МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КА**СПИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕХНОЛОГИИ И ИНЖИНИРИНГА ИМ. Ш ЕСЕНОВА**

ИНСТИТУТ МОРСКИХ ТЕХНОЛОГИИ

Кафедра «**ТРАНСПОРТА И ОРГАНИЗАЦИИ ПЕРЕВОЗОК**»

УТЕБАЕВ М.Н.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО СРСП ДЛЯ СТУДЕНТОВ ДНЕВНОГО ОТДЕЛЕНИЯ ИНЖЕНЕРНО- ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Актау - 2010

УДК 531.8
Составитель: Утебаев М.Н. к.ф.-м.н. Теоретическая механика. Задания и методические указания по СРСП для студентов дневного отделения инженерно- технических и технологических специальностей. Актау : КГУТиИ им. Ш. Есенова, 2010, 49 стр.

Рецензент – к.т.н. Айсаев С.У.

Методические указания составлены на основе типовых программ по курсу «Теоретическая механика» для студентов инженерно-технических и технологических специальностей и содержит задания и методические указания по СРСП для студентов дневного отделения.

Рекомендовано к изданию решением Учебно-методического Совета КГУТиИ им. Ш. Есенова.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В различных курсах по механическим, строительным и многим другим специальностям широко используются положения теоретической механики. На основе теорем и принципов механики решаются многие инженерные задачи, осуществляется проектирование новых машин, конструкций и сооружений.

Качественное усвоение курса теоретической механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков в решении задач. Самостоятельное выполнение студентами курсовых заданий является важным средством повышения знаний. При добросовестном отношении к выполнению и защите этой работы студент получает прочные знания по предмету, что способствует формированию творческих умений, обеспечивающих последующее развитие знаний и умений в процессе самостоятельной профессиональной деятельности.

Данная работа содержит задания и методические указания по СРСП для студентов дневного отделения по курсу «Теоретическая механика» для инженерно- технических и технологических специальностей.

Выполнению этих работ должна предшествовать проработка теоретического и практического материала. Облегчить освоение материала и помочь студентам в приобретении навыков решения задач по теоретической механике является основной целью настоящей разработки.

Для каждого контрольного задания приводится пример решения.

При составлении данной методической разработки были использованы "Методические указания и контрольные задания по теоретической механике для студентов-заочников" под редакцией проф. С. М. Тарга

Задача С1.

Жесткая рама (рис. С1.0 – С1.9, табл.С1) закреплена в точке *A* шарнирно, а в точке *B* прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках. В точке *C* к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P=25 кН. На раму действует пара сил с моментом M=100 кНм и две силы значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице С1 (например, в условиях № 1 на раму действует сила F_2 под углом 30^0 к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила F_3 под углом 60^0 к горизонтальной оси, приложенная в точке E, и т. д.).
Определить реакции связей в точках *A* и *B*. При окончательных расчетах принять a=0.5 м.

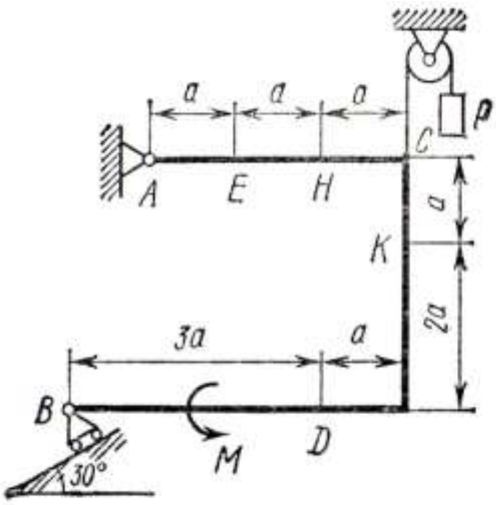


Рис. С1.0

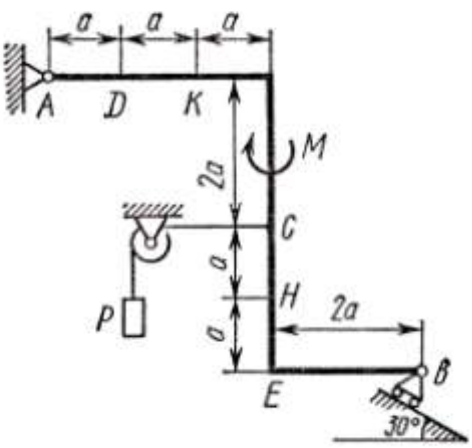


Рис. С1.1

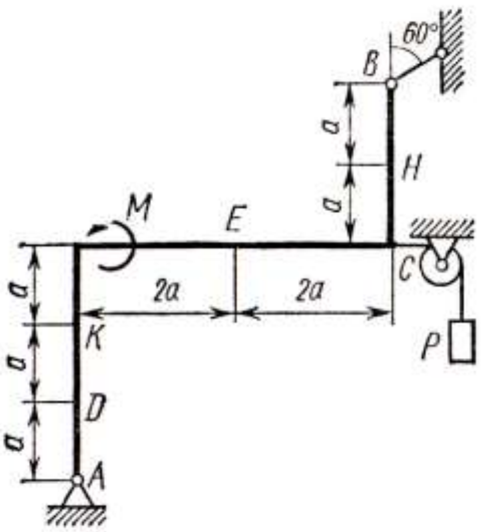


Рис. С1.2

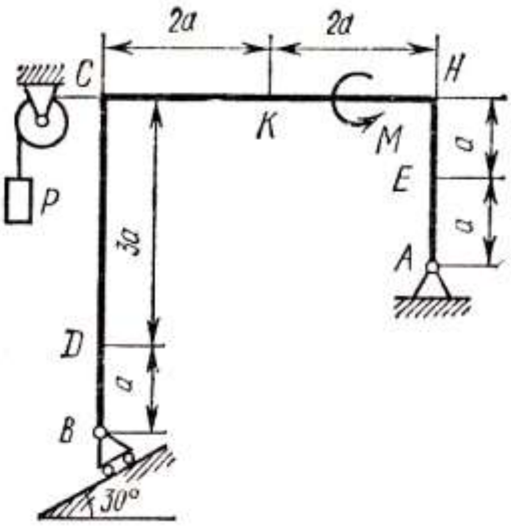


Рис. С1.3

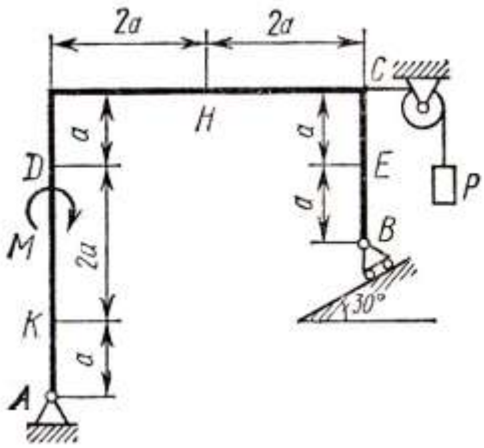


Рис. С1.4

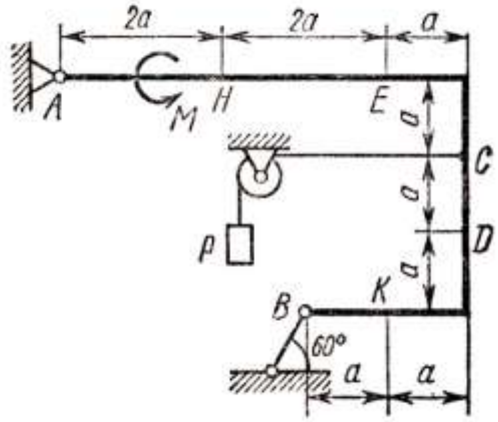


Рис. С1.5

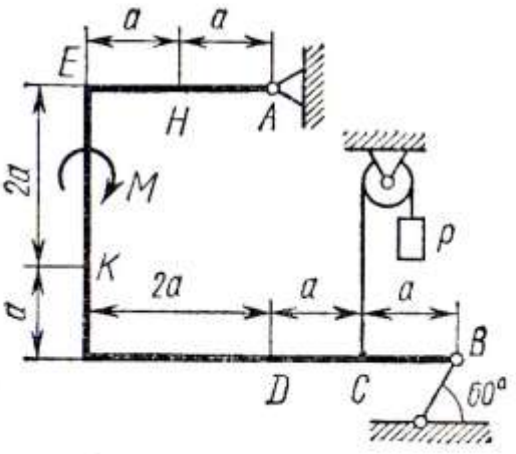


Рис. С1.6

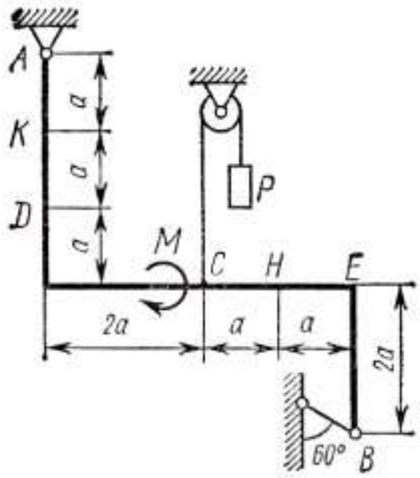


Рис. С1.7

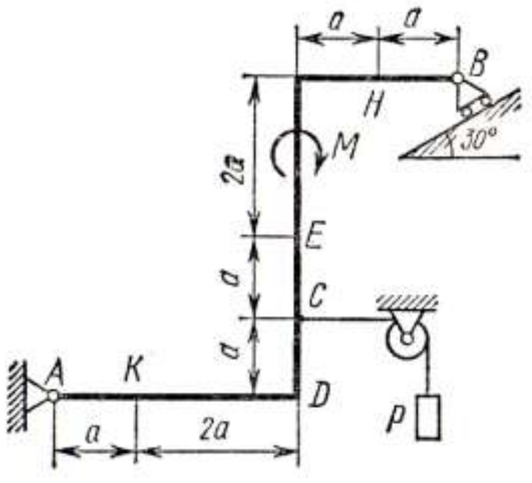


Рис. С1.8

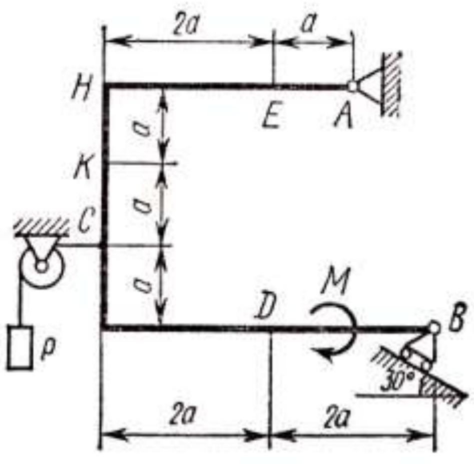
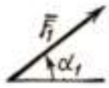
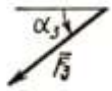
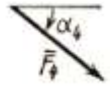


Рис. С1.9

Таблица С1

Силы								
	F_1=15 кН		F_2=25 кН		F_3=35 кН		F_4=45 кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	**H**	30	–	–	–	–	**K**	60
1	–	–	**D**	30	**E**	60	–	–
2	**K**	45	–	–	–	–	**E**	30
3	–	–	**K**	60	**H**	30	–	–
4	**D**	30	–	–	–	–	**E**	60
5	–	–	**H**	30	–	–	**D**	45
6	**E**	60	–	–	**K**	45	–	–
7	–	–	**D**	60	–	–	**H**	30
8	**H**	60	–	–	**D**	30	–	–
9	–	–	E	45	**K**	30	–	–

Пример. Жесткая рама закреплена в точке *A* шарнирно, а в точке *B* прикреплена к шарнирной опоре на катках. В точке *C* к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом *P*=25 кН. На раму действует пара сил с моментом *M*=60 кНм и две силы $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$, точки приложения и направления которых показаны на рис. С1, величины сил: F_2=20 кН, F_3=30 кН, размеры указаны на рисунке. Определить реакции связей в точках *A* и *B*. При окончательных расчетах принять *a*=0.5 м.

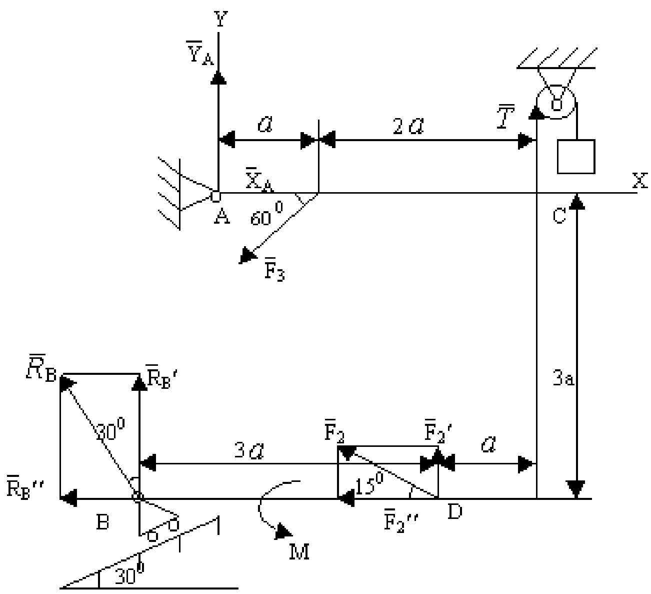


Рис.С1

Решение

Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси *xy* и покажем действующие на раму силы. На раму действуют силы $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, пара сил с моментом М. В точке *C* действует реакция нити $\overline{T}$, причем, по величине *T*=*P*=25 кН.

Реакция шарнирной опоры на катках $\overline{R}_B$ направлена перпендикулярно опорной плоскости, а реакция неподвижной шарнирной опоры *A* изображена двумя составляющими $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$.

Составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил. При вычислении моментов сил $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_2$ относительно точки *A* пользуемся теоремой

Вариньона, т.е. разлагаем эти силы на две составляющие $\overline{F}'_2$ и $\overline{F}''_2$, $\overline{R}'_B$ и $\overline{R}''_B$, причем

$F'_2 = F_2\sin15°$, $F''_2 = F_2\cos15°$, $R'_B = R_B\cos30°$, $R''_B = R_B\cos60°$.

Получим:

$\sum F_{KX} = 0,\ X_A - F_3\cos60^0 - F_2\cos15^0 - R_B\cos60^0 = 0,$

$\sum F_{KY} = 0,\ -F_3\cos30^0 + Y_A + T + F_2\cos75^0 + R_B\cos30^0 = 0.$

$$\sum M_A(\overline{F}_K) = 0, \qquad -F_3 a\sin60^0 + T3a + M - F_2 3a\cos15^0 +$$
$$+ F_2 2a\cos75^0 - R_B a\cos30^0 - R_B 3a\cos60^0 = 0.$$

Решив составленные уравнения и подставив числовые значения заданных величин, получим X_A = 59,6 кН, Y_A = -47,9 кН, R_B = 50,5кН. Отрицательный знак у Y_A указывает, что истинное направление $\overline{Y}_A$ противоположно указанному на рисунке.

Задача С2.

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке *C* или соединены друг с другом шарнирно, или свободно опираются между собой. Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке *A* или шарнир, или жесткая заделка; в точке *B* или невесомый стержень BB', или гладкая плоскость, или шарнир; в точке *D* или невесомый стержень DD', или шарнирная опора на катках.

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом *M*=70 кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности *q*=30кН/м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице С2; там же в столбце «Участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в таблице С2а. При расчетах принять *a*=0,3 м.

Определить реакции связей в точках *A, B, C* (для рис. 1, 2, 7, 9 еще и в точке *D*), вызванные заданными нагрузками.

