a = -F_1 a \delta \varphi_1 - F_2 \sin \alpha \cdot a \delta \varphi_1 + S'_9 P_9 B \delta \varphi_2 = 0 .$$

Из подобия  $\triangle ALN$  и  $\triangle AP_9B$  имеем

$$\frac{LN}{P_9 B} = \frac{AN}{AB} ,$$

или

$$\frac{b}{P_9 B} = \frac{2a}{3a} \Rightarrow P_9 B = \frac{3}{2} b .$$

Тогда возможная работа

$$-F_1 a \delta\varphi_1 - F_2 \sin \alpha 2 \cdot a \delta\varphi_1 + S'_9 \frac{3}{2} b 2 \delta\varphi_1 = 0 .$$

Сократим на  $\delta\varphi_1 \neq 0$  и выразим  $S'_9 = S_9$  :

$$S_9 = \frac{F_1 a + F_2 \sin \alpha 2 a}{3b} = \frac{10 \cdot 4 + 20 \cdot 0,6 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = 15,11 \text{ кН} .$$

Стержень 9 работает на растяжение.

При определении усилий в стержнях 6 и 9 усилия  $\bar{S}_6$  и  $\bar{S}_9$ , приложенные к левой части фермы, не входят в выражение возможной работы, так как момент этих сил относительно точки  $A$  поворота левой части равен нулю, а входят усилия  $\bar{S}'_6$  и  $\bar{S}'_9$ , приложенные к правой части, в последнем случае – к стержню  $\delta$  (стержень  $LB$ ).

Для проверки правильности определения усилий, например  $\bar{S}_6$  и  $\bar{S}_9$ , рассмотрим равновесие узла  $B$ , составив сумму проекций сил, приложенных в этом узле (см. рис. 160, 162), на горизонтальную ось. Так как реакция  $\bar{R}_B$  подвижной опоры перпендикулярна к опорной поверхности, то

$$\Sigma X = -S'_9 - S'_8 \cos \alpha = -15,11 - (-18,89) \cdot 0,8 = 0 .$$

Условие равновесия выполняется.

Для определения усилия в стойке (стержень 3) (рис. 163) необходимо сделать следующее.

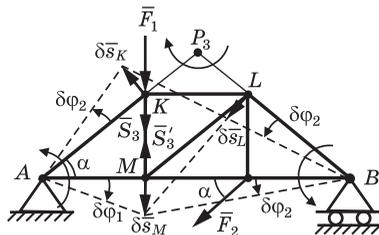


Рис. 163

После удаления стержня 3 приложим в узлах  $K$  и  $M$  усилия  $\bar{S}_3$  и  $\bar{S}'_3$  и будем рассматривать ферму, состоящую из геометрически неизменяемой

части – треугольника  $BLM$  и изменяемой части – параллелограмма  $AKLM$ . Возможным перемещением неизменяемой части является поворот вокруг МЦС, совпадающего с точкой  $B$ , на угол  $\delta\varphi_2$ . Возможным перемещением стержней  $AK$  и  $AM$  параллелограмма  $AKLM$  – поворот вокруг точки  $A$ , причем стержень  $AM$  повернется на угол  $\delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2$ , так как  $\delta s_M = a\delta\varphi_1 = 2a\delta\varphi_2$ . Для определения угла поворота  $\delta\varphi$  стержня  $AK$  построим МЦС звена  $KL$  (точка  $P_3$ ), проведя перпендикуляры к перемещениям  $\delta s_L$  и  $\delta s_K$  точек  $L$  и  $K$ . Так как  $P_3L = P_3K$ , то  $\delta s_L = \delta s_K$ , или  $BL\delta\varphi_2 = AK\delta\varphi$ . Отсюда при  $BL = AK$   $\delta\varphi = \delta\varphi_2$ .

Составим сумму возможных работ сил, приложенных к каждой части фермы, и приравняем нулю:

$$-F_1 a \delta\varphi_1 - S_3 a \delta\varphi_2 - S'_3 2a \delta\varphi_2 + F_2 \sin \alpha \cdot a \delta\varphi_2 = 0.$$

Сократим на  $a\delta\varphi_2$ , получим, учитывая, что  $S'_3 = S_3$ ,

$$-F_1 - 3S_3 + F_2 \sin \alpha = 0.$$

Отсюда

$$S_3 = \frac{-F_1 + F_2 \sin \alpha}{3} = \frac{-10 + 20 \cdot 0,6}{3} = 0,67 \text{ кН}.$$

Для определения усилия в раскосе (стержень 5) (рис. 164) необходимо сделать следующее. После удаления стержня 5 изменяемой фигурой становится прямоугольник  $MKLN$ . Сообщаем левой части фермы (треугольник  $AKM$ ) поворот по часовой стрелке на угол  $\delta\varphi_1$  вокруг точки  $A$ . В этом случае стержень  $KL$  (сторона прямоугольника  $KLNM$ ) повернется против часовой стрелки вокруг мгновенного центра поворота  $P_5$ , а треугольник  $LBN$  повернется на угол  $\delta\varphi_2$  по часовой стрелке вокруг точки  $B$ .

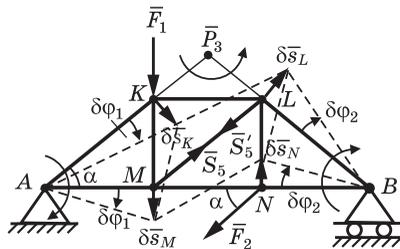


Рис. 164

Перемещения  $\delta s_K = \delta s_L$ , так как  $P_5K = P_5L$ , а стержни  $BL = AK$ , то  $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = \delta\varphi$ . Составим сумму возможных работ сил и приравняем нулю:

$$F_1 a \delta\varphi - S_5 \sin \alpha \cdot a \delta\varphi - S'_5 \cos \alpha \cdot b \delta\varphi - S'_5 \sin \alpha \cdot a \delta\varphi - F_2 \sin \alpha \cdot a \delta\varphi = 0.$$

Так как  $\delta\varphi \neq 0$ , то сократим на  $\delta\varphi$  и определим  $S_5 = S'_5$ :

$$S_5 = \frac{F_1 a - F_2 \sin \alpha \cdot a}{2a \sin \alpha + b \cos \alpha} = \frac{10 \cdot 4 - 20 \cdot 0,6 \cdot 4}{2 \cdot 4 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,8} = -1,11 \text{ кН.}$$

Стержень 5 сжат.

Для определения усилия в стойке (стержень 7) (рис. 165) необходимо сделать следующее. После удаления стержня 7 изменяемой частью фермы будет треугольник  $MLB$ . Так как на стороне  $MB$  этого треугольника есть шарнир (точка  $N$ ), то стержень  $MN$  может повернуться на угол  $\delta\varphi_1$  вокруг шарнира  $M$ , а стержень  $BN$  — на угол  $\delta\varphi_2$  вокруг мгновенного центра скоростей (точка  $P_7$ , совпадающая с шарниром  $B$ ). Перемещение точки  $N$

$$\delta s_N = a \delta\varphi_1 = a \delta\varphi_2 \Rightarrow \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = \delta\varphi.$$

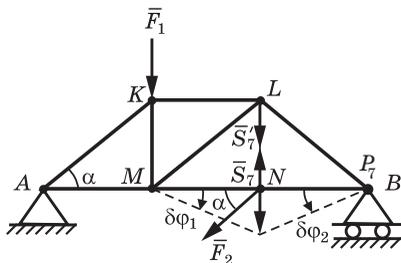


Рис. 165

Остальные части фермы останутся неподвижными, так как перемещение точки  $L$  несовместимо с наложенными на нее связями.

Тогда

$$\Sigma \delta A_K = 0;$$

$$\Sigma \delta A_K = P F_2 \sin \alpha \cdot a \delta\varphi - S_7 a \delta\varphi = 0.$$

Отсюда

$$S_7 = F_2 \sin \alpha = 20 \cdot 0,6 = 12 \text{ кН.}$$

Стержень 7 работает на растяжение.

Для проверки правильности вычисления вырежем узел  $M$  и определим сумму проекций сил на ось  $x$  (рис. 166):

$$\Sigma X = -S_1 + S_6 + S_5 \cos \alpha = 1,78 - 0,89 - 1,11 \cdot 0,8 = 0.$$

Уравнение равновесия выполняется.

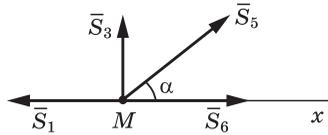


Рис. 166

Из рассмотренного примера видно, что принцип возможных перемещений позволяет определить усилие в каждом стержне фермы независимо от усилий в других стержнях и опорных реакций. Для определения усилий во внутренних стержнях фермы с помощью принципа возможных перемещений также не требуется предварительно определять реакции опор.

#### 7.4. Общее уравнение динамики (принцип Лагранжа – Даламбера)

Общее уравнение динамики применяется к исследованию движения несвободных механических систем, тела или точки которых движутся с некоторыми ускорениями.

В соответствии с принципом Даламбера совокупность приложенных к механической системе активных сил, сил реакций связей и сил инерции всех точек системы образует уравновешенную систему сил.

Если к такой системе применить принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа), то получим объединенный принцип Лагранжа – Даламбера, или общее уравнение динамики.

##### **Формулировка**

При движении несвободной механической системы с двусторонними, идеальными, стационарными и голономными связями сумма элементарных работ всех приложенных к точкам системы активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.

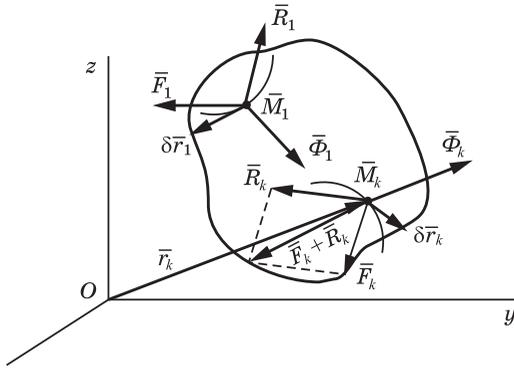


Рис. 167

**Доказательство.** Для  $k$ -й точки системы (рис. 167) в соответствии с принципом Даламбера

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7.35)$$

Мысленно зафиксируем время  $t$  и дадим системе возможное перемещение. Тогда каждая точка получит перемещение  $\delta \bar{r}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Умножим скалярно уравнение (7.35) на  $\delta \bar{r}_k$  и просуммируем по всем точкам системы:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad (7.36)$$

где  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^n \delta A_k^a$  — сумма возможных работ активных сил;

$\sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$  — сумма возможных работ реакций связей равна

нулю, так как связи идеальные;  $\sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^n \delta A_k^u$  — сумма возможных работ сил инерции.

С учетом этого уравнение (7.36) примет вид

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a + \sum_{k=1}^n \delta A_k^u = 0. \quad (7.37)$$

Выражение (7.37) можно также представить:

- в виде скалярного произведения векторов

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0; \quad (7.38)$$

- в аналитическом виде (раскрыв скалярное произведение)

$$\sum_{k=1}^n \left[ (F_{kx} + \Phi_{kx}) \delta x_k + (F_{ky} + \Phi_{ky}) \delta y_k + (F_{kz} + \Phi_{kz}) \delta z_k \right] = 0. \quad (7.39)$$

В этих уравнениях сила инерции материальной точки  $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$ , а ее проекции на оси координат  $\Phi_{kx} = -m_k \ddot{x}_k$ ,  $\Phi_{ky} = -m_k \ddot{y}_k$ ,  $\Phi_{kz} = -m_k \ddot{z}_k$ , тогда уравнения (7.38) и (7.39) можно представить как

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad (7.40)$$

или

$$\sum_{k=1}^n \left[ (F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k \right] = 0. \quad (7.41)$$

Общее уравнение динамики можно также записать в обобщенных силах по аналогии с принципом возможных перемещений:

$$\sum_{j=1}^S (Q_j^a + Q_j^u) \delta q_j = 0, \quad (7.42)$$

где  $S$  – число обобщенных координат;  $Q_j^a$  – обобщенная сила активных сил, приложенных к системе;  $Q_j^u$  – обобщенная сила сил инерции точек (тел), входящих в систему.

**Пример 55.** Однородный каток  $A$  радиусом  $R$  и массой  $m_1$  катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения качения равен  $f_k$ . Каток приводится в движение посредством троса, переброшенного через блок  $B$  радиусом  $r$  и массой  $m_2$ , распределенной по ободу. К концу троса подвешен груз  $D$  массой  $m_3$  (рис. 168,  $a$ ). Определить, с каким ускорением опускается груз.

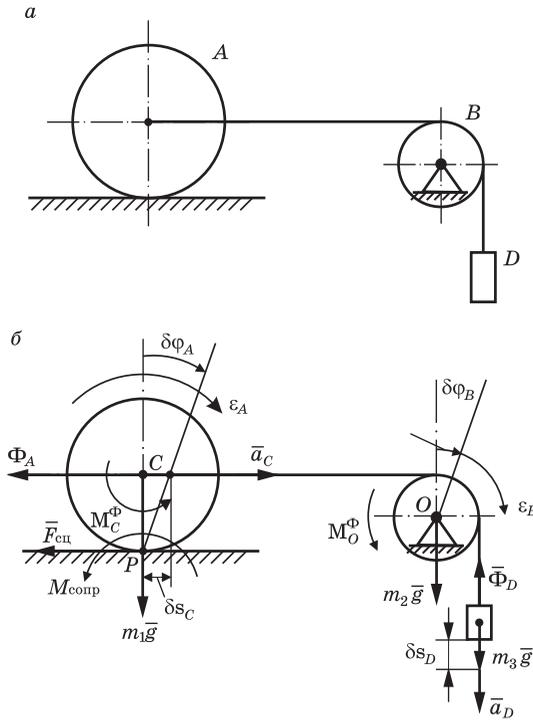


Рис. 168

**Решение.** Приложим к телам системы (рис. 168, б) их силы тяжести  $m_1 \bar{g}$ ,  $m_2 \bar{g}$ ,  $m_3 \bar{g}$ ; к катку  $A$  – силу сцепления  $\bar{F}_{\text{сц}}$ , момент сопротивления качению  $M_{\text{сопр}}$ , отнеся его к активным силам, а также силы инерции. Груз  $D$  движется поступательно, его сила инерции  $\bar{\Phi}_D = -m_3 \bar{a}_D$ ; блок  $B$  совершает вращательное движение, силы инерции точек блока приводятся к главному моменту сил инерции  $M_O^\Phi = I_O \varepsilon_B$ ; каток  $A$  совершает плоскопараллельное движение, силы инерции точек катка приводятся к главному вектору  $\bar{\Phi}_A = -m_1 \bar{a}_C$ , приложенному к центру катка, и главному моменту сил инерции относительно его центра масс  $M_C^\Phi = I_C \varepsilon_A$ .

