Министерство образования и науки Республики Казахстан

Костанайский государственный университет имени А.Байтурсынова

Кафедра электроэнергетики и физики

М.М. Дунский

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Костанай, 2017

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3я73
Д 83

Автор:
Дунский Михаил Михайлович, магистр физики, ст. преподаватель кафедры электроэнергетики и физики

Рецензенты:
Джаманбалин Кадыргали Коныспаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ректор Костанайского социально-технического университета им.З.Алдамжар
Кошкин Игорь Владимирович, кандидат технических наук, зав.кафедрой электроэнергетики и физики
Поезжалов Владимир Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры электроэнергетики и физики

Дунский М.М.

Д83 Теоретическая механика: Учебное пособие по теоретической механики для специальности 5В060400-Физика – Костанай: КГУ имени А.Байтурсынова - 2017. - 197 с.

ISBN 978-601-7955-32-8

В учебное пособие включены некоторые темы курса общей физики и рекомендации по закреплению изученного теоретического материала посредством выполнения практических заданий с использованием компьютерных моделей физических процессов.

Предназначено для студентов физических специальностей; может быть рекомендовано преподавателям высших учебных заведений при проведении практических учебных занятий по теоретической механике.

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3я73
Д83

Утверждено и рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом Костанайского государственного университета имени А. Байтурсынова, 29.11.2017 г, протокол № 6.
ISBN

ISBN 978-601-7955-32-8

Содержание

Введение ... 5
Глава 1 Уравнения движения ... 7
1.1 Вопросы для самопроверки ... 7
1.2 Решение задач ... 8
1.3 Задачи для самостоятельного решения ... 47
1.4 Тестовые задания ... 56
Глава 2 Законы сохранения ... 90
2.1 Вопросы для самопроверки ... 90
2.2 Решение задач ... 91
2.3 Задания для самостоятельного решения ... 99
2.4 Тестовые задания ... 100
Глава 3 Интегрирование уравнений движения ... 110
3.1 Вопросы для самопроверки ... 110
3.2. Решение задач ... 111
3.3 Задачи для самостоятельного решения ... 126
3.4 Тестовые задания ... 128
Глава 4 Столкновения частиц ... 135
4.1 Вопросы для самопроверки ... 135
4.2 Решение задач ... 136
4.3 Тестовые задания ... 144
Глава 5 Малые колебания ... 146
5.1 Вопросы для самопроверки ... 146
5.2 Решение задач ... 147
5.3 Тестовые задания ... 153
Глава 6 Движение твёрдого тела ... 165
6.1 Вопросы для самопроверки ... 165
6.2 Решение задач ... 166
6.3 Тестовые задания ... 171
Глава 7 Канонические преобразования ... 177
7.1 Вопросы для самопроверки ... 177
7.2 Решение задач ... 177
7.3 Задачи для самостоятельного рассмотрения ... 187
7.4 Тестовые задания ... 187
Заключение ... 197
Список использованных источников ... 198

Введение

Теоретическая механика является первой дисциплиной курса теоретической физики, читаемой студентам специальности «Физика» и она вызывает немалые затруднения у студентов. Это связано, в первую очередь, с использованием теоретических построений и математического аппарата высокого уровня, что является неотъемлемой частью теоретической физикой и тяжело воспринимается студентами в связи с недостаточно сильной математической подготовкой.

Основным учебником, рекомендованным для изучения данной дисциплины, является первый том курса теоретической физики в 10-ти томах авторов Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., который сам по себе изложен достаточно сложно ввиду высокого научного уровня изложения и, как следствия, упущения подавляющего большинства математических выкладок при получении того или иного уравнения. Лаконичные преобразования при их детальном решении порой занимают несколько страниц текста. Несмотря на популярность курса (выдержал 5 изданий, переведён на многие языки мира), он рассчитан на хорошо образованного читателя с сильной математической подготовкой. Опущение многих выкладок сопровождаются выражениями «откуда очевидно …», «легко показать, что …», «выполнив элементарные преобразования, находим …», а подробное объяснение физического смысла зачастую оставлено «за кадром». Тем не менее, типовая учебная программа по теоретической механике для специальности «Физика» полностью соответствовала содержанию первого тома данного курса.

Следует отметить, что часто критикуемый стиль изложения курса теоретической физики вообще и первого тома «Механика» в частности (пропуск многих нетривиальных выкладок, заменяемых словами «очевидно», «как легко показать» и т. д.; практически полное отсутствие ссылок на конкретные работы, а упоминание лишь имён авторов; иногда излишняя математизированность) является объектом дискуссий уже с первых изданий курса, но при этом не является оригинальным изобретением его авторов. Точно такие же претензии предъявлялись к пятитомной «Небесной механике» Лапласа (1799—1825). Так, Натаниел Боудич из Бостона, который перевел четыре тома труда Лапласа на английский язык, как-то сказал: «Всегда, когда я встречал у Лапласа заявление `Итак, легко видеть…', я был уверен, что мне потребуются часы напряженной работы, пока я заполню пробел, догадаюсь и покажу, как это легко видеть».

Данное учебное пособие как раз призвано помочь студентам освоить курс теоретической механики и является как бы восполнением упущенных математических выкладок указанного учебника. В пособии очень подробно с математической точки зрения изложены решения некоторых задач курса, приведение объяснения получения той или иной формулы или выражения с ссылками на элементарные формулы, что должно помочь студенты овладеть методами теоретической физики вообще и теоретической механики в частности, а также помочь в освоении других дисциплин курса теоретической физики, таких как электродинамика, квантовая механика, атомная и ядерная физика и другие.

В пособии также приведены вопросы для самопроверки перед излагаемым решением задач по той или иной теме, а также задачи для самостоятельного рассмотрения. После каждой главы приведены тестовые задания по теоретическому материалу, которые также полностью соответствуют

Включены вопросы и задачи по всем основным разделам курса теоретической механики для физических специальностей университетов.

Глава 1 Уравнения движения

1.1 Вопросы для самопроверки

1. Что такое классическая механика? Что такое пространство и время?
2. Что понимают под материальной точкой? Твёрдым телом?
3. Как определяется положение материальной точки в пространстве? Системы N материальных точек?
4. Что такое число степеней свободы? Сколько степеней свободы имеет материальная точка? Твёрдое тело?
5. Что такое траектория? Как получить траектория, зная уравнения движения?
6. Что такое обобщенные координаты? Скорости? Ускорения?
7. Как задаётся положение материальной точки в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат? Связь этих систем координат.
8. Что такое коэффициенты Лямэ? Чему равны коэффициенты Лямэ и дифференциал длины дуги в декартовых, полярных, цилиндрических и сферических координатах? Получите соответствующие выражения.
9. Заданием каких величин полностью определяется состояние системы? Что такое уравнения движения? Второй закон Ньютона. От чего зависит сила в классической механике?
10. Чему равна скорость распространения взаимодействий между телами в механике Ньютона? Почему? Является ли верным это утверждение?
11. Какую систему отсчёта называют инерциальной? Что такое связи? Какие связи называют идеальными жёсткими?
12. Что такое действие? Чем характеризуется любая механическая система? В чём заключается принцип наименьшего действия?
13. Свойства функции Лагранжа: аддитивность, умножение на постоянную и прибавление полной производной. Запишите уравнения Лагранжа. Что определяют уравнения Лагранжа, если известна функция Лагранжа?
14. Назовите свойства пространства и времени. Какие ограничения накладывают свойства пространства на функцию Лагранжа?
15. Сформулируйте закон инерции. В чём заключается принцип относительности Галилея? Выведите преобразования Галилея.
16. Запишите функцию Лагранжа свободной движущейся материальной точки и невзаимодействующих точек. Может ли масса точки принимать отрицательные значения? Почему?
17. Какую систему называют замкнутой? Какой вид имеет функция Лагранжа для системы взаимодействующих материальных точек? Что означают входящие в неё члены. От чего они зависят?
18. Что означает обратимость движения в классической механике? Выведите второй закон Ньютона, используя функцию и уравнения Лагранжа.

19. Какое поле называют однородным? Чему равна потенциальная энергия точки в однородном поле?

1.2 Решение задач

Задача 1.
Найти коэффициенты Лямэ для полярных координат.
Решение
Связь полярных и декартовых координат определяется выражениями $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi$. Используя общую формулу

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\right)^2}$$

перепишем её для двумерного случая $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\right)^2}$ и положим $\varphi_1 = r \cdot cos\varphi$, $\varphi_2 = r \cdot sin\varphi$, $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$. Здесь нельзя путать угол φ как вторую координату в полярной системе и общее обозначение уравнений систем координат φ_i. Тогда для нахождения коэффициентов необходимо вычислить выражения: $H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)^2}$ для координаты r и $H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi}\right)^2}$ для координаты φ. Находим по отдельности частные производные функций по обеим координатам:

$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot cos\varphi) = \frac{\partial r}{\partial r} \cdot cos\varphi + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} cos\varphi = cos\varphi$, т.к. $\frac{\partial r}{\partial r} = 1$, а $\frac{\partial}{\partial r} cos\varphi = 0$

$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot sin\varphi) = \frac{\partial r}{\partial r} \cdot sin\varphi + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} sin\varphi = 1 \cdot sin\varphi + 0 = sin\varphi$, т.к. $\frac{\partial r}{\partial r} = 1$, а $\frac{\partial}{\partial r} sin\varphi = 0$

$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}(r \cdot cos\varphi) = \frac{\partial r}{\partial\varphi} \cdot cos\varphi + r \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} cos\varphi = 0 + r \cdot (-sin\varphi) = -r \cdot sin\varphi$, т.к. $\frac{\partial r}{\partial\varphi} = 0$, а $\frac{\partial}{\partial\varphi} cos\varphi = -sin\varphi$

$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}(r \cdot sin\varphi) = \frac{\partial r}{\partial\varphi} \cdot sin\varphi + r \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} sin\varphi = 0 + r \cdot cos\varphi = r \cdot cos\varphi$,
т.к. $\frac{\partial r}{\partial\varphi} = 0$, а $\frac{\partial}{\partial\varphi} sin\varphi = cos\varphi$.

Подставляем полученные выражения в формулы для H_r и H_φ:

$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{(cos\varphi)^2 + (sin\varphi)^2} = 1$ по основному тригонометрическому тождеству, аналогично

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi}\right)^2} = \sqrt{(-r \cdot sin\varphi)^2 + (r \cdot cos\varphi)^2} =$$
$$= \sqrt{r^2 \cdot sin^2\varphi + r^2 \cdot cos^2\varphi} = \sqrt{r^2 \cdot (sin^2\varphi + cos^2\varphi)} = r.$$

Т.о., запишем окончательно коэффициенты Лямэ для полярных координат $H_r = 1, H_\varphi = r$.

В приложениях часто необходимо искать расстояние между двумя точке в той или иной системе координат. Выражение для дифференциала дуги в общем в криволинейных координатах определяется согласно формуле:

$$dS^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 \,.$$

Подставляя в это выражение $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $H_r = 1, H_\varphi = r$, получил дифференциал длины дуги в полярных координатах:

$$dS^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 = H_r^2 dr^2 + H_\varphi^2 d\varphi^2 = 1 \cdot dr^2 + r^2 d\varphi^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Определим модули скорости и ускорения в полярной системе координат двумя способами: 1 – по формулам модуля векторов и через коэффициенты Лямэ.

1 способ. Модуль вектора определяется скорости определяется равенством $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$, а вектора ускорения $|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$. В случае полярных координат имеем две координаты: $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, $|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$. Т.о., имея связь между декартовыми и полярными координатами необходимо найти первые и вторые производные по времени:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot cos\varphi) = \frac{dr}{dt} \cdot cos\varphi + r \cdot \frac{d}{dt} cos\varphi = \dot{r} cos\varphi - r \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

Выражение $\frac{d}{dt} cos\varphi = sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$ раскрывается по правилу дифференцирования сложной функции $cos\varphi(t)$, координата r также неявно зависит от времени.

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot sin\varphi) = \frac{dr}{dt} \cdot sin\varphi + r \cdot \frac{d}{dt} sin\varphi = \dot{r} sin\varphi + r \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

Подставляем в $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ или, что то же самое, : $|\vec{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

$$|\vec{v}|^2 = (\dot{r} cos\varphi - r \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 + (\dot{r} sin\varphi + r \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 =$$
$$= [(\dot{r} cos\varphi)^2 - 2\dot{r} cos\varphi \cdot r \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + (r \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi})^2] +$$
$$+[(\dot{r} sin\varphi)^2 + 2\dot{r} sin\varphi \cdot r \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + (r \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi})^2] =$$
$$= \dot{r}^2 cos^2\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} r \cdot cos\varphi sin\varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 sin^2\varphi +$$
$$+ \dot{r}^2 sin^2\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} r \cdot sin\varphi cos\varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 cos^2\varphi$$

Приведём подобные слагаемые и вынесем общие множители за скобки:

$$\sqrt{\dot{r}^2 (cos^2\varphi + sin^2\varphi) + r^2 \dot{\varphi}^2 (sin^2\varphi + cos^2\varphi)} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$$

Итак, модуль вектора скорости в полярных коорднатах имеет вид $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$.

Для нахождения модуля вектора ускорения необходимо найти вторые производные от координат, или первые производные от проекций скоростей, которые уже найдены:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r} cos\varphi - r \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}(\dot{r} cos\varphi) - \frac{d}{dt}(r \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi})$$
$$\frac{d}{dt}(\dot{r} cos\varphi) = \frac{d\dot{r}}{dt} \cdot cos\varphi + \dot{r} \cdot \frac{d}{dt} cos\varphi = \ddot{r} cos\varphi - \dot{r} \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$\frac{d}{dt}(r \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) = \frac{dr}{dt} \cdot (sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) + r \cdot \frac{d}{dt}(sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) = \frac{dr}{dt} \cdot (sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) +$
$+ r \cdot \left[\dot{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} sin\varphi + sin\varphi \cdot \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\right] = \dot{r} sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + r \cdot [\dot{\varphi} \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + sin\varphi \cdot \ddot{\varphi}] =$
$= \dot{r}\dot{\varphi} sin\varphi + r\dot{\varphi}^2 cos\varphi + r\ddot{\varphi} sin\varphi$
$\ddot{x} = a_x = \ddot{r} cos\varphi - \dot{r} \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi} - \dot{r}\dot{\varphi} sin\varphi - r\dot{\varphi}^2 cos\varphi - r\ddot{\varphi} sin\varphi =$
$= \ddot{r} cos\varphi - r\dot{\varphi}^2 cos\varphi - r\dot{\varphi} sin\varphi - \ddot{r}\dot{\varphi} sin\varphi - r\ddot{\varphi} sin\varphi =$
$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) cos\varphi - (\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}) sin\varphi = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) sin\varphi$

$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r} sin\varphi + r \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}(\dot{r} sin\varphi) - \frac{d}{dt}(r \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi})$
$\frac{d}{dt}(\dot{r} sin\varphi) = \frac{d\dot{r}}{dt} \cdot sin\varphi + \dot{r} \cdot \frac{d}{dt} sin\varphi = \ddot{r} sin\varphi + \dot{r} \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$
$\frac{d}{dt}(r \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) = \frac{dr}{dt} \cdot (cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) + r \cdot \frac{d}{dt}(cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) = \frac{dr}{dt} \cdot (cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) +$
$+ r \cdot \left[\dot{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} cos\varphi + cos\varphi \cdot \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\right] = \ddot{r} cos\varphi \cdot \dot{\varphi} +$
$r \cdot [-\dot{\varphi} \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + cos\varphi \cdot \ddot{\varphi}] = \ddot{r}\dot{\varphi} cos\varphi - r\dot{\varphi}^2 sin\varphi + r\ddot{\varphi} cos\varphi$
$\ddot{y} = a_y = \ddot{r} sin\varphi + \dot{r} \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + \ddot{r}\dot{\varphi} cos\varphi - r\dot{\varphi}^2 sin\varphi + r\ddot{\varphi} cos\varphi =$
$= \ddot{r} sin\varphi - r\dot{\varphi}^2 sin\varphi + \dot{r} \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + \ddot{r}\dot{\varphi} cos\varphi + r\ddot{\varphi} cos\varphi =$
$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) cos\varphi$

Подсавляем полученные вторые производные в формулу для модуля вектора ускорения $|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$

$$|\vec{a}|^2 = \left((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) sin\varphi\right)^2 +$$
$$+\left((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2r\dot{\varphi}) cos\varphi\right)^2 =$$

$$\left\{\begin{matrix} \left((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) sin\varphi\right)^2 = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 cos^2\varphi + \\ +(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 sin^2\varphi - 2(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) cos\varphi \cdot (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) sin\varphi \\ \left((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) sin\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2r\dot{\varphi}) cos\varphi\right)^2 = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 sin^2\varphi + \\ +(r\ddot{\varphi} + 2r\dot{\varphi})^2 cos^2\varphi + 2(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) sin\varphi \cdot (r\ddot{\varphi} + 2r\dot{\varphi}) cos\varphi \end{matrix}\right\}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 cos^2\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 sin^2\varphi +$$
$$+(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 sin^2\varphi + (r\ddot{\varphi} + 2r\dot{\varphi})^2 cos^2\varphi) =$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 (cos^2\varphi + sin^2\varphi) + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 (cos^2\varphi + sin^2\varphi)} =$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 \cdot 1 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 \cdot 1} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}$$

Итак, модуль вектора ускорения в полярных коорднатах имеет вид $|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}$.

2 способ. Выражение $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$ можно получить из формулы для проекций вектора скорости через обобщённые координаты:

$$v_{q_i} = H_i \cdot \dot{q}_i$$

Зная коэффициенты Лямэ для полярных координат $H_r = 1, H_\varphi = r$, и полагая $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, имеем для проекций вектора скорости в полярных координатах:

$v_r = 1 \cdot \dot{r} = \dot{r}$, $v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi}$. Проекция v_r называется радиальной скоростью, а v_φ трансверальной.

Для модуля вектора получим:

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\varphi}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r \cdot \dot{\varphi})^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$$

Похожим образом можно получить модуль вектора ускорения по формулам проекций обобщённых ускорений:

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right),$$

где введено обозначение $T = \frac{v^2}{2}$. Т.к. модуль векторы скорости мы уже определили, то $T = \frac{v^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}\right)^2}{2} = \frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$. Снова полагаем $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $H_r = 1, H_\varphi = r$ и формулы для проекций ускорения примут вид:

$$a_r = \frac{1}{1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r},\ a_\varphi = \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right).$$

Находим далее частные производные от величины Т по координатам r и φ и скоростям $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}(2\dot{r} + 0) = \frac{1}{2}\cdot 2\dot{r} = \dot{r}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \ddot{r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(0 + 2r\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}\cdot 2r\dot{\varphi}^2 = r\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}(0 + 2r^2\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\cdot 2\dot{\varphi} = r^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = r^2\frac{d\dot{\varphi}}{dt} + \dot{\varphi}\frac{d}{dt}r^2 = r^2\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}r\dot{r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varphi}(0 + 0) = 0$$

Подставляем найдённые выражения в формулы для проекций:

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $a_\varphi = \frac{1}{r}(r^2\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}r\dot{r} - 0) = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$, и получаем модуль вектора ускорения: $|\vec{a}| = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\varphi}^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}$, что совпадает с ранее полученным выражением.

Как видно из рассмотренного примера второй способ гораздо более компактнее и не требует громоздких преобразований, если уже известны коэффициенты Лямэ.

Задача 2. Обратные преобразования

Можно встретить формулу для коэффициентов Лямэ в виде: $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ вместо используемой нами формулы $H_i =$

$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\right)^2}$. Дело в том, что первая формула предполагает нахождение коэффициентов для перехода от декартовой системы к какой-то другой системе координат, если уравнения, связывающие эти системы координат вида $x = f_1(q_i), y = f_2(q_i), z = f_3(q_i)$. В рассмотренном примере это были уравнения, связывающие декартову прямоугольную систему с полярной: $x = r \cdot cos\varphi,\ y = r \cdot sin\varphi$, т.е. зависимости вида $x = f_2(r,\varphi), y = f_2(r,\varphi)$. Но может случиться так, что необходимо перейти от какой-либо системы криволинейных координат к декартовой. В таком случае необходимы будут обратные преобразования координат вида: $q_1 = f_1(x,y,z), q_2 = f_2(x,y,z), q_3 = f_3(x,y,z)$.

Найти обратные преобразования для полярной системы координат, т.е. равенства вида $r = f_1(x,y), \varphi = f_2(x,y)$.

Решение

Для этого разделим обе части равенств, связывающих декартову и полярные координаты, на r, возведём в квадрат и используем основное тригонометрическое тождество:

$\frac{x}{r} = cos\varphi, \frac{y}{r} = sin\varphi$,

$\left(\frac{x}{r}\right)^2 = cos^2\varphi, \left(\frac{y}{r}\right)^2 = sin^2\varphi,$

$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = sin^2\varphi + sin^2\varphi,$

$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1,$

$x^2 + y^2 = r^2.$

Откуда получаем $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Для нахождения второго уравнения, исключим r поделив почленно одно равенство на другое:

$$\frac{y}{x} = \frac{r \cdot sin\varphi}{r \cdot cos\varphi},$$

$$\frac{y}{x} = tg\varphi, \varphi = arctg\,\frac{y}{x}.$$

Т.о., переход от полярных координат к декартовым осуществляется согласно формулам: $r = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi = arctg\,\frac{y}{x}$. Это и есть формулы обратных преобразований. Теперь, зная эти соотношения, найдём коэффициенты Лямэ, дифференциал длины дуги, модули скорости и ускорения аналогичным образом, как мы находили эти величины, используя прямую зависимость.