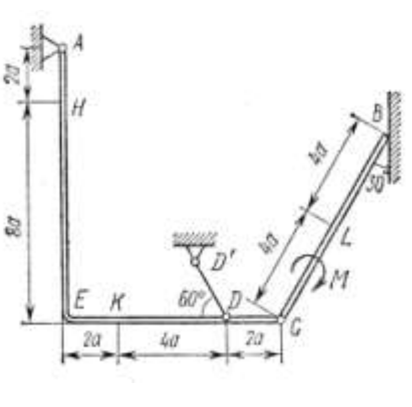


Рис. С2.2

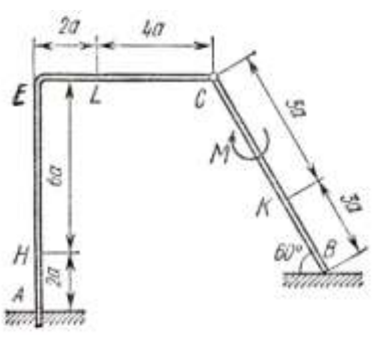


Рис. С2.3

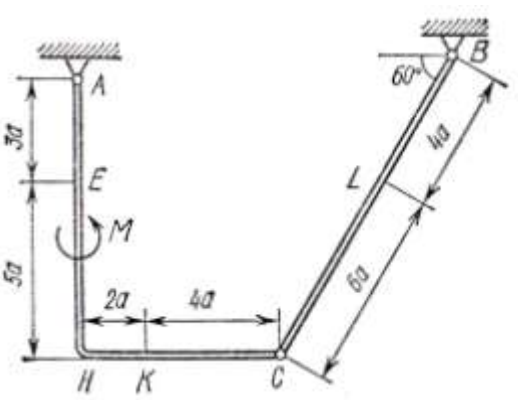


Рис. С2.4

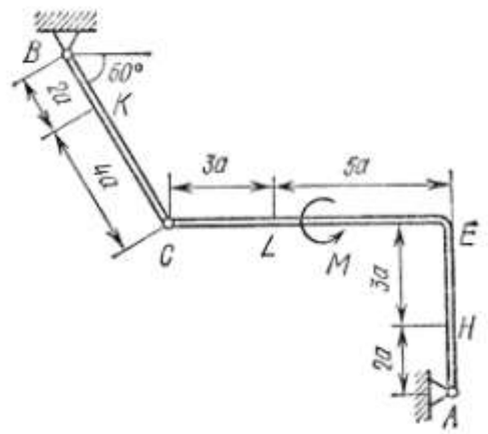


Рис. С2.5

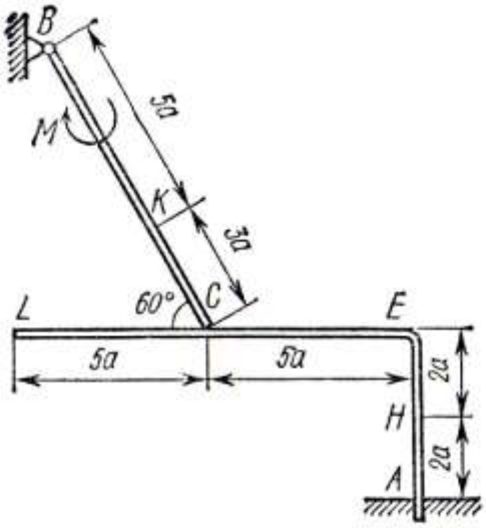


Рис. С2.6

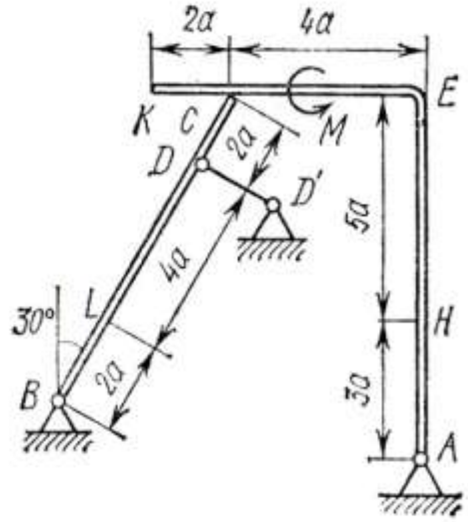


Рис. С2.7

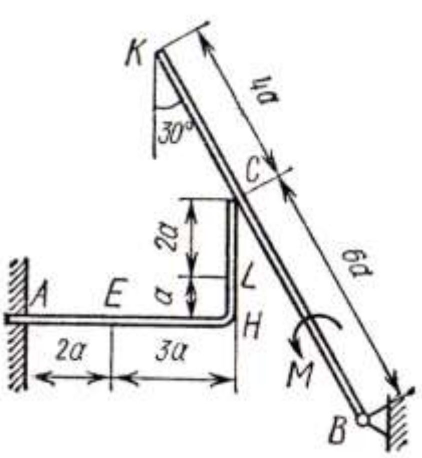


Рис. С2.8

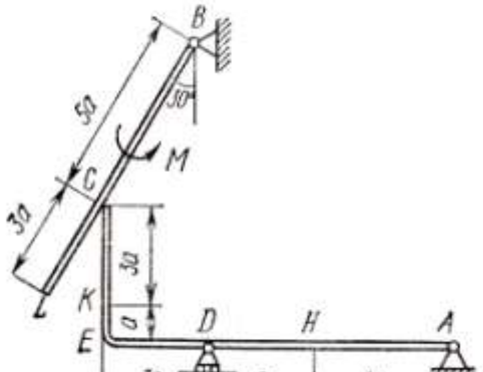


Рис. С2.9

Таблица С2

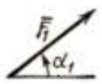
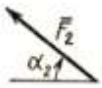
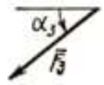
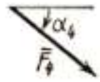
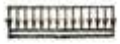
Силы									Участок
	F_1=15 кН		F_2=25 кН		F_3=35 кН		F_4=45 кН		
Номер усло-вия	Точка прило-жения	α_1, град	Точка прило-жения	α_2, град	Точка прило-жения	α_2, град	Точка прило-жения	α_4, град	
0	**K**	60	–	–	**H**	30	–	–	**CL**
1	–	–	**L**	60	–	–	**E**	30	*CK*
2	**L**	45	–	–	**K**	60	–	–	*AE*
3	–	–	**K**	30	–	–	**H**	60	*CL*
4	**L**	30	–	–	**E**	60	–	–	*CK*
5	–	–	**L**	45	–	–	**K**	30	*AE*
6	**E**	60	–	–	**K**	45	–	–	*CL*
7	–	–	**H**	60	**L**	30	–	–	*CK*
8	–	–	**K**	30	–	–	**E**	45	*CL*
9	**H**	30	–	–	–	–	**L**	60	*CK*

Таблица С2а

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. 1, 2, 4, 7, 9	Рис. 0, 3, 5, 6, 8
			

Пример. Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, соединенных в точке С шарнирно. Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются: в точке *А* - шарнир, в точке *В* - гладкая плоскость, в точке *Д* - невесомый стержень.

На конструкцию действуют: пара сил с моментом M=60 кН·м, на участке KC равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q=20 кН/м, силы $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_4$, приложенные в точках L и E, причем F_2=20 кН, F_4=40 кН. Размеры и углы показаны на рис. С2,а.

Определить реакции связей в точках A, B, C, D, вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять a=0,2 м.

Решение. Расчленим систему тел и рассмотрим равновесие стержня BC, а затем угольника. Проводим координатные оси xy, указываем силы, действующие на стержень: заданная сила $\boldsymbol{F}_2$; пара сил с моментом M; реакция гладкой плоскости направлена перпендикулярно плоскости; реакция шарнира разлагается на две составляющие $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{У}_C$. Для полученной системы сил составляем уравнения равновесия:

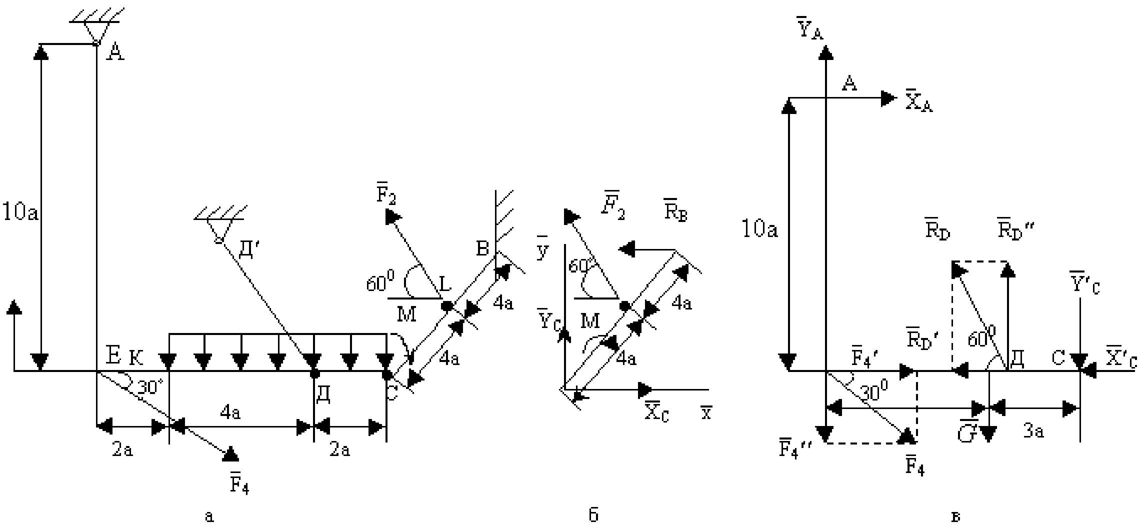


Рис.С2

$\sum F_{KX} = 0, X_C - R_B - F_2 \cos 60^0 = 0,$

$\sum F_{KY} = 0, Y_C + F_2 \cos 30^0 = 0,$

$\sum M_C(\overline{F}_K) = 0, - M + F_2 \cos 30^0 4a + R_B 8a \cos 30^0 = 0.$

На угольник, кроме силы $\boldsymbol{F}_4$, действуют: реакция $\boldsymbol{R}_D$ стержня *ДД'*, направленная вдоль стержня; равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой $\boldsymbol{G}$, причем $G = q \cdot 6a = 24$ кН; реакция неподвижного шарнира А, которую разлагаем на две составляющие $\boldsymbol{X}_A$ и $\boldsymbol{У}_A$, реакция неподвижного шарнира С - $\boldsymbol{X}_C$ и $\boldsymbol{У}_C$, причем $X_C' = X_C$, $У_C' = У_C$. при вычислении моментов сил $\boldsymbol{R}_B$ и $\boldsymbol{F}_4$ относительно точки *A* применяем теорему Вариньона, для чего разлагаем их на две составляющие $\boldsymbol{F}_4'$ и $\boldsymbol{F}_4''$, $\boldsymbol{R}_D'$ и $\boldsymbol{R}_D''$, причем $F_4' = F_4\cos30°$, $F_4'' = F_4\cos60°$, $R_D' = R_D\cos60°$, $R_D'' = R_D\cos30°$.

Составляем три уравнения равновесия:

$\sum F_{KX} = 0, X_A - X'_C + F_4 \cos 30^0 - R_D \cos 60^0 = 0,$

$\sum F_{KY} = 0, Y_A - Y'_C + R_D \cos 30^0 - G - F_4 \cos 60^0 = 0,$

$\sum M_A(\overline{F}_K) = 0,$

$$F_4 10a \cos 30^0 - R_Д 10a \cos 60^0 + R_Д 6a \cos 30^0 - G5a - X'_C 10a - Y'_C 8a = 0$$.

Решив систему уравнений и подставив числовые значения заданных величин, получим X_C=43,5 кН, $У_C$=-8,7 кН, R_D=709,9 кН.

Знаки указывают, что $\boldsymbol{У}_A$ и $\boldsymbol{У}_C$ имеют направления, противоположные показанным на рисунке.

Задача С3.

Однородный стержень весом P=30 Н прикреплен шарнирно к невесомым ползунам *1* и *2*. Коэффициенты трения ползунов о направляющие, вдоль которых они могут скользить, равны соответственно f_1 и f_2. К ползунам приложены силы Q_1 и Q_2, показанные на рисунках. Механизм расположен в вертикальной плоскости.

Найти величину, указанную в таблице в строке «Найти», где обозначено: $Q_{1\min}$, $Q_{2\min}$ – наименьшее значение сил Q_1, Q_2 соответственно, при которых имеет место равновесие; $Q_{1\max}$, $Q_{2\max}$ – наибольшие значения тех же сил, при которых сохраняется равновесие; $f_{1\min}$, $f_{2\min}$ – наименьшее значение коэффициента трения, при котором сохраняется равновесие. Условие f_1=0 или f_2=0 означает, что ползун *1* или *2* гладкий; соответствующую силу трения на чертеже не изображать.

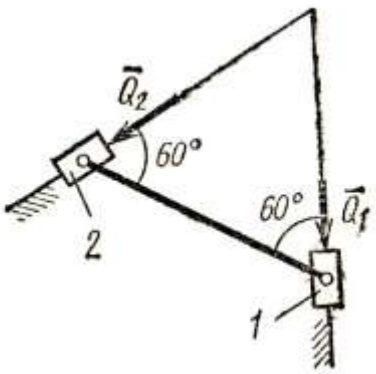


Рис. С3.0

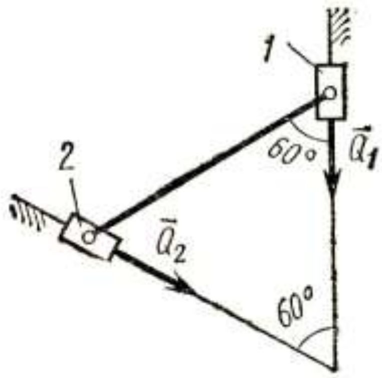


Рис. С3.1

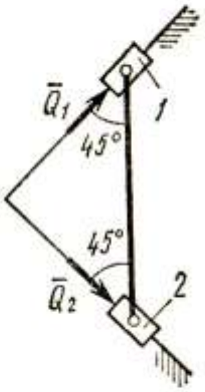


Рис. С3.2

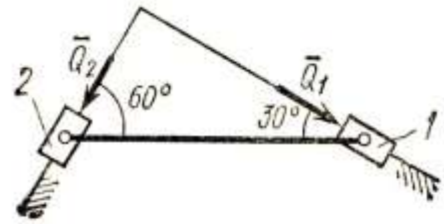


Рис. С3.3

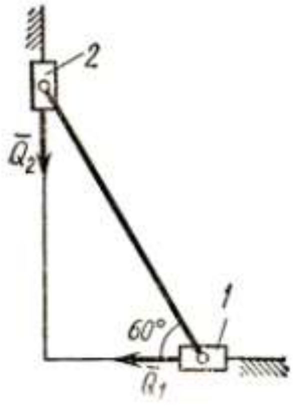


Рис. С3.4

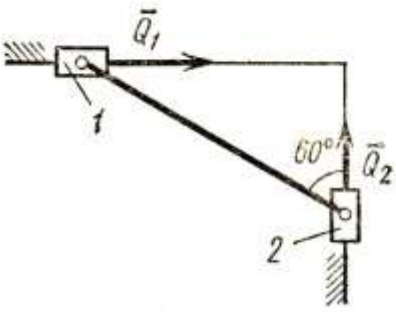


Рис. С3.5

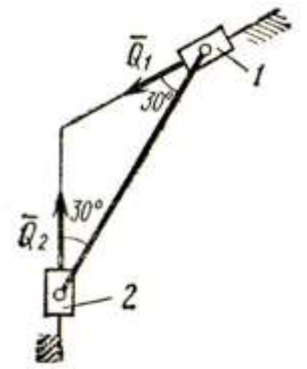


Рис. С3.6

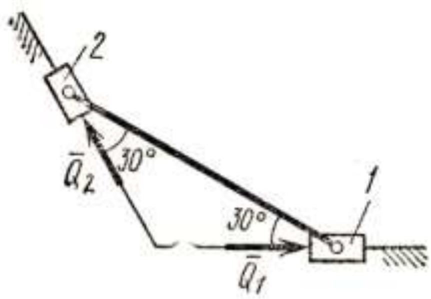


Рис. С3.7

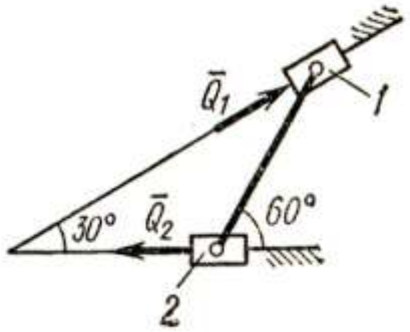


Рис. С3.8

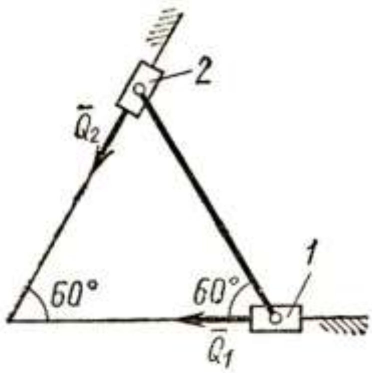


Рис. С3.9

Таблица С3

Номер условия	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q_1, Н	60	–	50	60	–	–	80	60	–	80
Q_2, Н	–	80	60	–	80	100	–	50	100	–
f_1	0	0,15	0	0,2	0	0,2	0	–	0	015
f_2	0,2	0	–	0	0,15	0	0,15	0	0,2	0
Найти	Q_{2min}	Q_{1max}	f_{2min}	Q_{2max}	Q_{1max}	Q_{1min}	Q_{2max}	f_{1min}	Q_{1min}	Q_{2min}

Пример. Однородный стержень весом P = 24 Н прикреплен шарнирно к невесомым ползунам 1 и 2 (рис. С3). Коэффициент трения ползуна 1 о направляющие, вдоль которых он может скользить, f_1 = 0.15, а между ползуном 2 и его направляющими трение отсутствует. К ползунам приложены силы $\boldsymbol{Q}_1$ и $\boldsymbol{Q}_2$, причем $\boldsymbol{Q}_2$ = 80кН; механизм расположен в вертикальной плоскости. Определить наибольшее значение $\boldsymbol{Q}_1$, при котором сохраняется равновесие.

Решение. наибольшее значение, означает, что при дальнейшем увеличении силы $\boldsymbol{Q}_1$ равновесие нарушится и ползун 1 начнет скользить вправо. Следовательно, при равновесии сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$ направлена влево. Неизвестными силами на рисунке 3 являются $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ и $\boldsymbol{Q}_1$ ($F_{тр} = f_1 N_1$).