Сообщим грузу  $D$  перемещение  $\delta s_D$ . Блок  $B$  при этом повернется на угол  $\delta \varphi_B$ , а центр масс катка переместится на расстояние  $\delta s_C$ , и каток повернется относительно МЦС (точки  $P$ ) на угол  $\delta \varphi_A$ .

Составим сумму возможных работ активных сил и сил инерции, считая связи идеальными (возможная работа  $\bar{F}_{\text{сц}}$  равна нулю, так как она приложена в МЦС):

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a + \sum_{k=1}^n \delta A_k^u = 0$$

или

$$m_3 g \delta s_D - M_{\text{сопр}} \delta \varphi_A - \Phi_D \delta s_D - M_O^\Phi \delta \varphi_B - \Phi_A \delta s_C - M_C^\Phi \delta \varphi_A = 0.$$

Выразим все перемещения через перемещение  $\delta s_D$  груза  $D$ , учитывая нерастяжимость троса:

$$\begin{aligned} \delta \varphi_B &= \frac{\delta s_D}{r}; \\ \delta s_C &= \delta s_D; \\ \delta \varphi_A &= \frac{\delta s_D}{R}. \end{aligned}$$

Аналогично выразим угловые ускорения  $\varepsilon_B$  и  $\varepsilon_A$  через ускорение  $a_D$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_B &= \frac{a_D}{r}; \\ a_C &= a_D; \\ \varepsilon_A &= \frac{a_D}{R}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_A &= m_1 a_D; \\ M_C^\Phi &= I_C \varepsilon_A = I_C \frac{a_D}{R} = \frac{m_1 R^2}{2} \frac{a_D}{R} = \frac{m_1 R a_D}{2}; \\ M_O^\Phi &= I_O \varepsilon_B = I_O \frac{a_D}{r} = m_1 r^2 \frac{a_D}{r} = m_2 r a_D. \end{aligned}$$

Момент сопротивления качению катка

$$M_{\text{сопр}} = N \delta = m_1 g f_k.$$

С учетом этого сумма возможных работ

$$m_3 g \delta s_D - m_1 g f_k \frac{\delta s_D}{R} - m_3 a_D \delta s_D - m_2 r a_D \frac{\delta s_D}{r} - m_1 a_D \delta s_D - \frac{m_1 R a_D}{2} \frac{\delta s_D}{R} = 0.$$

Так как  $\delta s_D \neq 0$ , то

$$a_D = \frac{g \left( m_3 - m_1 \frac{f_k}{R} \right)}{\frac{3}{2} m_1 + m_2 + m_3}.$$

Движение возможно, если

$$m_3 > m_1 \frac{f_k}{R}.$$

**Пример 56.** Используя условие примера 43, определить ускорение груза, применив общее уравнение динамики.

**Решение.** Изобразим механическую систему, приложив к телам системы заданные активные силы  $\bar{F}$ ,  $m_1 \bar{g}$ ,  $m_2 \bar{g}$ ,  $m_3 \bar{g}$ , силу трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$  груза 3, момент сопротивления качению катка 1  $M_{\text{тр}}$ , отнеся их к активным силам, и силы инерции  $\Phi_1$ ,  $\Phi_3$  тел 1 и 3 и моменты сил инерции  $M_{O_2}^{\Phi}$  и  $M_C^{\Phi}$  тел 1 и 2 (рис. 169).

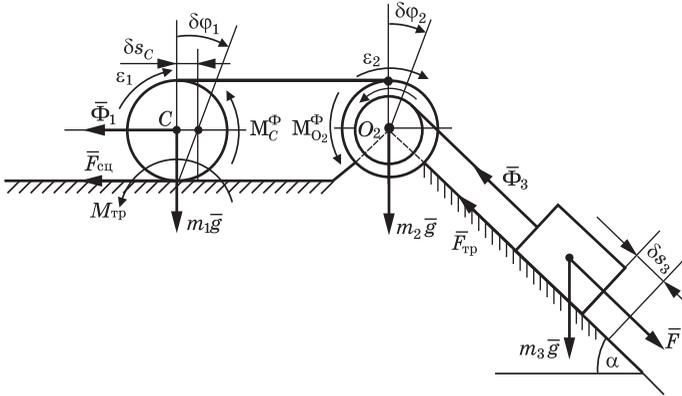


Рис. 169

Применим общее уравнение динамики

$$\Sigma \delta A_k^a + \Sigma \delta A_k^{\Phi} = 0;$$

$$F \delta s_3 + m_3 g \sin \alpha \delta s_3 - F_{\text{тр}} \delta s_3 - M_{\text{тр}} \delta \varphi_1 - \Phi_3 \delta s_3 -$$

$$-M_{O_2}^{\Phi} \delta \varphi_2 - M_C^{\Phi} \delta \varphi_1 - \Phi_1 \delta s_C = 0. \quad (1)$$

Определим силы и моменты сил инерции тел, выразив их через ускорение  $a_3$ :

$$\begin{aligned}\Phi_3 &= m_3 a_3; \\ M_{O_2}^\Phi &= J_{O_2} \varepsilon_2 = m_2 i_{O_2}^2 \frac{a_3}{r_2}; \\ M_C^\Phi &= J_C \varepsilon_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2} \frac{a_3 R_2}{r_2 2 R_1} = \frac{1}{4} m_1 \frac{R_1 R_2}{r_2} a_3; \\ \Phi_1 &= m_1 a_C = m_1 \frac{a_3 R_2}{2 r_2} = \frac{1}{2} m_1 \frac{R_2 a_3}{r_2}.\end{aligned}$$

Выразим возможное перемещение тел через перемещение  $\delta s_3$ :

$$\begin{aligned}\delta \varphi_2 &= \frac{\delta s_3}{r_2}; \\ \delta \varphi_3 &= \frac{\delta s_3 R_2}{r_2 2 R_1}; \\ \delta s_C &= \delta \varphi_3 R_1 = \frac{\delta s_3 R_2}{2 r_2}; \\ F_T &= f N_3; \quad N_3 - m_3 g \cos \alpha = 0; \\ F_T &= f m_3 g \cos \alpha; \\ M_{\text{тр}} &= N_1 \delta = m_1 g \delta,\end{aligned}$$

где значения  $N_1 \delta$ ,  $f N_3$  соответствуют значениям примера 43.

Подставим полученные соотношения в уравнение (1):

$$\begin{aligned}F \delta s_3 + m_3 g \cos \alpha \delta s_3 - f m_3 \cos \alpha \delta s_3 - m_1 g \delta \frac{\delta s_3 R_2}{2 r_2 R_1} - \\ - m_3 a_3 \delta s_3 - m_2 i_{O_2}^2 \frac{a_3}{r_2} \frac{\delta s_3}{r_2} - \frac{1}{4} \frac{m_1 R_1 R_2 a_3}{r_2} \frac{\delta s_3 R_2}{2 r_2 R_1} - \frac{1}{2} m_1 \frac{R_2}{r_2} a_3 \frac{\delta s_3 R_2}{2 r_2} = 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Так как  $\delta s_3 \neq 0$ , то сократим на  $\delta s_3$  и выразим  $a_3$  из уравнения (2):

$$\begin{aligned}a_3 &= \frac{F + m_3 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_1 g \frac{\delta R_2}{2 r_2 R_1}}{m_3 + m_2 \frac{i_{O_2}^2}{r_2^2} + \frac{3}{8} m_1 \frac{R_2^2}{r_2^2}} \\ &= \frac{8 r_2^2 \left[ F + m_3 g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_1 g \frac{\delta R_2}{2 r_2 R_1} \right]}{3 m_1 R_2^2 + 8 m_2 i_{O_2}^2 + 8 m_3 r_2^2},\end{aligned}$$

что соответствует полученному выражению для  $a_3$  при решении примера 43.

Общее уравнение динамики позволяет составить дифференциальное уравнение движения механической системы, а также определить линейное или угловое ускорение какого-либо тела системы, рассматривая равновесие сил в целом всей системы, не расчленяя ее на отдельные тела.

## 7.5. Уравнения Лагранжа второго рода

*Уравнения Лагранжа второго рода* – это дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах. Для вывода этих уравнений используем общее уравнение динамики, записанное в виде (7.40):

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0,$$

где  $\bar{a}_k = \frac{d\bar{V}_k}{dt}$  – ускорение  $k$ -й точки;  $\delta \bar{r}_k = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j$  – вектор возможного перемещения  $k$ -й точки (см. (7.18)).

С учетом этого представим общее уравнение динамики в виде

$$\sum_{k=1}^n \left( \bar{F}_k - m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \right) \cdot \sum_{j=1}^S \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (7.43)$$

Умножим это уравнение на  $-1$ , изменим порядок суммирования и разобьем сумму на две части. Получим

$$\sum_{j=1}^S \left( \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0, \quad (7.44)$$

где  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = Q_j^a$  – обобщенная сила активных сил (см. (7.20)).

Рассмотрим первую сумму уравнения (7.44). Заменяем выражение, стоящее под знаком суммы, другим равнозначным выражением:

$$m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( m_k \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \bar{V}_k \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right). \quad (7.45)$$

В равнозначности этих выражений легко убедиться, продифференцировав произведение, стоящее в скобках. Найдем скорость  $\bar{V}_k$   $k$ -й точки, продифференцировав по времени выражение радиуса-вектора  $\bar{r}_k$  (см. (7.11)), учитывая, что обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_S$  зависят от времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \bar{V}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + \dots + \\ + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_S} \cdot \frac{dq_S}{dt} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Производные  $\frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1, \dots, \frac{dq_S}{dt} = \dot{q}_S$  называются *обобщенными скоростями*.

Для преобразования выражения (7.44) используем два замечательных соотношения (тождества) Лагранжа. Найдем их, взяв частные производные от  $\bar{V}_k$  (7.46) по обобщенной скорости  $\dot{q}_j$  и обобщенной координате  $q_j$ .

Получим первое тождество:

$$\frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad (7.47)$$

так как все другие слагаемые (7.46) не зависят от  $\dot{q}_j$ .

Второе тождество найдем, продифференцировав по  $q_j$  выражение (7.46) и продифференцировав по времени частную производную  $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$  как сложную функцию:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 \right) + \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_S} \dot{q}_S \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial q_S} \dot{q}_S + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial t}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Найдем производную по времени от  $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \frac{dq_2}{dt} + \dots + \\ &+ \frac{\partial}{\partial q_S} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \frac{dq_S}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \\ &+ \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_2 \partial q_j} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_S \partial q_j} \dot{q}_S + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial t \partial q_j}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Правые части выражений (7.48) и (7.49) являются одинаковыми, так как частные производные не зависят от порядка (последовательности) дифференцирования. Поэтому в данных выражениях равны и левые части.

Получим второе тождество:

$$\frac{\partial \bar{V}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right). \quad (7.50)$$

Пользуясь тождествами (7.47) и (7.50) и равенством (7.45), преобразуем первую сумму, стоящую в скобках выражения (7.44):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left( m_k \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) - \sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left( m_k \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{m_k \bar{V}_k^2}{2} \right) \right] - \\ &- \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{m_k \bar{V}_k^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \end{aligned} \quad (7.51)$$

где  $T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}$  — кинетическая энергия механической системы.

При преобразовании учтено известное из математики правило, что сумма производных равна производной от суммы, а  $\vec{V}_k^2 = |\vec{V}_k| \cdot |\vec{V}_k| \cos 0 = V_k^2$ . С учетом уравнений (7.51) и (7.20) уравнение (7.43) примет вид

$$\sum_{j=1}^S \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j^a \right) \delta q_j = 0. \quad (7.52)$$

Уравнение (7.52) представляет собой вторую форму записи общего уравнения динамики в обобщенных силах. Сравнив уравнения (7.52) и (7.42), для обобщенной силы сил инерции получим выражение

$$Q_j^u = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, S, \quad (7.53)$$

из которого следует, что для определения обобщенной силы инерциальных сил по некоторой обобщенной координате необходимо записать выражение кинетической энергии механической системы и найти соответствующие производные согласно равенству (7.53).

Так как вариации  $\delta q_j \neq 0$ , где  $j = 1, \dots, S$ , то выражения, стоящие во внешних скобках, равны нулю. Тогда

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, S. \quad (7.54)$$

Разность полной производной по времени от частной производной от кинетической энергии системы по обобщенной скорости и частной производной от кинетической энергии по обобщенной координате равна обобщенной силе активных сил.

Полученные выражения (7.54) являются дифференциальными уравнениями движения механической системы в обобщенных координатах, или уравнениями Лагранжа второго рода. Для механической системы необходимо составить столько таких уравнений, сколько степеней свободы имеет система.

**Пример 57.** Однородный барабан  $A$  массой  $M_1$  и радиусом  $R$  приводится во вращение вокруг неподвижной оси постоянным моментом  $M_{\text{вр}}$ . На барабан наматывается невесомый трос, перекинутый через блок  $B$  массой  $M_2$ , распределенной по его ободу. К свободному концу троса прикреплен груз  $C$  массой  $M_3$  (рис. 170, а). Составить дифференциальное уравнение вращения барабана и определить ускорение груза  $C$ .