Положим $\varphi_1 = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi_2 = arctg\,\frac{y}{x}$, $q_1 = x$, $q_2 = y$. Тогда $H_x = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2}$ для координаты x и $H_y = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2}$ для координаты y. Находим по отдельности частные производные функций по обеим координатам:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(arctg\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-y\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y}{x^2}=\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\frac{y}{x^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{x^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(arctg\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}\right\}$$

Подставляем полученные выражения:

$$H_r=\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2(x^2+y^2)+y^2}{(x^2+y^2)^2}}=\sqrt{\frac{x^4+x^2y^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$H_\varphi=\sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{y^2(x^2+y^2)+x^2}{(x^2+y^2)^2}}=\sqrt{\frac{y^2x^2+y^4+x^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

Как мы определили ранее, модель вектора скорости в полярных координатах имеет вид: $|\vec{v}|=\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}$. Имея уравнения обратных преобразований получим модуль вектора скорости в декартовых координатах. Для этого находим частные производные:

$$\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dt}=-\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\dot{x}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\dot{y}$$

$$r^2=x^2+y^2$$

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dr}{dy}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x\cdot\dot{x}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y\cdot\dot{y}=$$

$$= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{x^2 + y^2}$$

Подставляем:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)\left(-\frac{y\dot{x}}{x^2 + y^2} + \frac{x\dot{y}}{x^2 + y^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)\frac{(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \sqrt{\frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{x^2 + y^2} + \frac{(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{x^2 + y^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2}{x^2 + y^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x\dot{x})^2 + 2x\dot{x}y\dot{y} + (y\dot{y})^2 + (x\dot{y})^2 - 2x\dot{y}y\dot{x} + (y\dot{x})^2}{x^2 + y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x\dot{x})^2 + (y\dot{y})^2 + (x\dot{y})^2 + (y\dot{x})^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{x^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + y^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{x^2 + y^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Т.о, получили известную формулу для модуля скорости.

Задача 3.

Найти формулы перехода от декартовой системы координат (x, y, z) к цилиндрической (r, φ, z).

Решение

По условию задачи, зная функции $x = f_1(r, \varphi, z), y = f_2(r, \varphi, z), y = f_3(r, \varphi, z)$, мы должны получить функции вида $r = g_1(x, y, z), \varphi = g_2(x, y, z), z = g_3(x, y, z)$.

Цилиндрические координаты определяются равенствами:

$x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z.$

Как видим, координата z имеет в обеих системах одинаковое значение и остаётся только выразить r через x, y и φ через x, y. Для этого разделим обе части первых двух равенств на r, возведём в квадрат и используем основное тригонометрическое тождество:

$\frac{x}{r} = cos\varphi, \frac{y}{r} = sin\varphi$,

$\left(\frac{x}{r}\right)^2 = cos^2\varphi, \left(\frac{y}{r}\right)^2 = sin^2\varphi,$

$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = sin^2\varphi + sin^2\varphi,$

$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1,$
$x^2 + y^2 = r^2.$

Откуда получаем $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Для нахождения второго уравнения, исключим r поделив почленно одно равенство на другое:

$$\frac{y}{x} = \frac{r \cdot sin\varphi}{r \cdot cos\varphi},$$

$$\frac{y}{x} = tg\varphi, \varphi = arctg\frac{y}{x}.$$

Т.о., переход от цилиндрических координат к декартовым осуществляется согласно формулам: $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = arctg\frac{y}{x}, z = z$. Это и есть формулы обратных преобразований.

Задача 4.

Найти формулы перехода от декартовой системы координат (x, y, z) к сферической (r, θ, φ).

Решение

По условию задачи, зная функции $x = f_1(r, \theta, \varphi), y = f_2(r, \theta, \varphi),\ y = f_3(r, \theta, \varphi)$, мы должны получить функции вида $r = g_1(x, y, z),. \varphi = g_2(x, y, z), \theta = g_3(x, y, z)$

Сферические координаты определяются равенствами

$$x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, \qquad z = r \cdot cos\theta$$

Разделим почленно первое равенства на второе:

$$\frac{x}{y} = \frac{r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi}{r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi},$$

$$\frac{x}{y} = \frac{cos\varphi}{sin\varphi} => \frac{y}{x} = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = tg\varphi =>$$

$$\varphi = arctg\frac{y}{x}$$

Далее разделим выражения для x и y на $r \cdot sin\theta$, возведём обе части равенства в квадрат и примени основное тригонометрическое тождество:

$$\frac{x}{r \cdot sin\theta} = cos\varphi, \frac{y}{r \cdot sin\theta} = sin\varphi,$$

$$\left(\frac{x}{r \cdot sin\theta}\right)^2 = cos^2\varphi, \left(\frac{y}{r \cdot sin\theta}\right)^2 = sin^2\varphi,$$

$$\frac{y^2}{r^2 \cdot sin^2\theta} + \frac{x^2}{r^2 \cdot sin^2\theta} = sin^2\varphi + cos^2$$

$$\frac{y^2}{r^2 \cdot sin^2\theta} + \frac{x^2}{r^2 \cdot sin^2\theta} = 1$$

$$y^2 + x^2 = r^2 \cdot sin^2\theta$$

Выразим из третьего равенства формул перехода радиус, возведём его в квадрат и подставим в полученное выражение:

$$z = r \cdot cos\theta => r = \frac{z}{cos\theta}, r^2 = \frac{z^2}{cos^2\theta}$$
$$y^2 + x^2 = \frac{z^2}{cos^2\theta} \cdot sin^2\theta$$
$$y^2 + x^2 = z^2 \cdot tg^2\theta$$

Выразим угол θ

$$tg^2\theta = \frac{y^2 + x^2}{z^2}$$
$$tg\theta = \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{z}$$
$$\theta = arctg\frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{z}$$

Т.о., мы выразили угол нутации сферической системы через декартовы координаты. Для получения r возведём все три равенства формул перехода в квадрат, сложим и преобразуем:

$$x^2 = r^2 \cdot sin^2\theta \cdot cos^2\varphi,$$
$$y^2 = r^2 \cdot sin^2\theta \cdot sin^2\varphi,$$
$$z^2 = r^2 \cdot cos^2\theta$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cdot sin^2\theta \cdot cos^2\varphi + r^2 \cdot sin^2\theta \cdot sin^2\varphi + r^2 \cdot cos^2\theta$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cdot (sin^2\theta \cdot cos^2\varphi + sin^2\theta \cdot sin^2\varphi + cos^2\theta)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cdot [sin^2\theta \cdot (cos^2\varphi + sin^2\varphi) + cos^2\theta]$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cdot (sin^2\theta + cos^2\theta)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Откуда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Т.о., получаем следующие формулы перехода от декартовой системы координат к сферической:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$\theta = arctg\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},$$
$$\varphi = arctg\frac{y}{x},$$

что и решает поставленную задачу.

Задача 5.

Даны координаты точки в декартовой системе координат $A(1; 2; 3)$. Найти координаты этой точки в цилиндрической и сферической системах координат.

Решение

Для перехода к цилиндрической системе воспользуемся формулами $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = arctg\frac{y}{x}, z = z$. Откуда для z сразу получаем $z = 3$. Для полярного радиуса $r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ и для полярного угла $\varphi = arctg\frac{2}{1} = 63^{\circ}$. Т.о., координаты точки в цилиндрической системе координат запишутся в виде $A(\sqrt{5}; 63; 3)$.

Для перехода к цилиндрической системе воспользуемся формулами $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, , $\theta = arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$, $\varphi = arctg\frac{y}{x}$. Для радиуса будем иметь $r = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, для зенитного угла $\theta = arctg\frac{\sqrt{1^2+2^2}}{3} = arctg\frac{\sqrt{5}}{3} = 37^{\circ}$, для азимутального угла $\varphi = arctg\frac{2}{1} = 63^{\circ}$. Т.о., координаты точки в сферической системе координат запишутся в виде $A(\sqrt{14}; 37; 63)$.

Задача 6.

Точка движется по эллипсу $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ с ускорением, параллельным оси y. Найти ускорение как функцию y, если $\vec{r}(0) = (0, b), \vec{v}(0) = (v_0\ ,0)$.

Решение

Используем параметрическое представление эллипса $x = a\cos\alpha\,, y = b\sin\alpha$. Так как ускорение направлено вдоль оси y, то от нуля будет отлична компонента ускорения только вдоль оси y. Определим её, дифференцируя два раза $y = b\sin\alpha$:

$$\dot{y} = b\cos\alpha \cdot \dot{\alpha}$$
$$\ddot{y} = b(-\sin\alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\alpha} + \cos\alpha \cdot \ddot{\alpha})$$
$$\ddot{y} = b(\cos\alpha \cdot \ddot{\alpha} - \sin\alpha \cdot \dot{\alpha}^2)$$

Далее необходимо определить $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$. Продифференцируем $x = a\cos\alpha$ и используем начальные условия:

$$\dot{x} = -a\sin\alpha \cdot \dot{\alpha}\ ,\ \dot{x}(0) = v_0, \text{ поэтому } -a\sin\alpha\,\dot{\alpha} = v_0.$$

Отсюда $\dot{\alpha} = -\frac{v_0}{a\sin\alpha}$. Дифференцирую это выражение как частное ещё раз, определится $\ddot{\alpha}$:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{0 - v_0 a\cos\alpha \cdot \dot{\alpha}}{a^2\sin^2\alpha} = \frac{v_0\cos\alpha}{a\sin^2\alpha} \cdot \dot{\alpha}$$

Используем найденное выше $\dot{\alpha} = -\frac{v_0}{a\sin\alpha}$ и получим:

$$\ddot{\alpha} = \frac{v_0\cos\alpha}{a\sin^2\alpha} \cdot \left(-\frac{v_0}{a\sin\alpha}\right) = -\frac{v_0^2\cos\alpha}{a^2\sin^3\alpha}$$

Найденные значения $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ подставляем в найденное значение проекции ускорения:

$$\ddot{y} = b\left[\cos\alpha \cdot \left(-\frac{v_0^2\cos\alpha}{a^2\sin^3\alpha}\right) - \sin\alpha \cdot \left(-\frac{v_0}{a\sin\alpha}\right)^2\right] =$$
$$= b\left(-\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{a^2\sin^3\alpha} - \frac{v_0^2\sin\alpha}{a^2\sin^2\alpha}\right) = -b\left(\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{a^2\sin^3\alpha} + \frac{v_0^2}{a^2\sin\alpha}\right) =$$
$$= -bv_0^2\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{a^2\sin^3\alpha} = -\frac{bv_0^2}{a^2\sin^3\alpha}$$

Из $y = b\sin\alpha$ выразим $\sin\alpha$ и заменим в полученном выражении:

$$\sin\alpha = \frac{y}{b},$$
$$\ddot{y} = -\frac{bv_0^2}{a^2\left(\frac{y}{b}\right)^3} = -\frac{b^3bv_0^2}{a^2y^3} = -\frac{b^4v_0^2}{a^2y^3}$$
$$\ddot{y} = -\frac{b^4v_0^2}{a^2y^3}$$

Т.о., мы выразили искомую компоненту ускорения как функцию координаты.

Задача 7.

Точка движется по эллипсу с полуосями a и b с постоянной по величине скоростью v_0. Определить ускорение и скорость точки как функции координат.

Решение

Способ 1.

Из уравнения эллипса $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ выразим x и y:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2, x^2 = a^2\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right], x = a\sqrt{\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}$$
$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2, y^2 = b^2\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right], y = b\sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}$$

Находим первую производную от x:

$$\dot{x} = \frac{a \cdot 2y\dot{y} \cdot \left(-\frac{1}{b^2}\right)}{2\sqrt{\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}} = -\frac{a \cdot y\dot{y}}{b^2\sqrt{\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}}$$

Неизвестную $\dot{y}$ выразим из начального условия $v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, откуда $\dot{y} = \sqrt{v_0^2 - \dot{x}^2}$ и:

$$\dot{x} = -\frac{a \cdot y}{b^2\sqrt{\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}} \cdot \sqrt{v_0^2 - \dot{x}^2}$$

Возведём обе части в квадрат и раскроем скобки в правой части:

$$\dot{x}^2 = \frac{a^2 \cdot y^2}{b^4\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]} \cdot (v_0^2 - \dot{x}^2) = \frac{a^2 \cdot y^2 v_0^2}{b^4\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]} - \frac{a^2 \cdot y^2 \dot{x}^2}{b^4\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}$$

$$\dot{x}^2 + \frac{a^2 \cdot y^2 \dot{x}^2}{b^4\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]} = \frac{a^2 \cdot y^2 v_0^2}{b^4\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}$$

$$\frac{\dot{x}^2 b^4\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] + a^2 \cdot y^2 \dot{x}^2}{b^4\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]} = \frac{a^2 \cdot y^2 v_0^2}{b^4\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}$$

Сократим общий знаменатель:

$$\dot{x}^2\left(b^4\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] + a^2 \cdot y^2\right) = a^2 \cdot y^2 v_0^2$$

Откуда:

$$\dot{x}^2 = \frac{a^2 \cdot y^2 v_0^2}{b^4\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] + a^2 \cdot y^2}$$

Подставим $y^2 = b^2\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$:

$$\dot{x}^2 = \frac{a^2 y^2 v_0^2}{b^4\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] + a^2 \cdot b^2\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]} = \frac{a^2 y^2 v_0^2}{b^4\left(\frac{x}{a}\right)^2 + a^2 \cdot b^2\left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

$$\dot{x}^2 = \frac{a^2 y^2 v_0^2}{b^2\left[b^2\left(\frac{x}{a}\right)^2 + a^2\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]} = \frac{a^2 y^2 v_0^2}{b^2\left[\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2\right]}$$

Извлекая квадратный корень, получим:

$$\dot{x} = \frac{ayv_0}{b\sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2}}$$

При извлечении квадратного корня потерян знак «минус».

$$\dot{y} = \frac{-b \cdot 2x\dot{x} \cdot \frac{1}{a^2}}{2\sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}} = -\frac{b \cdot x\dot{x}}{a^2\sqrt{\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}}$$

$$\dot{x} = -\frac{ayv_0}{b\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}}$$

$$\dot{y} = \frac{bxv_0}{a\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}}$$

$$\ddot{x} = -\frac{v_0^2 b^2 x}{\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}$$

$$\ddot{y} = -\frac{v_0^2 a^2 y}{\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}$$

Способ 2.

Используем параметрическое представление эллипса $x = a\cos\alpha\,, y = b\sin\alpha$. Найдём первые производные:

$$\dot{x} = -a\sin\alpha \cdot \dot{\alpha}, \dot{y} = b\cos\alpha \cdot \dot{\alpha}$$

Необходимо определить неизвестную $\dot{\alpha}$. Для этого используем условие постоянства скорости, определение модуля скорости через проекции и найденные проекции скорости:

$$v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-a\sin\alpha \cdot \dot{\alpha})^2 + (b\cos\alpha \cdot \dot{\alpha})^2} = \dot{\alpha}\sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2}$$

Откуда

$$\dot{\alpha} = \frac{v_0}{\sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2}}$$

Полученное выражение выразим через координаты, используя параметрическое уравнение эллипса:

$$\sin\alpha = \frac{y}{b}, \cos\alpha = \frac{x}{a}$$

$$v_0 = \dot{\alpha}\sqrt{\left(a\frac{y}{b}\right)^2 + \left(b\frac{x}{a}\right)^2} = \dot{\alpha}\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}$$

Откуда:

$$\dot{\alpha} = \frac{v_0}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}}$$

Используя полученное значение, подставим его в найденные проекции вектора скорости:

$$\dot{x} = -a\cdot\sin\alpha\cdot\dot{\alpha} = -a\cdot\frac{y}{b}\cdot\frac{v_0}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}} = -\frac{ayv_0}{b\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}}$$

$$\dot{y} = b\cdot\cos\alpha\cdot\dot{\alpha} = b\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{v_0}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}} = \frac{bxv_0}{a\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}}$$

Используя найденные первые производные $\dot{x} = -a\sin\alpha\cdot\dot{\alpha}, \dot{y} = b\cos\alpha\cdot\dot{\alpha}$, найдём вторые производные как производную произведения:

$$\ddot{x} = -a(\cos\alpha\cdot\dot{\alpha}\cdot\dot{\alpha} + \sin\alpha\cdot\ddot{\alpha}) = -a(\sin\alpha\cdot\ddot{\alpha} + \cos\alpha\cdot\dot{\alpha}^2),$$

$$\ddot{y} = b(-\sin\alpha\cdot\dot{\alpha}\cdot\dot{\alpha} + \cos\alpha\cdot\ddot{\alpha}) = b(\cos\alpha\cdot\ddot{\alpha} - \sin\alpha\cdot\dot{\alpha}^2)$$

Теперь необходимо определить $\ddot{\alpha}$. Для этого продифференцируем выражение $\dot{\alpha} = \frac{v_0}{\sqrt{(a\sin\alpha)^2+(b\cos\alpha)^2}}$:

$$\ddot{\alpha} = \frac{0 - v_0\cdot\frac{1}{2\sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2}}\cdot(a^2\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\dot{\alpha} + b^2\cdot 2\cos\alpha\,(-\sin\alpha)\cdot\dot{\alpha})}{(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2}$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{v_0\cdot\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2}\cdot\dot{\alpha}(a^2 - b^2)}{[(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2]\sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2}}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{v_0\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\dot{\alpha}(b^2 - a^2)}{[(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2]\sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2}}$$

Подставим $\dot{\alpha}$:

$$\ddot{\alpha} = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (b^2 - a^2)}{[(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2]\sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2}} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2}}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (b^2 - a^2)}{[(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2]^2}$$

Подставим найденные выражения во вторые производные $\ddot{x} = -a(\sin\alpha \cdot \ddot{\alpha} + \cos\alpha \cdot \dot{\alpha}^2), \ddot{y} = b(\cos\alpha \cdot \ddot{\alpha} - \sin\alpha \cdot \dot{\alpha}^2)$:

$$\ddot{x} = -a\left[\sin\alpha \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (b^2 - a^2)}{[(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2]^2} + \cos\alpha \cdot \left(\frac{v_0}{\sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2}}\right)^2\right]$$

$$\ddot{x} = -a\left[\frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (b^2 - a^2)}{[(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2]^2} + \cos\alpha \cdot \frac{v_0^2}{(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2}\right]$$

$$\ddot{x} = -av_0^2\left[\cos\alpha \cdot \frac{\sin^2\alpha \cdot (b^2 - a^2) + [(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2]}{[(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2]^2}\right]$$

Преобразуем числитель:

$$\sin^2\alpha \cdot (b^2 - a^2) + [(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2] = b^2\sin^2\alpha - a^2\sin^2\alpha + a^2\sin^2\alpha + b^2 cos^2\alpha = b^2$$

Тогда:

$$\ddot{x} = -av_0^2\left[\cos\alpha \cdot \frac{b^2}{[(a\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha)^2]^2}\right]$$

$\dot{\alpha} = \frac{v_0}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}}$:

$$\ddot{\alpha} = \frac{0 - v_0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}} \cdot \left(2\frac{a^2}{b^2}y\dot{y} + 2\frac{b^2}{a^2}x\dot{x}\right)}{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2} =$$

$$= -\frac{v_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2\frac{a^2}{b^2}y\dot{y} + 2\frac{b^2}{a^2}x\dot{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]} =$$

$$= -\frac{v_0 \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} y\dot{y} + \frac{b^2}{a^2} x\dot{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]}$$

В полученном выражении заменим $\dot{y}$ и $\dot{x}$ их выражениями, найденными ранее:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{v_0 \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} y \cdot \frac{bxv_0}{a\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}} - \frac{b^2}{a^2} x \cdot \frac{ayv_0}{b\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]} =$$

$$= -\frac{v_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}}\left(\frac{a^2bxv_0}{b^2} y \cdot \frac{1}{a} - \frac{b^2ayv_0}{a^2} x \cdot \frac{1}{b}\right)}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]} =$$

$$= -\frac{v_0 \cdot \left(\frac{a}{b} yxv_0 - \frac{b}{a} xyv_0\right)}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]} =$$

$$= -\frac{v_0v_0xy \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)}{\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2} = -\frac{v_0^2 yx \cdot \frac{a^2 - b^2}{ab}}{\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2} = -\frac{v_0^2 xy(a^2 - b^2)}{ab\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{v_0^2 xy(b^2 - a^2)}{ab\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}$$

Подставим найденные выражения во вторые производные $\ddot{x} = -a(\sin\alpha \cdot \ddot{\alpha} + \cos\alpha \cdot \dot{\alpha}^2), \ddot{y} = b(\cos\alpha \cdot \ddot{\alpha} - \sin\alpha \cdot \dot{\alpha}^2)$:

$$\ddot{x} = -a\left[\sin\alpha \cdot \left(\frac{v_0^2 xy(b^2 - a^2)}{ab\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}\right) + \cos\alpha \cdot \left(\frac{v_0}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}}\right)^2\right]$$

Учтём также, что $\sin\alpha = \frac{y}{b}, \cos\alpha = \frac{x}{a}$:

$$\ddot{x} = -a\left[\frac{y}{b}\cdot\frac{v_0^2xy(b^2-a^2)}{ab\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}+\frac{x}{a}\cdot\left(\frac{v_0}{\sqrt{\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}}\right)^2\right]$$

$$\ddot{x} = -a\left[\frac{y}{b}\cdot\frac{v_0^2xy(b^2-a^2)}{ab\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}+\frac{x}{a}\cdot\frac{v_0^2}{\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{av_0^2xyy(b^2-a^2)}{abb\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}-\frac{ax}{a}\cdot\frac{v_0^2}{\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{v_0^2xy^2(b^2-a^2)}{b^2\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}-\frac{v_0^2x}{\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{v_0^2xy^2(b^2-a^2)-v_0^2x\cdot b^2\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]}{b^2\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}$$

Преобразуем второе слагаемое в числителе дроби:

$$\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]=\frac{a^2y^2a-b^2x^2b}{ab}=\frac{a^3y^2-b^3x^2}{ab}$$

$$v_0^2x\cdot b^2\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]=v_0^2x\cdot b^2\cdot\frac{a^3y^2-b^3x^2}{ab}$$

$$=\frac{v_0^2x\cdot b^2a^3y^2-v_0^2x\cdot b^2b^3x^2}{ab}=v_0^2xba^2y^2-\frac{v_0^2xb^4x^2}{a}$$

$$\ddot{x}=\frac{v_0^2xy^2(b^2-a^2)-v_0^2xba^2y^2+\frac{v_0^2xb^4x^2}{a}}{ab^2\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}$$

$$\ddot{x}=\frac{\frac{v_0^2xy^2(b^2-a^2)a-v_0^2xba^3y^2+v_0^2xb^4x^2}{a}}{ab^2\left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2+\left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{v_0^2 x y^2 (b^2 - a^2) a - v_0^2 x b a^3 y^2 + v_0^2 x b^4 x^2}{a a b^2 \left[\left(\frac{ay}{b}\right)^2 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]^2}$$

$$v_0^2 x y^2 (b^2 - a^2) a - v_0^2 x b a^3 y^2 + v_0^2 x b^4 x^2 =$$
$$= v_0^2 x y^2 b^2 a - v_0^2 x y^2 a^3 - v_0^2 x y^2 b a^3 + v_0^2 b^4 x^3$$

Задача 8.