Находим точку C пересечения $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ и составим уравнение □$M_C(F_K) = 0$, в которое не войдут $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$. Получим:

$$\sum M_C(\overline{F}_K) = 0,\quad -Q_1 l\sin 30° + F_{TP} l\sin 30° - P\frac{l}{2}\cos 30° + Q_2 l\cos 30° = 0$$, (a)

где l - длина стержня.

Так как в формулу силы трения входит нормальная реакция $\boldsymbol{N}_1$, то составим сумму проекций сил на ось y (оси координат указаны на рисунке):

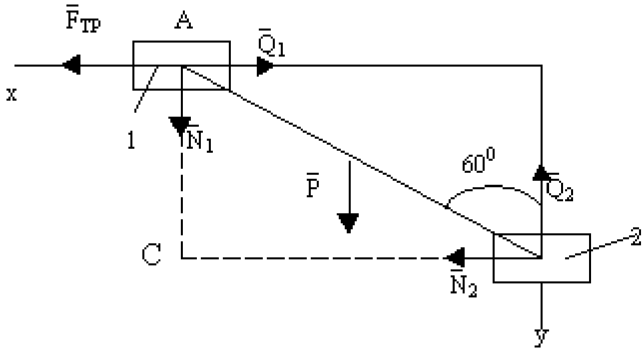


Рис.С3

$\sum F_{KY} = 0$, $N_1 + P - Q_2 = 0$, (б)

откуда $N_1 = Q_2 - P$.

Из сравнения числовых значений Q_2 и P видно, что $N_1 > 0$, а поэтому уравнение (а) имеет вид:

$$-Q_1 l\sin 30° + (f_1 Q_2 - f_1 P)\sin 30° - P\frac{l}{2}\sin 60° + Q_2\cos 30° = 0.$$

Отсюда, подставляя числовые значения величин находим Q_1=126,2 Н.

Задача С4

Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в двух узлах и прикреплены другими концами шарнирно к неподвижным опорам *A, B, C, D*. Стержни и узлы на рисунках не показаны и должны быть изображены по данным таблицы. Узлы расположены в вершинах *H, K, L* или *M* прямоугольного параллелепипеда. В узле, который в каждом столбце таблицы указан первым, приложена сила *P*=250 Н; во втором узле приложена *Q*=150 Н. Сила *P* образует с положительными направлениями координатных осей *x, y, z* углы, равные соответственно $\alpha_1=45^0$, $\beta_1=60^0$, $\gamma_1=60^0$, а сила *Q* – углы $\alpha_2=60^0$, $\beta_2=45^0$, $\gamma_2=60^0$; направления осей *x, y, z* для всех рисунков показаны на рис. С4.0.

Грани параллелепипеда, параллельные плоскости *xy* – квадраты. Диагонали других (боковых) граней образуют с плоскостью *xy* угол $\varphi=60^0$, а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол $\theta=51^0$. Определить усилия в стержнях.

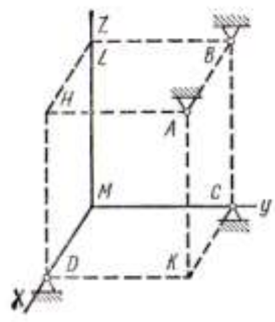


Рис. С4.0

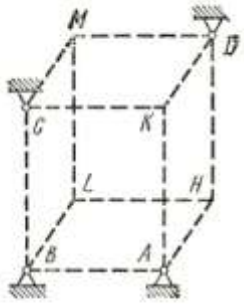


Рис. С4.1

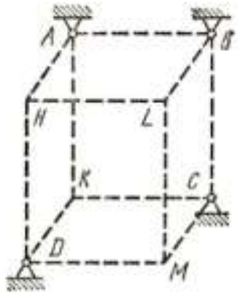


Рис. С4.2

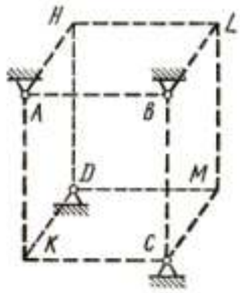


Рис. С4.3

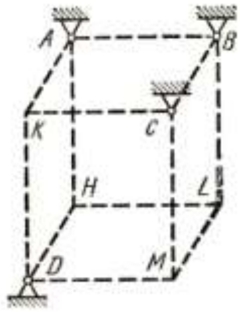


Рис. С4.4

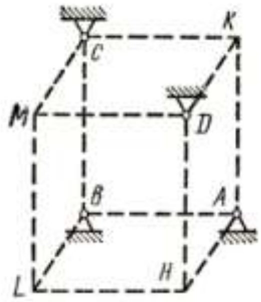


Рис. С4.5

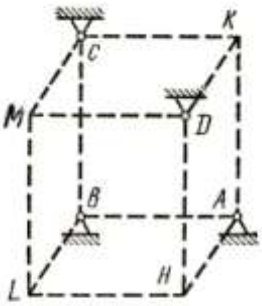


Рис. С4.6

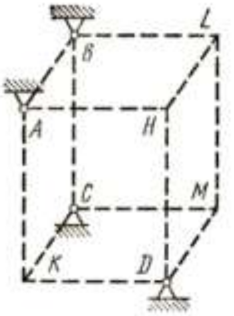


Рис. С4.7

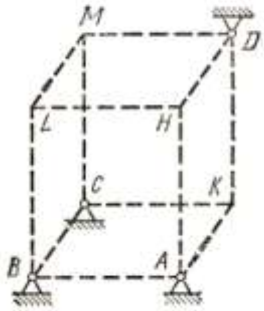


Рис. С4.8

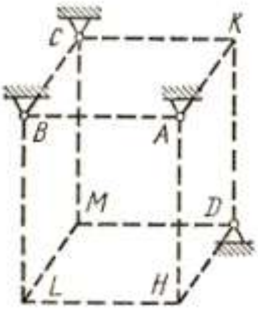


Рис. С4.9

Таблица С4

Номер условия	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Узлы	*H, M*	**L, M**	*K,M*	**L,H**	**K,H**	**M, H**	**L,H**	**K, H**	**L, M**	**K, M**
Стер-жни	*HM, HA, HB, MA, MC, MD*	*LM, LA, LD, MA, MB, MC*	*KM, KA, KB, MA, MC, MD*	*LH, LC, LD, HA, HB, HC*	*KH, KB, KC, HA, HC, HD*	*MH, MB, MC, HA, HC, HD*	*LH, LB, LD, HA, HB, HC*	*KH, KC, KD, HA, HB, HC*	*LM, LB, LD, MA, MB, MC*	*KM, KA, KD, MA, MB, MC*

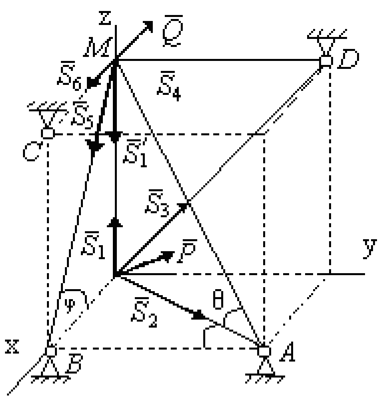


Рис.С4

Пример. Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в двух узлах *L* и *M* и прикреплены другими концами шарнирно к неподвижным опорам *A,B,C,D* (рис. С4). В узле *L* приложена сила *P*=200 Н; в узле *M* приложена сила *Q*=100 Н. Сила ***P*** образуетс положительными направлениями осей x,y,z углы, равные соответственно $\alpha_1 = 45°$, $\beta_1 = 60°$, $\gamma_1 = 60°$, а сила ***Q*** - углы $\alpha_2 = 60°$, $\beta_2 = 45°$, $\gamma_2 = 60°$ Грани параллелепипеда, параллельные плоскости xy, - квадраты. Диагонали боковых граней образуют с плоскостью xy угол $\varphi = 60°$, а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол $\theta = 51°$. Определить усилия в стержнях.

Решение

Сначала рассмотрим равновесие узла *L*, в котором сходятся стержни 1,2,3. На узел, кроме заданной силы ***P***, действуют еще реакции $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$, направленные от узла в предположении, что стержни растянуты. Составляем уравнения равновесия пространственной системы сходящихся сил:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad S_2 \cos 45° + P\cos\alpha_1 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad S_2 \cos 45° + S_3 \cos\varphi + P\cos\beta_3 = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0; \qquad S_1 + S_3 \sin\varphi + P\cos\gamma_1 = 0.$$

Решив составленные уравнения при заданном значении силы P и углов, найдем: $\boldsymbol{S}_1 = -172$ Н, $\boldsymbol{S}_2 = -200$ Н, $\boldsymbol{S}_3 = 83$ Н.

Теперь рассмотрим равновесие узла *M*. На этот узел, кроме силы ***Q***, действуют реакции $\boldsymbol{S}_4$, $\boldsymbol{S}_5$, $\boldsymbol{S}_6$ и $\boldsymbol{S}'_1$. При этом на основании аксиомы взаимодействия реакция $\boldsymbol{S}'_1$ направлена противоположно $\boldsymbol{S}_1$, но численно $\boldsymbol{S}'_1 = S_1 = -172$ Н.

Для узла М уравнения равновесия будут:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad S_4 \cos\theta \cos 45^\circ + S_5 \cos\varphi + S_6 + Q\cos\alpha_1 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad S_4 \cos\theta \cos 45^\circ + Q\cos\beta_1 = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0; \qquad -S_1' - S_4 \sin\theta - S_5 \sin\varphi + Q\cos\gamma_2 = 0.$$

При проецировании силы $\boldsymbol{S}_4$ на оси x и y использовался метод двойного проецирования.

Из последних уравнений находим $\boldsymbol{S}_4$ = -159Н, $\boldsymbol{S}_5$ = 399Н. $\boldsymbol{S}_6$ = -179Н.

Отрицательные знаки у $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_4$, $\boldsymbol{S}_6$ указывают, что эти стержни сжаты.

Задача С5

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром или подпятником в точке *A*, цилиндрическим шарниром в точке *B* и невесомым стержнем 1 или же двумя подшипниками в точках *A* и *B* и двумя невесомыми стержнями 1 и 2; все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большой плиты P_1=7 кН, вес меньшей плиты P_2=5 кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей, при этом плоскость *xy* горизонтальная.

На плиты действуют пара сил с моментом *M*=6 кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в таблице С5; при этом силы F_1 и F_4 в плоскостях, параллельных плоскости *xy*, сила F_2 – в плоскости, параллельной *xz*, и сила F_3 в плоскости, параллельной *yz*. Точки приложения сил *D, E, H, K* находятся в углах или в серединах сторон плит. При расчетах принять *a*=0,8 м.

Определить реакции связей в точках *A* и *B* и реакцию стержня (стержней**)**

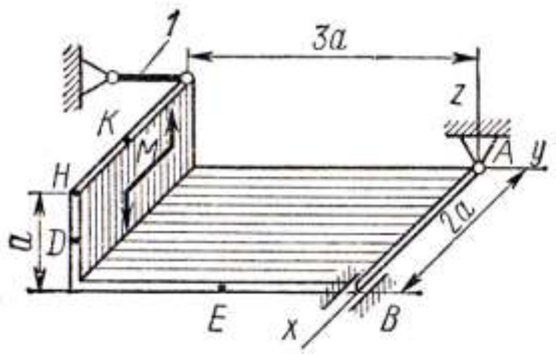


Рис. С5.0

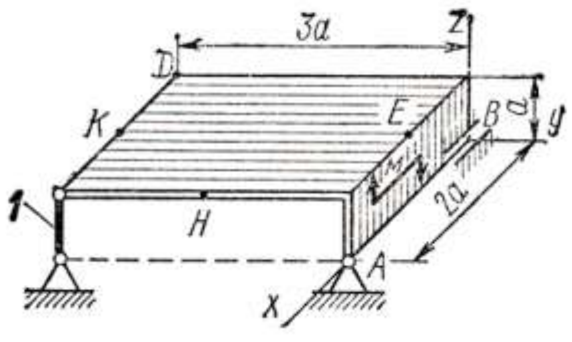


Рис. С5.1

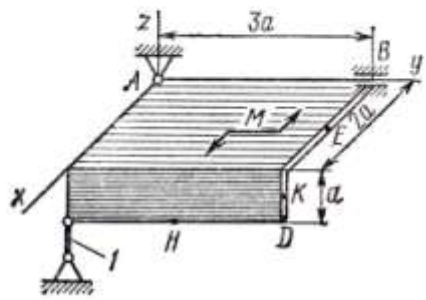


Рис. C5.2

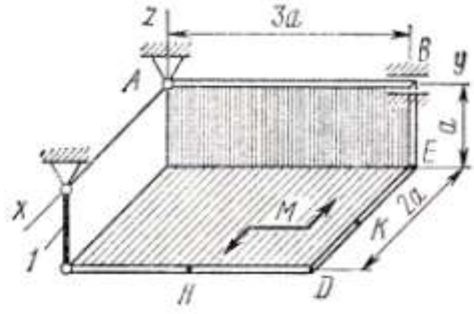


Рис. C5.3

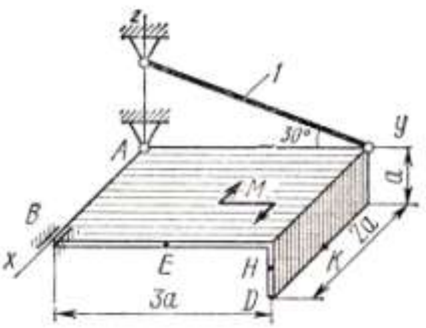


Рис. C5.4

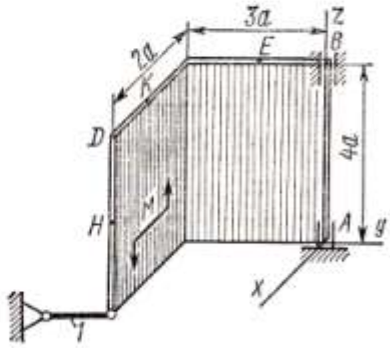


Рис. C5.5

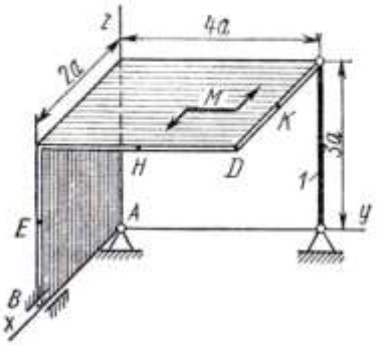


Рис. C5.6

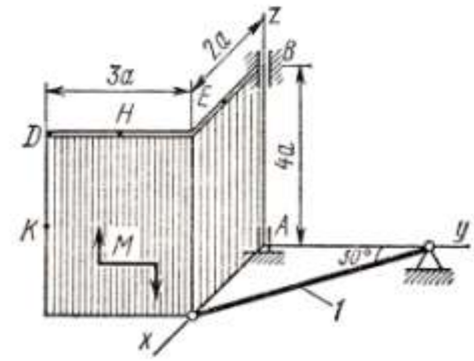


Рис. C5.7

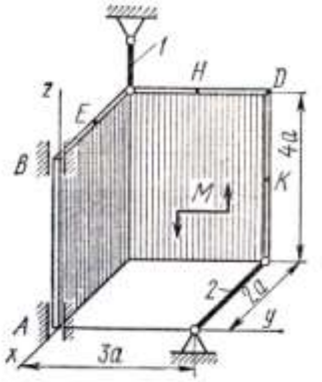


Рис. C5.8

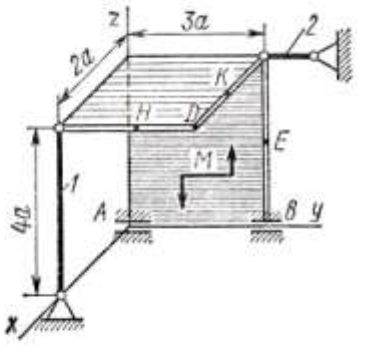
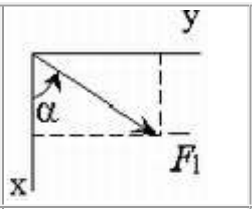
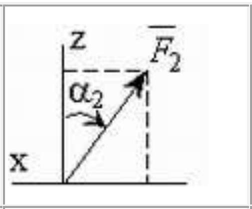
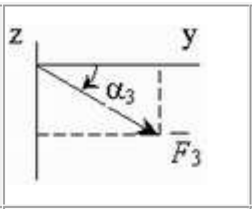
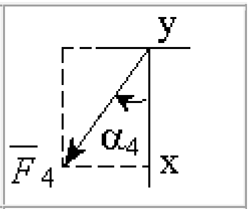


Рис. C5.9

Таблица С5

Сила								
	F1=4кН		F2=6кН		F3=8кН		F4=10кН	
Номер условия	Точка прилож.	α_1°	Точка прилож.	α_2°	Точка прилож.	α_3°	Точка прилож.	α_4°
0	D	60	–	–	E	0	–	–
Н	90	D	30	–	–	–	–	–
2	–	–	E	60	–	–	D	90
3	–	–	–	–	H	60	H	0
4	E	0	–	–	H	60	–	–
5	–	–	D	60	H	0	–	–
6	–	–	H	30	–	–	D	0
7	E	30	H	90	–	–	–	–
8	–	–	–	–	D	0	E	60
9	–	–	E	90	D	30	–	–

Пример. Две однородные прямоугольные плиты, сваренные под прямым углом друг к другу, закреплены сферическим шарниром в точке *A*, подшипником в точке *B* и невесомым стержнем *I* (рис. С5), закреплены на концах шарнирами.