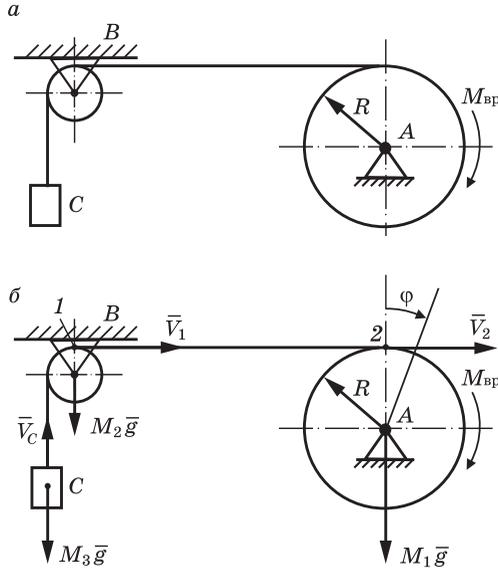


Рис. 170

**Решение.** Система имеет одну степень свободы. Примем за обобщенную координату  $q$  угол поворота  $\varphi$  барабана (рис. 170, б). Применим уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_A + T_B + T_C = \frac{I_A \omega_A^2}{2} + \frac{I_B \omega_B^2}{2} + \frac{M_3 V_C^2}{2}.$$

Выразим  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ ,  $V_C$  через обобщенную скорость  $\dot{\varphi} = \omega_A$ :

$$V_C = V_1 = V_2 = \dot{\varphi} R;$$

$$\omega_B = \frac{V_1}{r} = \frac{\dot{\varphi}R}{r}.$$

Моменты инерции тел  $A$  и  $B$

$$I_A = \frac{M_1 R^2}{2};$$

$$I_B = M_2 r^2.$$

С учетом этого кинетическая энергия

$$T = \frac{M_1 R^2}{2 \cdot 2} \dot{\varphi}^2 + M_2 r^2 \frac{1}{2} \frac{\dot{\varphi}^2 R^2}{r^2} + \frac{1}{2} M_3 \dot{\varphi}^2 R^2 = \frac{1}{4} \dot{\varphi}^2 (M_1 + 2M_2 + 2M_3) R^2.$$

Найдем производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} (M_1 + 2M_2 + 2M_3) R^2 \dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{1}{2} (M_1 + 2M_2 + 2M_3) R^2 \ddot{\varphi}.$$

Обобщенная сила

$$Q_\varphi = \frac{(\sum \delta A_k)_\varphi}{\delta \varphi} = \frac{M_{\text{вр}} \delta \varphi - M_3 g R \delta \varphi}{\delta \varphi} = M_{\text{вр}} - M_3 g R.$$

Подставим в уравнение Лагранжа:

$$\frac{1}{2} (M_1 + 2M_2 + 2M_3) R^2 \ddot{\varphi} = M_{\text{вр}} - M_3 g R.$$

$$\text{Отсюда } \ddot{\varphi} = \frac{2(M_{\text{вр}} - M_3 g R)}{(M_1 + 2M_2 + 2M_3) R^2} = \text{const}.$$

При  $M_{\text{вр}} - M_3 g R > 0$  вращение барабана равноускоренное, при  $M_{\text{вр}} - M_3 g R < 0$  вращение барабана – в противоположную сторону.

Ускорение груза  $C$  при условии нерастяжимости троса равно вращательному ускорению точек обода барабана:

$$a_C = \ddot{\varphi} R = \frac{2(M_{\text{вр}} - M_3 g R)}{R(M_1 + 2M_2 + 2M_3)}.$$

**Пример 58.** На гладкой горизонтальной плоскости (рис. 171,  $a$ ) помещена треугольная призма  $ABD$  массой  $m_1$ , которая может скользить по

этой плоскости. По грани  $BD$  призмы катится без скольжения однородный круглый цилиндр массой  $m_2$ . Определить ускорение призмы и ускорение точки  $C$  цилиндра относительно призмы. Трением качения пренебречь.

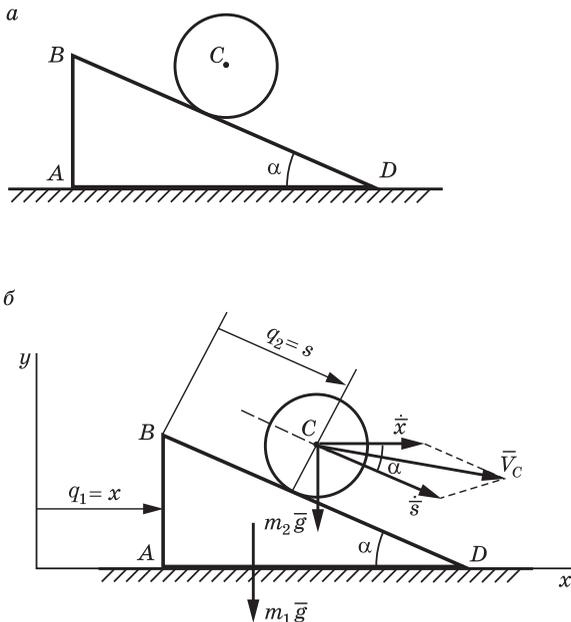


Рис. 171

**Решение.** Цилиндр совершает сложное движение: переносное вместе с призмой и относительное – движение относительно призмы. Применим уравнение Лагранжа второго рода. Система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$  – соответственно перемещение призмы и перемещение цилиндра относительно призмы. Обозначим  $q_1 = x$ ,  $q_2 = s$  (рис. 171, б).

Запишем уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} &= Q_s. \end{aligned} \quad (1)$$

Составим выражение кинетической энергии системы:

$$T = T_{\text{пр}} + T_{\text{цил}} = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_2^2}{2}. \quad (2)$$

Скорость центра масс цилиндра

$$V_C^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha. \quad (3)$$

Момент инерции однородного цилиндра

$$I_C = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

Угловая скорость цилиндра  $\omega_2 = \frac{\dot{s}}{R_2}$  (цилиндр катится без скольжения, мгновенный центр скоростей в точке касания).

С учетом этого

$$T = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha) + \frac{m_2 \dot{s}^2}{4}. \quad (4)$$

Найдем производные, входящие в уравнения (1):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial s} = 0,$$

так как кинетическая энергия не зависит от обобщенных координат;

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_1 \dot{x} + m_2 \dot{x} + m_2 \dot{s} \cos\alpha;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 \ddot{s} \cos\alpha;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m_2 \dot{s} + m_2 \dot{x} \cos\alpha + \frac{m_2}{2} \dot{s} = \frac{3}{2} m_2 \dot{s} + m_2 \dot{x} \cos\alpha;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{3}{2} m_2 \ddot{s} + m_2 \ddot{x} \cos\alpha.$$

Определим обобщенные силы.

Считаем  $s = \text{const}$ ,  $\delta s = 0$ ,  $x \neq \text{const}$ ,  $\delta x \neq 0$ .

$Q_x = \frac{(\Sigma \delta A_k)_x}{\delta x} = 0$ , так как возможная работа сил  $m_1 \bar{g}$  и  $m_2 \bar{g}$  на перемещении  $x$  равна нулю.

Допустим  $x = \text{const}$ ,  $\delta x = 0$ ,  $s \neq \text{const}$ ,  $\delta s \neq 0$ , тогда

$$Q_s = \frac{(\Sigma \delta A_k)_s}{\delta s} = \frac{m_2 g \sin\alpha \cdot \delta s}{\delta s} = m_2 g \sin\alpha.$$

Подставим вычисленные производные и обобщенные силы в уравнение Лагранжа:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2\ddot{s} \cos \alpha = 0; \\ \frac{3}{2}m_2\ddot{s} + m_2\dot{x} \cos \alpha = m_2g \sin \alpha. \end{cases}$$

Выразим  $\ddot{s}$  из первого уравнения и подставим во второе:

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= -\frac{(m_1 + m_2)}{m_2 \cos \alpha} \ddot{x}; \\ -\frac{3}{2}m_2 \frac{(m_1 + m_2)}{m_2 \cos \alpha} \ddot{x} + m_2\dot{x} \cos \alpha &= m_2g \sin \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда ускорение призмы

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{g \sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{3}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_2 \cos \alpha}} = \\ &= \frac{2m_2g \sin \alpha \cos \alpha}{2m_2 \cos^2 \alpha - 3m_1 - 3m_2} = -\frac{m_2g \sin 2\alpha}{3m_1 + m_2(1 + 2 \sin^2 \alpha)}. \end{aligned}$$

Призма перемещается не вправо, как предполагалось, а влево.  
Относительное ускорение цилиндра

$$\ddot{s} = -\frac{m_1 + m_2}{m_2 \cos \alpha} \left( -\frac{m_2g \sin 2\alpha}{3m_1 + m_2(1 + 2 \sin^2 \alpha)} \right) = \frac{2(m_1 + m_2)g \sin \alpha}{3m_1 + m_2(1 + 2 \sin^2 \alpha)}.$$

## 7.6. Уравнения Лагранжа для консервативных механических систем. Циклические координаты и интегралы

Для консервативной системы обобщенные силы определяются через потенциальную энергию  $\Pi$  системы по формуле (7.23)

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, S.$$

Тогда уравнения Лагранжа переписутся в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, S. \quad (7.55)$$

Так как потенциальная энергия системы есть функция только обобщенных координат, т.е.  $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_S)$ , то  $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0$ .

С учетом этого представим уравнение (7.55) в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, S, \quad (7.56)$$

где  $T - \Pi = L$  – функция Лагранжа (кинетический потенциал).

Окончательно уравнения Лагранжа для консервативной системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, S. \quad (7.57)$$

|| *Циклические координаты* – обобщенные координаты, от которых явно не зависит кинетический потенциал.

Пусть среди  $S$  обобщенных координат  $k$  координат являются циклическими. Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

а следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (7.58)$$

Из равенства (7.58) следует:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, S. \quad (7.59)$$

Выражения (7.59) называются *циклическими интегралами*.

**Пример 59.** Механическая система состоит из полого кольца, которое может вращаться вокруг вертикальной оси, и тяжелого шарика массой  $m$ , который может перемещаться внутри кольца (рис. 172).

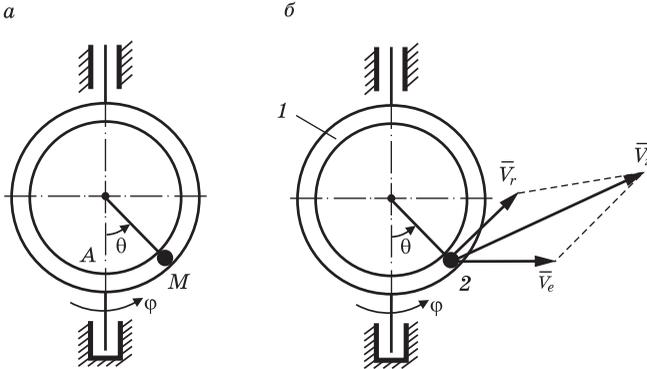


Рис. 172

Момент инерции кольца относительно оси вращения равен  $I$ , радиус —  $R$ . Пренебрегая трением, составить дифференциальные уравнения движения системы.

**Решение.** Система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат  $q_1 = \varphi$  — угол поворота кольца вокруг оси и  $q_2 = \theta$  — центральный угол дуги  $AM$ . Применим уравнения Лагранжа для консервативной системы:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Определим кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}. \quad (2)$$

Скорость шарика определим по теореме сложения скоростей:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_e + \vec{V}_r, \quad (3)$$

где  $\vec{V}_e$  — переносная скорость шарика;  $\vec{V}_r$  — относительная скорость (скорость шарика относительно кольца).

Модуль переносной скорости

$$V_e = \dot{\phi} R \sin \theta. \quad (4)$$

Модуль относительной скорости

$$V_r = \dot{\theta} R. \quad (5)$$

Так как  $\vec{V}_e \perp \vec{V}_r$ , то абсолютная скорость шарика

$$V_2 = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{\dot{\phi}^2 R^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 R^2}. \quad (6)$$

Тогда кинетическая энергия системы

$$T = \frac{I\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (\dot{\phi}^2 R^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 R^2). \quad (7)$$

Потенциальная энергия системы, если за нулевой уровень принять горизонтальный диаметр кольца,

$$\Pi = -m_2 g R \cos \theta. \quad (8)$$

Кинетической потенциал системы

$$L = T - \Pi = \frac{I\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (\dot{\phi}^2 R^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 R^2) + m_2 g R \cos \theta. \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что кинетический потенциал не зависит от обобщенной координаты  $q_1 = \phi$ . Таким образом, эта обобщенная координата является циклической.

Выполним операции дифференцирования. Так как обобщенная координата  $\phi$  является циклической, то

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = C_\phi = \text{const},$$

что является циклическим интегралом.

Найдем его выражение:

$$C_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I\dot{\phi} + m_2 R^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = (I + m_2 R^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi} = I_{\text{пр}} \dot{\phi}, \quad (10)$$

где  $I_{\text{пр}}$  – приведенный момент инерции;  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  – угловая скорость вращения системы.

Тогда дифференциальное уравнение вращения системы

$$I_{\text{пр}} \frac{d\varphi}{dt} = C_{\varphi} = \text{const}. \quad (11)$$

Составим второе уравнение, соответствующее обобщенной координате  $q_2 = \theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= m_2 \dot{\varphi}^2 R^2 \sin \theta \cos \theta - m_2 g R \sin \theta; \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_2 R^2 \dot{\theta}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m_2 R^2 \ddot{\theta}. \end{aligned}$$

Подставим в уравнение Лагранжа:

$$m_2 R^2 \ddot{\theta} - m_2 \dot{\varphi}^2 R^2 \sin \theta \cos \theta + m_2 g R \sin \theta = 0,$$

или

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 R^2 \sin 2\theta \cos \theta = -\frac{g}{R} \sin \theta. \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) являются дифференциальными уравнениями движения системы. Из уравнения (11) следует, что угловая скорость вращения системы зависит от положения шарика внутри кольца, т.е. от угла  $\theta$ .

Пусть в начальный момент  $\dot{\varphi} = \omega_0$ ,  $\theta_0 = 0$ , тогда

$$C_{\varphi} = I \omega_0,$$

а угловая скорость

$$\omega = \frac{I \omega_0}{I + m_2 R^2 \sin^2 \theta}. \quad (13)$$

Уравнение (11) можно также получить из закона сохранения кинетического момента системы относительно оси.

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какие виды связей существуют? Дайте классификацию связи в аналитической механике.

2. В чем различие возможных и действительных перемещений материальной точки?

3. Опишите обобщенные координаты механической системы.
4. Что такое возможная работа силы?
5. Сформулируйте принцип возможных перемещений.
6. Что такое обобщенная сила и как она определяется?
7. Чему равна обобщенная сила в случае равновесия механической системы?
8. Сформулируйте принцип Лагранжа – Даламбера (общее уравнение динамики).
9. Какой вид в общем случае имеют уравнения Лагранжа второго рода? Чему равно число этих уравнений для каждой механической системы?
10. Запишите уравнения Лагранжа для консервативных систем.
11. Что такое кинетический потенциал?
12. Какие обобщенные координаты называют циклическими и какой вид имеют циклические интегралы?

---

## ГЛАВА 8. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

---

### 8.1. Устойчивость положения равновесия механической системы

Вопрос об устойчивости положения равновесия механических систем имеет непосредственное значение в теории колебания систем.