Найти функцию Лагранжа свободной материальной точки в декартовых координатах.

Решение

Функция Лагранжа свободной материальной точи точки определяется выражением:

$$L = \frac{m}{2} v^2$$

Т.е. задача сводится к отысканию квадрата модуля скорости в соответствующей системе координат. Для декартовой системы

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Проекции вектора, в свою очередь, определяются как первые производные координат

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}$$

Т.о. для квадрата скорости получим

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

а для функции Лагранжа будем иметь выражение:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Задача 9.

Найти функцию Лагранжа свободной материальной точки в цилиндрических координатах.

Решение

Воспользуемся полученной в предыдущей задаче выражением для функции Лагранжа в декартовых координатах и формулами связи декартовых и цилиндрических координат:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$$

Для решения задачи необходимо найти первые производные от цилиндрических координат и подставить их в выражение для функции Лагранжа.

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}(r \cdot cos\varphi) = \frac{dr}{dt} \cdot cos\varphi + r \cdot \frac{d}{dt} cos\varphi = \dot{r} cos\varphi - r \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}(r \cdot sin\varphi) = \frac{dr}{dt} \cdot sin\varphi + r \cdot \frac{d}{dt} sin\varphi = \dot{r} sin\varphi + r \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\dot{z} = \dot{z}$$

Находим квадраты полученных производных.

$$\dot{x}^2 = (\dot{r}cos\varphi - r \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 =$$
$$= (\dot{r}cos\varphi)^2 - 2\dot{r}cos\varphi \cdot r \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + (r \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 =$$
$$= \dot{r}^2cos^2\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}r \cdot cos\varphi sin\varphi + r^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi$$
$$\dot{y}^2 = (\dot{r}sin\varphi + r \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 =$$
$$= (\dot{r}sin\varphi)^2 + 2\dot{r}sin\varphi \cdot r \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + (r \cdot cos\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 =$$
$$= \dot{r}^2sin^2\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}r \cdot sin\varphi cos\varphi + r^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi$$
$$\dot{z}^2 = \dot{z}^2$$

Подставляем полученные выражения в функцию Лагранжа и проделываем необходимые преобразования

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2cos^2\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}r \cdot cos\varphi sin\varphi + r^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi + \dot{r}^2sin^2\varphi +$$
$$+ 2\dot{r}\dot{\varphi}r \cdot sin\varphi cos\varphi + r^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi + \dot{z}^2) =$$
$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi + \dot{r}^2sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi + \dot{z}^2 =$$
$$= \frac{m}{2}[\dot{r}^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2(sin^2\varphi + cos^2\varphi) + \dot{z}^2] = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

Окончательно запишем:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

Задача 10.

Найти функцию Лагранжа свободной материальной точки в сферических координатах.

Решение

Также воспользуемся выражением $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ и связью между декартовыми и сферическими координатами $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi$, $y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = r \cdot cos\theta$.

Находим первые производные от соответствующих координат, не забывая про неявную зависимость координат от времени:

$$\dot{x} = (r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi)'_t = (r \cdot sin\theta)'cos\varphi + (r \cdot sin\theta)(cos\varphi)' =$$
$$= [r'sin\theta + r(sin\theta)']cos\varphi + r \cdot sin\theta(cos\varphi)' =$$
$$= \left(\dot{r}sin\theta + rcos\theta \cdot \dot{\theta}\right)cos\varphi + r \cdot sin\theta(-sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) =$$
$$= \dot{r}sin\theta cos\varphi + r\dot{\theta}cos\theta cos\varphi - r\dot{\varphi}sin\theta sin\varphi$$
$$\dot{y} = (r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi)'_t = (r \cdot sin\theta)'sin\varphi + (r \cdot sin\theta)(sin\varphi)' =$$
$$= [r'sin\theta + r(sin\theta)']sin\varphi + r \cdot sin\theta(sin\varphi)' =$$
$$= \left(\dot{r}sin\theta + rcos\theta \cdot \dot{\theta}\right)sin\varphi + r \cdot sin\theta cos\varphi \cdot \dot{\varphi} =$$
$$= \dot{r}sin\theta sin\varphi + r\dot{\theta}cos\theta sin\varphi + r\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi$$
$$\dot{z} = (r \cdot cos\theta)'_t = \dot{r}cos\theta + r(cos\theta)' = \dot{r}cos\theta - rsin\theta \cdot \dot{\theta}$$

Находим квадраты полученных выражений:

$$\dot{x}^2 = \left[\left(\dot{r}sin\theta cos\varphi + r\dot{\theta}cos\theta cos\varphi\right) - r\dot{\varphi}sin\theta sin\varphi\right]^2 =$$
$$= \left(\dot{r}sin\theta cos\varphi + r\dot{\theta}cos\theta cos\varphi\right)^2 - 2\left(\dot{r}sin\theta cos\varphi + r\dot{\theta}cos\theta cos\varphi\right)r\dot{\varphi}sin\theta sin\varphi +$$
$$+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta sin^2\varphi = \dot{r}^2sin^2\theta cos^2\varphi + 2\dot{r}sin\theta cos\varphi \cdot r\dot{\theta}cos\theta cos\varphi +$$
$$+r^2\dot{\theta}^2cos^2\theta cos^2\varphi - 2\dot{r}sin\theta cos\varphi \cdot r\dot{\varphi}sin\theta sin\varphi - 2r\dot{\theta}cos\theta cos\varphi r\dot{\varphi}sin\theta sin\varphi +$$
$$+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta sin^2\varphi = \dot{r}^2sin^2\theta cos^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\theta}sin\theta cos\theta cos^2\varphi +$$
$$+r^2\dot{\theta}^2cos^2\theta cos^2\varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi}sin^2\theta cos\varphi sin\varphi - 2r^2\dot{\varphi}\dot{\theta}sin\theta sin\varphi cos\theta cos\varphi +$$
$$+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta sin^2\varphi$$

$$\dot{y}^2 = \left[\left(\dot{r}sin\theta sin\varphi + r\dot{\theta}cos\theta sin\varphi\right) + r\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi\right]^2 =$$
$$= \left(\dot{r}sin\theta sin\varphi + r\dot{\theta}cos\theta sin\varphi\right)^2 + 2\left(\dot{r}sin\theta sin\varphi + r\dot{\theta}cos\theta sin\varphi\right)r\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi +$$
$$+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta cos^2\varphi = \dot{r}^2sin^2\theta sin^2\varphi + 2\dot{r}sin\theta sin\varphi \cdot r\dot{\theta}cos\theta sin\varphi +$$
$$+r^2\dot{\theta}^2cos^2\theta sin^2\varphi + 2\dot{r}sin\theta sin\varphi r\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi + 2r\dot{\theta}cos\theta sin\varphi r\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi +$$
$$+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta cos^2\varphi = \dot{r}^2sin^2\theta sin^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\theta}sin\theta cos\theta sin^2\varphi +$$
$$+r^2\dot{\theta}^2cos^2\theta sin^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi}sin^2\theta sin\varphi cos\varphi + 2r^2\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta sin\varphi sin\theta cos\varphi +$$
$$+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta cos^2\varphi$$
$$\dot{z}^2 = \left(\dot{r}cos\theta - rsin\theta \cdot \dot{\theta}\right)^2 = \dot{r}^2cos^2\theta - 2\dot{r}cos\theta rsin\theta \cdot \dot{\theta} + r^2\dot{\theta}^2sin^2\theta$$

Составляем квадрат модуля скорости
$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2sin^2\theta cos^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\theta}sin\theta cos\theta cos^2\varphi +$$
$$+r^2\dot{\theta}^2cos^2\theta cos^2\varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi}sin^2\theta cos\varphi sin\varphi - 2r^2\dot{\varphi}\dot{\theta}sin\theta sin\varphi cos\theta cos\varphi +$$
$$+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta sin^2\varphi + \dot{r}^2sin^2\theta sin^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\theta}sin\theta cos\theta sin^2\varphi +$$
$$+r^2\dot{\theta}^2cos^2\theta sin^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi}sin^2\theta sin\varphi cos\varphi + 2r^2\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta sin\varphi sin\theta cos\varphi +$$
$$+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta cos^2\varphi + \dot{r}^2cos^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}cos\theta sin\theta + r^2\dot{\theta}^2sin^2\theta =$$
$$= \dot{r}^2sin^2\theta cos^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\theta}sin\theta cos\theta cos^2\varphi + r^2\dot{\theta}^2cos^2\theta cos^2\varphi +$$
$$+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta sin^2\varphi + \dot{r}^2sin^2\theta sin^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\theta}sin\theta cos\theta sin^2\varphi +$$
$$+r^2\dot{\theta}^2cos^2\theta sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta cos^2\varphi +$$
$$+\dot{r}^2cos^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}cos\theta sin\theta + r^2\dot{\theta}^2sin^2\theta =$$
$$= \dot{r}^2sin^2\theta(cos^2\varphi + sin^2\varphi) + 2r\dot{r}\dot{\theta}sin\theta cos\theta(cos^2\varphi + sin^2\varphi) +$$
$$+r^2\dot{\theta}^2cos^2\theta(cos^2\varphi + sin^2\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta(sin^2\varphi + cos^2\varphi) +$$
$$+\dot{r}^2cos^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}cos\theta sin\theta + r^2\dot{\theta}^2sin^2\theta =$$
$$= \dot{r}^2sin^2\theta + 2r\dot{r}\dot{\theta}sin\theta cos\theta + r^2\dot{\theta}^2cos^2\theta +$$
$$+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta + \dot{r}^2cos^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}cos\theta sin\theta + r^2\dot{\theta}^2sin^2\theta =$$
$$= \dot{r}^2sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2cos^2\theta + r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta + \dot{r}^2cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2sin^2\theta =$$
$$= \dot{r}^2sin^2\theta(sin^2\theta + cos^2\theta) + r^2\dot{\theta}^2(cos^2\theta + sin^2\theta) + r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta =$$
$$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta$$

Окончательно запишем функцию Лагранжа для свободной материальной точки в сферических координатах:
$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta\right)$$

Задача 11.

Найти функцию Лагранжа двойного плоского маятника (см. рисунок 1), находящегося в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести g).

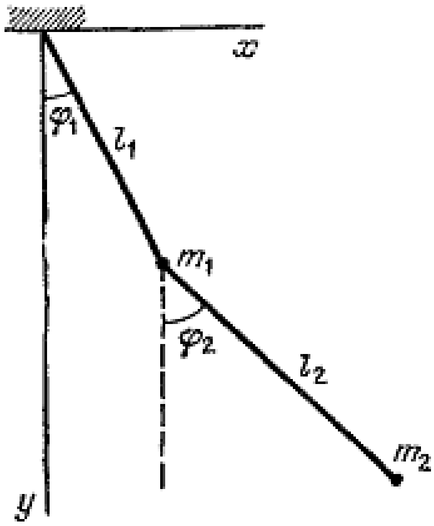

Рисунок 1 – Плоский двойной маятник

Решение

В качестве координат берем углы φ_1 и φ_2 , которые нити l_1 и l_2 образуют с вертикалью (см. рисунок 1). Тогда для кинетической и потенциальной энергий точки m_1 имеем:

$$T_1 = \frac{m_1}{2}v^2 = \frac{1}{2}I_1^2\omega_1^2 = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2,$$

где $I_1 = m_1 l_1^2$ - момент инерции материальной точки, а $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$,

$$U = -m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 cos\varphi_1.$$

Знак «минус» взят потому, что нулевой уровень отсчёта принят за уровень оси x, а ось y направлена вниз (см. рисунок 1).

Функция Лагранжа для первой точки запишется в виде:

$$L_1 = T_1 - U = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + m_1 g l_1 cos\varphi_1$$

Чтобы найти кинетическую энергию второй точки, выражаем ее декартовы координаты x_2 ,y_2 (начало координат в точке подвеса, ось y - по вертикали вниз) через углы φ_1, φ_2:

$$x_2 = l_1 sin\varphi_1 + l_2 sin\varphi_2, \;\; y_2 = l_1 cos\varphi_1 + l_2 cos\varphi_2.$$

Используем формулу для кинетической энергии:

$$T_2 = \frac{m_2}{2} v^2, v = \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}$$
$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Теперь необходимо найти производный от координат x и y:

$$\dot{x}_2 = l_1 cos\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 + l_2 cos\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2$$
$$\dot{y}_2 = -l_1 sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 - l_2 sin\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2$$

и квадраты этих выражений:

$$\dot{x}_2^2 = (l_1\dot{\varphi}_1 cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 cos\varphi_2)^2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2 cos^2\varphi_1 + 2l_1\dot{\varphi}_1 cos\varphi_1 l_2\dot{\varphi}_2 cos\varphi_2 +$$
$$+l_2^2\dot{\varphi}_2^2 cos^2\varphi_2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2 cos^2\varphi_1 + 2l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 cos\varphi_1 cos\varphi_2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 cos^2\varphi_2$$
$$\dot{y}_2^2 = (-l_1 sin\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 - l_2 sin\varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2)^2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2 sin^2\varphi_1 + 2l_1\dot{\varphi}_1 sin\varphi_1 l_2\dot{\varphi}_2 sin\varphi_2 +$$
$$+l_2^2\dot{\varphi}_2^2 sin^2\varphi_2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2 sin^2\varphi_1 + 2l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 sin\varphi_1 sin\varphi_2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 sin^2\varphi_2$$

Находим сумму квадратов, приводя подобные слагаемые и используя основное тригонометрическое тождество и выражение для косинуса разности:

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2 cos^2\varphi_1 + 2l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 cos\varphi_1 cos\varphi_2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 cos^2\varphi_2 + l_1^2\dot{\varphi}_1^2 sin^2\varphi_1 +$$
$$+2l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 sin\varphi_1 sin\varphi_2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 sin^2\varphi_2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 +$$
$$+2l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(cos\varphi_1 cos\varphi_2 + sin\varphi_1 sin\varphi_2) =$$
$$= l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

После этого для кинетической энергии точки m_2 получим:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2].$$

Потенциальная энергия точки m_2 будет иметь вид:

$$U = -m_2 g y_2 = -m_2 g(l_1 cos\varphi_1 + l_2 cos\varphi_2)$$

Функция Лагранжа для второй точки запишется в виде:

$$L_2 = \frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2] + m_2 g(l_1 cos\varphi_1 + l_2 cos\varphi_2)$$

Согласно свойству аддитивности функции Лагранжа $L = L_1 + L_2$:

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + m_1 g l_1 cos\varphi_1 + \frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2] +$$
$$+m_2 g(l_1 cos\varphi_1 + l_2 cos\varphi_2)$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$L = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + m_1 g l_1 cos\varphi_1 + \frac{m_2}{2} l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\varphi}_2^2 +$$
$$+\frac{m_2}{\cancel{2}}\cancel{2} l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + m_2 g l_1 cos\varphi_1 + m_2 g l_2 cos\varphi_2$$

Окончательно получим:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$
$$+(m_1 + m_2) g l_{\mathbf{1}} cos\varphi_1 + m_2 g l_2 cos\varphi_2.$$

Задача 12.

Найти функцию Лагранжа плоского маятника с массой m_2, точка подвеса которого (с массой m_1 в ней) может совершать движение по горизонтальной прямой (см. рисунок 2), находящегося в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести g).

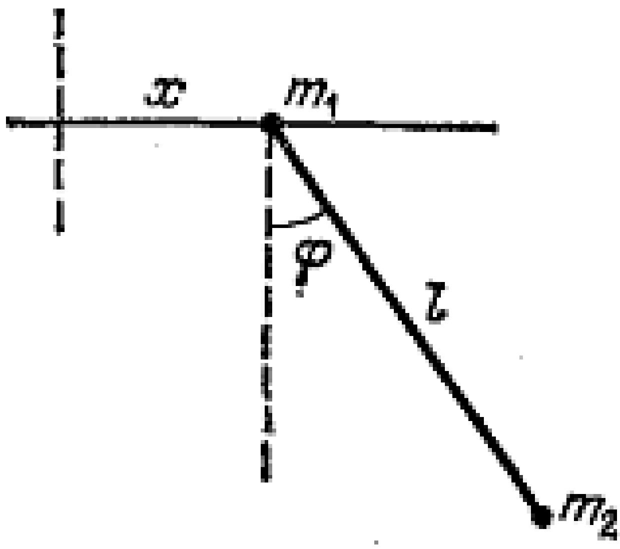

Рисунок 2 – Плоский маятник с движущимся подвесом

Решение

Введём координату x точки m_1 и угол φ между нитью маятника и вертикалью.

Для подвеса будем иметь:

$$T_1 = \frac{m_1}{2}v^2 = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2, U = 0$$
$$L_1 = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2$$

Для кинетической энергии маятника будем иметь:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}v^2, v = \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Поэтому необходимо выразить координаты x_2 и y_2 через координату подвеса и угол φ:

$$x_2 = x + l sin\varphi, \quad y_2 = l cos\varphi.$$

Найдём производные и подставим в выражение для кинетической энергии:

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$$
$$\dot{y}_2 = -l sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}[(\dot{x} + l\dot{\varphi}cos\varphi)^2 + (-l\dot{\varphi}sin\varphi)^2] =$$
$$= \frac{m_2}{2}[\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\varphi}cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi + l^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi] =$$
$$= \frac{m_2}{2}[\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\varphi}cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2]$$

Потенциальная энергия маятника запишется в виде $U = -m_2gy_2 = -m_2glcos\varphi$ и функция Лагранжа примет вид:

$$L_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\varphi}cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2) + m_2glcos\varphi$$

Согласно свойству аддитивности функции Лагранжа $L = L_1 + L_2$:

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\varphi}cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2) + m_2glcos\varphi$$
$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(2\dot{x}l\dot{\varphi}cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2) + m_2glcos\varphi$$

Преобразовав, окончательно получим:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}cos\varphi) + m_2glcos\varphi.$$

Задача 13.

Найти функцию Лагранжа плоского маятника, точка подвеса которого равномерно движется по вертикальной окружности с постоянной частотой ω (см. рисунок.3), находящегося в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести g)

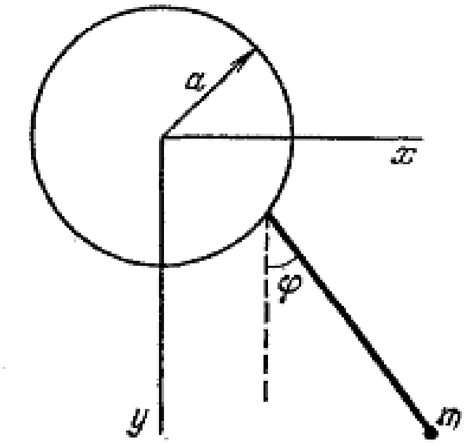

Рисунок 3 – Плоский маятник с движущейся точкой подвеса

Решение

Используя уравнение окружности в параметрическом виде $x = a\,cos\omega t$, $y = a\,sin\omega t$, выразим координаты точки m:

$$x = a\,cos\omega t + l\,sin\varphi,\ \ y = -a\,sin\omega t + l\,cos\varphi.$$

Используем формулу для кинетической энергии:

$$T = \frac{m}{2}v^2, v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Теперь необходимо найти производные от координат x и y:

$$\dot{x} = -a\omega\,sin\omega t + l\,cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = -a\omega\,cos\omega t - l\,sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

и квадраты этих выражений:

$$\dot{x}^2 = (-a\omega\,sin\omega t + l\,cos\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 =$$

$$= a^2\omega^2 sin^2\omega t - 2a\omega\,sin\omega t \cdot l\,cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2 cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

$$\dot{y}^2 = (-a\omega\,cos\omega t - l\,sin\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 =$$

$$= a^2\omega^2 cos^2\omega t + 2a\omega\,cos\omega t \cdot l\,sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2 sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

Находим сумму квадратов, приводя подобные слагаемые, используя основное тригонометрическое тождество и формулу синуса разности:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\omega^2 sin^2\omega t - 2a\omega\,sin\omega t \cdot l\,cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2 cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 +$$

$$+ a^2\omega^2 cos^2\omega t + 2a\omega\,cos\omega t \cdot l\,sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2 sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 =$$

$$= a^2\omega^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2a\omega l\dot{\varphi}(sin\varphi cos\omega t - cos\varphi sin\omega t) =$$

$$= a^2\omega^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2a\omega l\dot{\varphi}\sin(\varphi - \omega t)$$

После этого для кинетической энергии точки m получим:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}[a^2\omega^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2a\omega l\dot{\varphi}\sin(\varphi - \omega t)]$$

Потенциальная энергия точки m будет иметь вид:

$$U = -mgy = -mg(-a\, sin\omega t + l\, cos\varphi) = mga\, sin\omega t - mgl\, cos\varphi$$

Функция Лагранжа точки запишется в виде:

$$L = T - U = \frac{m}{2}[a^2\omega^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2a\omega l\dot{\varphi}\sin(\varphi - \omega t)] -$$
$$-(mga\, sin\omega t - mgl\, cos\varphi)$$
$$L = \frac{m}{2}a^2\omega^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + ma\omega l\dot{\varphi}\sin(\varphi - \omega t) - mga\, sin\omega t + mgl\, cos\varphi$$

Окончательно будем иметь:

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\omega^2\sin(\varphi - \omega t) + mgl\, cos\varphi$$

здесь опущены члены, зависящие только от времени (первый и четвёртый), и исключена полная производная по времени от $mal\omega\cos(\varphi - \omega t)$, равная

$$\frac{d}{dt}[mal\omega\cos(\varphi - \omega t)] = -mal\omega\, sin(\varphi - \omega t)\cdot(\dot{\varphi} - \omega) =$$
$$= -mal\omega\dot{\varphi}\cdot sin(\varphi - \omega t) + mal\omega^2\, sin(\varphi - \omega t)$$

Откуда

$$mal\omega\dot{\varphi}\cdot sin(\varphi - \omega t) = mal\omega^2\, sin(\varphi - \omega t) - \frac{d}{dt}[mal\omega\cos(\varphi - \omega t)]$$

Задача 14.