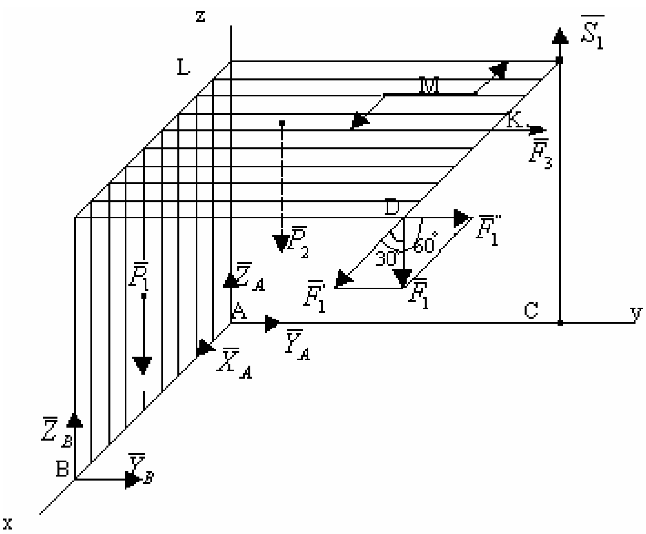


Рис.С5

Размеры плит в направлениях, параллельных координатным осям *x, y, z,* равны соответственно 2*a*, 3*a* и 4*a*, вес большей плиты P_1=3 кН, вес меньшей плиты P_2=2 кН. Каждая из плит параллельна одной из координатных плоскостей. На меньшую плиту действует пара сил с моментом *M=4 кН м*, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Сила $\overline{F}_1$ лежит в плоскости, параллельной плоскости *xy*; по величине F_1=6 кН, приложена в точке *D* и образует с осями *x* и *y* углы 30^0 и 60^0 соответственно. Сила $\overline{F}_3$, величина которой равна *10 кН*, параллельна оси *y* и приложена в середине стороны плиты .

Определить реакции сферического шарнира *A*, подшипника *B* и стержня *I,* если вся система находится в равновесии, *a = 0,6м*.

Решение

На плиты, кроме заданных сил $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_3$ и пары сил с моментом *M,* действуют реакции связей. Реакцию стержня $\overline{S}_1$ направляем вдоль стержня, полагая, что он растянут, реакцию сферического шарнира разлагаем на составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, подшипника на две составляющие $\overline{Y}_B$ и $\overline{Z}_B$ в плоскости, перпендикулярной оси подшипника. Имеем произвольную пространственную систему сил.

Составляем уравнения равновесия (1.64):

$\sum F_{KX} = 0;$	$X_A + F_1 \cos 30^0 = 0;$
$\sum F_{KY} = 0;$	$Y_A + Y_B + F_1 \cos 60^0 + F_3 = 0;$
$\sum F_{KZ} = 0;$	$Z_A - P_1 - P_2 + Z_B + S_1 = 0;$
$\sum M_X(\overline{F}_K) = 0;$	$-P_2 \frac{3a}{2} - F_1 \cos 60^0 4a - F_3 4a + S_1 3a = 0;$
$\sum M_Y(\overline{F}_K) = 0;$	$-Z_B 2a + P_1 \frac{2a}{2} + P_2 \frac{2a}{2} + F_1 \cos 30^0 4a = 0;$
$\sum M_Z(\overline{F}_K) = 0;$	$Y_3 2a + M - F_1 \cos 30^0 3a + F_1 \cos 60^0 2a + F_3 \frac{2a}{2} = 0.$

При определении моментов силы $\overline{F}_1$ относительно осей разлагаем ее на две составляющие $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_1$, параллельные осям *x* и *y* $(F_1' = F_1 \cos 30^0, F_1'' = F_1 \cos 60^0)$, и применяем теорему Вариньона.

Решая составленные уравнения и подставив числовые значения заданных величин, находим неизвестные.

Получим X_A = -5 кН, $У_A$ = -9,5 кН, Z_A = -26 кН, $У_B$=-3,5 кН, Z_B=13 кН, S_1 = 18 кН. Отрицательные знаки у X_A, $У_A$, Z_A, $У_B$ указывают, что истинное направление этих составляющих сил реакций противоположно указанному на рисунке.

Задача К1

Точка *B* движется в плоскости *xy* (рис.К1.0-К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(\mathrm{t})$, где *x* и *y* выражены в сантиметрах, *t* - в секундах.

Найти уравнение траектории; для момента времени $t_1 = 1$ *с* определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. 0-2 в столбце 2, для рис. 3-6 в столбце 3, для рис. 7-9 в столбце 4). Как и в задачах С1, С2, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл.К1 - по последней.

Номер условия	$y = f_2(t)$		
	Рис. 0–2	Рис. 3–6	Рис. 7–9
1	2	3	4
0	$4-9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	t^2-2	$-4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
1	$2-3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$4-6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4+2t^2$	$12\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
3	$12\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2(t+1)^2$	$2-4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+5$	$2+2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+13$
5	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2-2$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
6	$8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-3$	$(t+1)^3$	$16\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)-14$
7	$-9\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3-4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-4$	$2t^3$	$4-9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$2-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+6$

ТаблицаК1

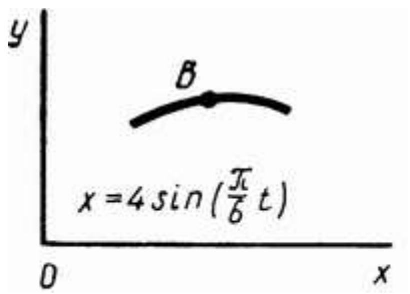


Рис.К1.0

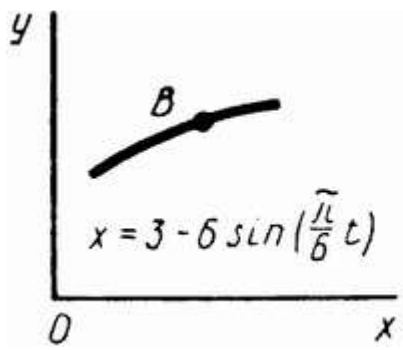


Рис.К1.1

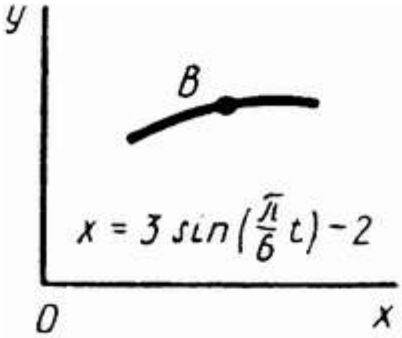


Рис.К1.2

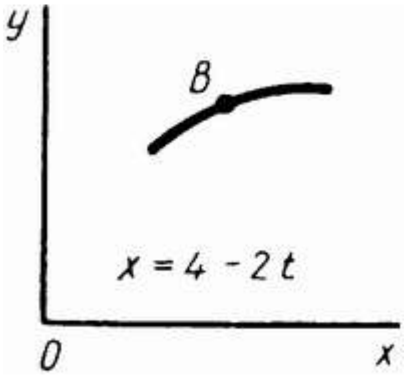


Рис.К1.3

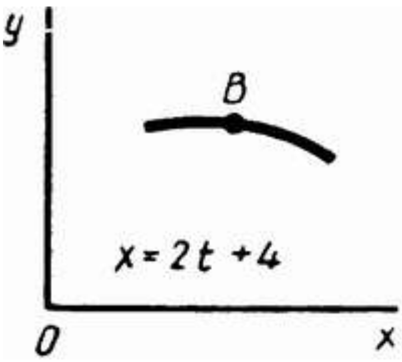


Рис.К1.4

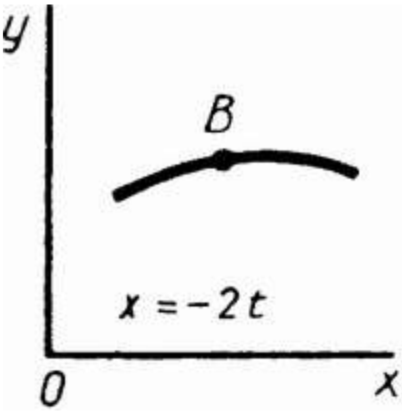


Рис.К1.5

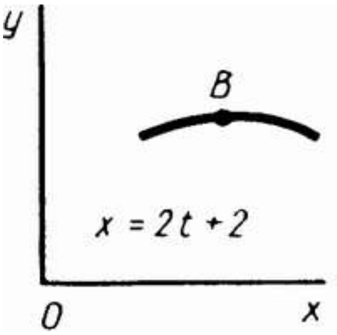


Рис.К1.6

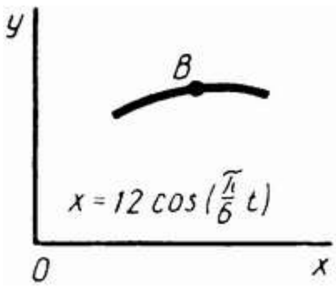


Рис.К1.7

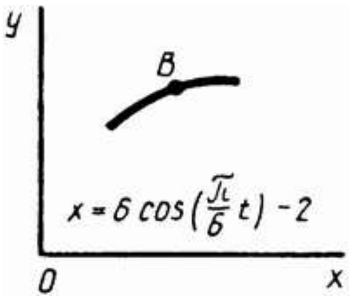


Рис.К1.8

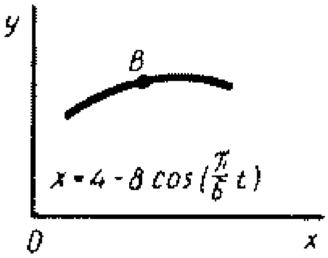


Рис.К1.9

Пример. Даны уравнения движения точки ***M*** в плоскости xy:

$x = 4 \cdot t^2 + 2,$

$y = 2 \cdot t$

(x, y - в сантиметрах, t - в секундах).

Найти уравнение траектории точки ***M***; для момента времени $t_1 = 1c$ найти положение точки на траектории, ее скорость, полное ускорение, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны в соответствующей точке.

Решение:

1. Исключая время t из уравнений движения

$$\left.\begin{aligned} x &= 4\cdot t^2 + 2 \\ y &= 2\cdot t \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

найдем уравнение траектории.

Из второго уравнения

$$t = \frac{y}{2}$$

Подставляя это значение t в первое уравнение, получим

$$x = 4\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 2 \text{ или}$$

$x = y^2 + 2$ – уравнение параболы.

Заметим, что траекторией движения является только верхняя ветвь параболы, т.к. время t >0 и значения $y = 2\cdot t$ >0.

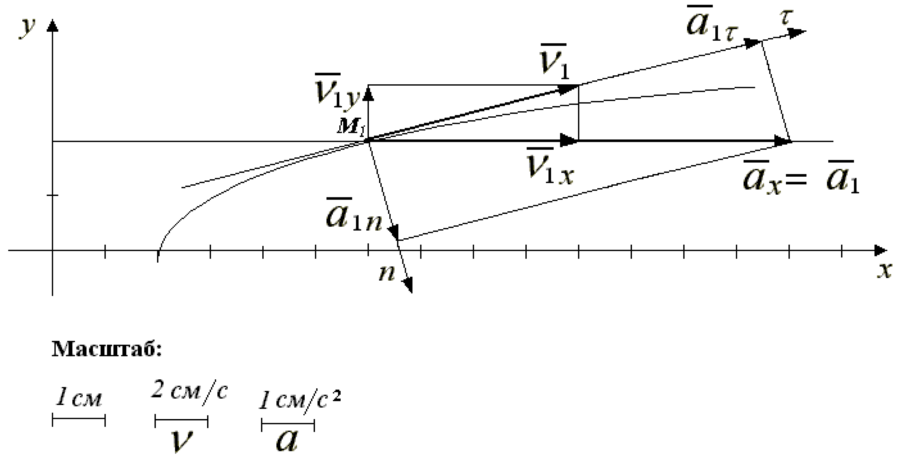


Рис.К1

2. Полагая время $t_1 = 1c$, в уравнениях (4.1) найдем координаты, определяющие положение точки на траектории в этот момент времени

$$x_1 = x(t{=}1c) = 4 + 2 = 6 \ см$$

$$y_1 = y(t{=}1c) = 2 \ см.$$

Точку с координатами $x_1 = 6$, $y_1 = 2$ на траектории обозначим M_1.

2. Величину скорости точки ***M*** найдем по ее проекциям на координатные оси:

$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$, где

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4 \cdot t^2 + 2\right) = 8 \cdot t \, см/с,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2 \cdot t\right) = 2 \cdot t \, см/с.$$

Тогда

$$v = \sqrt{64 \cdot t^2 + 4} \, см/с.$$

Поскольку величина скорости зависит от времени t, то движение точки неравномерное.

В момент времени $t_1 = 1с$

$$v_{1x} = 8 \, см/с$$

$$v_{1y} = 2 \, см/с$$

$$v_1 = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} \approx 8{,}2 \, см/с.$$

Выберем масштаб и построим вектор скорости в положении ***M₁*** по составляющим v_{1x} и v_{1y}

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_{1x} + \bar{v}_{1y} = 8 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j}$$

$\bar{v}_1$ - диагональ прямоугольника, сторонами которого являются

$\bar{v}_{1x} = 8 \cdot \bar{i}$, $\bar{v}_{1y} = 2 \cdot \bar{j}$.

Причем, вектор скорости $\bar{v}_1$ должен по направлению совпадать с касательной, проведенной к траектории в точке M_1.

3. Модуль ускорения точки **M** определяем аналогично

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, где

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(8 \cdot t\right) = 8 \, см/с^2,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\right) = 0.$$

Полное ускорение

$$a = a_x = 8 \, см/с^2$$

является постоянным во все время движения точки.

Выберем масштаб, построим вектор ускорения (рис.21):

$\bar{a}_1 = \bar{a} = \bar{a}_x$, $\bar{a}_1 = 8 \cdot \bar{i}$.

Вектор ускорения должен лежать в плоскости траектории и направлен в сторону ее вогнутости.

4. Проведем через точку M_1 (рис.21) ось $M_1\tau$ вдоль касательной и ось $M_1 n$ – вдоль нормали в сторону вогнутости траектории.

Разложим полное ускорение на составляющие вдоль этих осей

$\bar{a}_1 = \bar{a}_{1n} + \bar{a}_{1\tau}$, где

$\bar{a}_{1\tau}$ - касательное ускорение точки ***M***;

$\bar{a}_{1n}$ - нормальное ускорение точки ***M***.

Из рисунка $a_{1n} \approx 2 \,{}^{см}\!/\!{}_{c^2}$, $a_{1\tau} \approx 8 \,{}^{см}\!/\!{}_{c^2}$

Аналитически касательное ускорение определяется по формуле

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

и характеризует изменение скорости по величине.

Если $\frac{dv}{dt} > 0$ – движение ускоренное,

Если $\frac{dv}{dt} < 0$ – движение замедленное.

Найдем a_τ

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{64^2 + 4}\right) = \frac{1 \cdot 64 \cdot 2 \cdot t}{2 \cdot \sqrt{64 \cdot t^2 + 4}} = \frac{64 \cdot t}{\sqrt{64 \cdot t^2 + 4}}$$

Т.к. время t > 0, выражение $\frac{64 \cdot t}{\sqrt{64 \cdot t^2 + 4}} > 0$, следовательно, движение точки ***M*** ускоренное.

В момент $t_1 = 1c$

$a_{1\tau} = \frac{64}{\sqrt{64 + 4}} = \frac{64}{8{,}2} \approx 7{,}8 \,{}^{см}\!/\!{}_{c^2}$ ($\approx 8 \,{}^{см}\!/\!{}_{c^2}$ соответствует значению на рисунке).

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. В случае криволинейного движения, оно всегда существует и определяется по формуле

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$, где

ρ - радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

Т.к. радиус кривизны параболы в точке $\boldsymbol{M_1}$ не известен, то величину нормального ускорения можно определить следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^{\ 2}}$$

В момент $t_1 = 1c$

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^{\ 2} - a_{1\tau}^{\ 2}} = \sqrt{64 - 60{,}84} \approx 1{,}8 \, см/c^2 \, (\approx 2 \, см/c^2$$ соответствует значению на рисунке).

Радиус кривизны параболы в точке $\boldsymbol{M_1}$ найдем из выражения

$$\rho_1 = \frac{v_1^{\ 2}}{a_{1n}} = \frac{68}{1{,}8} \approx 37{,}8 \, см$$

Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колес 1–3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес. Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 – r_1=2см, R_1=4см, у колеса 2 – r_2=6см, R_2=8см, у колеса 3 – r_3=12см, R_3=16см. На ободьях колес расположены точки *A, B* и *C*.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса 1, $s_4(t)$ – закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса 2, $v_5(t)$ – закон изменения скорости груза 5 и т.д. Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4, s_5 и v_4, v_5 – вниз, φ выражено в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах.