Условие равновесия механической системы, как было описано в гл. 7, в обобщенных координатах имеет вид (см. (7.33))

$$Q_j = 0, \quad j = 1, \dots, S,$$

или для консервативных систем (см. (7.34))

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, S,$$

т.е. обобщенные силы, соответствующие каждой обобщенной координате, должны быть равны нулю.

Пусть механическая система находится в равновесии под действием приложенных к ней сил. Сообщим точкам (телам)

системы незначительные отклонения от их равновесных положений и незначительные начальные скорости. При этом можно заметить, что положение равновесия может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным.

*Устойчивое положение равновесия* — положение равновесия, при котором точки механической системы, выведенные из этого положения, в дальнейшем движутся под действием сил в непосредственной близости возле своего равновесного положения. Это движение будет обладать той или иной степенью повторяемости во времени, т.е. система будет совершать колебательное движение (рис. 173, а).

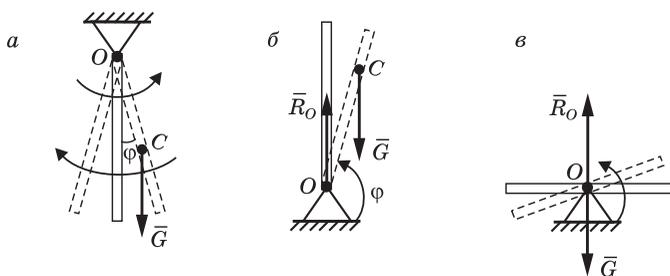


Рис. 173

*Неустойчивое положение равновесия* — положение равновесия, из которого при сколь угодно малом отклонении точек системы впоследствии действующие силы еще дальше будут удалять точки от их равновесного положения (рис. 173, б).

*Безразличное положение равновесия* — положение равновесия, когда при любом малом начальном отклонении точек системы от этого положения в новом положении система также остается в равновесии (рис. 173, в).

Для определения устойчивого положения равновесия механической системы существуют различные методы. Рассмотрим определение устойчивого положения равновесия на основании *теоремы Лагранжа — Дирихле*.

### Теорема

Если в положении равновесия консервативной механической системы с идеальными и стационарными связями ее потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия является устойчивым.

Опуская доказательство этой теоремы, отметим, что она устанавливает достаточность условий устойчивости положения равновесия. Необходимость этих условий устанавливается теоремами А.М. Ляпунова, рассмотрение которых опускаем.

Определим на основании теоремы Лагранжа – Дирихле положение устойчивого равновесия однородного стержня длины  $l$  (рис. 173). Примем за нулевой уровень горизонтальную плоскость, проходящую через точку  $O$  подвеса стержня. Тогда потенциальная энергия стержня при отклонении его на угол  $\varphi$  от вертикали

$$\Pi = -mg \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Значение угла  $\varphi$  при равновесии определим из условия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{или} \quad mg \frac{l}{2} \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0,$$

что возможно при  $\varphi_1 = 0$  и при  $\varphi_2 = \pi$ , т.е. равновесие возможно при вертикальном расположении стержня.

Найдем значение  $\varphi$ , при котором потенциальная энергия имеет минимум, из условия  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} > 0$ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mg \frac{l}{2} \cos \varphi \Rightarrow \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_1} = mg \frac{l}{2} > 0;$$

$$\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_2} = -mg \frac{l}{2} < 0.$$

Таким образом, потенциальная энергия имеет минимум при  $\varphi = 0$ , и это положение равновесия является устойчивым. В случае стационарного силового поля потенциальная энергия  $\Pi$  системы с одной степенью свободы является функцией обобщенной координаты  $q$ , т.е.

$$\Pi = \Pi(q). \quad (8.1)$$

Тогда критерием устойчивого положения равновесия системы является

$$\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q^*} > 0, \quad (8.2)$$

где  $q^*$  – значение обобщенной координаты, удовлетворяющее данному условию и условию равновесия  $\left( \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right) = 0$ .

Выражение (8.2) носит название *критерия Лагранжа – Дирихле* устойчивости положения равновесия механической системы в консервативном поле.

## 8.2. Особенности описания колебания систем

Механическая система может совершать колебания только вблизи устойчивого положения равновесия при действии на нее консервативных сил. В этом положении обобщенная координата  $q_j = 0, j = 1, \dots, S$ .

Система с одной степенью свободы в случае стационарных, голономных, идеальных, неосвобождающих связей имеет одну обобщенную координату  $q$ , и ее движение описывается одним уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \quad (8.3)$$

На механическую систему кроме *консервативных сил* могут действовать *диссипативные силы* (силы сопротивления) и *вынуждающие, или возмущающие, силы*.

Тогда обобщенную силу  $Q$  можно считать состоящей из трех частей:

$$Q = Q^{\Pi} + Q^C + Q^B, \quad (8.4)$$

где  $Q^{\Pi}$ ,  $Q^C$ ,  $Q^B$  – части обобщенной силы, обусловленные соответственно консервативными силами, силами сопротивления, возмущающими силами.

Примерами *консервативных сил* являются силы упругости и силы тяжести.

Обобщенную силу  $Q^I$  этих сил определяем через потенциальную энергию  $\Pi$  с учетом (8.1) по формуле (7.23)

$$Q^I = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$

*Силами сопротивления* (диссипативными силами) являются силы вязкого линейного сопротивления, зависящие от скоростей в первой степени точек системы и направленные в стороны, противоположные скоростям. Так, для  $k$ -й точки системы сила сопротивления  $\bar{R}_k = -\mu_k \bar{V}_k$ , где  $\mu_k$  — коэффициент сопротивления (см. (2.3)). Определение обобщенной силы  $Q^C$  этих сил будет рассмотрено в п. 8.4.

*Возмущающими силами* являются силы, изменяющиеся с течением времени по гармоническому (см. (2.5)) либо по любому другому закону. Обобщенную силу  $Q^B$ , обусловленную возмущающими силами, будем определять по формуле

$$Q^B = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \delta A(\bar{F}_{k_B}) \right)_q}{\delta q}. \quad (8.5)$$

В зависимости от совокупности этих обобщенных сил механическая система может совершать малые собственные и вынужденные колебания без учета или с учетом сопротивления. Колебания считаются малыми, если при движении системы обобщенная координата  $q$ , скорость  $\dot{q}$  и ускорение  $\ddot{q}$  достаточно малы и в уравнении Лагранжа (8.3) можно пренебречь всеми членами второго и более высокого порядков малости относительно  $q$ ,  $\dot{q}$  и  $\ddot{q}$ , т.е. слагаемыми, в которые входят квадраты этих величин, их произведения или другие нелинейные функции. Поэтому такие колебания называются *линейными*.

Кроме того, в случае малых колебаний функции  $\sin q \approx q$ ,  $\cos q = 1$  (при вычислении потенциальной энергии принимают

функцию  $\cos q = 1 - \frac{q^2}{2}$ ).

### 8.3. Свободные, или собственные, колебания системы с одной степенью свободы без учета сопротивления

Для вывода дифференциального уравнения этих колебаний воспользуемся уравнением Лагранжа (8.3), в котором обобщенная сила  $Q$  обусловлена только консервативными силами и будет равна

$$Q = Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q};$$
$$Q^C = Q^B = 0.$$

Пусть система с голономными, идеальными, неосвобождающими и стационарными связями состоит из  $n$  точек и движется возле положения равновесия. Ее кинетическая энергия

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k \dot{r}_k^2}{2}. \quad (8.6)$$

В силу стационарности связей радиус-вектор  $\bar{r}_k$  каждой точки зависит от времени только через обобщенную координату  $q$ , т.е.  $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q)$ . Тогда вектор скорости  $k$ -й точки

$$\bar{V}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \dot{q}. \quad (8.7)$$

Учитывая, что  $\dot{r}_k^2 = \dot{\bar{r}}_k^2$ , запишем выражение (8.6) с учетом (8.7) в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \dot{q} \right)^2 = \frac{1}{2} A \dot{q}^2, \quad (8.8)$$

где  $A = \sum_{k=1}^n m_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2 = A(q)$ .

Разлагая функцию  $A(q)$  в окрестности  $q=0$  в степенной ряд, получим

$$A(q) = A_0 + \left( \frac{\partial A}{\partial q} \right)_0 q + \left( \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots \quad (8.9)$$

Здесь и в последующих выражениях индекс 0 означает, что соответствующие величины вычисляются при  $q = 0$ . Для получения линейного дифференциального уравнения в разложении кинетической энергии должны содержаться члены не выше второго порядка малости по отношению к  $q$  и  $\dot{q}$ , а так как (8.8) содержит  $\dot{q}^2$ , то в разложении (8.9) учитываем только первое слагаемое  $A_0$ , а остальными слагаемыми пренебрегаем.

Обозначим  $A_0 = a_q$ . Тогда выражение кинетической энергии механической системы с одной степенью свободы представим в виде

$$T = \frac{1}{2} a_q \dot{q}^2, \quad (8.10)$$

где  $a_q$  — обобщенный коэффициент инерции, размерность которого совпадает с размерностью массы или момента инерции, является положительной постоянной величиной;  $\dot{q}$  — обобщенная скорость.

Потенциальную энергию  $\Pi$  системы с учетом (8.1) аналогично разложим в степенной ряд

$$\Pi = \Pi(q) = \Pi_0 + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_0 q + \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2!} + \left( \frac{\partial^3 \Pi}{\partial q^3} \right)_0 \frac{q^3}{3!} + \dots, \quad (8.11)$$

где  $\Pi_0 = 0$  — потенциальная энергия в положении равновесия;

$\left( \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_0 = 0$  — обобщенная сила в положении равновесия.

В соответствии с теоремой Лагранжа — Дирихле в положении равновесия  $\Pi = \Pi_{\min}$ , поэтому  $\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0 > 0$ .

С учетом сделанных выше замечаний, отбросив в разложении (8.11) члены третьего и более высших порядков малости относительно  $q$ , получим выражение для потенциальной энергии для консервативной механической системы с одной степенью свободы в виде

$$П = \left( \frac{\partial^2 П}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} = \frac{1}{2} c_q q^2, \quad (8.12)$$

где  $q$  – обобщенная координата;  $c_q$  – обобщенный коэффициент жесткости.

Учитывая, что  $T = \frac{1}{2} a_q \dot{q}^2$ ,  $П = \frac{1}{2} c_q q^2$ ,  $Q = -\frac{\partial П}{\partial q} = -c_q q$ , из (8.10) после выполнения операций дифференцирования и подстановки найденных выражений в уравнение Лагранжа (8.3) получим линейное дифференциальное уравнение малых собственных колебаний системы с одной степенью свободы

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \quad (8.13)$$

где  $k^2 = \frac{c_q}{a_q}$ , или  $k = \sqrt{\frac{c_q}{a_q}}$  – циклическая частота колебаний системы.

Уравнение (8.13) аналогично уравнению (2.6), описывающему гармонические колебания материальной точки.

Решение этого уравнения и определение характеристик колебаний приведено в п. 2.2.

**Пример 60.** Составить дифференциальное уравнение малых колебаний механической системы, состоящей из однородного стержня 3, барабана 2 (однородного диска) радиусом  $r_2 = 0,25$  м, груза 1 и пружины с коэффициентом жесткости  $c = 700$  Н/м. Массы тел  $m_1 = 5$  кг,  $m_2 = 2m_1$ ,  $m_3 = 3m_1$ . Длина стержня  $l_3 = 4r_2$ . Массой нити и силами сопротивления пренебречь. Определить при заданных числовых значениях циклическую частоту и период колебаний системы (рис. 174, а).

**Решение.** Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение груза 1, т.е.  $q = y$  (рис. 174, б). Запишем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y.$$

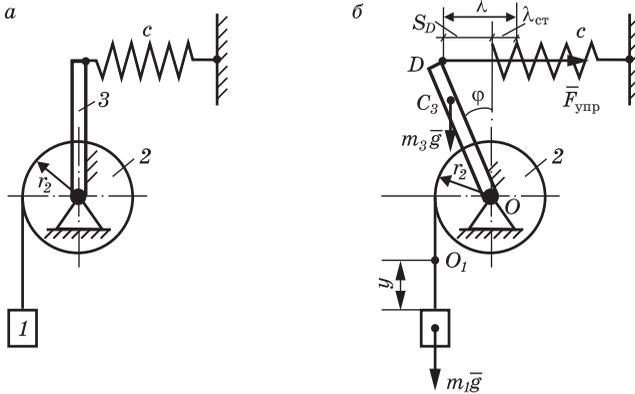


Рис. 174

Определим кинетическую энергию системы, выразив ее через обобщенную скорость  $\dot{y}$  :

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Груз движется поступательно, его кинетическая энергия

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2.$$

Тела 2 и 3 вращаются вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ . Поэтому их кинетическая энергия

$$T_2 = \frac{I_{2O} \omega_2^2}{2},$$

где 
$$\left| \begin{array}{l} I_{2O} = \frac{m_2 r_2^2}{2} \\ \omega_2 = \dot{\phi} = \frac{\dot{y}}{r_2} \end{array} \right|.$$

Тогда

$$T_2 = \frac{1}{4} m_2 \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2;$$

$$T_3 = \frac{I_{3O} \omega_3^2}{2},$$

где

$$\left| \begin{array}{l} I_{3O} = \frac{m_3 l_3^2}{3} = \frac{m_3 16r^2}{3} \\ \omega_3 = \omega_2 = \dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{r_2} \end{array} \right|.$$

Тогда

$$T_3 = \frac{8}{3} m_3 \dot{y}^2 = 8m_1 \dot{y}^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + 8m_1 \dot{y}^2 = 9m_1 \dot{y}^2,$$

или

$$T = \frac{1}{2} a_y \dot{y}^2,$$

где  $a_y = 18m_1$  — обобщенный коэффициент инерции.

Потенциальная энергия системы определяется как работа сил тяжести  $m_1 \bar{g}$  и  $m_3 \bar{g}$  и силы упругости  $\bar{F}_{\text{упр}}$  пружины на перемещение системы из отклоненного положения в нулевое, которым считаем положение покоя системы, т.е.

$$\Pi = \Pi(m_1 \bar{g}) + \Pi(m_3 \bar{g}) + \Pi(\bar{F}_{\text{упр}});$$

$$\Pi(m_1 \bar{g}) = -m_1 g y;$$

$$\Pi(m_3 \bar{g}) = -m_3 g h_{C_3},$$

где  $h_{C_3} = \frac{l_3}{2} - \frac{l_3}{2} \cos \varphi = \frac{l_3}{2} (1 - \cos \varphi)$ ;

$$\Pi(m_3 \bar{g}) = -m_3 g \frac{l_3}{2} (1 - \cos \varphi).$$

Заменим

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

где  $\varphi = \frac{y}{r_2}$ .