Найти функцию Лагранжа плоского маятника, точка подвеса которого совершает горизонтальные колебания по закону $a\,cos\omega t$, находящегося в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести g).

Решение

Координаты точки m определятся следующим образом:

$x = acos\omega t + lsin\varphi,\ y = lcos\varphi.$

Используем формулу для кинетической энергии:

$$T = \frac{m}{2}v^2, v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$
$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Теперь необходимо найти производные от координат x и y:

$$\dot{x} = a\omega\, sin\omega t + l\, cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$$
$$\dot{y} = -l\, sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

и квадраты этих выражений:

$$\dot{x}^2 = (a\omega\, sin\omega t + l\, cos\varphi\cdot\dot{\varphi})^2 =$$
$$= a^2\omega^2 sin^2\omega t - 2a\omega\, sin\omega t\cdot l\, cos\varphi\cdot\dot{\varphi} + l^2cos^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2$$
$$\dot{y}^2 = (-l\, sin\varphi\cdot\dot{\varphi})^2 = l^2 sin^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2$$

Находим сумму квадратов, приводя подобные слагаемые и используя основное тригонометрическое тождество:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\omega^2 sin^2\omega t - 2a\omega\ sin\omega t \cdot l\ cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2 cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l^2 sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\omega^2 sin^2\omega t - 2a\omega\ sin\omega t \cdot l\ cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2$$

После этого для кинетической энергии точки m получим:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}[a^2\omega^2 sin^2\omega t - 2la\omega\dot{\varphi}\ sin\omega t \cdot\ cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2]$$

Потенциальная энергия точки m будет иметь вид:

$$U = -mgy = -mglcos\varphi$$

Функция Лагранжа точки запишется в виде:

$$L = T - U = \frac{m}{2}[a^2\omega^2 sin^2\omega t - 2la\omega\dot{\varphi}\ sin\omega t \cdot\ cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2] + mglcos\varphi$$

$$L = \frac{m}{2}a^2\omega^2 sin^2\omega t - mla\omega\dot{\varphi}\ sin\omega t \cdot cos\varphi + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi$$

Первое слагаемое зависит только от времени в явном виде и поэтому является полной производной от некоторой другой функции времени. Найдём полную производную по времени от $mla\omega\ sin\omega t \cdot\ cos\varphi$ и исключим её из функции Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}[mla\omega\ sin\omega t \cdot\ cos\varphi] = mla\omega[\omega\ cos\omega t \cdot\ cos\varphi - sin\omega t \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi}] =$$

$$= mla\omega^2 cos\omega t \cdot\ cos\varphi - mla\omega\dot{\varphi} sin\omega t \cdot sin\varphi$$

Откуда

$$mla\omega\dot{\varphi} sin\omega t \cdot sin\varphi = \frac{d}{dt}[mla\omega\ sin\omega t \cdot\ cos\varphi] - mla\omega^2 cos\omega t \cdot\ cos\varphi$$

Функция Лагранжа (после исключения полных производных)

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\omega^2 cos\omega t\ sin\varphi + mgl\ cos\varphi.$$

Задача 15.

Найти функцию Лагранжа плоского маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания по закону $a\,cos\omega t$, находящегося в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести g)

Решение

Аналогично предыдущей задаче координаты точки m определятся следующим образом:

$x = lsin\varphi,\ y = acos\omega t + lcos\varphi.$

Используем формулу для кинетической энергии:

$$T = \frac{m}{2}v^2, v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Теперь необходимо найти производные от координат x и y:

$$\dot{x} = l\ cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = -a\omega\, sin\omega t - l\, sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

и квадраты этих выражений:

$$\dot{x}^2 = (l\, cos\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 = l^2 cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

$$\dot{y}^2 = (-a\omega\, sin\omega t - l\, sin\varphi \cdot \dot{\varphi})^2 =$$

$$= a^2\omega^2 sin^2\omega t + 2a\omega\, sin\omega t \cdot l\, sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2 sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

Находим сумму квадратов, приводя подобные слагаемые и используя основное тригонометрическое тождество:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2 cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + a^2\omega^2 sin^2\omega t + 2a\omega\, sin\omega t \cdot l\, sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2 sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\omega^2 sin^2\omega t + 2a\omega\, sin\omega t \cdot l\, sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2$$

После этого для кинетической энергии точки m получим:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}[a^2\omega^2 sin^2\omega t + 2a\omega\, sin\omega t \cdot l\, sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2]$$

Потенциальная энергия точки m будет иметь вид:

$$U = -mgy = -mg(acos\omega t + lcos\varphi) = -mgacos\omega t - mglcos\varphi$$

Функция Лагранжа точки запишется в виде:

$$L = T - U = \frac{m}{2}[a^2\omega^2 sin^2\omega t + 2a\omega\, sin\omega t \cdot l\, sin\varphi \cdot \dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2] + mgacos\omega t + mglcos\varphi$$

$$L = \frac{m}{2}a^2\omega^2 sin^2\omega t + mla\omega\dot{\varphi}\, sin\omega t \cdot sin\varphi + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgacos\omega t + mglcos\varphi$$

Первое и третье слагаемые зависят только от времени в явном виде и поэтому являются полными производными от некоторых других соответствующих функций времени. Найдём полную производную по времени от $mla\omega\, sin\omega t \cdot cos\varphi$ и исключим её из функции Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}[mla\omega\, sin\omega t \cdot\ cos\varphi] = mla\omega[\omega\, cos\omega t \cdot cos\varphi - sin\omega t \cdot sin\varphi \cdot \dot{\varphi}] =$$

$$= mla\omega^2 cos\omega t \cdot cos\varphi - mla\omega\dot{\varphi} sin\omega t \cdot sin\varphi$$

Откуда

$$mla\omega\dot{\varphi} sin\omega t \cdot sin\varphi = -\frac{d}{dt}[mla\omega\, sin\omega t \cdot\ cos\varphi] + mla\omega^2 cos\omega t \cdot\ cos\varphi$$

Функция Лагранжа (после исключения полных производных) примет вид:

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\omega^2 cos\omega t\, cos\varphi + mgl\, cos\varphi.$$

Задача 16.

Найти функцию Лагранжа системы, изображенная на рис. 4; точка m_2 движется по вертикальной оси, а вся система вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг этой оси.

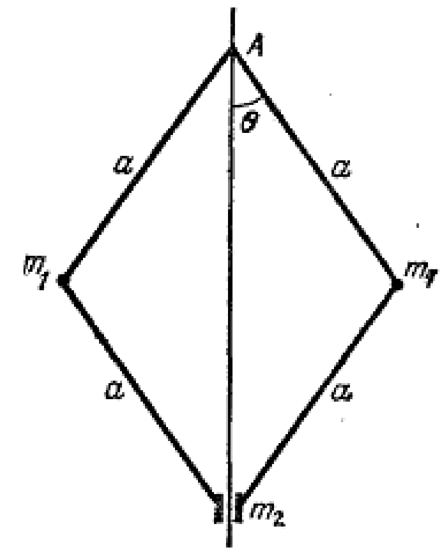

Рисунок 4 – К задаче 16

Решение

Для нахождения кинетической энергии воспользуемся свойством:

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}$$

Для этого необходимо выразить элемент перемещения через заданные величины. Вводим угол θ между отрезком a и вертикалью и угол поворота φ всей системы вокруг оси вращения; при этом $\dot{\varphi} = \Omega$. Для каждой из точек m_1 элемент перемещения $dl_1^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 sin^2\theta d\varphi^2$. Для точки m_2 расстояние от точки подвеса А равно $2a\, cos\theta$, и потому $dl_2 = -2a\, sin\theta d\theta$.

Для кинетической энергии точек m_1 имеем:

$$2T_1 = 2\frac{m_1}{2}v^2 = m_1\left(\frac{dl_1^2}{dt^2}\right) = m_1\left(\frac{a^2 d\theta^2 + a^2 sin^2\theta d\varphi^2}{dt^2}\right) =$$

$$= m_1 a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + m_1 a^2\left(sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = m_1 a^2\dot{\theta}^2 + m_1 a^2(sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}) =$$

$$= m_1 a^2\dot{\theta}^2 + m_1 a^2 \Omega sin^2\theta = m_1 a^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 sin^2\theta\right)$$

Потенциальная энергия точек m_1 запишется в виде:

$$2U = -2m_1 ga\cos\theta$$

Функция Лагранжа для точек m_1получим:

$$L_1 = T_1 - U = m_1 a^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 sin^2\theta\right) + 2m_1 ga\cos\theta$$

Для кинетической энергии точки m_2 имеем:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}v^2 = \frac{m_2}{2}\left(\frac{dl_2^2}{dt^2}\right) = \frac{m_2}{2}\left(\frac{[-2a\, sin\theta d\theta]^2}{dt^2}\right) = \frac{m_2}{2}\left(\frac{4a^2 sin^2\theta d\theta^2}{dt^2}\right) =$$

$$= 2a^2 m_2\left(sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2a^2 m_2 sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2$$

Потенциальная энергия точки m_2 запишется в виде:

$$U = -2m_2 ga\cos\theta$$

Функция Лагранжа для точки m_2 получим:

$$L_1 = T_1 - U = 2a^2 m_2 sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2 + 2m_2 ga\cos\theta$$

Согласно свойству аддитивности функции Лагранжа $L = L_1 + L_2$:

$$L = m_1 a^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 sin^2\theta\right) + 2m_1 ga\cos\theta + 2a^2 m_2 sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \\ +2m_2 ga\cos\theta$$

Окончательно получим:

$$L = m_1 a^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 sin^2\theta\right) + 2m_2 a^2 sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2 + 2ga(m_1 + m_2)cos\theta.$$

Задача 17.

Дана функция Лагранжа свободно движущейся по оси x материальной точки $L = \frac{mv^2}{2}$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.

Решение

Обобщённые импульсы определяются формулой $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. В данном случае движение одномерно и имеется одна координата x. Тогда

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}2\dot{x} = m\dot{x} = mv,$$

что определяется обычный импульс поступательно движения точки.

Обобщённые силы определяются формулой $F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$. Тогда

$$F_x = \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = 0,$$

т.е. на частицу не действует никакой силы, как это и должно быть для свободной частицы.

Энергия даётся выражением $E = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$. Выражение $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m\dot{x} = mv$ - мы определили выше, а $\dot{q}_i = \dot{x}$, тогда

$$E = mv - \frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

что совпадает с формулой для кинетической энергии поступательного движения точки.

Уравнения движения получаются из уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Или, т.к. $q_i = x$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Выражения $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ и $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ уже получены и необходимо определить $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\frac{d\dot{x}}{dt} = m\ddot{x} = ma$$

Подставляем все найденные величины в уравнение Лагранжа и преобразовываем:

$$m\ddot{x} = 0, \text{ или } ma = 0, \text{ т.е. } a = 0.$$

Данное выражение выражает закон инерции: если на тело не действуют внешние силы или действие внешних сил скомпенсировано ($\sum F_i = 0$), то тело находится в состоянии покоя ($v = 0$) или прямолинейного равномерного движения $v = const$.

Задача 18.

Дана функция Лагранжа движущейся в пространстве материальной точки $L = \frac{mv^2}{2} - U$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы при векторном и координатном способе задания движения (в декартовой системе координат).

Решение

1. При координатном способе $U = U(x, y, z)$, а $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ и функция Лагранжа примет вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\right)^2 - U(x, y, z) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

Обобщённые импульсы определяются формулой $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. В данном случае трёхмерного движения имеются три декартовых координаты x, y, z. Тогда

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] - \frac{\partial}{\partial \dot{x}}[U(x, y, z)] =$$
$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}2\dot{x} = m\dot{x} = mv_x,$$

производные $\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\dot{y}^2, \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\dot{z}^2, \frac{\partial}{\partial \dot{x}}[U(x, y, z)]$ равны нулю. Аналогично находим оставшиеся две проекции импульса на ось y и z:

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] - \frac{\partial}{\partial \dot{y}}[U(x, y, z)] =$$
$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\dot{y}^2 = \frac{m}{2}2\dot{y} = m\dot{y} = mv_y,$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] - \frac{\partial}{\partial \dot{z}}[U(x, y, z)] =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{z}}\dot{z}^2 = \frac{m}{2}2\dot{z} = m\dot{z} = mv_z,$$

производные $\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\dot{x}^2, \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\dot{z}^2, \frac{\partial}{\partial \dot{y}}[U(x,y,z)], \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\dot{x}^2, \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\dot{y}^2, \frac{\partial}{\partial \dot{z}}[U(x,y,z)]$ равны нулю.

Вектор обобщённого импульса запишется в декартовой системе в виде:

$$\vec{p} = mv_x\vec{\imath} + mv_y\vec{\jmath} + mv_z\vec{k},$$

а его модуль определяется формулой $|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$

$$|\vec{p}| = \sqrt{(mv_x)^2 + \left(mv_y\right)^2 + (mv_z)^2} = \sqrt{m^2\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)} =$$

$$= m\sqrt{\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)}$$

Обобщённые силы определяются формулой $F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, где $q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z$. Тогда

$$F_x = \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z)\right] = -\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z) = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$F_y = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z)\right] = -\frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z) = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$F_z = \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z)\right] = -\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z) = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

где произодные от $\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ по всем координатам равны нулю, $U(x,y,z) = U$ пишем для краткости.

Вектор обобщённой силы запишется в декартовой системе в виде:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k},$$

а его модуль определяется формулой $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(-\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

Энергия даётся выражением $E = \sum \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$. Выражения $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} =$ - мы определили выше, а $\dot{q}_1 = \dot{x}, \dot{q}_2 = \dot{y}, \dot{q}_3 = \dot{z}$, тогда

$$E = (\dot{x}\cdot m\dot{x} + \dot{y}\cdot m\dot{y} + \dot{z}\cdot m\dot{z}) - L =$$

$$= (m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2) - \left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z)\right] =$$

$$= (m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2) - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x,y,z) =$$

$$= m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{m}{2}\dot{z}^2 + U(x,y,z) =$$

$$= \left(m\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2\right) + \left(m\dot{y}^2 - \frac{m}{2}\dot{y}^2\right) + \left(m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\dot{z}^2\right) + U(x,y,z) =$$

$$= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2 - U(x,y,z) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x,y,z),$$

т.е. окончательно получим для энергии системы

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z)$$

Уравнения движения получаются из уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Или, т.к. $\dot{q}_1 = \dot{x}, \dot{q}_2 = \dot{y}, \dot{q}_3 = \dot{z}$ и $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

Выражения $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$ и $\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}$, уже получены и необходимо определить $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\frac{d\dot{x}}{dt} = m\ddot{x} = ma_x,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = m\frac{d\dot{x}}{dt} = m\ddot{y} = ma_y,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\frac{d\dot{z}}{dt} = m\ddot{z} = ma_z$$

Подставляем все найденные величины в уравнения Лагранжа и преобразовываем:

$$m\ddot{x} - \left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$
$$m\ddot{y} - \left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0, m\ddot{y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$
$$m\ddot{z} - \left(-\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0, m\ddot{z} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

т.о. мы получили второй закон Ньютона в координатной форме.

2. При векторном способе $U = U(\vec{r})$, а $v = \dot{r}$ и функция Лагранжа примет вид:

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - U(r)$$

Обобщённые импульсы определяются формулой $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. В данном случае движение описывается радиус-вектором $\vec{r}$. Тогда

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left[\frac{m\dot{r}^2}{2} - U(r)\right] = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial \dot{r}}[U(r)] =$$
$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\dot{r}^2 = \frac{m}{2}2\dot{r} = m\dot{r}.$$

Обобщённые силы определяются формулой $F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$. Тогда

$$\vec{F} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left[\frac{m\dot{r}^2}{2} - U(r)\right] = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}},$$

Энергия даётся выражением $E = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$. Выражение $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ - мы определили выше, а $\dot{q}_i = \dot{r}$, тогда

$$E = m\dot{r} - \frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{m\dot{r}^2}{2}.$$

Уравнения движения получаются из уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Или, т.к. $q_i = r$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

Выражения $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$ и $\frac{\partial L}{\partial r}$ уже получены и необходимо определить $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\frac{d\dot{r}}{dt} = m\ddot{r} = ma$$

Подставляем все найденные величины в уравнение Лагранжа и преобразовываем:

$$m\ddot{\vec{r}} - \left[-\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}}\right] = 0,$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}}.$$

т.о. мы получили второй закон Ньютона в векторной форме.

Задача 19.

Дана функция Лагранжа механической системы (математический маятник) $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.

Решение

Обобщённые импульсы определяются формулой $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. В данном случае движение одномерно и имеется одна координата φ. Тогда

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}(mglcos\varphi)$$

Вторая производная равна нулю, т.к. не зависит от $\dot{\varphi}$, первая производная даёт для вектора обобщённого импульса (в данном случае одномерного движения она совпадает с проекция этого вектора на ось) выражение

$$p_\varphi = \frac{ml^2}{2} \cdot 2\dot{\varphi} = ml^2\dot{\varphi}$$

Обобщённые силы определяются формулой $F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$. В данном случае движение одномерно и имеется одна координата φ. Тогда

$$F_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(mglcos\varphi)$$

Первая производная равна нулю, т.к. не зависит от φ, вторая производная даёт для вектора обобщённой силы (в данном случае одномерного движения она совпадает с проекция этого вектора на ось) выражение

$$F_\varphi = -mglsin\varphi$$

(домножать данную производную на $\dot{\varphi}$, как мы это делали при работе с криволинейными координатами, не надо т.к. отыскивается производная **не** по времени, от которого в неявном виде зависят координаты).

Энергия даётся выражением $E = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$. Выражение $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$ - мы определили выше, а $\dot{q}_i = \dot{\varphi}$, тогда

$$E = \dot{\varphi} \cdot ml^2\dot{\varphi} - \left(\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi\right) = ml^2\dot{\varphi}^2 - \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mglcos\varphi =$$

$$= \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mglcos\varphi$$

Уравнения движения получаются из уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

или, т.к. $q_i = \varphi$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Выражения $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ и $\frac{\partial L}{\partial \varphi}$ уже получены и необходимо определить $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = ml^2\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = ml^2\ddot{\varphi}$$

Подставляем все найденные величины в уравнение Лагранжа и преобразовываем:

$$ml^2\ddot{\varphi} - (-mglsin\varphi) = 0$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mglsin\varphi = 0$$

$$l^2\ddot{\varphi} + glsin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}sin\varphi = 0$$

Это и есть уравнение движения математического маятника, которое в случае малых колебаний, когда $sin\varphi \approx \varphi$, переходит в известное уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

где $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ - собственная частота колебаний маятника.

Задача 20.

Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся материальной точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.

Решение

Обобщённые импульсы определяются формулой $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. В данном случае движение трёхмерно и имеются координаты r, φ, z. Тогда

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)\right] = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}2\dot{r} = m\dot{r}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} = \left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)\right] = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) =$$
$$= \frac{m}{2}r^2 2\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)\right] = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{z}}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}2\dot{z} = m\dot{z}$$

Вектор обобщённого импульса запишется в цилиндрической системе в виде:

$$\vec{p} = m\dot{r}\vec{\imath} + mr^2\dot{\varphi}\vec{\jmath} + m\dot{z}\vec{k},$$

а его модуль определяется формулой $|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$

$$|\vec{p}| = \sqrt{(m\dot{r})^2 + (mr^2\dot{\varphi})^2 + (m\dot{z})^2} = \sqrt{m^2(\dot{r}^2 + r^4\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)} =$$
$$= m\sqrt{\dot{r}^2 + r^4\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$$

Обобщённые силы определяются формулой $F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, где $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$. Тогда

$$F_r = \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)\right] = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial r}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}2r = mr$$

$$F_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)\right] = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = 0$$

$$F_z = \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)\right] = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial z}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = 0$$

Вторая и третья производные равна нулю, т.к. функция Лагранжа не зависит от φ и z, вторая производная даёт выражении для проекции вектора обобщённой силы, которая совпадает в данном случае с самим вектором:

$$F_r = mr$$

Энергия даётся выражением $E = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$, которое для случая цилиндрических координат запишем в виде: $E = \left(\dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - L$. Величины $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ уже найдены при нахождении вектора импульса:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi},$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Подставим в выражение для энергии:

$$E = (\dot{r} \cdot m\dot{r} + \dot{\varphi} m r^2 \dot{\varphi} + \dot{z} \cdot m\dot{z}) - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) =$$
$$= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2}\dot{z}^2 =$$
$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

Уравнения движения получаются из уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

или, т.к. $q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = z$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

Выражения $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$ и $\frac{\partial L}{\partial r}, \frac{\partial L}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial L}{\partial z}$ уже получены и необходимо определить $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = mr^2\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}) = mr^2\ddot{\varphi}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\frac{d}{dt}(\dot{z}) = m\ddot{z}$$

Подставляем все найденные величины в уравнение Лагранжа и преобразовываем:

$$m\ddot{r} - mr = 0$$
$$mr^2\ddot{\varphi} = 0$$
$$m\ddot{z} = 0$$

$$\ddot{r} - r = 0$$
$$\ddot{\varphi} = 0$$
$$\ddot{z} = 0$$

Это и есть искомые уравнения движения.