Определить в момент времени t_1=2с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости и ускорения соответствующих точек или тел.

Таблица К2

Номер условия	**Дано**	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4=4(7t-t^2)$	v_B, v_C	ε_2, a_A, a_5
1	$v_5=2(t^2-3)$	v_A, v_C	ε_2, a_B, a_4
2	$\varphi_1=2t^2-9$	v_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2=7t-3t^2$	v_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3=3t-t^2$	v_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1=5t-2t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2=2(t^2-3t)$	v_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$v_4=3t^2-8$	v_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5=2t^2-5t$	v_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3=8t-3t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_A, a_4

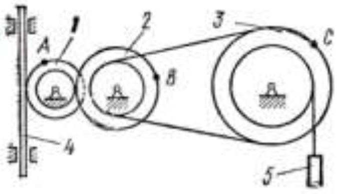


Рис. К2.0

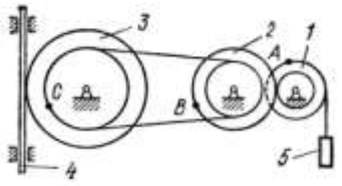


Рис. К2.1

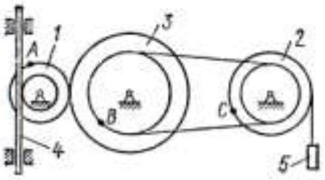


Рис. К2.2

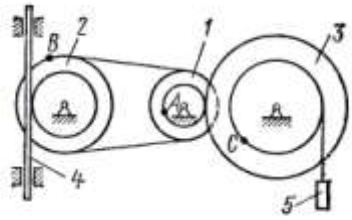


Рис. К2.3

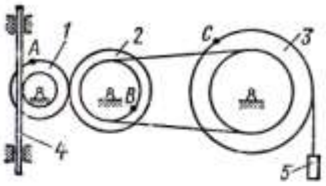


Рис. К2.4

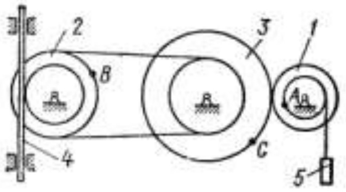


Рис. К2.5

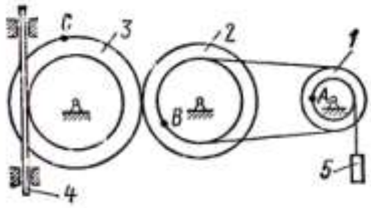


Рис. К2.6

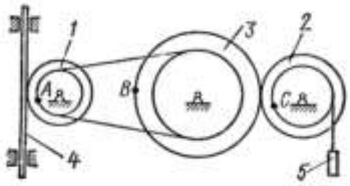


Рис. К2.7

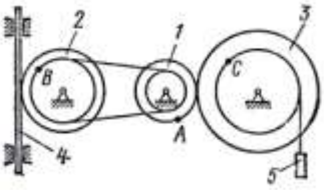


Рис. К2.8

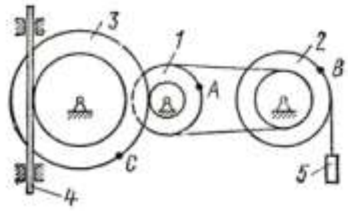


Рис. К2.9

Пример. Механизм состоит из ступенчатых колес 1-4, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей (рис. К2), зубчатой рейки *CD* и груза *E*, привязанного к концу нити, намотанной на барабан колеса 4. Радиусы равны: у колеса 1 – r_1 = 2см, R_1 = 4см; у колеса 2 – r_2 = 6см, $в_2$ = 8см, R_2 = 12см; у колеса 3 – r_3 = 8см, R_3 = 16см; у колеса 4 – r_4 = 6см, $в_4$ = 12см, R_4 = 24см.
Рейка *CD* движется по закону $S = 10t^3$, где *S* - в см, *t* - в с. Определить в момент времени t_1 = 2с угловую скорость и угловое ускорение колеса 2, а также скорость и ускорение груза *E* и точки *B*, лежащей на колесе 4 и показанной на рисунке.

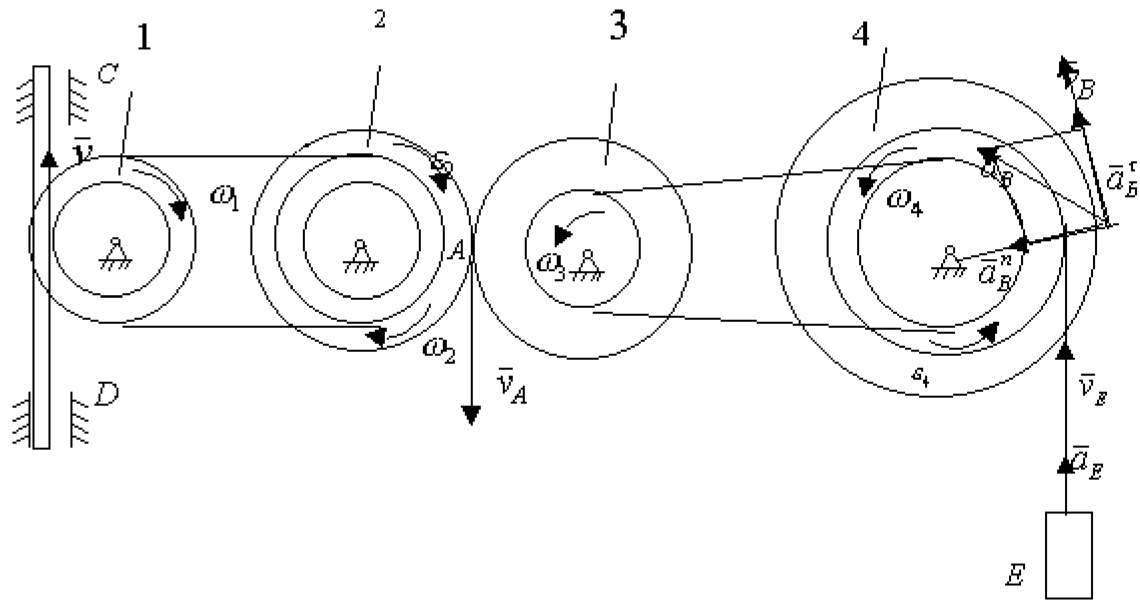


Рис.К2

Решение

По известному закону движения рейки *CD* находим ее скорость $v = \dot{S} = 30t^2$. Так как рейка и колесо 1 малого радиуса находятся в зацеплении, то находим угловую скорость колеса 1 $\omega_1 = \dfrac{v}{r_1} = 15t^2$.

В связи с тем, что скорости всех точек ремня одинаковы, имеем $\omega_1 R_1 = \omega_2 в_2$, откуда $\omega_2 = \dfrac{\omega_1 R_1}{в_2} = \dfrac{15}{2}t^2$, при t_1 = 2с, $\square_2 = 30c^{-1}$

Зная ω_2, находим угловое ускорение второго колеса $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 15t$ при t_2 = 2с, $\omega_2 = 30c_{-2}$. Направления **v** и угловых скоростей показаны на рисунке. Так как скорость точки *A* для колес 2 и 3 одинакова, то $\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$, откуда $\omega_3 = \dfrac{\omega_2 R_2}{R_3} = \dfrac{45}{8}t^2$.

Из равенства скоростей точек ремня, соединяющего 3 и 4 колеса: $\omega_3 R_3 = \omega_4 R_4$, а поэтому $\omega_4 = \dfrac{\omega_3 r_3}{r_4} = \dfrac{15}{2}t^2$.

По известной ω_4 находим $\varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = 15t$, при t_1 = 2с, $\omega_4 = 30c^{-1}$, $\omega_4 = 30c^{-2}$.

Скорость и ускорение точки *B* в момент t_1 = 2с таковы: $v_в = \omega_4 R_4$ = 720 cv/c,

$$a_в^{\tau} = \varepsilon_4 R_4 = 720 см/с^2, \quad a_в^{n} = \omega_4^2 R_4 = 21600 см/с^2,$$

$$a_в = \sqrt{a_в^{n^2} + a_в^{\tau^2}} = 21612 см/с^2 = 216{,}1 м/с^2.$$

Находим скорость и ускорение груза *E* в момент t_1 = 2с:

$v_E = \omega_4 в_4 = 90t^2 = 360$ cv/c, $a_E = a_E$ так как груз движется прямолинейно и $a_E^n = 0, a_E = \dot{v}_E = 180t = 360 см/с^2$.

Задача К3

Пример. Механизм состоит из стержней *1,2,3,4* и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами (рис. К3), точка *D* находится в середине стержня 2. Длины стержней равны соответственно: l_1=0,4 м, l_2=1,2 м, l_3=1,4 м, l_4=0,6 м. Для положения механизма, показанного на рисунке, по известной угловой скорости $\omega_1 = 2c^{-1}$ и угловому ускорению $\varepsilon_1 = 4c^{-2}$ в данный момент времени найти скорости v_B и v_E точек *B* и *E*, угловую скорость ω_{AB} и угловое ускорение ε_{AB} звена *AB*, а также ускорение a_B точки *B*.

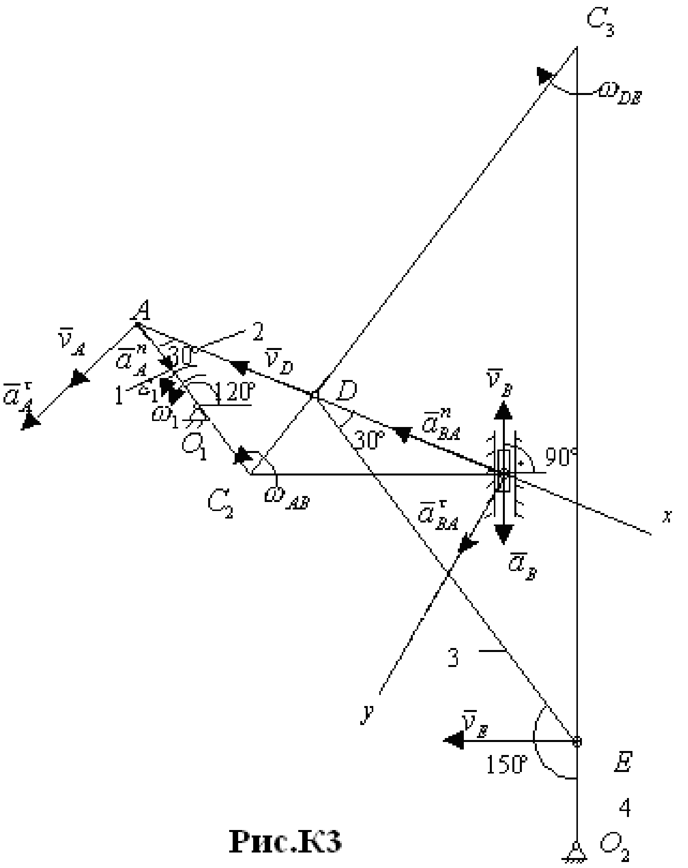


Рис.К3

Решение

1.*Определение скорости* v_B. Точка *B* принадлежит звену *AB*. Поэтому предварительно находим скорость точки *A*: $v_A = \omega_1 l_1$ = 0,8 м/с, $v_A \perp O_1A$, направление v_A определяет направление ω_1. Для определения v_B воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек стержня *AB* на прямую, соединяющую точки *A* и *B*. Скорость v_B направлена вдоль направляющих. Находим $v_A$cos60° = $v_B$cos60°, откуда $v_B = v_A$ = *0,8 м/с.*

2.*Определение* ω_{AB}. Для этого находим МЦС - C_2 звена *AB*, восстанавливая из точек *A* и *B* перпендикуляры к v_A и v_B. Находим AC_2=*АД*/cos30° = *0,69м* и $\omega_{AB} = v_A/AC_2$ = *1,16* c^{-1}. Направление ω_{AB} определяется направлением v_A.

3. *Определение* v_E. Точка *E* принадлежит стержню *ДЕ*. Следовательно, для определения v_E надо предварительно найти $v_Д$. Так как точка *Д* принадлежит одновременно стержню *AB*, то $v_Д = \omega_{AB} \cdot ДС_2 = \omega_{AB} \cdot 0{,}5 O_1A$ = *0,4 м/с.*

Вектор $v_Д$ перпендикулярен отрезку $C_2Д$ и направлен в сторону поворота, т.е. ω_{AB}.

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг точки O_2, то $v_E \perp O_2E$. Восстанавливая из точек $Д$ и E перпендикуляры к v_E и $v_Д$, находим МЦС C_3 звена $ДЕ$. Так как $\angle ДC_3E = \angle ДЕC_3 = 30°$, то $\Delta ДC_3E$ - равнобедренный. Составив пропорцию, находим, что

$$\frac{v_Д}{v_E} = \frac{ДC_3}{EC_3} = \frac{1}{2\cos 30^\circ}, \quad v_E = v_Д \cdot 2\cos 30^\circ = 6{,}93 \text{м/с}.$$

По направлению $v_Д$ определяем направление поворота стержня $ДЕ$($\omega_{ДЕ}$), вектор v_E будет направлен в сторону поворота этого стержня перпендикулярно к C_3E.

4. *Определение* a_B. Точка B принадлежит стержню AB, поэтому находим сначала ускорение точки A, а затем примем ее за полюс

$a_A = a^n_A + a^\tau_A$, $a^n_A = \omega^2{}_1 l_1 = 1{,}6$ *м/с*^{2}, $a^\tau_A = \varepsilon_1 l_1 = 1{,}6$ *м/с*^{2}.

Вектор a^n_A направлен вдоль AO_1, а a^τ_A - перпендикулярно AO_1, изображаем эти векторы на рисунке.

Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то предполагаем, что вектор a_B направлен вниз. Для определения a_B воспользуемся равенством:

$a_B = a^n_A + a^\tau_A + a^n_{BA} + a^\tau_{AB}$.

Находим $a^n_{BA} = \omega^2{}_{AB} \cdot l_2 = 1{,}61$ *м/с*^{2}. Вектор a^n_{BA} направлен от B к A. Вектор a^τ_{AB} направлен перпендикулярно AB (в любую сторону). Изображаем на рисунке эти векторы.

Таким образом, у величин, входящих в равенство (2.109), неизвестны только численные величины a_{BA} и a^τ_{AB}. Для нахождения a_{BA} равенство (2.109) спроецируем на ось x, перпендикулярную a^τ_{AB}:

$$a_{Bx} = a^n_{Ax} + a^\tau_{Ax} + a^n_{BAx} + a^\tau_{BAx}, \;\; a_B \cos 60^0 = a^n_A \cos 30^0 - a^\tau_A \cos 60^0 - a^n_{BA}$$

Отсюда, подставляя числовые значения всех величин, находим

$a_B = -2{,}05$ *м/с*^{2}. Знак минус указывает, что вектор a_B направлен в сторону, противоположную указанной на рисунке.

5. *Определение* ω_{AB}. Сначала определим a^τ_{AB}. Для этого равенство (2.109) спроецируем на ось y:

$$a_{By} = a^n_{Ay} + a^\tau_{Ay} + a^n_{BAy} + a^\tau_{BAy}, \;\; a_B \cos 30^0 = a^n_A \cos 60^0 - a^\tau_A \cos 30^0 + a^\tau_{BA}$$

$a_{BY} = a^n_{Ay} + a^\tau_{Ay} + a^n_{BAy} + a^\tau_{AB\,y}$, $a_B \cos 30° = a^n_A \cos 60° + a^\tau_A \cos 30° + a^\tau_{AB}$

Отсюда находим $a^\tau_{AB} = -3{,}96$ *м/с*^{2}. Знак указывает, что a^τ_{AB} направлен противоположно показанному на рисунке.

Из равенства $a^\tau_{AB} = \varepsilon_{AB} l_3$ определяем

$$\varepsilon_{AB} = \frac{|a^\tau_{Ba}|}{l_3} = 3{,}3 c^{-2}.$$

Так как $a^\tau_{AB} < 0$, то ε_{AB} направлено против часовой стрелки.

Задача К4

Прямоугольная пластина (рис.К4.0-К4.4) или круглая пластина радиусом R=60см (рис. К4.5-К4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$ заданному в табл. К4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой, стрелкой. Ось вращения на рис. К4.0-К4.2 и К4.5, К4.6 перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. К4.3,К4.4 и К7-К9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. К4.0-К4.4) или по окружности радиуса R (рис. К4.5-К4.9) движется точка M. Закон ее относительного движения, выражаемый уравнением $s=AM=f_2(t)$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), задан в таблице К4 отдельно для рисунков К4.0 – К4.4 и для рисунков К4.5 – К4.9; там же даны размеры b и l. На всех рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM>0$ (при $s<0$ точка M находится по другую сторону от точки A). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1=1c.