Тогда

$$\Pi(m_3\bar{g}) = -m_3g \frac{l_3}{4} \varphi^2 = -m_3g \frac{4r_2}{4} \frac{y^2}{r_2^2} = -\frac{m_3g}{r_2} y^2;$$

$$\Pi(\bar{F}_{\text{упр}}) = \frac{c}{2} \lambda^2 - \frac{c}{2} \lambda_{\text{ст}}^2,$$

где  $\lambda = \lambda_{\text{ст}} + s_D = \lambda_{\text{ст}} + l\varphi$ .

Тогда

$$\Pi(\bar{F}_{\text{упр}}) = c\lambda_{\text{ст}}l\varphi + \frac{1}{2}cl^2\varphi^2 = c\lambda_{\text{ст}} \frac{l}{r_2} y + \frac{1}{2}c \frac{l^2}{r_2^2} y^2.$$

В итоге

$$\Pi = -m_1gy - \frac{m_3g}{r_2} y^2 + c\lambda_{\text{ст}} \frac{l}{r_2} y + \frac{1}{2}c \frac{l^2}{r_2^2} y^2.$$

В положении покоя, соответствующем статической деформации пружины,  $y = 0$ ,  $\Pi = 0$  и  $Q_y^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0$ . Из этого условия найдем величину статической деформации пружины:

$$m_1g - c\lambda_{\text{ст}} \frac{l}{r_2} = 0 \Rightarrow \lambda_{\text{ст}} = \frac{m_1gr_2}{cl} = \frac{5 \cdot 9,8}{700 \cdot 4} = 0,018 \text{ м.}$$

Исключим из выражения потенциальной энергии  $\lambda_{\text{ст}}$ , получим

$$\Pi = \frac{1}{2} y^2 \left( c \frac{l^2}{r_2^2} - \frac{2m_3g}{r_2} \right) = \frac{1}{2} c_y y^2,$$

где  $c_y = \frac{cl^2}{r_2^2} - \frac{2m_3g}{r_2}$  – обобщенный коэффициент жесткости, при этом должно выполняться условие

$$\frac{cl^2}{r_2^2} > \frac{2m_3g}{r_2}.$$

Найдем производные:  $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$  (кинетическая энергия не зависит от обобщенной координаты):

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= a_y \dot{y}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= a_y \ddot{y}; \\ Q^{\Pi} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -c_y y.\end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в уравнение Лагранжа, получим

$$a_y \ddot{y} = -c_y y,$$

или

$$\ddot{y} + k^2 y = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{c_y}{a_y} = \frac{cl^2 - 2m_3 gr_2}{r_2^2 18m_1} = \frac{700(4 \cdot 0,25)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9,8 \cdot 0,25}{0,25^2 \cdot 18 \cdot 5} = \frac{626,5}{5,625} = 111,2 \text{ с}^{-2}.$$

Циклическая частота колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c_y}{a_y}} = \sqrt{111,2} = 10,5 \text{ с}^{-1}.$$

Период колебаний

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{10,5} \cong 0,6 \text{ с}.$$

## **8.4. Влияние линейного сопротивления на движение механической системы с одной степенью свободы вблизи положения равновесия**

Пусть на точки механической системы с одной степенью свободы действуют консервативные силы и силы сопротивления, линейно зависящие от скоростей этих точек (см. п. 8.2).

Тогда уравнение Лагранжа для этого случая будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{\Pi} + Q^C, \quad (8.14)$$

где  $T = \frac{1}{2} a_q \dot{q}^2$ ;  $Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$ ;  $\Pi = \frac{1}{2} c_q q^2$ .

Обобщенную силу  $Q^C$  сил сопротивления для системы с одной степенью свободы найдем по формуле

$$Q^C = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}. \quad (8.15)$$

Так как сила сопротивления  $\bar{R}_k = -\mu_k \bar{V}_k = -\mu_k \dot{\bar{r}}_k$ , а  $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}}$  (см. (7.46) – первое соотношение Лагранжа), то (8.15) представим в виде

$$Q^C = -\sum_{k=1}^n \mu_k \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2}. \quad (8.16)$$

Введем обозначение

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k \dot{r}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k V_k^2}{2}. \quad (8.17)$$

Функция  $\Phi$  называется *диссипативной функцией* или *функцией Рэлея*. По своей структуре она аналогична кинетической энергии системы, только в нее вместо массы точек входят коэффициенты  $\mu_k$  сопротивления. Тогда обобщенная сила (8.16) с учетом (8.17) примет вид

$$Q^C = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}. \quad (8.18)$$

Преобразуем функцию Рэлея (8.17) с учетом (8.7), получим

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k V_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \mu_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \dot{q} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^2 \sum_{k=1}^n \mu_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2 = \frac{1}{2} B \dot{q}^2,\end{aligned}\quad (8.19)$$

где  $B = \sum_{k=1}^n \mu_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2 = B(q)$  – функция, зависящая только от обобщенной координаты.

Разложим эту функцию в степенной ряд в окрестности положения равновесия системы, т.е. при  $q = 0$

$$B(q) = B_0 + \left( \frac{\partial B}{\partial q} \right)_0 q + \left( \frac{\partial^2 B}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots \quad (8.20)$$

Так как в функции (8.19) содержится  $\dot{q}^2$ , то в разложении (8.20), в силу того что колебания должны быть малыми линейными, отбрасываем все члены выше первого порядка малости относительно  $q$  и оставляем только первое слагаемое  $B_0$ , обозначив его  $\mu_q$ . Положительная величина  $B_0 = \mu_q$  называется *обобщенным коэффициентом сопротивления*.

Тогда для функции Рэля получаем выражение

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu_q \dot{q}^2, \quad (8.21)$$

а для обобщенной силы сил сопротивления

$$Q^C = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -\mu_q \dot{q}. \quad (8.22)$$

С учетом (8.22) после выполнения операций дифференцирования кинетической и потенциальной энергий и подстановки полученных результатов в уравнение Лагранжа (8.14) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$a_q \ddot{q} = -\mu_q \dot{q} - c_q q. \quad (8.23)$$

Разделим обе части уравнения (8.23) на  $a_q$ , введем обозначения  $k^2 = \frac{c_q}{a_q}$ ,  $2n = \frac{\mu_q}{a_q}$  и перенесем все члены этого уравнения в левую часть, получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0, \quad (8.24)$$

где  $n = \frac{\mu_q}{2a_q}$  — коэффициент затухания;  $k = \sqrt{\frac{c_q}{a_q}}$  (см. (8.13)).

Уравнение (8.24) является дифференциальным уравнением затухающих колебаний механической системы с одной степенью свободы при  $n < k$  или аperiодического движения системы возле положения равновесия при  $n \geq k$ .

Решение этого уравнения при  $n < k$  и  $n \geq k$  и определение характеристик движения рассмотрено в п. 2.3.

**Пример 61.** Однородный цилиндр 3 радиусом  $r$  и массой  $m_3 = 2m$  жестко соединен с однородным стержнем 2 длиной  $4r$  и массой  $m_2 = 3m$  и закреплен на горизонтальной оси  $Ox$ . В точке  $A$  к стержню подвешен груз 1 массой  $m_1 = m$ ; в точке  $D$  стержня прикреплена пружина жесткостью  $c$ ; в точке  $B$  — присоединен жидкостный демпфер, создающий силу сопротивления  $\bar{R} = -\mu\bar{V}$  вращению стержня. В положении равновесия стержень  $AB$  занимает горизонтальное положение, пружина растянута на величину  $\lambda_{ст}$ . Составить дифференциальное уравнение и исследовать движение системы (рис. 175, а).

**Решение.** Механическая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол поворота стержня, т.е.  $q = \varphi$ . На систему действуют консервативные силы: сила упругости пружины  $\bar{F}_{упр}$  и силы тяжести тел 1, 2, 3  $m_1\bar{g}$ ,  $m_2\bar{g}$ ,  $m_3\bar{g}$ , а также сила сопротивления  $\bar{R}$  (рис. 175, б).

Запишем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}^{\Pi} + Q_{\varphi}^C. \quad (1)$$

1. Вычислим кинетическую энергию системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

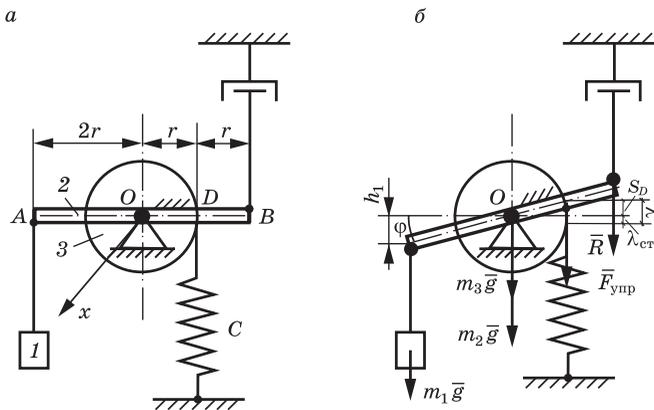


Рис. 175

Груз движется поступательно:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 (\dot{\varphi} 2r)^2}{2} = 2m_1 r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Тела 2 и 3 совершают вращательное движение вокруг оси  $Ox$ :

$$T_2 = \frac{I_{2O} \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 l_2^2}{12} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m_2 (4r)^2}{12} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{2}{3} m_2 r^2 \dot{\varphi}^2;$$

$$T_3 = \frac{I_{3O} \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 r^2}{2} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{1}{4} m_3 r^2 \dot{\varphi}^2.$$

В итоге

$$T = 2m_1 r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3} m_2 r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m_3 r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} a_\varphi \dot{\varphi}^2, \quad (2)$$

где  $a_\varphi = r^2 \left( 4m_1 + \frac{4}{3}m_2 + \frac{1}{2}m_3 \right) = 9mr^2$  — обобщенный коэффициент инерции.

2. Найдем производные

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_\varphi \dot{\varphi}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= a_\varphi \ddot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

3. Вычислим потенциальную энергию системы:

$$\Pi = \Pi(m_1 \bar{g}) + \Pi(\bar{F}_{\text{упр}});$$

$$\Pi(m_1 \bar{g}) = -m_1 g h_1 = -m_1 g \cdot 2r \sin \varphi = -2m_1 g r \varphi;$$

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{F}_{\text{упр}}) &= -\frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda^2) = -\frac{c}{2} (\lambda_{\text{ст}}^2 - (\lambda_{\text{ст}} + s_D)^2) = \\ &= \frac{c}{2} (2\lambda_{\text{ст}} s_D + s_D^2) = \frac{c}{2} (2\lambda_{\text{ст}} r \varphi + r^2 \varphi^2), \end{aligned}$$

где  $s_D = r \sin \varphi \approx r\varphi$  – в силу малых отклонений.

Тогда

$$\Pi = -2m_1 g r \varphi + \frac{c}{2} (2\lambda_{\text{ст}} r \varphi + r^2 \varphi^2). \quad (4)$$

4. Определим консервативную составляющую обобщенной силы:

$$Q_\varphi^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 2m_1 g r - c\lambda_{\text{ст}} r - cr^2 \varphi. \quad (5)$$

В положении равновесия  $\varphi = 0$ ,  $Q_\varphi^{\Pi} = 0$ .

Из этого условия определим статическую деформацию:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 2m_1 g r - c\lambda_{\text{ст}} r = 0 \Rightarrow \lambda_{\text{ст}} = \frac{2m_1 g}{c}. \quad (6)$$

Исключим из (5)  $\lambda_{\text{ст}}$ , подставив (6).

Тогда

$$Q_\varphi^{\Pi} = -cr^2 \varphi \quad (7)$$

**П р и м е ч а н и е.** Можно было уравнение (4) с учетом выражения (6) представить в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} c_\varphi \varphi^2, \quad (8)$$

и продифференцировать по  $\varphi$ .

Тогда

$$Q_\varphi^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -c_\varphi \varphi, \quad (9)$$

где  $c_\varphi = cr^2$  – обобщенный коэффициент жесткости.

5. Определим диссипативную функцию  $\Phi$ . Так как действует только одна сила сопротивления, то

$$\Phi = \frac{\mu V_B^2}{2} = \frac{\mu(\dot{\phi}2r)^2}{2} = \frac{1}{2}\mu_\phi\dot{\phi}^2, \quad (10)$$

где  $\mu_\phi = 4r^2\mu$  — обобщенный коэффициент сопротивления.

6. Определим обобщенную силу сопротивления  $Q^C$  по формуле (8.22) с учетом выражения (10):

$$Q_\phi^C = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\phi}} = -\mu_\phi\dot{\phi}. \quad (11)$$

Подставим (3), (9) и (11) в (1):

$$a_\phi\ddot{\phi} = -\mu_\phi\dot{\phi} - c_\phi\phi.$$

Перенесем все члены в левую часть равенства и разделим на  $a_\phi$ , получим

$$\ddot{\phi} + 2n\dot{\phi} + k^2\phi = 0,$$

где  $2n = \frac{\mu_\phi}{a_\phi}$ ;  $k^2 = \frac{c_\phi}{a_\phi}$ .

$$n = \frac{\mu_\phi}{2a_\phi} = \frac{4r^2\mu}{2 \cdot 9mr^2} = \frac{2}{9} \frac{\mu}{m} \text{ (рад/с);}$$

$$k = \sqrt{\frac{cr^2}{9mr^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ (рад/с).}$$

При  $n < k$  система будет совершать затухающие колебания. Коэффициент сопротивления  $\mu$  демпфера в этом случае должен удовлетворять условию  $\mu < 1,5\sqrt{mc}$ . При  $n \geq k$  движение системы будет затухающим апериодическим (см. п. 2.3).

## 8.5. Вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы

Рассмотрим движение механической системы возле положения равновесия при действии на нее консервативных сил, сил вязкого линейного сопротивления и возмущающих сил, изменяющихся с течением времени по гармоническому закону.