Задача 21.

Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в сферических координатах $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.

Решение

Обобщённые импульсы определяются формулой $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. В данном случае движение трёхмерно и имеются координаты r, φ, θ. Тогда

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) = \frac{m}{2}2\dot{r} = m\dot{r}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} = \left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) =$$

$$= \frac{m}{2}r^2 sin^2\theta \cdot 2\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi} sin^2\theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\right] = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 +$$

$$+ r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta) = \frac{m}{2}r^2 2\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$$

Вектор обобщённого импульса запишется в цилиндрической системе в виде:

$$\vec{p} = m\dot{r}\vec{i} + mr^2\dot{\varphi} sin^2\theta\vec{j} + mr^2\dot{\theta}\vec{k},$$

а его модуль определяется формулой $|\vec{p}| = \sqrt{p_r^2 + p_\varphi^2 + p_\theta^2}$:

$$|\vec{p}| = \sqrt{(m\dot{r})^2 + (mr^2\dot{\varphi} sin^2\theta)^2 + \left(mr^2\dot{\theta}\right)^2} = \sqrt{m^2\left(\dot{r}^2 + r^4\dot{\varphi}^2 sin^4\theta + r^4\dot{\theta}^2\right)} =$$

$$= m\sqrt{\dot{r}^2 + r^4\dot{\varphi}^2 sin^4\theta + r^4\dot{\theta}^2}$$

Обобщённые силы определяются формулой $F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, где $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \theta$. Тогда

$$F_r = \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\right] = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) = \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 \cdot 2r + \frac{m}{2}\dot{\varphi}^2 sin^2\theta \cdot 2r =$$

$$= mr\dot{\theta}^2 + mr\dot{\varphi}^2 sin^2\theta = mr\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)$$

$$F_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) = 0$$

$$F_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\right] = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) =$$
$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}(r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta) = \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta = mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta$$

Вектор обобщённой силы запишется в сферической системе в виде:

$$\vec{F} = F_r\vec{\imath} + F_\varphi\vec{\jmath} + F_\theta\vec{k},$$
$$\vec{F} = mr\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\vec{\imath} + mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{k},$$

где $F_\varphi = 0$, а его модуль определяется формулой $|\vec{p}| = \sqrt{p_r^2 + p_\varphi^2 + p_\theta^2}$

$$|\vec{F}| = \sqrt{m^2r^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)^2 + (mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)^2} =$$
$$= \sqrt{m^2r^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)^2 + m^2r^4\sin^2\theta\cos^2\theta} =$$
$$= mr\sqrt{\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)^2 + r^2\sin^2\theta\cos^2\theta} =$$
$$= mr\sqrt{\dot{\theta}^4 + 2\dot{\theta}^2\dot{\varphi}^4 sin^2\theta + \dot{\varphi}^4 sin^4\theta + r^2\sin^2\theta\cos^2\theta} =$$
$$= mr\sqrt{\dot{\theta}^4 + \dot{\varphi}^4 sin^2\theta\left(2\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\right) + r^2\sin^2\theta\cos^2\theta} =$$
$$= mr\sqrt{\dot{\theta}^4 + sin^2\theta\left[\dot{\varphi}^4\left(2\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\right) + r^2\cos^2\theta\right]}$$

Энергия даётся выражением $E = \sum \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$, которое для случая сферических координат запишем в виде: $E = \left(\dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - L$. Величины $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ уже найдены при нахождении вектора импульса:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} sin^2\theta,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

Подставим в выражение для энергии:

$$E = \left(\dot{r}\cdot m\dot{r} + \dot{\varphi}\cdot mr^2\dot{\varphi} sin^2\theta + \dot{\theta}\cdot mr^2\dot{\theta}\right) - \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) =$$
$$= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta =$$
$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)$$

Уравнения движения получаются из уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

или, т.к. $q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = \theta$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

Выражения $\frac{\partial L}{\partial \dot r}, \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}, \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}$ и $\frac{\partial L}{\partial r}, \frac{\partial L}{\partial \varphi}, \frac{\partial L}{\partial \theta}$ уже получены и необходимо определить $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = \frac{d}{dt}(m\dot r) = m\ddot r$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi sin^2\theta) = mr^2 sin^2\theta \frac{d}{dt}(\dot\varphi) = mr^2 sin^2\theta\ddot\varphi$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot\theta\right) = mr^2\frac{d}{dt}\left(\dot\theta\right) = mr^2\ddot\theta$$

Подставляем все найденные величины в уравнение Лагранжа и преобразовываем:

$$m\ddot r - mr\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 sin^2\theta\right) = 0$$
$$mr^2 sin^2\theta\ddot\varphi = 0$$
$$mr^2\ddot\theta - mr^2\dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\ddot r - r\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 sin^2\theta\right) = 0$$
$$sin^2\theta\ddot\varphi = 0$$
$$\ddot\theta - \dot\varphi^2 \sin\theta\cos\theta = 0$$

Эти три уравнения движения описывают движение материальной точки в проекциях на соответствующие оси.

1.3 Задачи для самостоятельного решения

Во всех следующих задачах найдите коэффициенты Лямэ, дифференциал длины дуги, модули скорости и ускорения для следующих систем координат:

1. Прямоугольные декартовые $x = x, y = y, z = z$ (см. рисунок 5)

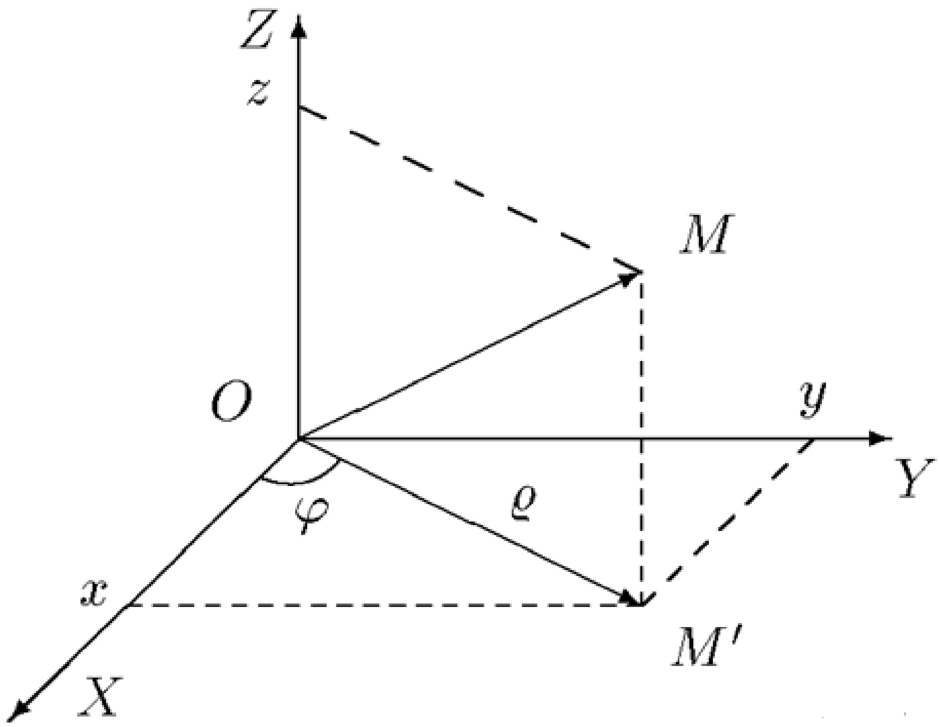

Рисунок 5 – Декартова система координат в пространстве

2. Цилиндрические координаты $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$ (см. рисунок 6)

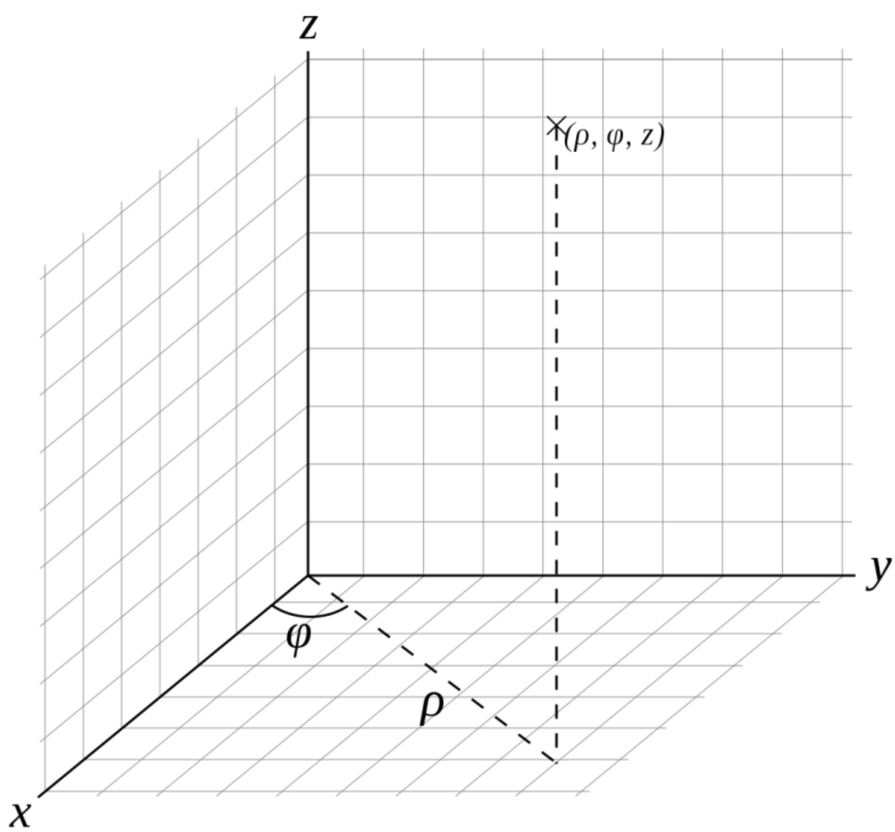

Рисунок 6 – Цилиндрическая система координат

3. Сферические координаты $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = r \cdot cos\theta$ (см. рисунок 7)

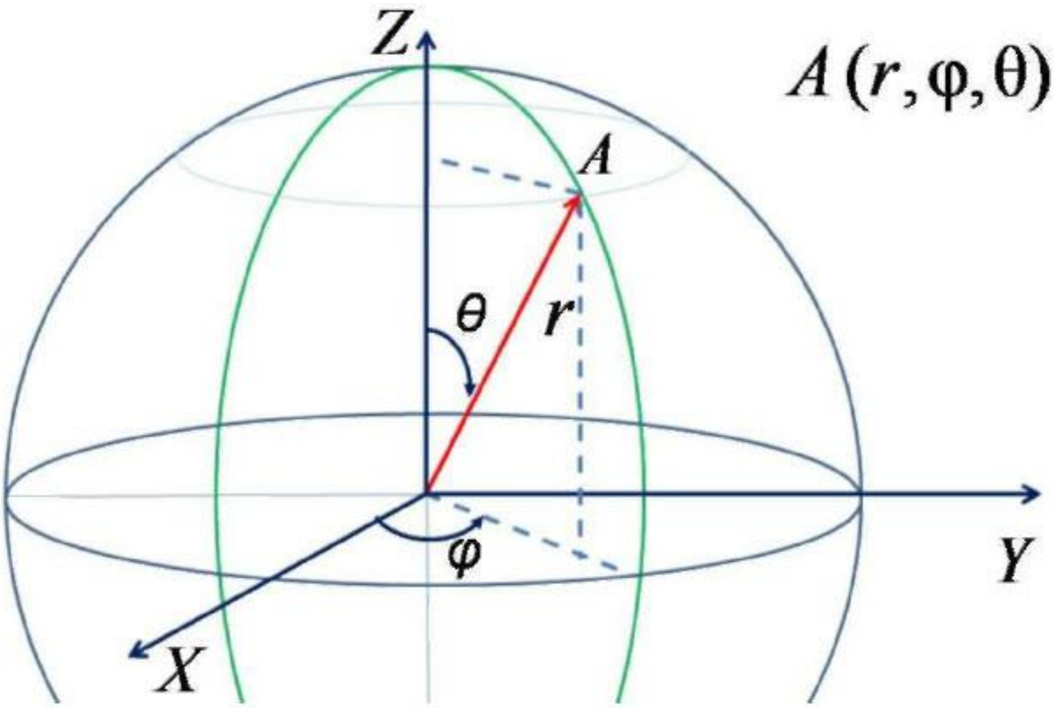

Рисунок 7 – Сферическая система координат

4. Эллиптические $x = a \cdot ch\mu \cdot cosv, y = a \cdot sh\mu \cdot sinv, a = const$ (см. рисунок 8)

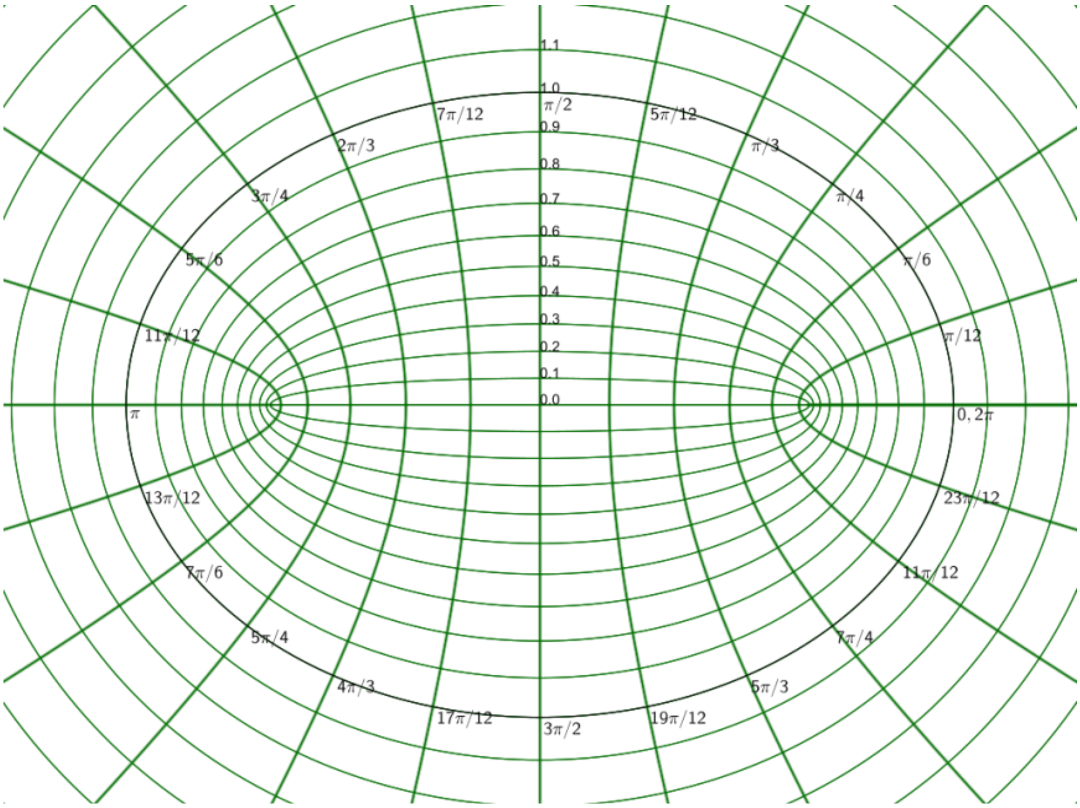

Рисунок 8 – Эллиптическая система координат на плоскости

5. Двумерные параболические координаты $x = \sigma\tau, y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$ (см.рисунок 9)

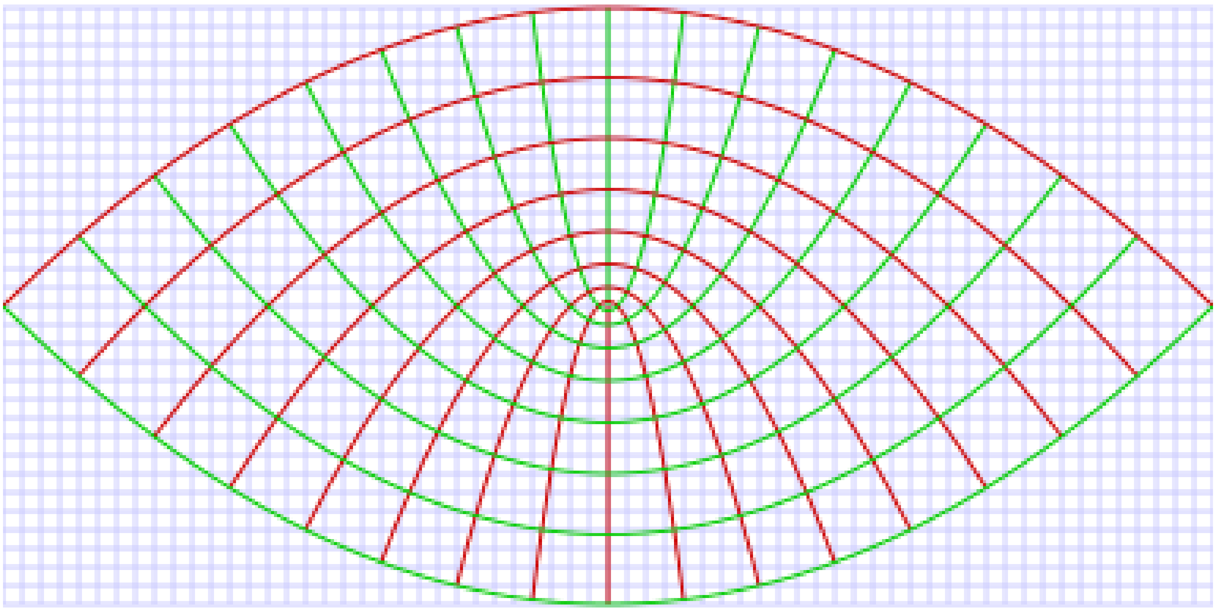

Рисунок 9 – Двумерная параболическая система координат

6. Трёхмерные параболические координаты $x = \sigma\tau \cdot cos\varphi, y = \sigma\tau \cdot sin\varphi, z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$ (см. рисунок 10)

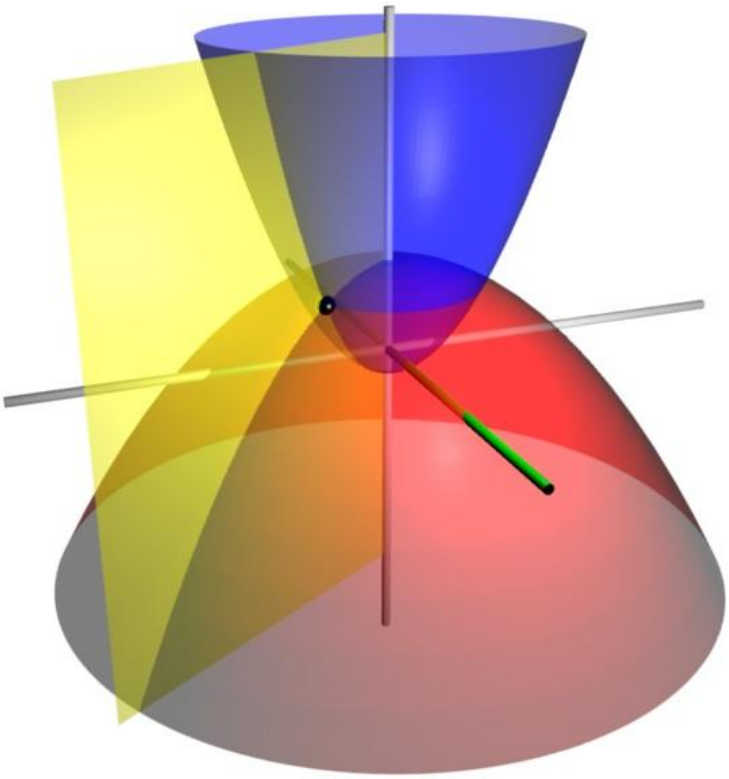

Рисунок 10 – Трёхмерная параболическая система координат

7. Цилиндрические параболические координаты $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z, c = const$ (см. рисунок 11)