Таблица К4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 0—4		Для рис. 5—9	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = \breve{AM} = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$.
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

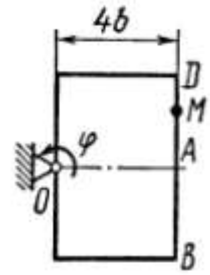


Рис. К4.0

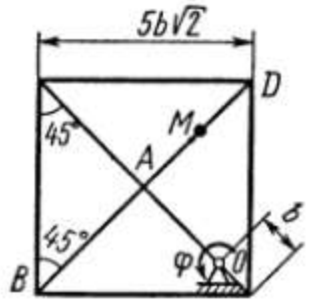


Рис. К4.1

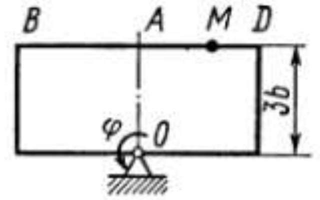


Рис. К4.2

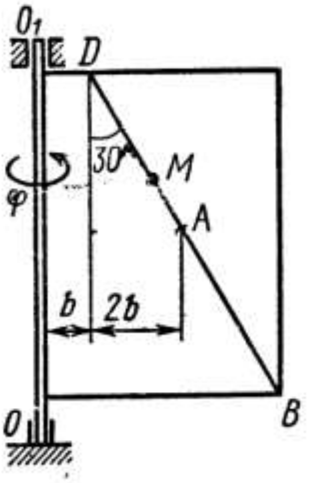


Рис. К4.3

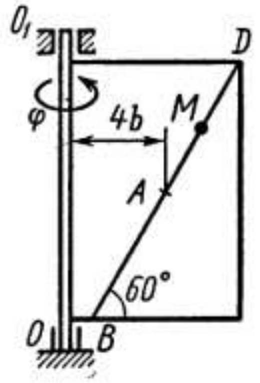


Рис. К4.4

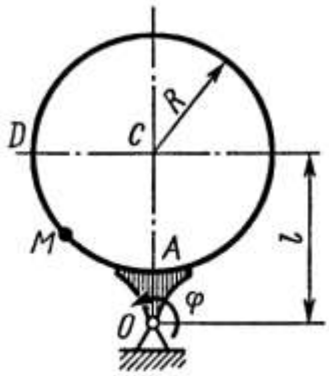


Рис. К4.5

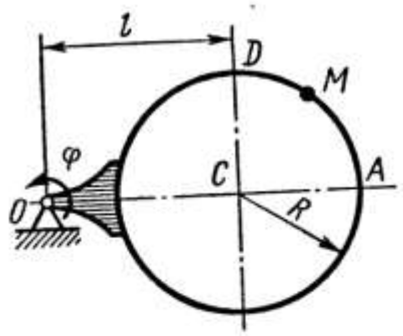


Рис. К4.6

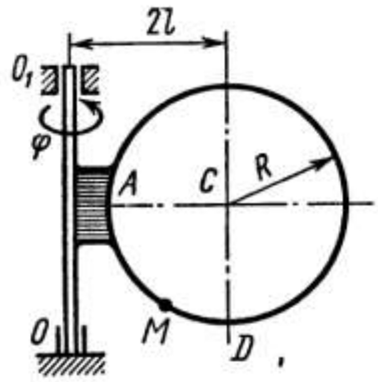


Рис. К4.7

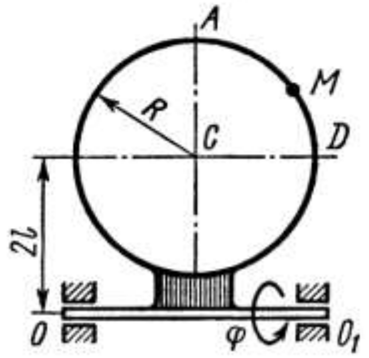


Рис. К4.8

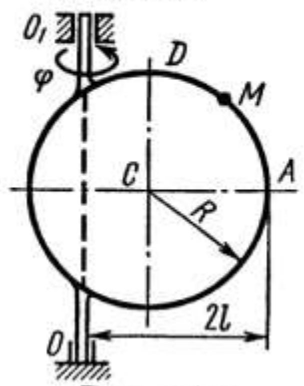


Рис. К4.9

Пример. По заданному уравнению относительного движения точки М $OM = S = 20\sin(pt/3)$ и уравнению вращения тела D $\varphi = 4t - 3t^2$ (S - в см, t - в с), найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент $t_1 = 1c$, если $\alpha = 30°$ (рис. К4).

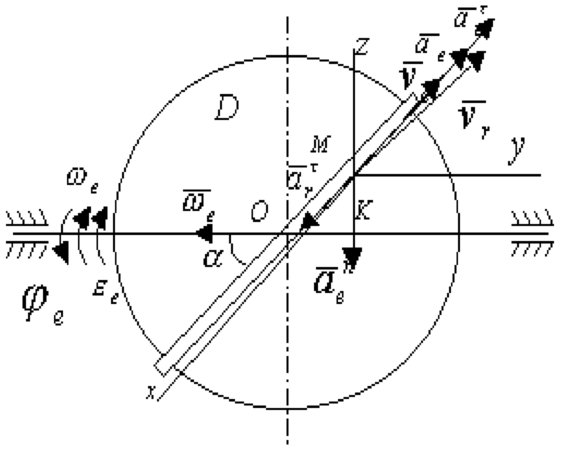


Рис. К4

Решение

Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение в прорези тела D относительным (относительное движение).

Находим положение точки M при $t_1 = 1$с.

$OM = 20\sin(\pi/3) = 10\sqrt{3} = 17{,}3$ *см.*

Определим все кинематические характеристики относительного и переносного движения.

Относительное движение. Это движение задано естественным способом.

Находим v_r:

$$\tilde{v}_r = \dot{S} = \frac{20\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t, \text{ при } t_1 = 1c$$

$$\tilde{v}_r = \frac{20\pi}{3\cdot 2} = 10{,}5 \ \text{см}/\text{с}.$$

Так как $\tilde{v} > 0$, то вектор $\bar{v}_r$ направлен вдоль прямой OM в сторону возрастания S, а $v_r = 10{,}5$*см/с*.

Находим относительное ускорение точки M: $\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau = \bar{a}_r^\tau$ так как $a_r^n = 0$ (движение прямолинейное).

$$\tilde{a}_r^\tau = \ddot{S} = -\frac{20\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t, \text{ при } t_1 = 1c \ \ \tilde{a}_r^\tau = -19{,}0 \ \text{см}/\text{с}.$$

В связи с тем, что $\tilde{a}_r^\tau < 0$, вектор $\vec{a}_r^\tau$ направлен вдоль прямой OM, в сторону уменьшения S, а его модуль $a_r^\tau = 19$ см/с^2.

Переносное движение. Это вращение задано уравнением $\varphi = 4t - 3t^2$. Находим угловую скорость и угловое ускорение тела D: $\tilde{\omega}_e = \dot{\varphi} = 4 - 6t$, при t_1=1с $\tilde{\omega}_e = -2c^{-1}$; $\tilde{\varepsilon}_e = \ddot{\varphi} = -6c^{-2}$. Так как $\tilde{\omega}_e < 0$ и $\tilde{\varepsilon}_e < 0$, то направление вращения противоположно положительному направлению отсчета угла φ и вращение ускоренное. Модули $\omega_e = 2$с$^{-1}$, $\varepsilon_e = 6$с$^{-2}$. Направление вектора ω_e показано на рис.2.35.

Для определения переносной скорости и переносного ускорения точки находим сначала расстояние точки M от оси вращения $MK = OM\sin\alpha = 5\sqrt{3} = 8{,}7$(см). Для v_e и a_e в момент времени $t_1 = 1c$ получаем

$$v_e = \omega_e \cdot MK = 10\sqrt{3} = 17{,}3(см/с), \ \bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau,$$

$a_e^n = \omega_e^2 \cdot MK = 20\sqrt{3} = 34{,}6\,см/с, a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot MK = 30\sqrt{3} = 52\,см/с$.

Через точку *M* проводим пространственные оси *x, y, z* и в соответствии с направлениями угловой скорости и углового ускорения направляем векторы v_e, a_e^τ, a_e^n.

Ускорение Кориолиса. Так как угол между вектором $\bar{v}_r, \bar{\omega}_e$ равен (180°-a), то модуль a_c в момент $t_1 = 1с$ будет

$$a_c = 2\omega_e \cdot v_r \sin(180° - a) = 2\omega_e v_r \sin a = \frac{20\pi}{3} = 20{,}9(\text{см/с}^2)$$.

Воспользовавшись правилом Жуковского, направляем вектор a_c вдоль оси *x* от нас.

Абсолютное движение. В соответствии с теоремами сложения скоростей и ускорений имеем:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e, \bar{a}_a = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_c$$

Так как векторы $\bar{v}_r, \bar{v}_e$ взаимно перпендикулярны, то в момент $t_1 = 1с$:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{10{,}5^2 + 17{,}3^2} = 20{,}2(\text{см/с})$$.

Для вычисления a_a спроецируем (2.95) на координатные оси *x, y, z*. Для момента t_1 = 1с получаем:

$$a_{ax} = a_{rx}^\tau + a_{rx}^n + a_{ex}^\tau + a_{ex}^n + a_{cx} = -a_e^\tau - a_c = -72{,}9\,см/с,$$

$$a_{ay} = a_{ry}^\tau + a_{ry}^n + a_{ey}^\tau + a_{ey}^n + a_{cy} = -a_e^\tau \cos\alpha = -16{,}4\,см/с,$$

$$a_{az} = a_{rz}^\tau + a_{rz}^n + a_{ez}^\tau + a_{ez}^n + a_{cz} = -a_e^\tau \sin\alpha - a_e^n = -44{,}1\,см/с$$

Находим значение a_a в момент $t_1=1с$:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = 86{,}8(\text{см/с}^2)$$..

Задача Д1

Груз *D* массой *m*, получив в точке *A* начальную скорость v_0, движется в изогнутой трубе *ABC* расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0-Д1.9, табл. Д1). На участке *AB* на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила *Q* (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды *R*, зависящая от скорости *v* груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке АВ пренебречь.

В точке *B* груз, не изменяя значения своей скорости, переходит на участок *BC* трубы, где на него кроме силы тяжести действует сила трения (коэффициент трения груза о трубу *f = 0,2*) и переменная сила *F*, проекция которой *Fx* на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние *AB=l* или время t_1 движения груза от точки *A* до точки *B*, найти закон движения груза на участке *BC*, т.е. *x=f(t),* где *x=BD*.

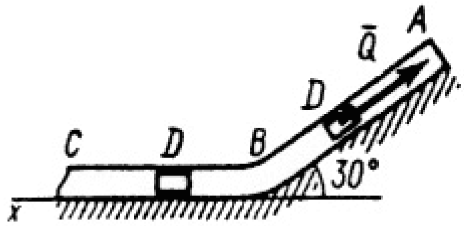


Рис. Д1.0

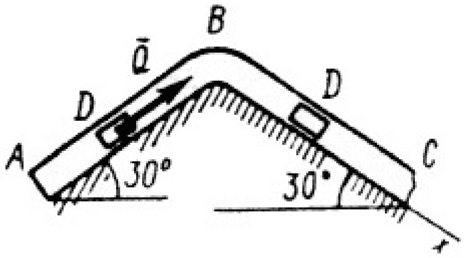


Рис. Д1.1

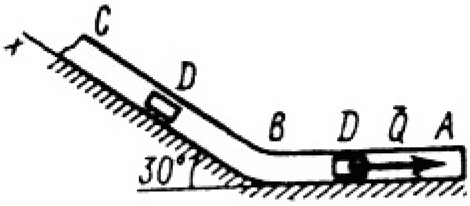


Рис. Д1.2

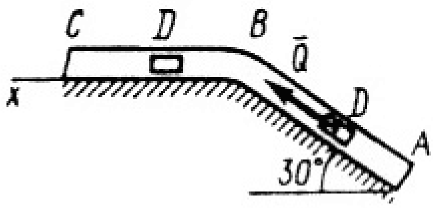


Рис. Д1.3

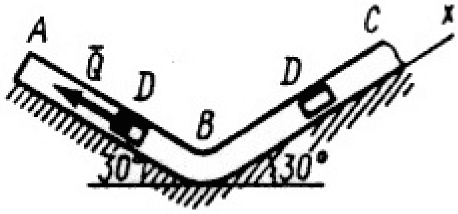


Рис. Д1.4

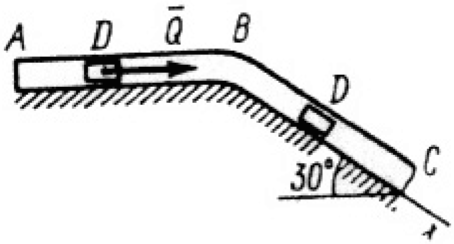


Рис. Д1.5

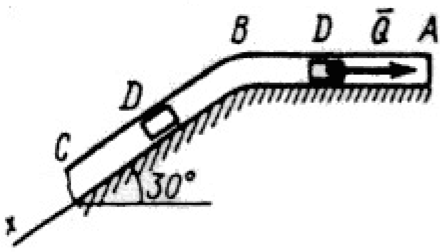


Рис. Д1.6

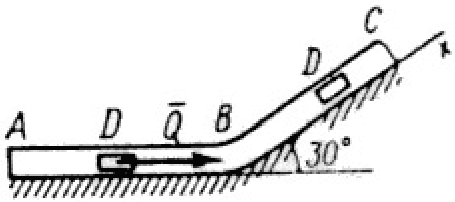


Рис. Д1.7

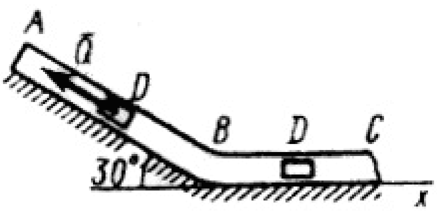


Рис. Д1.8

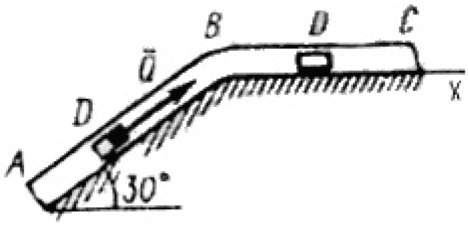


Рис. Д1.9

Таблица **Д1**

Номер условия	m, кг	vo, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t1, с	Fx, Н
0	2,4	12	5	0,8v^2	1,5	–	4sin(4t)
1	2	20	6	0,4v	–	2,5	-5cos(4t)
2	8	10	16	0,5v^2	4	–	-2cos(2t)
3	1,8	24	5	0,3v	–	2	-5sin(2t)
4	6	15	12	0,6v^2	5	–	-5sin(2t)
5	4,5	22	9	0,5v	–	3	3t
6	4	12	10	0,8v^2	2,5	–	6cos(4t)
7	1,6	18	4	0,4v	–	2	-3sin(4t)
8	4,8	10	10	0,2v^2	4	–	4cos(2t)
9	3	22	9	0,5v	–	3	4sin(2t)

Пример.Груз D массой $m = 2$ кг движется в вертикальной плоскости внутри изогнутой трубы ABC, получив в точке A начальную скорость $V_0 = 5$ м/с (см. рис. Д1). На участке AB на груз, кроме силы тяжести, действуют: постоянная сила $\overline{Q}$ (ее направление показано на рисунке 1), причем величина $Q = 2$ Н; сила сопротивления среды, зависящая от скорости движения $R = 2V^2$; коэффициент трения груза о трубу $f_1 = 0{,}1$; длина участка $AB = l = 2{,}5$ м.

В точке B груз переходит на участок BC трубы, где на него действует кроме силы тяжести и силы трения (с коэффициентом трения груза о трубу $f_2 = 0{,}2$) переменная сила $\overline{F}$, проекция которой на ось x изменяется по закону $F_x = 2\sin(4\pi \cdot t)$, и переменная сила $\overline{P}$, проекция которой на ось x изменяется по закону $P_x = 4t$.

Требуется определить закон движения груза на участке BC, т. е. функцию $x = f(t)$, где координата $x = BD$, см. рисунок 1.

Решение

1. Цель расчета движения груза на участке AB трубы – определение значения его скорости V_B в конце этого участка (в точке B), являющегося значением начальной скорости груза для участка BC, для которого по условию задачи требуется определить закон движения груза.

При движении груза по трубе рассматриваем его как материальную точку. На участке AB используем систему ортогональных координат Ax_1y_1. Изображаем груз D в произвольном положении, характеризуемом координатой $x_1 = AD$, и показываем действующие на него силы $\overline{G} = m \cdot \overline{g}$, $\overline{R}$, $\overline{F}_{T_1}$ (сила трения), $\overline{N}_1$ (сила нормального давления груза на трубу), $\overline{Q}$.