В данном случае уравнение Лагранжа второго рода имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{\Pi} + Q^C + Q^B, \quad (8.25)$$

где с учетом приведенного ранее  $\frac{\partial T}{\partial q} = 0$ ;  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = a_q \ddot{q}$ ;

$$Q^{\Pi} = -c_q q; \quad Q^C = -\mu_q \dot{q}.$$

Обобщенную силу  $Q^B$  определим по формуле (8.5) при условии, что на систему действует одна возмущающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону (2.5):

$$Q^B = F_0 \sin pt. \quad (8.26)$$

Подставив в (8.25) приведенные выше соотношения, получим

$$a_q \ddot{q} = -\mu_q \dot{q} - c_q q + F_0 \sin pt.$$

После преобразования с учетом обозначений формулы (8.24)

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h \sin pt, \quad (8.27)$$

где  $h = \frac{F_0}{a_q}$  — постоянная величина, имеющая размерность уг-

лового или линейного ускорения в зависимости от того, что выбрано в качестве обобщенной координаты.

Уравнение (8.27) — дифференциальное уравнение вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы при наличии линейного сопротивления.

Положив в уравнении (8.27)  $n = 0$ , получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний механической системы без учета сопротивления:

$$\ddot{q} + k^2 q = h \sin pt. \quad (8.28)$$

Решение уравнений вида (8.27) и (8.28) подробно рассмотрено в пп. 2.4, 2.5. Там же приведено подробное исследование основных характеристик вынужденных колебаний — амплитуды и фазы.

## Вопросы и задания для самоконтроля

1. Каковы особенности положения равновесия механической системы?
2. Сформулируйте теорему Лагранжа – Дирихле об устойчивости положения равновесия механической системы?
3. Какой вид имеет критерий Лагранжа – Дирихле устойчивости положения равновесия механической системы?
4. В чем особенность описания колебаний механических систем? Виды колебаний систем.
5. Когда колебания системы являются малыми? Что для этого необходимо?
6. Как определяются обобщенная консервативная сила? обобщенная сила сопротивления? обобщенная возмущающая сила?
7. Какой вид имеют дифференциальные уравнения свободных и вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы без учета и с учетом сопротивления?
8. В чем отличие дифференциальных уравнений колебания механической системы от дифференциальных уравнений колебаний материальной точки?

---

## ГЛАВА 9. ТЕОРИЯ УДАРА

---

### 9.1. Явление удара. Основные допущения при ударе

**Ударом** называется взаимодействие тел, в результате которого за ничтожно малый промежуток времени скорости точек тела изменяются на конечную величину.

*Ударные явления* можно рассматривать как разовое наложение или снятие связей (например, столкновение поступательно движущегося тела с другим неподвижным телом) либо периодическое наложение или снятие связей (например, ковка, штамповка, забивка свай и т.п.).

*Ударная сила*  $\bar{F}_{\text{уд}}$  – это сила, возникающая при мгновенном взаимодействии тел, достигающая больших значений за время удара.

*Временем удара* называется ничтожно малый промежуток времени  $\tau$  действия ударной силы.

Так как ударные силы очень велики и за время удара могут изменяться в значительных пределах — возрастать от нуля до максимального значения и затем падать до нуля, то в качестве меры взаимодействия тел при ударе рассматриваются не сами силы, а их импульсы.

*Ударным импульсом* называют векторную величину

$$\bar{S}_{\text{уд}} = \int_0^{\tau} \bar{F}_{\text{уд}} dt. \quad (9.1)$$

Ударный импульс имеет конечную величину. Импульс обычных (неударных) сил за время удара является малой величиной по сравнению с ударным импульсом. В связи с этим в теории удара принимают следующие *допущения*:

- скорости материальных точек при действии ударной силы мгновенно изменяются на конечную величину;
- импульсами неударных сил и перемещениями точек за время удара как ничтожно малыми величинами пренебрегают.

## 9.2. Действие ударной силы на материальную точку

Пусть точка  $M$  массой  $m$  движется на участке  $AB$  траектории под действием некоторых сил; их равнодействующая равна  $\bar{F}$  (рис. 176). В некоторый момент времени в положении  $B$  на точку подействовала ударная сила  $\bar{F}_{\text{уд}}$  в течение времени  $\tau$ . В результате этого скорость  $\bar{V}$

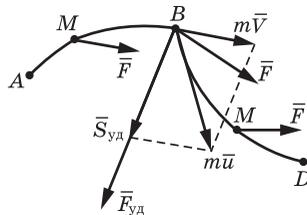


Рис. 176

точки до удара стала равной  $\bar{u}$  после удара, а траектория получила излом и точка перешла на траекторию  $BD$ .

Применив теорему об изменении количества движения материальной точки за время  $\tau$  удара, получим

$$m\bar{u} - m\bar{V} = \int_0^{\tau} \bar{F}_{\text{уд}} dt + \int_0^{\tau} \bar{F} dt. \quad (9.2)$$

Так как  $\int_0^{\tau} \bar{F} dt \equiv \bar{F}\tau \equiv 0$ , а  $\int_0^{\tau} \bar{F}_{\text{уд}} dt = \bar{S}_{\text{уд}}$ , то

$$m\bar{u} - m\bar{V} = \bar{S}_{\text{уд}}. \quad (9.3)$$

**Теорема**

Изменение количества движения материальной точки за время удара равно ударному импульсу, приложенному к точке.

Уравнение (9.3) является основным уравнением теории удара.

### 9.3. Общие теоремы динамики при ударе

**Теорема об изменении количества движения механической системы**

Изменение количества движения механической системы за время удара равно геометрической сумме внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы.

*Доказательство.* Для  $k$ -й точки системы на основании (9.3)

$$m_k \bar{u}_k - m_k \bar{V}_k = \bar{S}_{k\text{уд}}^e + \bar{S}_{k\text{уд}}^i, \quad (9.4)$$

где  $\bar{S}_{k\text{уд}}^e$ ,  $\bar{S}_{k\text{уд}}^i$  – ударные импульсы внешних и внутренних сил, приложенных к этой точке.

Для механической системы просуммируем равенство (9.4) по всем точкам системы:

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{u}_k - \sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k = \sum_{k=1}^n \bar{S}_{k\text{уд}}^e + \sum_{k=1}^n \bar{S}_{k\text{уд}}^i. \quad (9.5)$$

По свойству внутренних сил  $\sum_{k=1}^n \bar{S}_{k\text{уд}}^i = 0$ .

Тогда

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_{k\text{уд}}^e, \quad (9.6)$$

где  $\bar{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \bar{u}_k$  – количество движения системы после удара;

$\bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k$  – количество движения системы до удара.

Уравнение (9.4) в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$\begin{aligned} Q_x - Q_{0_x} &= \sum_{k=1}^n S_{k_{ydx}}^e ; Q_y - Q_{0_y} = \sum_{k=1}^n S_{k_{ydy}}^e ; \\ Q_z - Q_{0_z} &= \sum_{k=1}^n S_{k_{ydz}}^e . \end{aligned} \quad (9.7)$$

**Теорема о движении центра масс системы**

Изменение скорости движения центра масс системы за время удара равно сумме внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, деленной на массу системы.

**Доказательство.** Выразим количество движения  $\bar{Q}$  и  $\bar{Q}_0$  системы через скорость центра масс:

$$\bar{Q} = M\bar{U}_C ; \bar{Q}_0 = M\bar{V}_C . \quad (9.8)$$

Тогда уравнение (9.4) примет вид

$$M(\bar{U}_C - \bar{V}_C) = \sum_{k=1}^n \bar{S}_{k_{yд}}^e . \quad (9.9)$$

Отсюда

$$\bar{U}_C - \bar{V}_C = \left( \sum_{k=1}^n \bar{S}_{k_{yд}}^e \right) / M . \quad (9.10)$$

Векторное равенство (9.9) в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$\begin{aligned} M(U_{C_x} - V_{C_x}) &= \sum_{k=1}^n S_{k_{ydx}}^e ; M(U_{C_y} - V_{C_y}) = \sum_{k=1}^n S_{k_{ydy}}^e ; \\ M(U_{C_z} - V_{C_z}) &= \sum_{k=1}^n S_{k_{ydz}}^e . \end{aligned} \quad (9.11)$$

**Следствия из теорем:**

- если  $\sum_{k=1}^n \bar{S}_{k_{yд}}^e = 0$ , то  $\bar{Q} = \bar{Q}_0$  и  $\bar{U}_C = \bar{V}_C$ , т.е. если векторная сумма внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, равна нулю, то количество движения системы и скорость центра масс не изменяются.

кам системы, равна нулю, то количество движения системы и скорость ее центра масс не изменяются;

- если  $\sum_{k=1}^n \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e = 0$ , то  $Q_x = Q_{0x}$  и  $U_{Cx} = V_{Cx}$ , т.е. если сумма проекций внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, на какую-либо ось равна нулю, то проекции количества движения системы и скорости ее центра масс на эту ось не изменяются.

**Теорема об изменении кинетического момента системы**

- Теорема моментов относительно центра

Изменение кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра за время удара равно геометрической сумме моментов внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно того же центра.

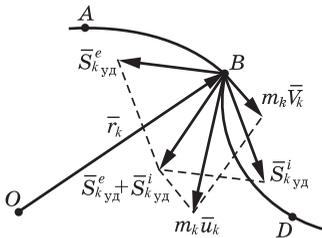


Рис. 177

**Доказательство.** Умножим векторно радиус-вектор  $\bar{r}_k$ , который остается одним и тем же до удара и после удара (рис. 177), на векторное равенство (9.4):

$$\bar{r}_k \times (m_k \bar{u}_k - m_k \bar{v}_k) = \bar{r}_k \times \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e + \bar{r}_k \times \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^i.$$

Суммируя по всем точкам системы, находим:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{u}_k - \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e + \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^i,$$

где  $\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{u}_k = \bar{L}_O$  – кинетический момент системы относи-

тельно центра  $O$  после удара;  $\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \bar{L}_O^H$  – кинетический момент системы относительно центра  $O$  до удара (началь-

ный момент);  $\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O \left( \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e \right)$  – геометрическая

сумма моментов внешних ударных импульсов относительно того же центра  $O$ ;  $\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^i = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O \left( \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^i \right) = 0$  – по свойству внутренних сил.

В итоге

$$\bar{L}_O - \bar{L}_O^H = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O \left( \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e \right). \quad (9.12)$$

• *Теорема моментов относительно оси*

Изменение кинетического момента механической системы относительно некоторой оси за время удара равно алгебраической сумме моментов внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно той же оси.

Спроецировав векторное равенство (9.12) на оси декартовых координат, получим

$$\begin{aligned} L_x - L_x^H &= \sum_{k=1}^n M_x \left( \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e \right); \quad L_y - L_y^H = \sum_{k=1}^n M_y \left( \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e \right); \\ L_z - L_z^H &= \sum_{k=1}^n M_z \left( \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e \right). \end{aligned} \quad (9.13)$$

**Следствия из теорем:**

• если  $\sum_{k=1}^n \bar{M}_O \left( \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e \right) = 0$ , то  $\bar{L}_O = \bar{L}_O^H = \text{const}$ , т.е. если геометрическая сумма моментов внешних ударных импульсов относительно некоторого центра равна нулю, то кинетический момент механической системы относительно того же центра при ударе не изменяется;

• если, например,  $\sum_{k=1}^n M_z \left( \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e \right) = 0$ , то  $L_z = L_z^H = \text{const}$ , т.е. кинетический момент относительно этой оси  $z$  остается величиной постоянной.

Данные следствия выражают закон сохранения кинетического момента относительно некоторых центра и оси при ударе.

Если удар испытывает твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси  $z$ , то

$$L_z = I_z \omega; \quad L_z^H = I_z \omega_0,$$

где  $I_z$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ ;  $\omega$  и  $\omega_0$  — соответственно угловая скорость вращения тела после удара и до удара, то (9.13), примет вид

$$I_z(\omega - \omega_0) = \sum_{k=1}^n M_z \left( \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e \right),$$

или

$$\omega - \omega_0 = \sum_{k=1}^n M_z \left( \bar{S}_{k_{\text{уд}}}^e \right) / I_z. \quad (9.14)$$

**Пример 62.** К концу висящего однородного стержня массой  $m$  и длиной  $l$  прикладывается ударный импульс  $\bar{S}$ . Определить, на какой угол от первоначального положения отклонится стержень (рис. 178, а).

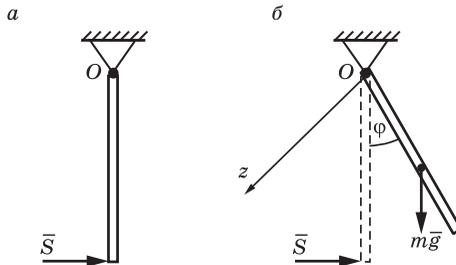


Рис. 178

**Решение.** Определим сначала угловую скорость стержня под действием приложенного ударного импульса, применив теорему об изменении кинетического момента относительно оси вращения в виде (9.14):

$$I_z(\omega - \omega_0) = \sum_{k=1}^n M_z \left( \bar{S}_{\text{уд}}^e \right),$$

где  $I_z = \frac{ml^2}{3}$ ;  $\omega_0 = 0$ ;  $\sum_{k=1}^n M_z \left( \bar{S}_{\text{уд}} \right) = S \cdot l$ .

Тогда

$$\frac{ml^2}{3} \omega = S \cdot l \Rightarrow \omega = \frac{3S}{ml}.$$

Для определения угла  $\varphi$  (рис. 178, б) применим теорему об изменении кинетической энергии, принимая во внимание, что стержень будет отклоняться до тех пор, пока его угловая скорость, полученная вследствие удара, при дальнейшем движении не станет равной нулю:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e.$$

Здесь

$$T = 0; T_0 = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{ml^2\omega^2}{6};$$

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = A(mg) = -mg \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi).$$

Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{ml^2\omega^2}{6} &= -\frac{1}{2}mgl(1 - \cos \varphi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \varphi &= 1 - \frac{l\omega^2}{3g} = 1 - \frac{l}{3g} \left( \frac{3S}{ml} \right)^2 = 1 - \frac{3S^2}{glm^2}. \end{aligned}$$

Угол  $\varphi$  может принимать значения  $0 < \varphi \leq \pi$ . Определим величину ударного импульса, при котором стержень повернется на угол  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и  $\varphi = \pi$ .