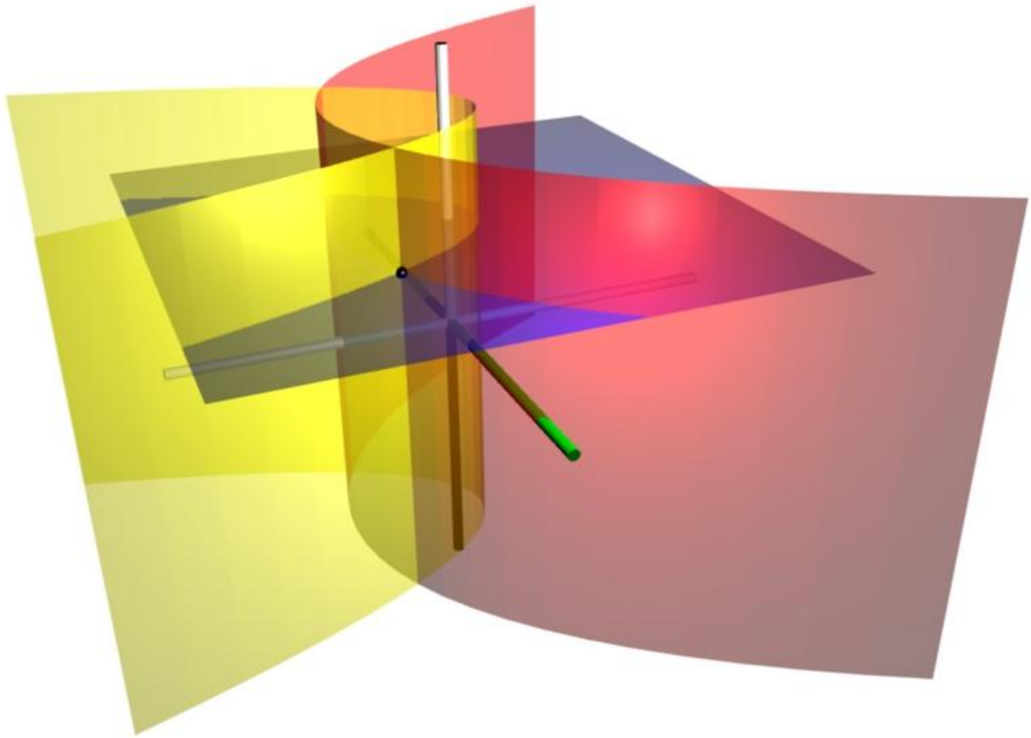

Рисунок 11 – Цилиндрическая параболическая система координат

8. Биполярные координаты $x = \frac{a \cdot sh\tau}{ch\tau - cos\sigma}, y = \frac{a \cdot sin\tau}{ch\tau - cos\sigma}, a = const, c = const$ (см. рисунок 12)

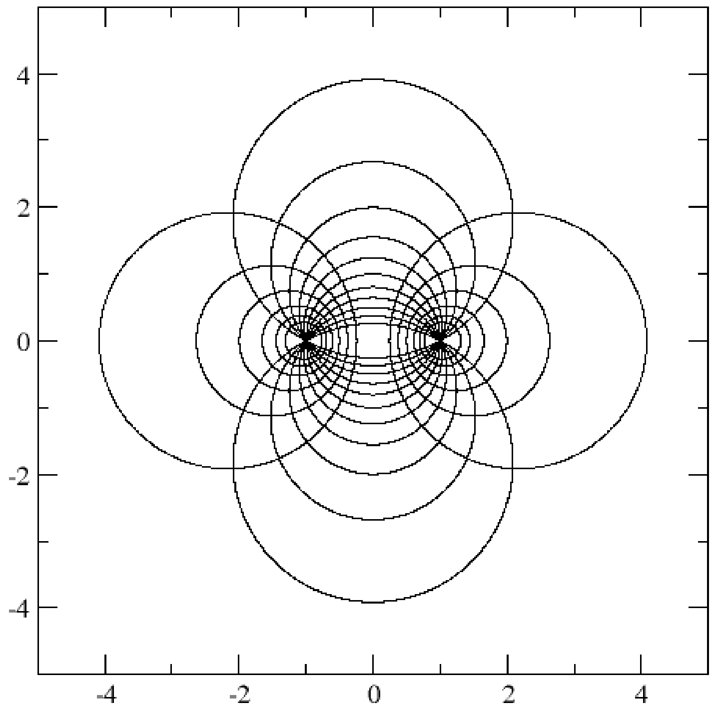

Рисунок 12 – Биполярная система координат

9. Тороидальные координаты $x = \frac{c \cdot sh\alpha \cdot \cos\varphi}{ch\alpha - \cos\beta}, y = \frac{c \cdot sh\alpha \cdot \sin\varphi}{ch\alpha - \cos\beta}, z = \frac{c \cdot \sin\beta}{ch\alpha - \cos\beta}, c = const > 0$ (см. рисунок 13)

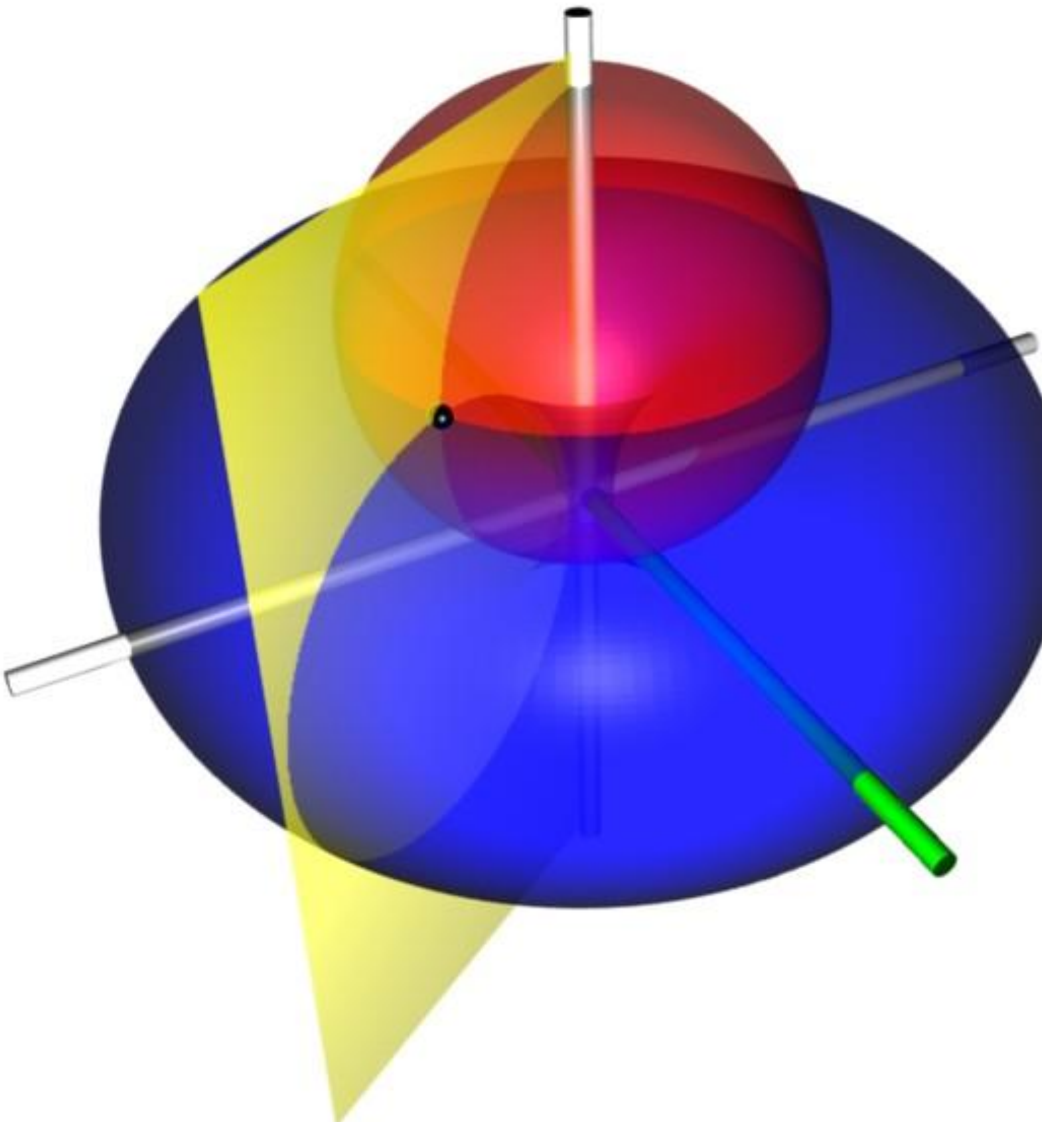

Рисунок 13 – Тороидальная система координат

Указание: Т.к. даны соотношения, связывающие криволинейные координаты с декартовыми, то формулу для коэффициентов Лямэ использовать в виде $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_3}{\partial q_i}\right)^2}$, где q_i - соответствующие криволинейные координаты.

Задачи на криволинейные системы координат на плоскости

1. Найти формулы перехода от декартовой системы координат (x, y) к эллиптической (μ, ν).
2. Найти формулы перехода от декартовой системы координат (x, y) к двумерной параболической (σ, τ).

3. Найти формулы перехода от декартовой системы координат (x, y) к биполярной (σ, τ).
4. Найти формулы перехода от полярной системы координат (r, φ) к эллиптической (μ, ν).
5. Найти формулы перехода от полярной системы координат (r, φ) к двумерной параболической (σ, τ).
6. Найти формулы перехода от полярной системы координат (r, φ) к биполряной (σ, τ).
7. Найти формулы перехода от эллиптической системы координат (μ, ν) к полярной (r, φ).
8. Найти формулы перехода от эллиптической системы координат (μ, ν) к двумерной параболической (σ, τ).
9. Найти формулы перехода от эллиптической системы координат (μ, ν) к биполярной (σ, τ).
10. Найти формулы перехода от двумерной параболической системы координат (σ, τ) к полярной (r, φ).
11. Найти формулы перехода от двумерной параболической системы координат (σ, τ) к эллиптической (μ, ν).
12. Найти формулы перехода от биполярной системы координат (σ, τ) к полярной (r, φ).
13. Найти формулы перехода от биполярной системы координат (σ, τ) к эллиптической (μ, ν).

Задачи на криволинейные системы координат в пространстве

1. Найти формулы перехода от декартовой системы координат (x, y, z) к трёхмерной параболической (σ, τ, z).
2. Найти формулы перехода от декартовой системы координат (x, y, z) к тороидальной (α, β, φ).
3. Найти формулы перехода от цилиндрической системы координат (r, φ, z) к сферической (r, θ, φ).
4. Найти формулы перехода от цилиндрической системы координат (r, φ, z) к трёхмерной параболической (σ, τ, z).
5. Найти формулы перехода от цилиндрической системы координат (r, φ, z) к тороидальной (α, β, φ).
6. Найти формулы перехода от сферической системы координат (r, θ, φ) к цилиндрической (r, φ, z).
7. Найти формулы перехода от сферической системы координат (r, θ, φ) к трёхмерной параболической (σ, τ, z).
8. Найти формулы перехода от сферической системы координат (r, θ, φ) к тороидальной (α, β, φ).
9. Найти формулы перехода от трёхмерной параболической системы координат (σ, τ, z) к цилиндрической (r, φ, z).
10. Найти формулы перехода от трёхмерной параболической системы координат (σ, τ, z) к сферической (r, θ, φ).

11. Найти формулы перехода от трёхмерной параболической системы координат (σ, τ, z) к тороидальной (α, β, φ).
12. Найти формулы перехода от тороидальной системы координат (α, β, φ) к цилиндрической (r, φ, z).
13. Найти формулы перехода от тороидальной системы координат (α, β, φ) к сферической (r, θ, φ).
14. Найти формулы перехода от тороидальной системы координат (α, β, φ) к трёхмерной параболической (σ, τ, z).

Задачи на кинематику точку

1. Точка движется по траектории $\rho = a \cdot e^{k\varphi}$ с постоянно секторной скоростью σ_0. Найти скорость $\vec{v}(t)$ точки, если в начальный момент времени $\varphi(0) = 0$.
2. Точка движется по окружности радиуса R, причём $\varphi = \omega t$ (φ - угол между радиусом-вектором точки, проведённым из некоторой точки A окружности, и прямой, соединяющей точку A и центр окружности). Найти тангенциальную и нормальную составляющие скорости и ускорения.
3. Точка движется по параболе $y = kx^2$ так, что её ускорение параллельно оси y и равно a. Определить компоненты a_τ, a_n ускорения точки как функции времени.
4. Точка движется в плоскости. Её тангенциальное и нормальное ускорения соответственно равны постоянным a и b. Найти уравнение траектории в полярных координатах.

Задачи на составление функции Лагранжа

1. Найти функцию Лагранжа свободной материальной точки в полярных координатах.
2. Найти функцию Лагранжа свободной материальной точки в эллиптических координатах.
3. Найти функцию Лагранжа свободной материальной точки в двумерных параболических координатах.
4. Найти функцию Лагранжа свободной материальной точки в трёхмерных параболических координатах.
5. Найти функцию Лагранжа свободной материальной точки в цилиндрических параболических координатах.
6. Найти функцию Лагранжа свободной материальной точки в биполярных координатах.
7. Найти функцию Лагранжа свободной материальной точки в тороидальных координатах.

Задачи на функцию Лагранжа

1. Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{\alpha m}{2x^2}$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.
2. Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.
3. Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{m}{2}(\dot{s}^2+\dot{y}^2) + mgs \cdot sin\alpha$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.
4. Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{mv^2}{2} - mglcos\alpha$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.
5. Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{m}{2}\left[(a^2 - z^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{a^2\dot{z}^2}{a^2-z^2}\right] - mgz$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.
6. Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{ma^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 sin^2\theta\right) - mga \cdot cos\theta$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.
7. Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{ma^2}{2}(\dot{\varphi}^2 + 2\omega^2 cos^2\varphi)$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор

обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.

8. Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + z^2) + \frac{e}{2c}\rho^2\dot{\varphi}H$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.
9. Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{m}{2}\left(r^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\varphi^2\right) + \frac{e\mu sin^2\theta}{rc}\dot{\varphi}$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.
10. Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{\alpha}{2}(x - l_0)^2 + max$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.
11. Дана функция Лагранжа механической системы (свободно движущейся точки) в цилиндрических координатах $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\omega}^2 + z^2) - mgz$. Определить обобщённые импульсы p_i, вектор обобщённого импульса, модуль вектора обобщённого импульса, обобщённые силы F_i, вектор обобщённой силы, модуль вектора обобщённой силы, энергию системы, уравнение движения системы.

1.4 Тестовые задания

1. Как называется теория достаточно медленных перемещений одних макроскопических тел относительно других?
   A) Квантовая механика
   B) Классическая механика
   C) Статистическая механика
   D) Общая механика
   E) Релятивистска механика
2. Как называется механика, описывающая перемещение с околосветовыми скоростями?
   A) Обобщённая
   B) Квантовая
   C) Ньютонова
   D) Классическая

E) Релятивистская

3. Кто написал трактат «Математические начала натуральной философии»?
   A) Коперник
   B) Галилей
   C) Лагранж
   D) Ньютон
   E) Гамильтон
4. Кто сформулировал три основных закона классической механики?
   A) Кеплер
   B) Коперник
   C) Ньютон
   D) Галилей
   E) Лагранж
5. Укажите одно из фундаментальных понятий механики:
   A) Пространство
   B) Радиус-вектор
   C) Центр инерции
   D) Плоское движение
   E) Твёрдое тело
6. Одним из фундаментальных понятий механики является:
   A) Центр масс
   B) Координата
   C) Масса
   D) Замедленное движение
   E) Кинематика
7. Укажите одно из фундаментальных понятий механики:
   A) Центр масс
   B) Радиус-вектор
   C) Ускоренное движение
   D) Упругая деформация
   E) Время
8. Выберите одно из фундаментальных понятий механики:
   A) Скорость
   B) Сила
   C) Ускорение
   D) Деформация
   E) Динамика
9. Какое из перечисленных понятий является одним из фундаментальных понятий механики?
   A) Инерциальная система отсчёта
   B) Декартова система координат
   C) Неинерциальная система отсчёта
   D) Равнопеременное движение
   E) Малые колебания

10. Из перечисленных укажите фундаментальные понятия механики:
    1. Масса
    2. Ускорение
    3. Время
    4. Скорость
    5. Импульс

   A) 1 и 4
   B) 1 и 3
   C) 2, 3 и 4
   D) 3 и 5
   E) 4 и 5
11. Из перечисленных укажите фундаментальные понятия механики:
    1. Ускорение
    2. Сила
    3. Пространство
    4. Масса
    5. Импульс

   A) 1 и 4
   B) 1 и 3
   C) 2, 3 и 4
   D) 3 и 5
   E) 4 и 5
12. Из перечисленных укажите фундаментальные понятия механики:
    1. Ускорение
    2. Импульс
    3. Скорость
    4. Пространство
    5. ИСО

   A) 1 и 4
   B) 1 и 3
   C) 2, 3 и 4
   D) 3 и 5
   E) 4 и 5
13. Из перечисленных укажите фундаментальные понятия механики:
    1. Деформация
    2. Ускорение
    3. Сила
    4. Скорость
    5. ИСО

   A) 1 и 4
   B) 1 и 3
   C) 2, 3 и 4
   D) 3 и 5
   E) 4 и 5

14. Из перечисленных укажите фундаментальное понятие механики:
    1. Сила
    2. Момент импульса
    3. Ускорение
    4. Скорость
    5. Периодичность

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

15. Из перечисленных укажите фундаментальное понятие механики:
    1. Момент инерции
    2. Пространство
    3. Действие
    4. Энергия
    5. Координата

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

16. Из перечисленных укажите фундаментальное понятие механики:
    1. Периодичность
    2. Ускорение
    3. Масса
    4. Момент импульса
    5. Координата

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

17. Из перечисленных укажите фундаментальное понятие механики:
    1. Действие
    2. Функция Лагранжа
    3. Периодичность
    4. Пространство
    5. Координата

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

18. Из перечисленных укажите фундаментальное понятие механики:
    1. Колебания
    2. Действие по Гамильтону
    3. Координата
    4. Импульс
    5. Инерциальная система отсчёта

   A) 1
   B) 2
   C) 3
   D) 4
   E) 5
19. Укажите понятия, выражающие собой общие формы существования материи:
   A) Сила и масса
   B) Время и импульс
   C) Пространство и время
   D) Масса и энергия
   E) Координаты и пространство
20. Какое из понятий является формой существования материи?
   A) Энергия
   B) Время
   C) Масса
   D) Импульс
   E) Деформация
21. Сколько измерений имеет евклидово пространство?
   A) 1
   B) 2
   C) 3
   D) 4
   E) 5
22. Сколько измерений имеет время?
   A) 1
   B) 2
   C) 3
   D) 4
   E) 5
23. Какое из понятий является формой существования материи?
   A) Сила
   B) Энергия
   C) Импульс
   D) Пространство
   E) Колебание
24. Какова принята скорость распространения взаимодействий между телами в классической механике?

A) 0
B) 1
C) -1
D) ∞
E) Этот вопрос ещё не решён

25. Какова принята скорость распространения взаимодействий между телами в классической механике?
A) с
B) 1
C) Нельзя дать определённого ответа
D) -1
E) ∞

26. Укажите максимальную скорость распространения взаимодействий:
A) Скорость звука в воздухе
B) Скорость изменения электрического поля в алмазе
C) Скорость распространения магнитного возмущения в воде
D) Скорость света в вакууме
E) Скорость движения электрона в атоме

27. Что принято за единицу длины в международной системе единиц?
A) Микрометр
B) Миллиметр
C) Сантиметр
D) Метр
E) Километр

28. Что является единицей времени?
A) Час
B) Секунда
C) Сутки
D) Минута
E) Год

29. Как называется тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения?
A) Абсолютно твёрдое тело
B) Материальная точка
C) Механическая система
D) Сплошная среда
E) Абсолютно неупругое тело

30. Какой величиной определяется положение материальной точки в пространстве?
A) Радиус-вектором
B) Кинетической энергией
C) Моментом импульса
D) Потенциальной энергией
E) Импульсом

31. Какими величинами можно задать положение системы материальных точек в пространстве?
A) Силами
B) Ускорениями
C) Координатами
D) Энергией
E) Импульсами
32. Сколько координат необходимо задать для определения положения тела, состоящего из N материальных точек?
A) N
B) 2N-1
C) 3N
D) N^2
E) N(N+2)
33. Сколько радиус-векторов необходимо задать для определения положения тела, состоящего из N материальных точек?
A) N
B) 2N-1
C) 3N
D) N^2
E) N(N+2)
34. Укажите выражение для пространственного интервала:
A) $r_{12} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2]^{1|3}$
B) $r_{12} = [(x_2 + x_1)^2 - (y_2 + y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{2|3}$
C) $r_{12} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1|2}$
D) $r_{12} = [(x_2 + x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2]^{3|2}$
E) $r_{12} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 + z_1)^2]^{3/2}$
35. Найдите пространственный интервал между двумя точками с координатами A(1;1;1) и B(2;2;2).
A) $\sqrt{3}$
B) 3
C) $\sqrt{27}$
D) 9
E) 27
36. Какое пространство рассматривает классическая механика?
A) Римана
B) Евклида
C) Минковского
D) Лобачевского
E) Гаусса

37. Какая механика рассматривает движения макротел с любыми скоростями?
A) Квантовая

B) Классическая
C) Общая
D) Релятивистская
E) Статистическая

38. Какая механика рассматривает движения микрообъектов?
A) Классическая
B) Квантовая
C) Статистическая
D) Общая
E) Релятивистская

39. Как называется регулярно повторяющийся процесс (явление)?
A) Сингулярный
B) Периодический
C) Монотонный
D) Асимптотический
E) Ангармонический

40. Число независимых величин, задание которых необходимо для определения положения механической системы, называется:
A) Индексом состояния
B) Вариацией координат
C) Функциями Лагранжа
D) Уравнениями движения
E) Числом степеней свободы

41. Сколько имеется поступательных степеней свободы?
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

42. Сколько имеется в общем случае вращательных степеней свободы?
A) 2
B) 3
C) 5
D) 6
E) 8

43. Сколько степеней свободы имеет материальная точка?
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

44. Сколько степеней свободы имеет твёрдое тело?
A) 2
B) 3

C) 6
D) 9
E) 11

45. Сколько степеней свободы имеет математический маятник?
A) 1
B) 3
C) 6
D) 9
E) 11

46. Сколько степеней свободы имеет физический маятник?
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

47. Сколько степеней свободы имеет одноатомная молекула?
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