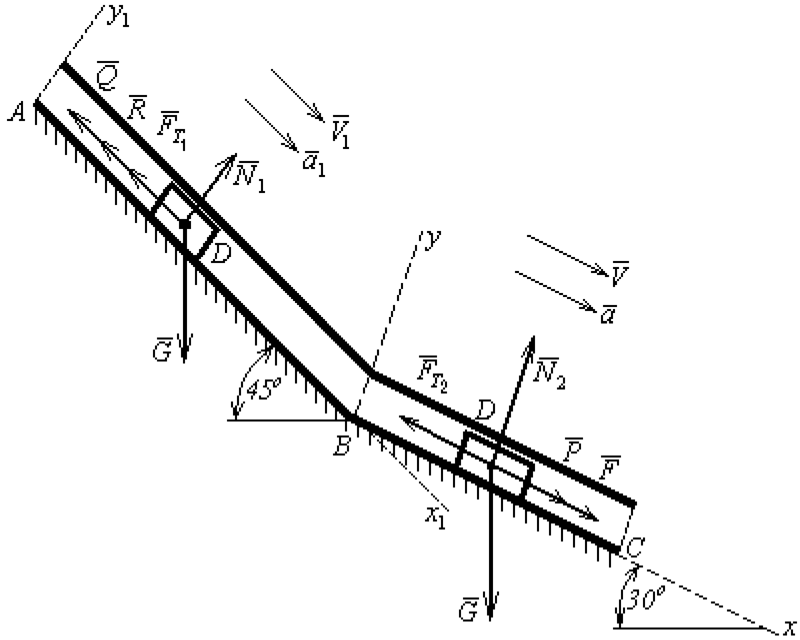


Рис. Д1

Составляем систему дифференциальных уравнений движения точки в проекциях на оси x_1 и y_1:

$$m \cdot \frac{dV_{x_1}}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} F_{ix_1} = G_{x_1} + N_{1x_1} + Q_{x_1} + R_{x_1} + F_{T1x_1};$$

$$m \cdot \frac{dV_{y_1}}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} F_{iy_1} = G_{y_1} + N_{1y_1} + Q_{y_1} + R_{y_1} + F_{T1y_1}.$$

Конкретизируем проекции сил на координатную ось x_1:

$G_{x_1} = G \cdot \cos 45^o$; $N_{1x_1} = 0$; $Q_{x_1} = -Q = -2$ (Н); $R_{x_1} = -R = -2V^2$; $F_{T1x_1} = -F_{T_1}$.

Конкретизируем проекции сил на координатную ось y_1:

$G_{y_1} = -G \cdot \sin 45^o$; $N_{1y_1} = N_1$; $Q_{y_1} = 0$; $R_{y_1} = 0$; $F_{T1y_1} = 0$.

Кроме того, известно, что сила трения есть произведение коэффициента трения на нормальную силу давления тела на поверхность движения: $F_{T_1} = f_1 \cdot N_1$.

Далее скорость движения груза V_{y_1} на участке *AB* в направлении оси *y₁* (поперек трубы) равна нулю (координата *y₁* не изменяется) и поэтому ускорение $\frac{dV_{y_1}}{dt} = 0$.

Таким образом, левая часть второго уравнения равна нулю: $0 = -G \cdot \sin 45^o + N_1$. Отсюда находим $N_1 = G \cdot \sin 45^o$, поэтому $F_{T_1} = f_1 \cdot N_1 = f_1 \cdot G \cdot \sin 45^o$ и, следовательно, первое дифференциальное уравнение запишется:

$$m \cdot \frac{dV_{x_1}}{dt} = G \cdot \cos 45^o - 2 - 2V^2 - f_1 \cdot G \cdot \sin 45^o. \qquad (1)$$

Поскольку в исходных данных к задаче задана длина участка *AB* ($AB = l = 2{,}5$ м), для интегрирования дифференциального уравнения движения на этом участке удобнее перейти от переменной *t* к переменной *x*, применяя известную математическую операцию (попутно упростим обозначение скорости $V_{x_1} = V_1$):

$$\frac{dV_1}{dt}=V_1\frac{dV_1}{dx_1}.$$

Тогда, разделив обе части уравнения (1) на m, получим

$$V_1\frac{dV_1}{dx_1}=\frac{m\cdot g\cdot\cos 45^o-2-f_1\cdot m\cdot g\cdot\sin 45^o}{m}-\frac{2V_1^2}{m}.$$

Подставив числовые значения $m=2$ кг, $g=9{,}81$ м/с^2, $f_1=0{,}1$, получим

$V_1\frac{dV_1}{dx_1}=k-V_1^2$, где значение $k=5{,}242$ (м^2/с^2).

Разделяем переменные и умножаем обе части равенства на 2:

$$\frac{2V_1dV_1}{V_1^2-k}=-2dx_1. \qquad (2)$$

Интегрируя обе части уравнения (2), имеем:

$$\ln\left(V_1^2-k\right)=-2x_1+C_1. \qquad (3)$$

По начальным условиям при $x_1=0$ и начальной скорости $V_1=V_0$ постоянная интегрирования будет $C_1=\ln\left(V_0^2-k\right)$. Тогда уравнение (3) после подстановки $C_1=\ln\left(V_0^2-k\right)$ представится в виде:

$\ln\left(V_1^2-k\right)=-2x_1+\ln\left(V_0^2-k\right)$ или $\ln\left(V_1^2-k\right)-\ln\left(V_0^2-k\right)=-2x_1$.

Отсюда $\ln\frac{V_1^2-k}{V_0^2-k}=-2x_1$ или $\frac{V_1^2-k}{V_0^2-k}=e^{-2x_1}$.

В результате получаем функцию скорости в зависимости от координаты x_1 при движении груза на участке *AB* трубы:

$$V_1=\sqrt{k+\left(V_0^2-k\right)\cdot e^{-2x_1}}. \qquad (4)$$

Подставляя в формулу (4) значения $x_1=AB=l=2{,}5$ м, $k=5{,}242$ (м^2/с^2), $V_0=5$ м/с, определим скорость груза в точке *B* участка *AB* трубы:

$$V_1=\sqrt{k+\left(V_0^2-k\right)\cdot e^{-2x_1}}=\sqrt{5{,}242+\left(5^2-5{,}242\right)\cdot 2{,}72^{-2\cdot 2{,}5}}=2{,}318 \text{ м/с}.$$

2. На участке *BC* используем систему ортогональных координат Bxy. Изображаем груз *D* в произвольном положении, характеризуемом координатой $x=BD$, и показываем действующие на него силы: $\overline{G}=m\cdot\overline{g}$ (собственная сила тяжести), $\overline{P}$ (переменная сила, изменяющаяся по заданному закону от времени $P_x=4t$), $\overline{F}_{T_2}$ (сила трения с заданным коэффициентом трения f_2), $\overline{N}_2$ (сила нормального давления груза на трубу), $\overline{F}$ (переменная сила, изменяющаяся по заданному закону от времени $F_x=2\sin(4\pi\cdot t)$).

Составляем систему дифференциальных уравнений движения груза (как материальной точки) на участке *BC* в проекциях на оси x и y:

$$m\cdot\frac{dV_x}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}F_{ix}=G_x+N_{2x}+F_x+P_x+F_{T2x}; \qquad (5)$$

$$m\cdot\frac{dV_y}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}F_{iy}=G_y+N_{2y}+F_y+P_y+F_{T2y}. \qquad (6)$$

В этих уравнениях сила трения $\overline{F}_{T2_x}=\overline{F}_{T_2}=f_2\cdot N_2$, причем $\overline{F}_{T2_y}=0$ (в проекции на ось *y*).

Далее скорость движения груза V_y на участке BC в направлении оси y (поперек трубы) равна нулю (координата y не изменяется) и поэтому ускорение $\frac{dV_y}{dt}=0$.

Таким образом, левая часть второго уравнения (6) равна нулю: $0=N_2-m\cdot g\cdot\cos 30^o$. Отсюда находим $N_2=m\cdot g\cdot\cos 30^o$, поэтому $F_{T_2}=f_2\cdot N_2=f_2\cdot m\cdot g\cdot\cos 30^o$. Кроме того, $G_x=G\cdot\sin 30^o=m\cdot g\cdot\sin 30^o$, $F_x=-2\sin(4\pi\cdot t)$ (направление – против оси x), $P_x=4t$ (направление – по оси x). Следовательно, первое дифференциальное уравнение (5) запишется:

$$m\cdot\frac{dV_x}{dt}=m\cdot g\cdot(\sin 30^o-f_2\cdot\cos 30^o)-2\sin(4\pi t)+4t. \qquad (7)$$

Разделив обе части уравнения (7) на m и подставляя числовые значения $m=2$ кг, $g=9{,}81$ м/с^2, $f_2=0{,}2$, получим:

$$\frac{dV_x}{dt}=3{,}206-\sin(4\pi t)+2t. \qquad (8)$$

Умножая обе части уравнения (8) на dt и интегрируя, находим его общее решение

$$V_x=3{,}206\cdot t-\frac{1}{4\pi}\cdot\cos(4\pi t)+t^2+C_2. \qquad (9)$$

При анализе движения груза D на рассматриваемом участке BC время будем отсчитывать от момента, когда он находился в точке B, принимая в этот момент $t=0$. Тогда при $t=0$ начальная скорость груза на этом участке $V_x=V_0=V_B=2{,}318$ м/с. Подставляя эти значения в уравнение (9), получим постоянную интегрирования:

$$C_2=V_B+\frac{1}{4\pi}=2{,}318+\frac{1}{4\cdot 3{,}14}=2{,}4 \text{ (м/с)}.$$

Подставляя найденное значение C_2 в уравнение (9), получим функцию изменения скорости груза на участке BC:

$$V_x=3{,}206\cdot t-\frac{1}{4\pi}\cdot\cos(4\pi t)+t^2+2{,}4. \qquad (10)$$

Подставим в уравнение (10) $V_x=\frac{dx}{dt}$ и разделим переменные:

$$dx=3{,}206\cdot tdt-\frac{1}{4\pi}\cdot\cos(4\pi t)dt+t^2dt+2{,}4dt.$$

Интегрируя, получим общее решение этого уравнения:

$$x=3{,}206\cdot\frac{t^2}{2}-\frac{1}{16\pi^2}\cdot\sin(4\pi t)+\frac{t^3}{3}+2{,}4t+C_3.$$

Постоянную интегрирования C_3 определяем при начальных условиях движения груза на участке BC (при $t=0$, координата $x=0$):

$$0=3{,}206\cdot 0-\frac{1}{16\pi^2}\cdot\sin(4\pi\cdot 0)+0+2{,}4\cdot 0+C_3,$$

откуда получаем $C_3=0$.

Таким образом, получаем окончательно искомый закон движения груза D на участке BC трубы:

$$x = \frac{t^3}{3} + 1{,}603 \cdot t^2 + 2{,}4t - \frac{1}{16\pi^2} \cdot \sin(4\pi \cdot t).$$

Результат решения задачи: получен искомый закон движения груза на участке *BC* в функции от времени *t*:

$$x = f(x) = \frac{t^3}{3} + 1{,}603 \cdot t^2 + 2{,}4t - \frac{1}{16\pi^2} \cdot \sin(4\pi \cdot t),$$

где координата x – в метрах (м), время t – в секундах (с).

Приложение (напоминание некоторых типовых формул интегрирования):

- функция $x = x(t) = \sin(\alpha \cdot t)$, неопределенный интеграл равен $\int \sin(\alpha \cdot t)dt = -\frac{1}{\alpha} \cdot \cos(\alpha \cdot t) + C$; (где С – постоянная интегрирования);
- функция $x = x(t) = \cos(\alpha \cdot t)$, неопределенный интеграл равен $\int \cos(\alpha \cdot t)dt = \frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha \cdot t) + C$; (где С – постоянная интегрирования);
- интеграл вида $\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}dx = \ln\left|ax^2 + bx + c\right| + C$ (где $a = const$, $b = const$, $c = const$) является табличным, так как в числителе стоит производная знаменателя; С – постоянная интегрирования;
- табличный интеграл $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\frac{a + x}{a - x} + C$, (где $a = const$); С – постоянная интегрирования.

Задача Д2

Механическая система состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступней $R_3 = 0{,}3$ *м* и $r_3 = 0{,}1$ *м* и радиусом инерции относительно оси вращения $\rho_3 = 0{,}2$ *м* блока *4* радиуса $R_4 = 0{,}2$ *м* катка (или неподвижного блока) 5 (рис. Д2.0 – Д2.9, табл.Д2).Тело 5 считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока 4-равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость $f=0{,}1$. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному телу прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *с*.

Под действием силы $F=f(s)$, зависящей от перемещения S точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления.

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение S станет $S_1=0{,}2$*м*.

Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы, где обозначено

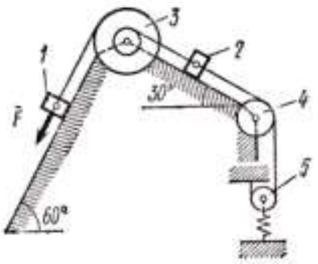


Рис. Д2.0

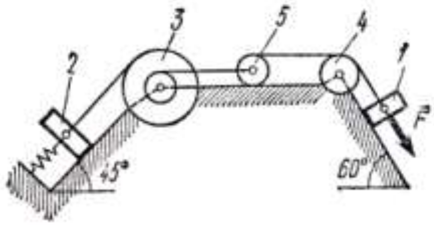


Рис. Д2.1

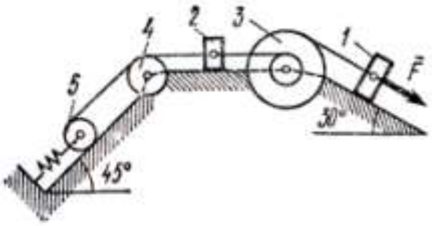


Рис. Д2.2

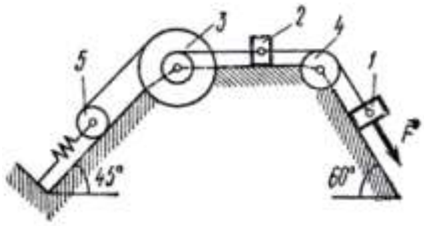


Рис. Д2.3

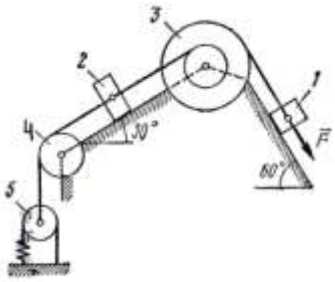


Рис. Д2.4

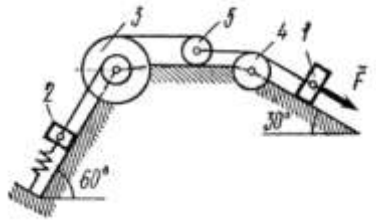


Рис. Д2.5

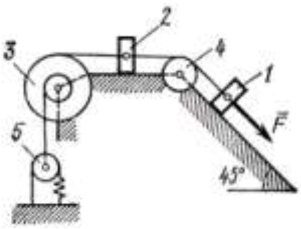


Рис. Д2.6

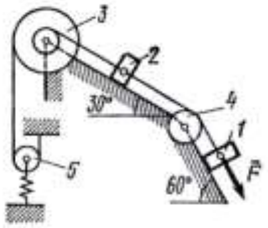


Рис. Д2.7

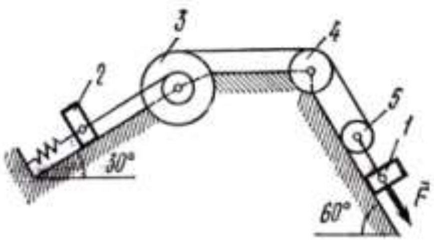


Рис. Д2.8

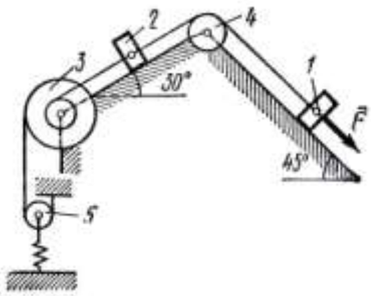


Рис. Д2.9

Таблица Д2

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н/м	M, Н·м	$F=f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	80(2+5s)	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	50(8+3s)	υ_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	60(6+5s)	υ_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	80(5+6s)	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	40(9+4s)	υ_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	50(7+8s)	υ_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	40(8+9s)	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	60(8+5s)	υ_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	50(9+2s)	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	80(6+7s)	υ_{C5}

v_1, v_2, v_{c5} – скорости грузов 1,2 и центра масс тела 5 соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел 3 и 4.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток 5 на рис. Д2.2), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз 2, если m_2 =0; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Пример. Механическая система состоит из груза 1, катка 5, ступенчатого шкива 3 с радиусами R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения r_3, блока 4 радиуса R_4 (рис. Д2).

Тело 5 считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока 4-равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения груза о плоскость $f=0,1$. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 и каток. К одному телу прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c.

Под действием силы $F=f(s)$, зависящей от перемещения S точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления.

Определить угловую скорость 4 блока в тот момент времени, когда перемещение S станет $S_1=0,2м$. Каток 5 катится без проскальзывания.

Дано: $m_1=4кг$, $m_3=0$, $m_4=5кг$, $m_5=6кг$, $C=320Н/м$, $M=1,4Нм$, $F=50(9+2S)$, $R_3=0,3м$, $r_3=0,1м$, $r_3=0,2м$, $R_4=0,2м$, $f=0,1$, $S_1=0,2м$. Найти ω_4.