При  $\varphi = \frac{\pi}{2}$   $\cos \varphi = 0$ , или  $1 - \frac{3S^2}{glm^2} = 0 \Rightarrow S = mg\sqrt{2l/3g}$ . Пусть  $m = 10$  кг,  $l = 1$  м, тогда

$$S = 9,8 \cdot 10 \cdot \sqrt{\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 9,8}} = 98 \cdot 0,184 = 18 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

При  $\varphi = \pi$   $\cos \varphi = -1$ , или  $1 - \frac{3S^2}{glm^2} = -1 \Rightarrow S = mg\sqrt{4l/3g}$ , т.е. в этом

случае ударный импульс должен быть больше в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с первым случаем.

## 9.4. Удар материальной точки о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления при ударе

При ударе о неподвижную поверхность возможны прямой удар и косой.

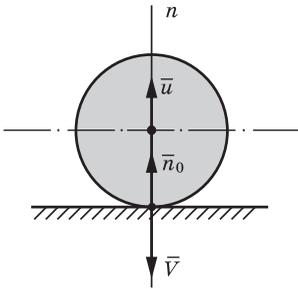


Рис. 179

Удар называют *прямым*, если скорость точки  $\bar{V}$  перед ударом направлена по нормали к поверхности в точке удара (рис. 179).

После удара материальная точка отделится от поверхности с некоторой скоростью  $\bar{u}$ , направленной по этой же нормали.

Коэффициентом восстановления при ударе о неподвижную поверхность называют отношение числового значения скорости  $\bar{u}$  после удара

к числовому значению скорости  $\bar{V}$  до удара, т.е.

$$k = \frac{u}{V}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (9.15)$$

При  $k = 1$  удар называется *абсолютно упругим* ( $u = V$ ); если  $k = 0$ , то удар — *абсолютно неупругий* ( $u = 0$ ). При  $0 < k < 1$  удар называется *частично упругим*. Коэффициент восстановления зависит от материала соударяющихся тел. Например, при ударе деревянного шарика по дереву  $k = 1/2$ , стального по стали  $k = 5/9$ , стеклянного по стеклу  $k = 15/16$ .

Процесс удара точки о неподвижную поверхность можно разделить на две фазы: первая — *фаза деформации*, вторая — *фаза восстановления*.

В качестве примера рассмотрим удар шара о неподвижную плиту (рис. 180).

Фаза деформации продолжительностью  $\tau_1$  отсчитывается от момента соприкосновения шара с плоскостью до момента наибольшей деформации. В начале этой фазы скорость шара,

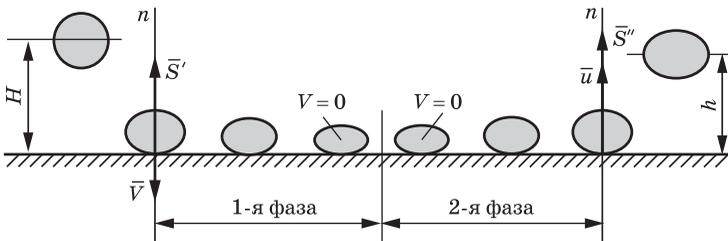


Рис. 180

падающего с высоты  $H$ ,  $V = \sqrt{2gH}$ , скорость шара в конце этой фазы равна нулю. При этом кинетическая энергия шара переходит в потенциальную энергию упругой деформации ( $T_0 \rightarrow \Pi$ ), частично теряясь на нагревание тел и на необратимое изменение формы шара.

Фаза восстановления продолжительностью  $\tau_2$  отсчитывается от момента наибольшей деформации до момента отделения шара от поверхности с некоторой скоростью  $\bar{u}$ . При этом накопленная потенциальная энергия переходит в кинетическую ( $\Pi \rightarrow T$ ,  $T \leq T_0$ ), а шар частично или полностью восстанавливает свою форму.

Общее время удара

$$\tau = \tau_1 + \tau_2. \quad (9.16)$$

При  $k = 0$   $\tau_2 = 0$ , т.е. удар состоит из одной фазы.

Скорость  $u$  шара после удара найдем, зная высоту  $h$  подъема тела после удара, по формуле  $u = \sqrt{2gh}$ . Тогда коэффициент восстановления

$$k = \frac{u}{V} = \sqrt{\frac{h}{H}}. \quad (9.17)$$

Удар называют *косым*, если скорость точки перед ударом направлена под некоторым углом  $\alpha$  к нормали поверхности (рис. 181). Угол  $\alpha$  называют *углом падения*. Скорость  $\bar{u}$  после удара составляет с нормалью некоторый угол  $\beta$ , называемый *углом отражения*. Если плоскость гладкая, то ударный импульс  $\bar{S}$  будет направлен по нормали.

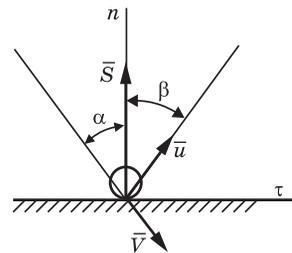


Рис. 181

Запишем основное уравнение (9.3) теории удара в проекции на нормаль  $n$  и касательную  $\tau$  к поверхности:

$$mu_n - mV_n = S; \quad (9.18)$$

$$mu_\tau - mV_\tau = 0 \Rightarrow u_\tau = V_\tau,$$

где  $u_n = u \cos \beta$ ;  $V_n = -V \cos \alpha$ ;  $u_\tau = u \sin \beta$ ;  $V_\tau = V \sin \alpha$ . Следовательно,  $u \sin \beta = V \sin \alpha$ .

С учетом (9.15) и (9.18) и полученных соотношений найдем коэффициент восстановления  $k$  и ударный импульс  $S$ , полагая, что коэффициент восстановления определяется нормальными составляющими скорости шара и не зависит от касательных составляющих:

$$k = \frac{|u_n|}{|V_n|} = \frac{u \cos \beta}{V \cos \alpha} = \frac{V \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cdot V \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}; \quad (9.19)$$

$$\begin{aligned} S &= mu \cos \beta + mV \cos \alpha = m \frac{V \sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta + mV \cos \alpha = \\ &= mV \cos \alpha \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} + 1 \right) \Rightarrow S = mV(k + 1) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Коэффициент восстановления можно выразить через ударный импульс. Для этого к первой и второй фазам удара применим основное уравнение теории удара (9.3) в проекции на нормаль к поверхности (см. рис. 180).

Для 1-й фазы

$$m \cdot 0 - (-mV) = S' \Rightarrow V = \frac{S'}{m}.$$

Для 2-й фазы

$$mu - m \cdot 0 = S'' \Rightarrow u = \frac{S''}{m}.$$

Тогда

$$k = \frac{u}{V} = \frac{S''}{S'}. \quad (9.21)$$

## 9.5. Удар двух тел

Рассмотрим простейший случай – прямой центральный удар двух тел (например, шаров), движущихся поступательно (рис. 182).

Удар называется *прямым центральным*, если общая нормаль к поверхности тел в точке их касания проходит через их центры масс, а скорости центров масс в начале удара направлены по этой нормали, называемой *линией удара*. Обозначим массу уда-

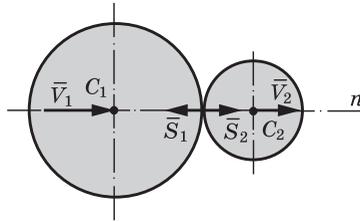


Рис. 182

ряющего тела  $m_1$ , а массу ударяемого  $m_2$ ; скорости их центров масс в начале удара  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$ , а в конце удара  $\bar{u}_1$  и  $\bar{u}_2$  и направлены по линии удара. Для того чтобы произошел удар, необходимо  $V_1 > V_2$ , а после удара  $-u_2 \geq u_1$ , так как ударившее тело не может обогнать ударяемое.

Требуется определить коэффициент восстановления  $k$ , скорости  $u_1$  и  $u_2$  шаров после удара и ударный импульс  $S$ .

Для этого удар разделим на две фазы:

- 1-я — от момента касания шаров до момента выравнивания их скоростей после удара;
- 2-я — от момента равенства их скоростей  $u$  после удара до момента их разделения и начала движения со скоростями  $u_1$  и  $u_2$ .

К каждому шару для каждой фазы применим основное уравнение теории удара в проекции на нормаль, направленную в сторону движения шаров,

$$\left. \begin{aligned} m_1 u - m_1 V_1 &= -S'_1 \\ m_1 u_1 - m_1 u &= -S''_1 \\ m_2 u - m_2 V_2 &= S'_2 \\ m_2 u_2 - m_2 u &= S''_2 \end{aligned} \right\}, \quad (9.22)$$

где  $S'_1, S'_2$  — ударные импульсы, приложенные к первому и второму шарам, в конце 1-й фазы удара;  $S''_1, S''_2$  — то же в конце 2-й фазы.

Присоединим к этим уравнениям выражения для коэффициента восстановления с учетом (9.21)

$$k = \frac{S_1''}{S_1'} = \frac{u_1 - u}{u - V_1}; \quad k = \frac{S_2''}{S_2'} = \frac{u_2 - u}{u - V_2}. \quad (9.23)$$

При рассмотрении соударяющихся тел, принадлежащих одной системе, ударные импульсы являются внутренними и их сумма равна нулю, а внешние ударные импульсы отсутствуют. Поэтому количество движения за время удара сохраняется, т.е.

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (9.24)$$

Полученные семь уравнений (9.22) – (9.24) позволяют решить поставленную задачу. Для определения коэффициента восстановления используем уравнения (9.23), исключив из них общую скорость  $u$  шаров. После соответствующих преобразований получим

$$k = \frac{u_2 - u_1}{V_1 - V_2} = -\frac{u_1 - u_2}{V_1 - V_2}, \quad (9.25)$$

где  $V_1 - V_2$ ,  $u_1 - u_2$  – относительные скорости шаров до и после удара соответственно. Для определения скоростей  $u_1$  и  $u_2$  после удара используем уравнения (9.24) и (9.25).

Из уравнения (9.25)  $u_2 = u_1 + k(V_1 - V_2)$ .

Подставим  $u_2$  в уравнение (9.24) и выполним преобразования:

$$\begin{aligned} m_1 V_1 + m_2 V_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_1 + k m_2 (V_1 - V_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_2 - \frac{k m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2) = \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} [V_2 - k(V_1 - V_2)] = \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} [V_2(1+k) - kV_1 + V_1 - V_1] = \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} [V_2(1+k) - V_1(1+k) + V_1] = \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1+k)(V_2 - V_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_1 = V_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1+k)(V_2 - V_1). \end{aligned}$$

Так как  $V_1 > V_2$ , то

$$u_1 = V_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1+k)(V_1 - V_2). \quad (9.26)$$

Используя те же уравнения (9.24) и (9.25), аналогично найдем скорость второго шара:

$$u_2 = V_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(1+k)(V_1 - V_2). \quad (9.27)$$

Так как  $|\bar{S}_1| = |\bar{S}_2| = S$ , то для определения ударного импульса применим теорему об изменении количества движения для одного из шаров, например первого, в проекции на линию удара:

$$m_1 u_1 - m_1 V_1 = -S$$

и с учетом уравнения (9.26) получим

$$S = (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2). \quad (9.28)$$

В случае абсолютно упругого удара ( $k = 1$ ) формулы (9.26), (9.27) и (9.28) принимают вид

$$u_1 = V_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2); \quad u_2 = V_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2);$$

$$S = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2). \quad (9.29)$$

Из формул (9.29) при  $m_1 = m_2 = m$  получаем  $u_1 = V_2$ ,  $u_2 = V_1$ , т.е. соударяющиеся тела обмениваются скоростями, а импульс равен

$$S = m(V_1 - V_2). \quad (9.30)$$

Если второй шар двигался до удара со скоростью  $V_2$  навстречу первому шару, то в формулах (9.26) – (9.30)  $V_2$  следует рассматривать как проекцию на ось, направленную в сторону движения первого шара, и брать ее со знаком минус.

При абсолютно неупругом ударе ( $k = 0$ ) скорости  $u_1$  и  $u_2$  шаров после удара будут одинаковыми и, как следует из (9.26) и (9.27), равными:

$$u_1 = u_2 = u = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.31)$$

Модуль ударного импульса в этом случае определяется по формуле

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2). \quad (9.32)$$

### 9.6. Теорема об изменении кинетической энергии при ударе двух тел. Теоремы Карно

Найдем изменение кинетической энергии при прямом центральном ударе двух тел (шаров), движущихся поступательно (рис. 182):

$$T_0 - T = \left( \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} \right) - \left( \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \right). \quad (9.33)$$

Возведя в квадрат выражения (9.26) и (9.27) для скоростей  $u_1$  и  $u_2$  тел после удара и подставив полученные выражения в (9.33), после сокращения слагаемых  $\frac{m_1 V_1^2}{2}$  и  $\frac{m_2 V_2^2}{2}$  получим:

$$\begin{aligned} T_0 - T &= (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2) V_1 - \\ &- (1+k)^2 \frac{m_1 m_2^2}{2(m_1 + m_2)^2} (V_1 - V_2)^2 - \\ &- (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2) V_2 - \\ &- (1+k)^2 \frac{m_2 m_1^2}{2(m_1 + m_2)^2} (V_1 - V_2)^2 = \\ &= (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2)^2 - \\ &- (1+k)^2 \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)^2} (V_1 - V_2)^2 \cdot (m_1 + m_2) = \\ &= (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2)^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} (1+k)^2 \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow T_0 - T = (1-k^2) \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (V_1 - V_2)^2. \quad (9.34) \end{aligned}$$

При  $k = 1$   $T_0 = T$ , т.е. потери кинетической энергии не происходит.

При  $k = 0$  потеря кинетической энергии равна

$$T_0 - T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2)^2. \quad (9.35)$$

Потерю кинетической энергии можно также определить через потерянные скорости по теоремам Карно.

Для этого преобразуем формулу (9.34), используя выражение (9.32), для ударного импульса  $S$  при  $k = 0$ . Представим уравнение (9.34) в виде

$$T_0 - T = (1 - k^2) \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)^2}{m_1 + m_2}, \quad (9.36)$$

а выражение (9.32) возведем в квадрат:

$$S^2 = \frac{m_1^2 m_2^2 (V_1 - V_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (9.37)$$

Запишем уравнение (9.37), учитывая, что  $S = |\bar{S}_1| = |\bar{S}_2|$ , в виде

$$\frac{m_1 m_2 (V_1 - V_2)^2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2) S^2}{m_1 m_2} = \frac{S_1^2}{m_1} + \frac{S_2^2}{m_2}. \quad (9.38)$$

Подставим полученные выражения (9.38) в уравнение (9.36), получим

$$T_0 - T = (1 - k^2) \left( \frac{S_1^2}{2m_1} + \frac{S_2^2}{2m_2} \right). \quad (9.39)$$

Выразим из уравнений формулы (9.22) ударные импульсы  $S_1$  и  $S_2$ , приложенные к первому и второму шарам соответственно:

$$S_1 = m_1 (V_1 - u); \quad S_2 = m_2 (u - V_2). \quad (9.40)$$

Подставим выражения (9.40) в уравнение (9.39), получим

$$T_0 - T = (1 - k^2) \left[ \frac{m_1 (V_1 - u)^2}{2} + \frac{m_2 (V_2 - u)^2}{2} \right]. \quad (9.41)$$

Из формул (9.23) найдем скорость  $u$ , выразим ее через  $u_1$  и  $V_1$ , а также через  $u_2$  и  $V_2$ , получим соответственно

$$u = \frac{u_1 + kV_1}{1+k}; u = \frac{u_2 + kV_2}{1+k}. \quad (9.42)$$

С учетом этого преобразуем в формуле (9.41) выражения  $V_1 - u$  и  $V_2 - u$ :

$$\left. \begin{aligned} V_1 - u &= V_1 - \frac{u_1 + kV_1}{1+k} = \frac{V_1 - u_1}{1+k}; \\ V_2 - u &= V_2 - \frac{u_2 + kV_2}{1+k} = \frac{V_2 - u_2}{1+k}. \end{aligned} \right\} \quad (9.43)$$

Подставив выражения (9.43) в уравнение (9.41), получим так называемую *вторую (общую) теорему Карно* при упругом ударе двух тел:

$$T_0 - T = \frac{1-k}{1+k} \left[ \frac{1}{2} m_1 (V_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2 - u_2)^2 \right], \quad (9.44)$$

где  $(V_1 - u_1)$  и  $(V_2 - u_2)$  — потерянные скорости соударяющихся тел.

Из этого выражения для абсолютно неупругого удара ( $k = 0$ ), учитывая, что  $u_1 = u_2 = u$  (см. 9.31), получаем *первую теорему Карно*:

$$T_0 - T = \frac{1}{2} m_1 (V_1 - u)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2 - u)^2. \quad (9.45)$$

### **Формулировка**

Кинетическая энергия, потерянная системой двух тел при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями.

### **Частные случаи этой теоремы**

Пусть  $V_2 = 0$  (ударяемое тело неподвижно). Тогда

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2;$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left( \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_0. \quad (9.46)$$

Возможны два случая:

- $m_1 \gg m_2$ , тогда  $T \approx T_0$ , т.е. потери кинетической энергии не происходит, вся кинетическая энергия при ударе расходуется на сообщение скорости движения ударяемому телу (забивка свай, гвоздей и т.п.);

- $m_1 \ll m_2$  тогда  $\frac{m_1}{m_1 + m_2} \approx 0$ , следовательно,  $T \approx 0$ , т.е. в этом случае при ударе кинетическая энергия теряется почти полностью и затрачивается на деформацию ударяемого тела (ковка металла, клепка и т.п.) и нагрев соударяющихся тел.

Примечание. Формулу (9.45) можно вывести, используя соотношение

$$T_0 - T = T_0 - 2T + T,$$

где  $T_0 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$ ;  $T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$ ;  $u = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}$ .

Тогда

$$T_0 - T = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u \cdot \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2}m_1u^2 + \frac{1}{2}m_2u^2 = \frac{1}{2}m_1(V_1 - u)^2 + \frac{1}{2}m_2(V_2 - u)^2.$$

## 9.7. Центр удара

**Центр удара** — точка твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения, характеризующаяся тем, что приложенный в ней ударный импульс не вызывает ударных реакций в опорах оси. Для этого ударный импульс должен быть приложен с той стороны оси вращения, где находится центр масс тела, на расстоянии от оси, определяемом по формуле

$$h = \frac{I_z}{Md}, \quad (9.47)$$

где  $I_z$  — момент инерции тела относительно оси вращения;  $M$  — масса тела;  $d$  — расстояние от оси вращения до центра масс тела.

**Пример 63.** Однородный стержень массой  $m_1$  и длиной  $l$ , вращаясь вокруг горизонтальной оси, падает на точечную опору. На конце стержня закреплен груз массой  $m_2$ , размерами которого по сравнению с длиной стержня можно пренебречь. Определить, на каком расстоянии от оси вращения следует расположить опору, чтобы не возникли ударные реакции в опоре  $O$ .

**Решение.** Импульс  $\vec{S}$  ударной реакции в точке  $K$  (рис. 183) направлен перпендикулярно к плоскости  $Oy_1z_1$ , проходящей через центр масс  $C$  и ось вращения  $z$ , являющуюся главной осью инерции.

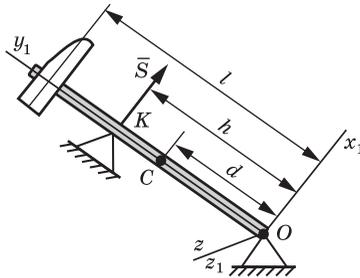


Рис. 183

Положение центра удара определяем по формуле (9.47):

$$OK = h = \frac{I_{z_{\text{пр}}}}{md},$$

где  $I_{z_{\text{пр}}} = \frac{m_1 l^2}{3} + m_2 l^2 = \frac{l^2}{3} (m_1 + 3m_2)$  — приведенный момент инерции от-

носительно оси  $z$ ;  $d = OC = \frac{m_1 \frac{l}{2} + m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{l}{2} \cdot \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2}$  — расстояние до центра масс от оси вращения.

Тогда

$$h = \frac{I_{z_{\text{пр}}}}{Md} = \frac{l^2 (m_1 + 3m_2)}{3 \cdot (m_1 + m_2) \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2}} = \frac{2}{3} l \frac{m_1 + 3m_2}{m_1 + 2m_2}.$$

Пусть  $m_2 \gg m_1$ , тогда  $m_1/m_2 \cong 0 \Rightarrow \Rightarrow h \cong l$ , т.е. если в точке  $O$  стержень (рукоятка молота) будет удерживаться рукой, то при ударе молотом по неподвижному телу (рис. 184) в руке не возникнут ударные силы. При этом величина силы удара по наковальне с уменьшением  $l$  будет уменьшаться, а ударные импульсы в руке не будут ощущаться.

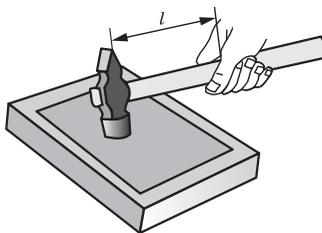


Рис. 184

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какое явление называется ударом?
2. Каковы особенности ударной силы?
3. Дайте определение ударному импульсу.
4. Какие допущения вводятся в теории удара?
5. Какой эффект имеет действие ударной силы на материальную точку?
6. Какой вид имеет основное уравнение теории удара?
7. Сформулируйте теорему об изменении количества движения механической системы при ударе в векторной форме.
8. При каком условии количество движения системы и скорость ее центра масс при ударе не изменяются?
9. Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента механической системы при ударе относительно центра? относительно оси?
10. Сформулируйте закон сохранения кинетического момента механической системы относительно оси при ударе.
11. Что называется коэффициентом восстановления при ударе? В каких пределах он может изменяться для различных тел? Как его можно определить опытным путем?
12. Чем характеризуются первая и вторая фазы частично упругого удара?
13. Как определяется коэффициент восстановления при ударе двух движущихся тел?
14. В чем особенности абсолютно неупругого и абсолютно упругого ударов двух тел?
15. При каком ударе двух тел возможна потеря кинетической энергии?
16. Как определяется потеря кинетической энергии при ударе двух тел?
17. Сформулируйте первую и вторую теоремы Карно при ударе двух тел.
18. Что такое потерянная скорость при ударе двух тел?
19. Что такое центр удара?

## ЛИТЕРАТУРА

*Аркуша, А.И.* Руководство к решению задач по теоретической механике / А.И. Аркуша. М., 2004.

*Бать, М.И.* Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2 т. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. Т. 2: Динамика. Изд. 8-е. М., 1991.

*Бутенин, Н.В.* Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. СПб., 2002.

*Добронравов, В.В.* Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. М., 1983.

*Лойцянский, К.Г.* Курс теоретической механики: в 2 ч. / К.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. М., 1955. Ч. 2.

*Мещерский, И.В.* Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. М., 1986.

*Никитин, Н.Н.* Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. М., 1990.

*Тарг, С.М.* Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. М., 2006.

*Федута, А.А.* Теоретическая механика и математические методы / А.А. Федута, А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев. Минск, 2000.

*Яблонский, А.А.* Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. М., 2006.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Введение в динамику .....	4
<b>Глава 1. Динамика материальной точки.....</b>	<b>7</b>
1.1. Законы динамики материальной точки (законы Галилея – Ньютона).....	7
1.2. Дифференциальные уравнения движение материальной точки .....	13
1.3. Две основные задачи динамики для материальной точки и их решение.....	15
1.4. Интегрирование дифференциальных уравнений прямолинейного движения материальной точки.....	20
1.5. Криволинейное движение материальной точки.....	36
1.6. Динамика несвободной материальной точки .....	42
1.7. Динамика относительного движения материальной точки.....	47
<i>Вопросы и задания для самоконтроля.....</i>	<i>54</i>
<b>Глава 2. Прямолинейные колебания материальной точки.....</b>	<b>55</b>
2.1. Виды колебаний.....	55
2.2. Свободные гармонические колебания материальной точки .....	57
2.3. Свободные колебания материальной точки с учетом сопротивления.....	65
2.4. Вынужденные колебания материальной точки без учета сопротивления. Резонанс.....	72
2.5. Вынужденные колебания материальной точки с учетом сопротивления.....	77
2.6. Исследование фазы и амплитуды вынужденных колебаний.....	79
<i>Вопросы и задания для самоконтроля.....</i>	<i>84</i>
<b>Глава 3. Введение в динамику механической системы.....</b>	<b>85</b>
3.1. Основные понятия и определения .....	85
3.2. Дифференциальные уравнения движения механической системы.....	87

3.3. Центр масс механической системы .....	88
3.4. Моменты инерции твердого тела .....	91
3.5. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса – Штейнера) .....	93
3.6. Осевые моменты инерции некоторых однородных тел.....	94
3.7. Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси, проходящей через данную точку. Центробежные моменты инерции .....	101
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i> .....	108
<b>Глава 4. Общие теоремы динамики материальной точки и механической системы</b> .....	109
4.1. Теорема о движении центра масс системы .....	109
4.2. Количество движения материальной точки и механической системы.....	114
4.3. Импульс силы .....	117
4.4. Теорема об изменении количества движения материальной точки .....	119
4.5. Теорема об изменении главного вектора количеств движения механической системы.....	122
4.6. Применение теоремы об изменении количества движения механической системы к сплошной среде. Теорема Эйлера .....	125
4.7. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси.....	127
4.8. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси.....	131
4.9. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и оси .....	137
4.10. Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно центра и оси .....	140
4.11. Теорема Резаля .....	143
4.12. Работа и мощность сил.....	144
4.13. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Теорема Кенига .....	153
4.14. Кинетическая энергия твердого тела в различных частных случаях движения.....	156
4.15. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки .....	159
4.16. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.....	161
4.17. Потенциальное силовое поле и потенциальная энергия.....	166
4.18. Закон сохранения механической энергии материальной точки и механической системы.....	173
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i> .....	174

Глава 5. Принцип Даламбера .....	176
5.1. Силы инерции в динамике материальной точки и механической системы.....	176
5.2. Принцип Даламбера для материальной точки .....	178
5.3. Принцип Даламбера для механической системы.....	179
5.4. Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела.....	181
5.5. Определение с помощью принципа Даламбера реакций связей при несвободном движении материальной точки и механической системы.....	187
<i>Вопросы и задания для самоконтроля.....</i>	<i>193</i>
Глава 6. Динамика твердого тела .....	194
6.1. Дифференциальные уравнения движения твердого тела в простейших случаях .....	194
6.2. Физический маятник.....	199
6.3. Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси.....	202
6.4. Элементарная теория гироскопа .....	214
6.5. Гироскопический момент, гироскопические реакции .....	221
<i>Вопросы и задания для самоконтроля.....</i>	<i>224</i>
Глава 7. Введение в аналитическую механику.....	224
7.1. Основные понятия аналитической механики .....	224
7.2. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа) .....	239
7.3. Применение принципа возможных перемещений к расчету ферм .....	248
7.4. Общее уравнение динамики (принцип Лагранжа – Даламбера) .....	257
7.5. Уравнения Лагранжа второго рода .....	264
7.6. Уравнения Лагранжа для консервативных механических систем. Циклические координаты и интегралы .....	272
<i>Вопросы и задания для самоконтроля.....</i>	<i>276</i>
Глава 8. Малые колебания механических систем.....	277
8.1. Устойчивость положения равновесия механической системы.....	277
8.2. Особенности описания колебания систем.....	280
8.3. Свободные, или собственные, колебания системы с одной степенью свободы без учета сопротивления .....	282
8.4. Влияние линейного сопротивления на движение механической системы с одной степенью свободы вблизи положения равновесия .....	288

8.5. Вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы .....	294
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i> .....	296
<b>Глава 9. Теория удара</b> .....	296
9.1. Явление удара. Основные допущения при ударе .....	296
9.2. Действие ударной силы на материальную точку .....	297
9.3. Общие теоремы динамики при ударе.....	298
9.4. Удар материальной точки о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления при ударе.....	303
9.5. Удар двух тел.....	306
9.6. Теорема об изменении кинетической энергии при ударе двух тел. Теоремы Карно .....	310
9.7. Центр удара .....	313
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i> .....	315
<b>Литература</b> .....	318

Учебное издание

**Горбач Николай Иванович**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.  
ДИНАМИКА**

Учебное пособие

Редактор *Ю.А. Мисюль*  
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*  
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*  
Корректор *В.И. Аверкина*  
Компьютерная верстка *Н.В. Шабуньки*

Подписано в печать 26.10.2012. Формат 84×108/32. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Офсетная печать. Усл. печ. л. 16,8. Уч.-изд. л. 15,03. Тираж 1000 экз. Заказ 353.  
Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».  
ЛИ № 02330/0494062 от 03.02.2009. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.  
E-mail: market@vshph.com. Http://vshph.com.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат имени Я. Коласа».  
ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009. Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.