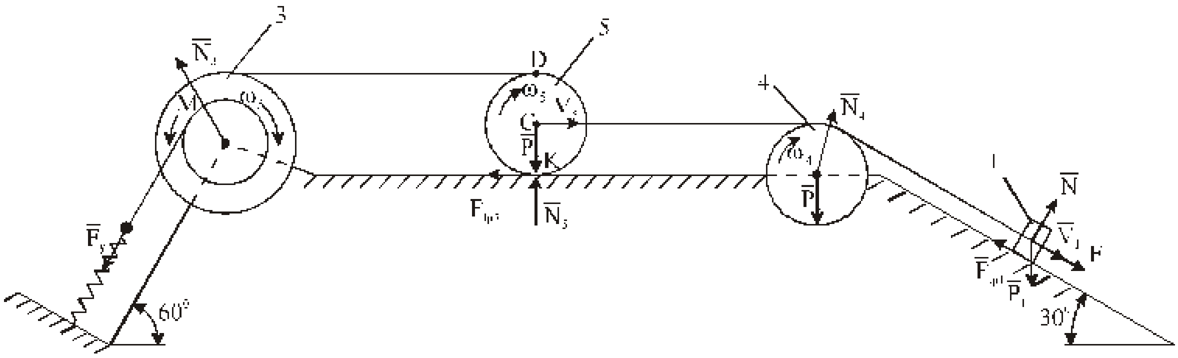


Рис. Д2

Решение

Показываем действующие на систему внешние силы:

$\overline{F}_1,\ \overline{F}_y,\ \overline{P}_1,\ \overline{P}_4,\ \overline{P}_5$,

реакции

$\overline{N}_1,\ \overline{N}_4,\ \overline{N}_5,\ \overline{N}_3$,

силы трения $\overline{F}_{тр1}$ и $\overline{F}_{тр5}$ и момент М. Для нахождения ω_4 применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \quad (1)$$

Так как в начальном положении система находилась в покое, то $T_0=0$, а

$T=T_1+T_2+T_5$. (2)

Учитывая что тело 1 движется поступательно, тело 4 вращается вокруг неподвижной оси, а тело 5 движется плоскопаралельно, получим:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2,\quad T_4 = \frac{1}{2}I_4\omega_4^2,\quad T_5 = \frac{1}{2}m_5 v_c^2 + \frac{1}{2}I_{c5}\omega_5^2. \quad (3)$$

Все входящие сюда скорости выразим через ω_4:

$$v_1 = \omega_4 R_4,\ v_c = \omega_4 R_4,\quad \omega_5 = \frac{v_c}{CP} = \frac{\omega_4 R_4}{R_5}, \quad (4)$$

(для тела 5 в точке К- МЦС). Кроме того,

$I_4 = m_3 R_4^2$,

а

$$I_{C5} = \frac{m_5 R_5^2}{2}. \quad (5)$$

Подставляя (5) и (4) в (3) и (2), получим:

$$T = \frac{1}{2}m_1\omega_4^2R_4^2 + \frac{1}{2}m_4R_4^2\omega_4^2 + \frac{1}{2}m_5\omega_4^2R_4^2 + \frac{1}{2}\frac{m_5R_5^2}{2}\frac{\omega_4^2R_4^2}{R_5^2},$$

$$T = \frac{\omega_4^2}{4}\left(2m_1R_4^2 + 2m_4R_4^2 + 3m_5R_4^2\right) = 0{,}36\omega_4^2. \quad (6)$$

Находим сумму работ всех внешних сил $\sum A_k^e$:

$$A(\overline{F}) = \int_0^{S_1} FdS = \int_0^{S_1} 50(9+2S) = 50(9S_1 + S_1^2) = 92\,Дж \quad (7)$$

$$A(\overline{P}_1) = P_1 S_1 \cos 60^o = m_1 g \cos 60^o S_1 = 40\ 0{,}5\ 0{,}2 = 4\,Дж \quad (8)$$

$$A(\overline{F}_{TP1}) = -F_{TP1} S_1 = -fN_1 S_1 = -fP_1 \cos 30^o S_1 = -fm_1 g \cos 30^o S_1,$$

$$A(\overline{F}_{TP1}) = -0{,}1\ 4\ 10\ 0{,}87\ 0{,}2 = -0{,}17\,Дж, \quad (9)$$

$$A(M) = -M\varphi_3 = -M\frac{2S_1}{R_3} = -1{,}4\frac{0{,}4}{0{,}3} = -1{,}87\,Дж \quad (10)$$

$$A(\overline{F}_y) = -\frac{C}{2}\lambda^2 = -\frac{C}{2}(\varphi_3 r_3)^2 = -\frac{C}{2}\left(\frac{2S_1}{R_3}r_3\right)^2 = -160\left(\frac{0{,}4\ 0{,}1}{0{,}3}\right) = -2{,}84\,Дж. \quad (11)$$

При вычислении (7)-(10) учтено, что

$N_1 = P_1 \cos 30^o = m_1 g \cos 30^o$,

в точке *K*-МЦС, а поэтому

$v_D = 2v_C$,

а

$S_D = 2S_C = 2S_1$.

Работа остальных сил равна нулю, они или перпендикулярны перемещениям

$(\overline{N}_1,\ \overline{P}_5)$,

или приложены в неподвижных точках

$(\overline{P}_4, \overline{N}_4, \overline{N}_3)$,

или приложены в МЦС

$(\overline{N}_5, \overline{F}_{TP5})$.

Складывая (7)-(11), получим:

$\sum A_k^e = 92 - 0{,}17 - 1{,}87 - 2{,}84 + 4 = 87{,}12\,Дж$ (12).

Подставляя (12) и (6) в (1) находим ω_4:

$0{,}36\omega_4^2 = 87{,}12$, $\quad \omega_4 = \sqrt{\dfrac{87{,}12}{0{,}36}} = 15{,}6\ (c^{-1})$.

Задача Д3

Вертикальный вал АК (рис. Д3.0-Д3.9, табл. Д3), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ с$^{-1}$, закреплен подпятником в точке А и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл.Д3 в столбце 2 (AB = BD = DE = EK = *a*). К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой *m* = 10 кг, состоящий из частей *1 и 2* (размеры частей стержня показаны на рисунках, где *b = 0,1 м*, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной *l = 4b* с точечной массой m_3 = 3 кг на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней к валу указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы α, β, γ, φ – в столбцах 5 – 8.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При окончательных подсчетах принять $a = 0,4$ *м*.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При окончательных подсчетах принять $a = 0,6$ *м*.

Таблица Д3

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление в точке		α, град	β, град	γ, град	φ, град
		ломаного стержня	невесомого стержня		рис. 0—4	рис. 5—9	
1	2	3	4	5	6	7	8
0	*B*	*D*	*K*	45	135	225	60
1	*K*	*B*	*D*	60	240	150	45
2	*K*	*E*	*B*	30	210	120	60
3	*D*	*K*	*B*	60	150	240	30
4	*K*	*D*	*E*	30	120	210	60
5	*E*	*B*	*K*	45	225	135	60
6	*E*	*D*	*K*	60	60	150	30
7	*K*	*B*	*E*	30	30	120	60
8	*D*	*E*	*K*	60	150	60	30
9	*E*	*K*	*D*	30	120	210	60

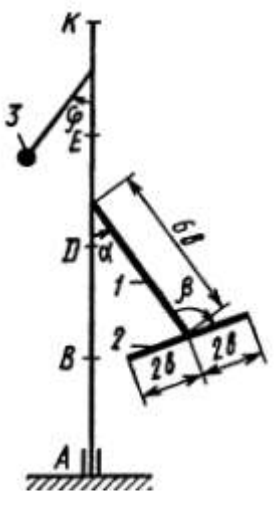


Рис.Д3.0

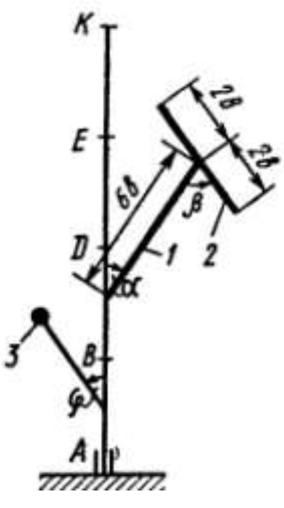


Рис.Д3.1

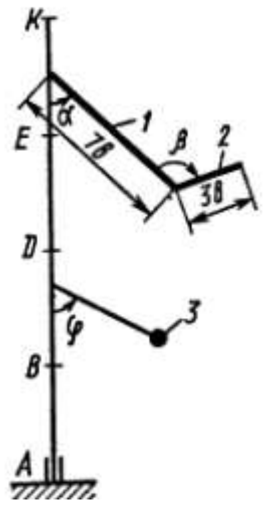


Рис.Д3.2

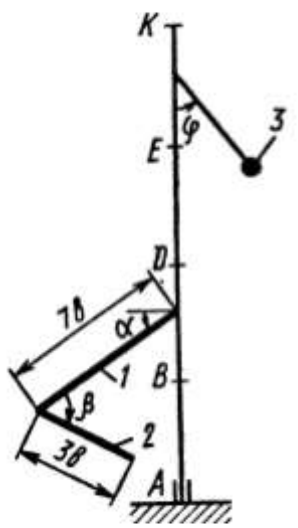


Рис.Д3.3

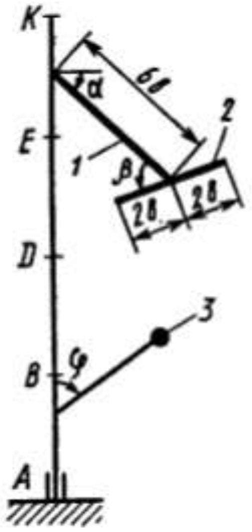


Рис.Д3.4

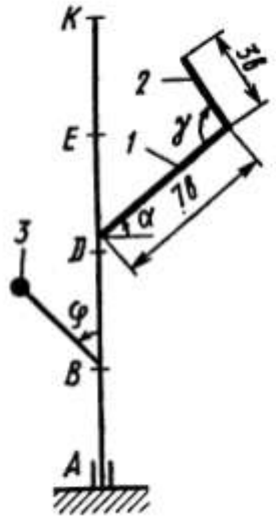


Рис.Д3.5

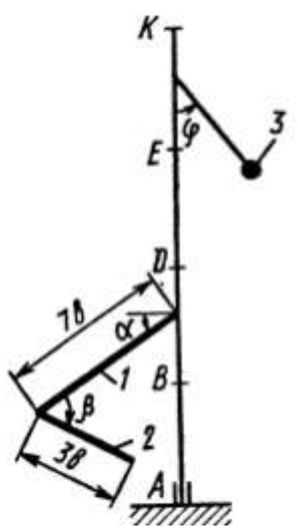


Рис.Д3.3

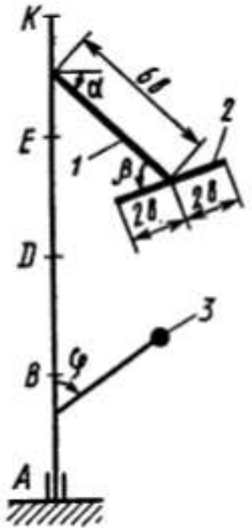


Рис.Д3.4

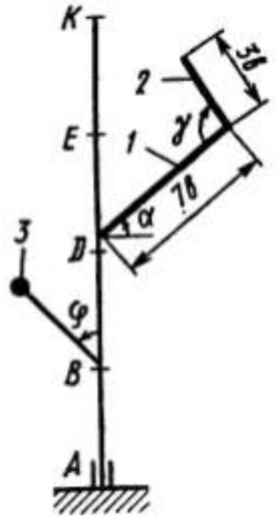


Рис.Д3.5

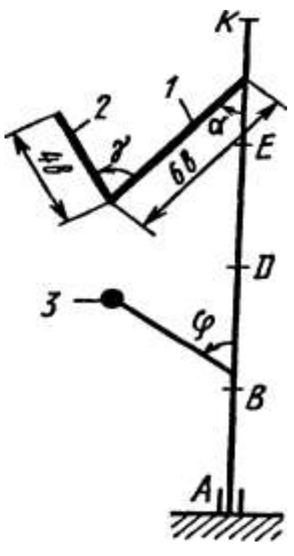


Рис.Д3.9

Пример Д3. С невесомым валом АВ, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω, жестко скреплен стержень OD длиной l и массой m_1, имеющий на конце груз массой m_2 (рис. Д3).

Дано: $b_1 = 6$ м, $b_2 = 0{,}2$ м, $\alpha = 30°$, $l = 0{,}5$ м, $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $\omega = 6$ с$^{-1}$.

Определить: реакции подпятника А и подшипника В.

Решение. Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала АВ, стержня OD и груза, и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом оси Аху так, чтобы стержень лежал в плоскости ху, и изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, составляющие X_A, Y_A реакции подпятника и реакцию X_B подшипника.

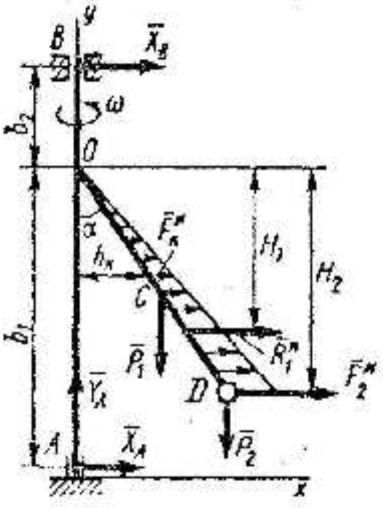


Рис.Д3

Согласно принципу Даламбера присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня и груза, считая груз материальной точкой. Так как вал вращается равномерно (ω = *const*), то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\bar{a}_{nk}$ направленные к оси вращения, а численно a_{nk} = $=\omega^2 h_k$, где h_k - расстояние элемента от оси. Тогда силы инерции $\bar{F}_k^и$ будут направлены от оси вращения и численно $F_k^и = \Delta m a_{nk} = \Delta m\omega^2 h_k$, где Δm — масса элемента. Поскольку все $\bar{F}_k^и$ пропорциональны h_k то эпюра этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей $\bar{R}_1^и$ линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника, т.е. на расстоянии H_1 от вершины О, где $H_1 = 2H_2/3$ ($H_2 = l\cos\alpha$) . Но, как известно, равнодействующая любой системы сил равна ее главному вектору, а численно главный вектор сил инерции стержня $R_1^и = m_1 a_C$, где a_C — ускорение центра масс стержня; при этом, как и для любого элемента стержня, $a_C = a_{Cn} = \omega^2 h_C = \omega^2 OC\sin\alpha$ ($OC = l/2$). В результате получим $R_1^и = m_1\omega^2 l/2$ = 13,5 Н. Аналогично для силы инерции $F_2^и$ груза найдем, что она тоже направлена от оси вращения, а численно $F_2^и = m_2\omega^2 l\sin\alpha$ = 18 Н.

Так как все действующие силы и силы инерции лежат в плоскости xy, то и реакции подпятника А и подшипника В тоже лежат в этой плоскости, что было учтено при их изображении.

По принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составляя для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим:

$$\Sigma F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + R_1^и + F_2^и = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 = 0 \tag{2}$$

$$\Sigma m_B(\overline{F}_k) = 0; \quad X_A(b_1 + b_2) - P_1(l/2)\sin\alpha - P_2 l\sin\alpha + R_1^и(H_1 + b_2) + F_2^и(H_2 + b_2) = 0 \tag{3}$$

Подставив сюда числовые значения всех заданных и вычисленных величин и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции.

Ответ: X_A = -11,8 Н, Y_A = 49,1 Н, X_B = -19,7 Н.

Знаки указывают, что силы X_A и X_B направлены противоположно показанным на рис. Д3

Литература

1. Цывильский В.Л. Теоретическая механика. М., «Высшая школа»,2004.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.,1983.
3. Воронков И.М. Курс теоретической механики. М.,1954 и последующие издания.
4. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В.И. Дронг.,В.В. Дубинин., М.И. Ильин и др., Под общей ред. К.С. Колесникова. М.2000.
5. Гернет М.М. Курс теоретической механики. М., 1970 и последующие издания.
6. Мещерский И.В.Сборник задач по теоретической механике. М., 1986 и последующие издания.
7. Сборник задач по теоретической механике / под ред. К.С. Колесникова.М.,1983.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. проф. А.А. Яблонского. М., 1978 и последующие издания.
9. Бать М. И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч.1,2.М.,1984 и последующие издания.
10. Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников энергетических, горных, метал-лургических, электроприборостроения и автоматизации, техно-логических специальностей, а также геологических, электро-технических, электронной техники и автоматики, химико - технологи-ческих и инженерно- экономических специальностей вузов. / под ред.
проф. С.М. Тарга, М. 1988.
11. Утебаев М.Н.Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания по статике и кинематике для студентов-заочников инженерно-технических и технологических специальностей. Актау,2007.
12. Утебаев М.Н.Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания по динамике для студентов-заочников инженерно-технических и технологических специальностей. Актау,2008.

Содержание

Утебаев Моллахасим Нурбосинович – к.ф.-м.н.,
доцент КГУТиИ им.Ш.Есенова

Теоретическая механика

Задания и методические указания по СРСП для студентов дневного отделения инженерно- технических и технологических специальностей

Методическое указание

Формат 60х84 1/12
Объем 51 стр. 4,25 печатный лист
Тираж 20 экз.,
Отпечатано
в редакционно-издательском отделе
КГУТиИ им. Ш Есенова
г.Актау, 27 мкр.