48. Сколько степеней свободы имеет двухатомная жёсткая молекула?
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

49. Сколько степеней свободы имеет пружинный маятник?
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

50. Сколько колебательных степеней свободы имеет двухатомная жёсткая молекула?
A) 0
B) 1
C) 2
D) 4
E) 6

51. Сколько колебательных степеней свободы имеет двухатомная упругая молекула?
A) 0

B) 1
C) 3
D) 4
E) 5

52. Сколько колебательных степеней свободы имеет объёмная трёхатомная молекула?
A) 0
B) 3
C) 5
D) 6
E) 7

53. Сколько колебательных степеней свободы имеет линейная трёхатомная молекула?
A) 0
B) 2
C) 4
D) 5
E) 7

54. Как называются любые s величин $q_1, q_2 ... q_s$, вполне характеризующие положение системы с s степенями свободы?
A) Скорости
B) Радиус-вектор
C) Уравнения движения
D) Обобщённые координаты
E) Функции Лагранжа

55. Что дадут первые производные от обобщённых координат материальной точки?
A) Силы, действующие на точку
B) Обобщённые скорости
C) Функцию Лагранжа
D) Действие
E) Время движения механической системы

56. Что дадут первые производные от обобщённых скоростей материальной точки?
A) Обобщённые силы, действующие на точку
B) Обобщённые импульсы
C) Действие по Гамильтону
D) Обобщённые скорости
E) Обобщённые ускорения

57. Что дадут вторые производные от обобщённых скоростей материальной точки?
A) Силы, действующие на точку
B) Функцию Гамильтона

C) Действие
D) Обобщённые ускорения
E) Время движения механической системы

58. Заданием каких величин полностью определяется состояние системы и возможность предсказания её дальнейшего движения?
A) Скоростей и кинетической энергии
B) Потенциальной энергии
C) Ускорений
D) Координат и скоростей
E) Энергии и времени

59. Укажите выражение расчета коэффициентов Лямэ:
A) $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right)^2}$
B) $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\right)^{1/2} + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right)^{1/2} - \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right)^{1/2}}$
C) $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}\right)^3 - \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right)^3 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\right)^3}$
D) $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\right)^1 - \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right)^3}$
E) $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right)^2}$

60. По какому уравнению можно найти дифференциал длины дуги в криволинейных координатах?
A) $dS^2 = H_1^2 dq_1^2 - H_2^2 dq_2^2 - H_3^2 dq_3^2$
B) $dS^2 = H_1^3 dq_1^2 + H_2^3 dq_2^2 + H_3^3 dq_3^2$
C) $dS^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2$
D) $dS^2 = H_1^1 dq_1^2 - H_2^2 dq_2^2 - H_3^3 dq_3^2$
E) $dS^2 = H_1^2 dq_1^1 + H_2^2 dq_2^2 - H_3^2 dq_3^3$

61. Выберите полярные координаты:
A) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi$
B) $x = a \cdot ch\mu \cdot cosv, y = a \cdot sh\mu \cdot sinv$
C) $x = \sigma\tau, y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$
D) $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$
E) $x = \frac{a \cdot sh\tau}{ch\tau - cos\sigma}, y = \frac{a \cdot sin\tau}{ch\tau - cos\sigma}$

62. Укажите формулы перехода от декартовых координат к полярным:
A) $r = x^2 + y^2, ctg\varphi = \frac{y}{x}$
B) $r = \sqrt{x^2 - y^2}, tg\varphi = \frac{x}{y}$
C) $r = \sqrt{x^2 - y^2}, tg\varphi = \frac{x}{y}$
D) $r = \sqrt{x^2 + y^2}, tg\varphi = \frac{y}{x}$
E) $r = \sqrt{x^3 + y^3}, tg\varphi = \frac{y}{x}$

63. Найти декартовы координаты точки, если её полярные координаты: $r = 2, \varphi = \frac{\pi}{4}$.
    A) $(2; 2)$
    B) $(\sqrt{2}; 2)$
    C) $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$
    D) $(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$
    E) $(2; \sqrt{2})$
64. Найти полярные координаты точки, если её декартовы координаты: $x = 3, y = 4$.
    A) $r = 1, \varphi = 53$
    B) $r = 5, \varphi = 53$
    C) $r = 7, \varphi = 37$
    D) $r = \sqrt{7}, \varphi = 53$
    E) $r = 5, \varphi = 37$
65. Выберите цилиндрические координаты:
    A) $x = \sigma\tau, y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$
    B) $x = \sigma\tau \cdot cos\varphi, y = \sigma\tau \cdot sin\varphi, z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$
    C) $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$
    D) $x = \frac{a \cdot sh\tau}{ch\tau - cos\sigma}, y = \frac{a \cdot sin\tau}{ch\tau - cos\sigma}$
    E) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$
66. Найдите координаты материальной точки в декартовых координатах, если её цилиндрические координаты: $r = 5, \varphi = \frac{\pi}{4}, z = 3$.
    A) $(2; 2; 9)$
    B) $(\sqrt{2}; 2; 9)$
    C) $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 3)$
    D) $(\sqrt{2}; 3\sqrt{2}; 3)$
    E) $(2; \sqrt{2}; 3)$
67. Выберите сферические координаты:
    A) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi$
    B) $x = a \cdot ch\mu \cdot cosv, y = a \cdot sh\mu \cdot sinv$
    C) $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = r \cdot cos\theta$
    D) $x = \sigma\tau \cdot cos\varphi, y = \sigma\tau \cdot sin\varphi, z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$
    E) $x = \frac{a \cdot sh\tau}{ch\tau - cos\sigma}, y = \frac{a \cdot sin\tau}{ch\tau - cos\sigma}$

68. Выберите эллиптические координаты:
    A) $x = a \cdot ch\mu \cdot cosv, y = a \cdot sh\mu \cdot sinv$
    B) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi$
    C) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$

D) $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$
E) $x = \sigma\tau \cdot cos\varphi, y = \sigma\tau \cdot sin\varphi, z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$

69. Выберите двумерные параболические координаты:
A) $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$
B) $x = \sigma\tau, y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$
C) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$
D) $x = \frac{a \cdot sh\tau}{ch\tau - cos\sigma}, y = \frac{a \cdot sin\tau}{ch\tau - cos\sigma}$
E) $x = a \cdot ch\mu \cdot cosv, y = a \cdot sh\mu \cdot sinv$

70. Найдите координаты точки в декартовых координатах, если её двумерные параболические координаты $\sigma = 3, \tau = 4$.
A) $x = 12, y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$
B) $x = -12, y = \frac{\sqrt{17}}{2}$
C) $x = \frac{12}{7}, y = -\frac{\sqrt{7}}{7}$
D) $x = \frac{3}{4}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
E) $x =, y = \frac{\sqrt{7}}{2}$

71. Выберите трёхмерные параболические координаты:
A) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi$
B) $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = r \cdot cos\theta$
C) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$
D) $x = \sigma\tau \cdot cos\varphi, y = \sigma\tau \cdot sin\varphi, z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$
E) $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$

72. Выберите биполярные координаты:
A) $x = \frac{a \cdot sh\tau}{ch\tau - cos\sigma}, y = \frac{a \cdot sin\tau}{ch\tau - cos\sigma}$
B) $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$
C) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$
D) $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = r \cdot cos\theta$
E) $x = a \cdot ch\mu \cdot cosv, y = a \cdot sh\mu \cdot sinv$

73. Выберите цилиндрические параболические координаты:
A) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$
B) $x = \frac{a \cdot sh\tau}{ch\tau - cos\sigma}, y = \frac{a \cdot sin\tau}{ch\tau - cos\sigma}$
C) $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$
D) $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = r \cdot cos\theta$
E) $x = \sigma, y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$

74. Какие координаты задаются выражениями: $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$?
A) трёхмерные параболические

B) цилиндрические параболические
C) сферические
D) цилиндрические
E) полярные

75. Какие координаты задаются выражениями: $x = \frac{a \cdot sh\tau}{ch\tau - cos\sigma}, y = \frac{a \cdot sin\tau}{ch\tau - cos\sigma}$?
A) Биполярные
B) Эллиптические
C) Цилиндрические
D) Полярные
E) Сферические

76. Какие координаты задаются выражениями: $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = r \cdot cos\theta$?
A) Эллиптические
B) Сферические
C) цилиндрические параболические
D) трёхмерные параболические
E) цилиндрические

77. Какие координаты задаются выражениями: $x = \sigma\tau, y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$?
A) двумерные параболические
B) цилиндрические параболические
C) трёхмерные параболические
D) двумерные параболические
E) сферические

78. Какие координаты задаются выражениями: $x = \sigma\tau \cdot cos\varphi, y = \sigma\tau \cdot sin\varphi, z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$?
A) биполярные цилиндрические
B) параболические
C) эллиптические
D) сферические
E) трёхмерные параболические

79. Какие координаты задаются выражениями: $x = a \cdot ch\mu \cdot cos\nu, y = a \cdot sh\mu \cdot sin\nu$?
A) Эллиптические
B) двумерные параболические
C) цилиндрические
D) полярные
E) биполярные

80. Какие координаты задаются выражениями: $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$?
A) двумерные параболические
B) цилиндрические параболические
C) трёхмерные параболические

D) двумерные параболические
E) биполярные
81. Какие координаты задаются выражениями: $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi$?
A) двумерные параболические
B) сферические
C) цилиндрические
D) полярные
E) трёхмерные параболические
82. Найти коэффициенты Лямэ для декартовых координат (x, y, z):
A) $H_x = 1, H_y = 1, H_z = 1$
B) $H_x = 1, H_y = 2, H_z = 1$
C) $H_x = 1, H_y = 2, H_z = 3$
D) $H_x = 1, H_y = 1, H_z = 0$
E) $H_x = -1, H_y = 1, H_z = 1$
83. Найдите коэффициенты Лямэ для сферических координат (r, θ, φ) $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = r \cdot cos\theta$:
A) $H_r = 1, H_\theta = \theta, H_\varphi = rsin\theta$
B) $H_r = \theta, H_\theta = rsin\theta, H_\varphi = \varphi$
C) $H_r = rsin\theta, H_\theta = \theta, H_\varphi = 1$
D) $H_r = 1, H_\theta = r, H_\varphi = rsin\theta$
E) $H_r = \varphi, H_\theta = 1, H_\varphi = r$
84. Найдите коэффициенты Лямэ для цилиндрических координат (r, φ, z) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$:
A) $H_r = 1, H_\varphi = 1, H_z = 1$
B) $H_r = r, H_\varphi = r, H_z = 1$
C) $H_r = 1, H_\varphi = r, H_z = 1$
D) $H_r = r, H_\varphi = r, H_z = r$
E) $H_r = 1, H_\varphi = r, H_z = r$
85. Найдите коэффициенты Лямэ для эллиптических координат (μ, ν) $x = a \cdot ch\mu \cdot cos\nu, y = a \cdot sh\mu \cdot sin$:
A) $H_\mu = H_\nu = \sqrt{sh^2\mu / sin^2\nu}$
B) $H_\mu = H_\nu = a\sqrt{sh^2\mu + sin^2\nu}$
C) $H_\mu = H_\nu = a^2\sqrt{sh^3\mu + sin^3\nu}$
D) $H_\mu = H_\nu = \sqrt{sh^2\mu - sin^2\nu}$
E) $H_\mu = H_\nu = a/\sqrt{sh^2\mu \cdot sin^3\nu}$
86. Найдите коэффициенты Лямэ для координат (τ, σ) $x = \frac{a \cdot sh\tau}{ch\tau - cos\sigma}, y = \frac{a \cdot sin\tau}{ch\tau - cos\sigma}$:
A) $H_\tau = H_\sigma = \frac{a^{1/2}}{(ch\tau - cos\sigma)^3}$

B) $H_\tau = H_\sigma = \frac{a^2}{(ch\tau+cos\sigma)^2}$
C) $H_\tau = H_\sigma = \frac{a^3}{(ch\tau-cos\sigma)^{1/2}}$
D) $H_\tau = H_\sigma = -\frac{a^2}{(ch\tau+cos\sigma)^2}$
E) $H_\tau = H_\sigma = \frac{a^2}{(ch\tau-cos\sigma)^2}$

87. Найдите коэффициенты Лямэ для полярных координат (r,φ) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi$:
A) $H_r = 1, H_\varphi = \varphi$
B) $H_r = \varphi, H_\varphi = r$
C) $H_r = rsin\theta, H_\varphi = \varphi$
D) $H_r = 1, H_\varphi = r$
E) $H_r = 2, H_\varphi = \varphi r$

88. Найдите коэффициенты Лямэ для двумерных параболических координат (σ,τ) $x = \sigma\tau, y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$:
A) $H_\sigma = H_\tau = \sqrt{\sigma^2 - \tau^2}$
B) $H_\sigma = H_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^3}$
C) $H_\sigma = H_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$
D) $H_\sigma = H_\tau = \sqrt{\sigma^3 + \tau^2}$
E) $H_\sigma = H_\tau = \sqrt{\sigma^3 - \tau^3}$

89. Найдите коэффициенты Лямэ для цилиндрических параболических координат (u,v,z) $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$:
A) $H_u = H_v = \sqrt{u^2 + v^2}, H_z = u^2 + v^2$
B) $H_u = H_v = c\sqrt{u^2 + v^2}, H_z = 1$
C) $H_u = H_v = 1, H_z = \sqrt{u^2 + v^2}$
D) $H_u = H_v = c\sqrt{u^2 + v^2}, H_z = c/\sqrt{u^2 + v^2}$
E) $H_u = H_v = u^2 + v^2, H_z = c\sqrt{u^2 + v^2}$

90. Найдите коэффициенты Лямэ для трёхмерных параболических координат (σ,τ,φ) $x = \sigma\tau \cdot cos\varphi, y = \sigma\tau \cdot sin\varphi, z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$:
A) $H_\sigma = H_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, H_\varphi = \sigma\tau$
B) $H_\sigma = H_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^3}, H_\varphi = \sigma - \tau$
C) $H_\sigma = H_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, H_\varphi = \sigma + \tau$
D) $H_\sigma = H_\tau = \sqrt{\sigma^3 + \tau^2}, H_\varphi = \sigma\tau$
E) $H_\sigma = H_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, H_\varphi = \sigma/\tau$

91. Найти коэффициент Лямэ H_x для декартовых координат (x,y,z):
A) $H_x = 1$
B) $H_x = 2$
C) $H_x = -1$

D) $H_x = 1/2$
E) $H_x = -1/2$

92. Найти коэффициент Лямэ H_y для декартовых координат (x, y, z):
A) $H_y = 1$
B) $H_y = 2$
C) $H_y = -2$
D) $H_y = 1/2$
E) $H_y = -1$

93. Найти коэффициент Лямэ H_z для декартовых координат (x, y, z):
A) $H_z = 1$
B) $H_z = -1$
C) $H_z = 3$
D) $H_z = 0$
E) $H_z = 1/2$

94. Найдите коэффициент Лямэ H_r для сферических координат (r, θ, φ) $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = r \cdot cos\theta$:
A) $H_r = rsin\varphi$
B) $H_r = \theta$
C) $H_r = rsin\theta$
D) $H_r = 1$
E) $H_r = \varphi r$

95. Найдите коэффициент Лямэ H_θ для сферических координат (r, θ, φ) $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = r \cdot cos\theta$:
A) $H_\theta = \theta$
B) $H_\theta = r \cdot sin\theta$
C) $H_\theta = \theta$
D) $H_\theta = r$
E) $H_\theta = 1$

96. Найдите коэффициент Лямэ H_φ для сферических координат (r, θ, φ) $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = r \cdot cos\theta$:
A) $H_\varphi = rcos\theta$
B) $H_\varphi = r$
C) $H_\varphi = \varphi sin\theta$
D) $H_\varphi = rsin\theta$
E) $H_\varphi = sin\varphi$

97. Найдите коэффициент Лямэ H_r для цилиндрических координат (r, φ, z) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$:
A) $H_r = cos\varphi$
B) $H_r = -r$
C) $H_r = 1$
D) $H_r = rsin\varphi$
E) $H_r = r\varphi$

98. Найдите коэффициент Лямэ H_{φ} для цилиндрических координат (r, φ, z) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$:
A) $H_{\varphi} = rsin\varphi$
B) $H_{\varphi} = r + 1$
C) $H_{\varphi} = r$
D) $H_{\varphi} = rsin\varphi$
E) $H_{\varphi} = rz$
99. Найдите коэффициент Лямэ H_z для цилиндрических координат (r, φ, z) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi, z = z$:
A) $H_z = cos\varphi$
B) $H_z = -r$
C) $H_z = 1$
D) $H_z = rsin\varphi$
E) $H_z = r\varphi$
100. Найдите коэффициент Лямэ H_{μ} для эллиптических координат (μ, ν) $x = a \cdot ch\mu \cdot cos\nu, y = a \cdot sh\mu \cdot sin\nu$:
A) $H_{\mu} = \sqrt{sh^2\mu/sin^2\nu}$
B) $H_{\mu} = a\sqrt{sh^2\mu + sin^2\nu}$
C) $H_{\mu} = a^2\sqrt{sh^3\mu + sin^3\nu}$
D) $H_{\mu} = \sqrt{sh^2\mu - sin^2\nu}$
E) $H_{\mu} = a/\sqrt{sh^2\mu \cdot sin^3\nu}$
101. Найдите коэффициент Лямэ H_{ν} для эллиптических координат (μ, ν) $x = a \cdot ch\mu \cdot cos\nu, y = a \cdot sh\mu \cdot sin\nu$:
A) $H_{\nu} = \sqrt{sh^2\mu/sin^2\nu}$
B) $H_{\nu} = a\sqrt{sh^2\mu + sin^2\nu}$
C) $H_{\nu} = a^2\sqrt{sh^3\mu + sin^3\nu}$
D) $H_{\nu} = \sqrt{sh^2\mu - sin^2\nu}$
E) $H_{\nu} = a/\sqrt{sh^2\mu \cdot sin^3\nu}$
102. Найдите коэффициент Лямэ H_{τ} для биполярных координат (τ, σ) $x = \frac{a \cdot sh\tau}{ch\tau - cos\sigma}, y = \frac{a \cdot sin\tau}{ch\tau - cos\sigma}$:
A) $H_{\tau} = \frac{a^{1/2}}{(ch\tau - cos\sigma)^3}$
B) $H_{\tau} = \frac{a^2}{(ch\tau + cos\sigma)^2}$
C) $H_{\tau} = \frac{a^3}{(ch\tau - cos\sigma)^{1/2}}$
D) $H_{\tau} = -\frac{a^2}{(ch\tau + cos\sigma)^2}$
E) $H_{\tau} = \frac{a^2}{(ch\tau - cos\sigma)^2}$

103. Найдите коэффициент Лямэ H_σ для биполярных координат (τ, σ) $x = \frac{a \cdot sh\tau}{ch\tau - cos\sigma}, y = \frac{a \cdot sin\tau}{ch\tau - cos\sigma}$:

A) $H_\sigma = \frac{a^{1/2}}{(ch\tau - cos\sigma)^3}$

B) $H_\sigma = \frac{a^2}{(ch\tau + cos\sigma)^2}$

C) $H_\sigma = \frac{a^3}{(ch\tau - cos\sigma)^{1/2}}$

D) $H_\sigma = -\frac{a^2}{(ch\tau + cos\sigma)^2}$

E) $H_\sigma = \frac{a^2}{(ch\tau - cos\sigma)^2}$

104. Найдите коэффициент Лямэ H_r для полярных координат (r, φ) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi$:

A) $H_r = cosr$

B) $H_r = r$

C) $H_r = rsin\theta$

D) $H_r = 1$

E) $H_r = \varphi$

105. Найдите коэффициент Лямэ H_φ для полярных координат (r, φ) $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi$:

A) $H_\varphi = 1$

B) $H_\varphi = rtgr$

C) $H_\varphi = cos\varphi$

D) $H_\varphi = r$

E) $H_\varphi = \varphi r$

106. Найдите коэффициент Лямэ H_σ для двумерных параболических координат (σ, τ) $x = \sigma\tau, y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$:

A) $H_\sigma = \sqrt{\sigma^2 - \tau^2}$

B) $H_\sigma = \sqrt{\sigma^2 + \tau^3}$

C) $H_\sigma = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$

D) $H_\sigma = \sqrt{\sigma^3 + \tau^2}$

E) $H_\sigma = \sqrt{\sigma^3 - \tau^3}$

107. Найдите коэффициент Лямэ H_τ для двумерных параболических координат (σ, τ) $x = \sigma\tau, y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$:

A) $H_\tau = \sqrt{\sigma^2 - \tau^2}$

B) $H_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^3}$

C) $H_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$

D) $H_\tau = \sqrt{\sigma^3 + \tau^2}$

E) $H_\tau = \sqrt{\sigma^3 - \tau^3}$

108. Найдите коэффициент Лямэ H_u для цилиндрических параболических координат (u, v, z) $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$:

A) $H_u = \sqrt{u^2 + v^2}$

B) $H_u = c\sqrt{u^2 + v^2}$

C) $H_u = 1$

D) $H_u = c\sqrt{u^2 + v^2}$

E) $H_u = u^2 + v^2$

109. Найдите коэффициент Лямэ H_vдля цилиндрических параболических координат (u, v, z) $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$:

A) $H_v = \sqrt{u^2 + v^2}$

B) $H_v = c\sqrt{u^2 + v^2}$

C) $H_v = 1$

D) $H_v = c\sqrt{u^2 + v^2}$

E) $H_v = u^2 + v^2$

110. Найдите коэффициент Лямэ H_z для цилиндрических параболических координат (u, v, z) $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2), y = cuv, z = z$:

A) $H_z = u^2 + v^2$

B) $H_z = 1$

C) $H_z = \sqrt{u^2 + v^2}$

D) $H_z = c/\sqrt{u^2 + v^2}$

E) $H_z = c\sqrt{u^2 + v^2}$

111. Найдите коэффициент Лямэ H_σ для трёхмерных параболических координат (σ, τ, φ) $x = \sigma\tau \cdot cos\varphi, y = \sigma\tau \cdot sin\varphi, z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$:

A) $H_\sigma = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$

B) $H_\sigma = \sqrt{\sigma^3 + \tau^2}$

C) $H_\sigma = \sqrt{\sigma^2 - \tau^2}$

D) $H_\sigma = \sqrt{\sigma^3 + \tau^{1/2}}$

E) $H_\sigma = \sqrt{\sigma^{1/3} + \tau^2}$

112. Найдите коэффициент Лямэ H_τ для трёхмерных параболических координат (σ, τ, φ) $x = \sigma\tau \cdot cos\varphi, y = \sigma\tau \cdot sin\varphi, z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$:

A) $H_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$

B) $H_\tau = \sqrt{\sigma^3 + \tau^2}$

C) $H_\tau = \sqrt{\sigma^2 - \tau^2}$

D) $H_\tau = \sqrt{\sigma^3 + \tau^{1/2}}$

E) $H_\tau = \sqrt{\sigma^{1/3} + \tau^2}$

113. Найдите коэффициенты Лямэ H_φ для трёхмерных параболических координат (σ, τ, φ) $x = \sigma\tau \cdot cos\varphi, y = \sigma\tau \cdot sin\varphi, z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$:

A) $H_\varphi = \sigma\tau$

B) $H_\varphi = \sigma - \tau$
C) $H_\varphi = \sigma + \tau$
D) $H_\varphi = \sigma\tau$
E) $H_\varphi = \sigma/\tau$

114. Как определяется секторная скорость?
A) $\sigma = [\vec{m}\vec{V}]$
B) $\sigma = 2[\vec{r}\vec{p}]$
C) $\sigma = \frac{1}{2}[\vec{r}\vec{V}]$
D) $\sigma = \frac{1}{2}[p\vec{V}]$
E) $\sigma = \frac{1}{3}[\vec{r}\vec{R}]$

115. Соотношение, связывающее ускорения с координатами и скоростями механической системы, называется:
A) Принцип Гамильтона
B) Уравнение движения
C) Обобщённым интегралом
D) Соотношение неопределённостей
E) Теорема наименьшего действия

116. Как ещё называется принцип наименьшего действия?
A) Принципом Лагранжа
B) Принципом Мопертюи
C) Принципом Рауса
D) Принципом Якоби
E) Принципом Гамильтона

117. Уравнения движения – это соотношения, связывающие:
A) Координаты, скорости и энергию
B) Скорости, координаты и ускорения
C) Ускорения, импульсы и скорости
D) Энергию, координаты и ускорения
E) Импульсы, скорости и координаты

118. Как называется интеграл $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$?
A) Вариация
B) Лагранжиан
C) Гамильтониан
D) Действие
E) Преобразование Галилея

119. Какие из перечисленных величин связывают уравнения движения:
1. Сила
2. Координата
3. Энергия
4. Ускорение
5. Скорость
6. Действие

A) 1 и 2
B) 2 и 4
C) 2, 4 и 5
D) 1, 2 и 5
E) 3, 4 и 6

120. Интеграл $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$ называется действием по:
A) Гамильтону
B) Лагранжу
C) Ньютону
D) Мопертюи
E) Якоби

121. Некоторая функция $L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$, зависящая от координат, скоростей и времени, которая характеризует каждую механическую систему, называется функцией:
A) Галилея
B) Лагранжа
C) Гамильтона
D) Якоби
E) Рауса

122. Укажите математическую формулировку принципа наименьшего действия:
A) $T = \infty$
B) $L = \sum_{\alpha} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$
C) $\delta S = 0$
D) $\frac{dU}{dt} \to 0$
E) $U = L - T$

123. Утверждение о том, что между двумя положениями механическая система движется так, что интеграл $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$ имеет наименьшее значение, называется:
A) Принципом наименьшего действия
B) Преобразованием Галилея
C) Вторым законом Кеплера
D) Вторым законом Ньютона
E) Теоремой единственности

124. От чего зависит функция Лагранжа <u>в неявном виде</u>?
A) Скоростей и момента импульса
B) Ускорений и сил
C) Сил и координат
D) Координат и скоростей
E) Энергии и времени

125. Уравнения Лагранжа второго рода для системы материальных точек имеют вид:

A) $limL = L_A + L_B$
B) $S = \int L(q, \dot{q}, t)dt$
C) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ (i = 1,2, \dots, s)$
D) $L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$
E) $L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$

126. Уравнения Лагранжа второго рода для системы материальных точек имеют вид:
A) $\frac{d}{dq}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial t_i} = 0 \ (i = 1,2, \dots, s)$
B) $\frac{dq}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ (i = 1,2, \dots, s)$
C) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ (i = 1,2, \dots, s)$
D) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ (i = 1,2, \dots, s)$
E) $\frac{dL}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ (i = 1,2, \dots, s)$

127. Сколько произвольных постоянных содержит общее решение уравнений Лагранжа для системы с S степенями свободы?
A) S
B) 2S
C) 2S+1
D) S^2-2
E) S+2S^2

128. Как называются уравнения $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ (i = 1,2, \dots, s)$?
A) Гамильтона
B) Ньютона
C) Лагранжа
D) Якоби
E) Галилея

129. Что дадут уравнения Лагранжа, если известна функция Лагранжа для данной механической системы?
A) Скорости материальных точек системы
B) Уравнения движения системы
C) Силы, действующие на систему
D) Действие
E) Экстремум траектории

130. Какое свойство функции Лагранжа выражает утверждение о том, что функция Лагранжа механической системы равна сумме функций Лагранжа частей системы?
A) Однородность
B) Изотропность
C) Вариативность
D) Аддитивность

E) Конечность

131. Укажите математическое выражение аддитивности функции Лагранжа:

A) $P = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{V_\alpha}}$

B) $L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - U(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \dots)$

C) $lim L = L_A + L_B$

D) $U = -\vec{F}\vec{r}$

E) $E = \sum_{\dot{q}_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$

132. Какое ограничение накладывает свойство <u>однородности пространства</u> на функцию Лагранжа?

A) Она не может содержать в явном виде радиус-вектора

B) Её нельзя умножать на произвольную постоянную величину

C) Прибавление полной производной изменяет уравнения движения

D) Она содержит в явном виде ускорения точек системы

E) Она не обладает свойством аддитивности

133. Почему функция Лагранжа не может содержать <u>в явном виде</u> времени?

A) Прибавление полной производной изменяет уравнения движения

B) Скорость распространения взаимодействий бесконечно

C) Так как масса не может быть отрицательной

D) В силу однородности времени

E) Вследствие свойства аддитивности

134. К чему приводит изотропия пространства?

A) Функция Лагранжа не содержит в явном виде времени

B) Производная функции Лагранжа по радиус-вектору равна нулю

C) Функция Лагранжа является квадратичной функцией скорости

D) Функция Лагранжа не зависит от ускорений

E) Умножение на произвольную постоянную меняет уравнения движения

135. От чего зависит функция Лагранжа в явном виде?

A) Скорости

B) Времени

C) Квадрата скорости

D) Радиус-вектора

E) Ускорения

136. Каким свойством обладает время в классической механике?

A) Инертностью

B) Инерционностью

C) Диссипативностью

D) Относительностью

E) Однородностью

137. Какое свойство присуще пространству в классической механике?

A) Изотропия

B) Аддитивность

C) Инертность

D) Конечность
E) Неоднородность

138. Каким свойством обладает пространство в классической механике?
A) Неоднородностью
B) Инерциальностью
C) Аддитивностю
D) Однородностью
E) Конечностью

139. Время в классической механике Ньютона:
A) Относительно
B) Инертно
C) Абсолютно
D) Конечно
E) Аддитивно

140. Пространство в классической механике Ньютона:
A) Абсолютно
B) Конечно
C) Аддитивно
D) Относительно
E) Инертно

141. Как называется тело, не подвергающееся внешним воздействиям?
A) Замкнутым
B) Свободным
C) Инертным
D) Аддитивным
E) Обобщённым

142. Система отсчёта, по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время однородным, называется:
A) Инерциальной
B) Свободной
C) Относительной
D) Неинерциальной
E) Замкнутой

143. В какой системе отсчёта свободное тело, покоящееся в некоторый момент времени, остаётся в покое неограниченно долго?
A) Относительной
B) Свободной
C) Неинерциальной
D) Инерциальной
E) Однородной

144. Утверждение о том, что в ИСО всякое свободное движение происходит с постоянной по величине и направлении скоростью, есть выражение:
A) Второго закона Ньютона
B) Преобразований Галилея

C) Закона инерции
D) Принципа Мопертюи
E) Правила наименьшего действия

145. Кто открыл закон инерции?
A) Раус
B) Аристотель
C) Ньютона
D) Галилей
E) Гамильтон

146. Какой закон открыл Галилео Галилей?
A) Сохранения массы
B) Инерции
C) О действии и противодействии
D) Сохранения импульса
E) Наименьшего действия

147. Укажите математическое выражение закона инерции:
A) $U = -\vec{F}\vec{r}$
B) $P = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{V_\alpha}}$
C) $\vec{r} + \vec{r}' + \vec{V}t$
D) $L = 0$
E) $\vec{V} = const$

148. Как математически можно выразить закон инерции:
A) $L = \frac{m}{2}v^2$
B) $t = t'$
C) $\vec{a} = 0$
D) S=0
E) $v = \infty$

149. Утверждение о том, что во всех инерциальных системах отсчёта свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы все законы механики, называется:
A) Принципом Гамильтона
B) Принципом относительности Галилея
C) Принципом Лагранжа
D) Принципом наименьшего действия
E) Принципом Мопертюи

150. Выберите преобразования Галилея:
A) $limL = L_A + L_B$
B) $L = \frac{m}{2}v^2$
C) $L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - U(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \dots)$
D) $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t, t = t'$
E) $U = -\vec{F}\vec{r}$

151. Как называется выражение: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$
A) Теорема Лиувилля
B) Принцип Гамильтона
C) Преобразование Галилея
D) Второй закон Ньютона
E) Закон инерции

152. Укажите преобразование Галилея для радиус-вектора:
A) $\vec{r} = \vec{r}' + t$
B) $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}$
C) $\vec{r} = t' + \vec{V}\vec{r}$
D) $\vec{r} = \vec{r} + \vec{V}t$
E) $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$

153. Какой вид имеет преобразование Галилея для времени?
A) $t = 2t'$
B) $t = t'$
C) $t = -t'$
D) $t' = t'$
E) $t = t^2$

154. Утверждение о том, что никакими механическими опытами нельзя установить движется ли система отсчёта прямолинейно и равномерно, либо покоится, называется принципом:
A) Мопертюи
B) Гамильтона
C) Относительности Галилея
D) Лагранжа
E) Наименьшего действия

155. Какая величина не может быть отрицательной:
A) Потенциальная энергия
B) Скорость
C) Масса
D) Ускорение
E) Сила

156. Какая величина не может быть отрицательной:
A) Потенциальная энергия
B) Скорость
C) Кинетическая энергия
D) Ускорение
E) Импульс

157. Как называется система материальных точек, взаимодействующих друг с другом, но не взаимодействующих с другими телами?
A) Свободная
B) Инерциальная
C) Обобщённая

D) Неинерциальная
E) Замкнутая

158. Укажите функцию Лагранжа для свободной материальной точки:

A) $m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = L$
B) $L = \frac{m}{2} v^2$
C) $S = \int L(q, \dot{q}, t)dt$
D) $L = \sum \dot{q}_\iota \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota} + S$
E) $L = -\vec{F}\vec{r}$

159. Какой вид имеет общий вид функции Лагранжа для замкнутой системы?

A) $L = -\vec{F}\vec{r}$
B) $L = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{V_\alpha}}$
C) $limL = L_A + L_B$
D) $L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - U(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \dots)$
E) $L = \sum \dot{q}_\iota \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota} - S$

160. Укажите вид функции Лагранжа в случае системы невзаимодействующих материальный точек:

A) $L = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\upsilon^2}{2} dt$
B) $L = \sum \frac{m_a \upsilon_a^2}{2}$
C) $L = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$
D) $L = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{V_\alpha}}$
E) $L = \sum \dot{q}_\iota \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota} - 2S$

161. Как называется величина $T = \sum \frac{m_a \upsilon_a^2}{2}$?

A) Кинетическая энергия
B) Лагранжиан
C) Функция Гамильтона
D) Потенциальная энергия
E) Обобщённый импульс

162. От чего зависит потенциальная энергия?

A) Скоростей
B) Ускорений
C) Координат
D) Времени
E) Массы

163. От чего зависит кинетическая энергия?

A) Координат

B) Ускорения
C) Скорости
D) Времени
E) Силы

164. Укажите второй закон Ньютона:

A) $P = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{V_{\alpha}}}$
B) $L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$
C) $F_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$
D) $m_a \frac{dv_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$
E) $T = \sum \frac{m_a \upsilon_a^2}{2}$

165. Укажите основное уравнение движения:

A) $\frac{dv_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$
B) $m_a \frac{dv_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$
C) $m_a \frac{dv_a}{dt} = \frac{\partial U}{\partial r_a}$
D) $\frac{dv_a}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}$
E) $m_a \frac{dv_a}{dq} = L - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$

166. Как можно записать второй закон Ньютона через импульс системы?

A) $\dot{\vec{p}} = -\vec{F}$
B) $p = F$
C) $\dot{\vec{p}} = \dot{F}$
D) $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$
E) $\vec{p} = \vec{F}$

167. От чего зависит сила в классической механике?

A) Координат
B) Скоростей
C) Ускорений
D) Энергии
E) Скоростей и координат

168. Какой факт указывает на то, что взаимодействия в классической механике распространяются мгновенно?

A) При движении действие имеет минимальное значение
B) Энергия замкнутой механической системы не изменяется
C) Потенциальная энергия зависит только от координат
D) Функция Лагранжа свободной материальной точки пропорциональна квадрату скорости
E) Масса не может отрицательной

169. Как определяется сила в классической механике?

A) $F_a = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
B) $F_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$
C) $F_a = \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}$
D) $F_a = \sum \frac{m_a \upsilon_a^2}{2}$
E) $F_a = -L \cdot \vec{r}$

170. Чему равна сила, действующая на материальную точку, если потенциальная энергия определяется выражением $U = \frac{kx^2}{2}$?
A) $F = -k^2 x$
B) $F = -kx$
C) $F = k\frac{x}{2}$
D) $F = \frac{k}{x}$
E) $F = -kx^2$

171. Частица находится в потенциальном поле $U = -\frac{7r^3}{3}$. Найти силу, действующую на частицу на расстоянии 1/7 от центра.
A) 1/7
B) 7
C) 3/7
D) 1/147
E) 147

172. Поле, во всех точках которого на частицу действует одна и та же сила, называется:
A) Постоянным
B) Инерциальным
C) Потенциальным
D) Изолированным
E) Однородным

173. Чему равна потенциальная энергия точки в однородном поле сил?
A) $U = \sum \frac{m_a \upsilon_a^2}{2}$
B) $U = \sum \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}$
C) $U = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$
D) $U = -\vec{F} \cdot \vec{r}$
E) $U = \int L(q, \dot{q}, t) dt$

174. Как называются ограничения, накладываемые на взаимное расположение тел или их движение?
A) Связи
B) Ротатор
C) Прецессия

D) Инварианты
E) Диссипации

175. Как называются связи, уравнения которых всегда можно свести к уравнениям вида $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$, где f является функцией только координат точек и времени?
A) Голономными
B) Удерживающими
C) Стационарными
D) Неголономными
E) Неудерживающими

176. Как называются связи, уравнения которых всегда можно свести к уравнениям вида $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$, где f является функцией только координат точек и времени?
A) Инетгрируемыми
B) Удерживающими
C) Стационарными
D) Неголономными
E) Неудерживающими

177. Как называются связи, уравнения которых нельзя свести к уравнениям, содержащим только координаты и скорости?
A) Голономными
B) Удерживающим
C) Стационарными
D) Неголономными
E) Нестационарными

178. Как называются связи, уравнения которых нельзя свести к уравнениям, содержащим только координаты и скорости?
A) Голономными
B) Удерживающими
C) Стационарными
D) Неинтегрируемыми
E) Нестационарными

179. Как называются связи, задаваемые равенствами (=)?
A) Голономными
B) Удерживающими
C) Стационарными
D) Неудерживающими
E) Неголономными

180. Как называются связи, задаваемые неравенствами?
A) Голономными
B) Удерживающими
C) Стационарными
D) Нестационарными
E) Неудерживающими

181. Как называются связи, уравнения которых явно зависит от времени?
A) Голономными
B) Удерживающими
C) Нестационарными
D) Неудерживающими
E) Неголономными

182. Как называются связи, уравнения которых не зависят от времени явно?
A) Голономными
B) Удерживающими
C) Стационарными
D) Стационарными
E) Неголономными

183. Закон движения точки относительно некоторой системы отсчёта имеет вид: $x = cos\omega t, y = sin\omega t.$ Найти скорость точки как функцию координат
A) $v = \frac{1}{\omega^2}\sqrt{x^2 - y^2}$
B) $v = \omega\sqrt{x^2 + y^2}$
C) $v = \omega\sqrt{x^2 - y^2}$
D) $v = \frac{1}{\omega}\sqrt{x^2 + y^2}$
E) $v = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$

184. Закон движения точки относительно некоторой системы отсчёта имеет вид: $x = cos\omega t, y = sin\omega t.$ Найти ускорение точки как функцию координат
A) $a = \frac{1}{\omega^2}\sqrt{x^2 + y^2}$
B) $a = \frac{1}{\omega^2}\sqrt{x^2 - y^2}$
C) $a = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$
D) $a = \frac{1}{\omega}\sqrt{x^2 - y^2}$
E) $a = -\frac{1}{\omega^2}\sqrt{x^2 + y^2}$

185. Закон движения точки относительно некоторой системы отсчёта имеет вид: $x = cos\omega t, y = sin\omega t.$ Какова траектория движения точки?
A) Гипербола
B) Циклоида
C) Парабола
D) Окружность
E) Эллипс

186. Закон движения точки относительно некоторой системы отсчёта имеет вид: $x = acos\omega t, y = bsin\omega t.$ Какова траектория движения точки?
A) Гипербола
B) Циклоида
C) Парабола
D) Окружность

E) Эллипс

187. Закон движения точки относительно некоторой системы отсчёта имеет вид: $x = acos\omega t, y = bsin\omega t$. Какова траектория движения точки?

A) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

B) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

C) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

D) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

E) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

188. Заряд e массы m движется между обкладками плоского неподвижного конденсатора, где напряжённость электрического поля меняется по закону: $E = E_0 cos\omega t$. Составить уравнение движения заряда.

A) $m\dot{x} = aE_0 cos\omega t$

B) $m\ddot{\vec{r}} = eE_0 cos\omega t$

C) $\dot{\vec{r}} = E_0 cos\omega t$

D) $e\ddot{\vec{x}} = mE_0 cos\omega t$

E) $\ddot{\vec{r}} = E_0 cos\omega t$

189. Заряд e массы m движется между обкладками плоского неподвижного конденсатора, где напряжённость электрического поля меняется по закону: $E = E_0 cos\omega t$. Составить уравнение движения заряда, если ось OX направлена вдоль вектора E.

A) $m\dot{x} = E_0 cos\omega t$

B) $m\ddot{\vec{x}} = eE_0 cos\omega t$

C) $\dot{\vec{r}} = E_0 cos\omega t$

D) $e\ddot{\vec{x}} = mE_0 cos\omega t$

E) $\ddot{\vec{x}} = E_0 cos\omega t$

190. Заряд e массы m движется между обкладками плоского неподвижного конденсатора, где напряжённость электрического поля меняется по закону: $E = E_0 cos\omega t$. Найти скорость заряда по оси x, если ось OX направлена вдоль вектора E.

A) $\dot{x} = \frac{eE_0}{m\omega} cos\omega t + C_1$

B) $\dot{x} = \frac{eE_0}{\omega} cos\omega t$

C) $\dot{x} = \frac{eE_0}{m\omega} sin\omega t + C_1$

D) $\dot{x} = \frac{eE_0}{m} cos\omega t + x_0$

E) $\dot{x} = \frac{eE_0}{m} sin\omega t + C_2$

191. Заряд e массы m движется между обкладками плоского неподвижного конденсатора, где напряжённость электрического поля меняется по

закону: $E = E_0 cos\omega t$. Найти уравнение движения заряда по оси х, если ось ОХ направлена вдоль вектора Е.

A) $x = -\frac{eE_0}{m\omega^2}cos\omega t + C_1 + C_2$

B) $x = \frac{eE_0}{m\omega}cos\omega t + C_1 t + C_2 t$

C) $x = -\frac{eE_0}{m\omega}cos\omega t + C_1$+t

D) $x = -\frac{eE_0}{m\omega^2}cos\omega t + C_1 t + C_2$

E) $x = \frac{eE_0}{m\omega}cos\omega t + C_1$

192. Заряд e массы m движется между обкладками плоского неподвижного конденсатора, где напряжённость электрического поля меняется по закону: $E = E_0 sin\omega t$. Найти скорость заряда по оси х, если ось ОХ направлена вдоль вектора Е.

A) $\dot{x} = -\frac{eE_0}{m\omega}cos\omega t + C_1$

B) $\dot{x} == \frac{eE_0}{\omega}cos\omega t$

C) $\dot{x} = -\frac{eE_0}{m\omega}cos\omega t + C_1$

D) $\dot{x} = -\frac{eE_0}{m}cos\omega t + x_0$

E) $\dot{x} = -\frac{eE_0}{m}sin\omega t + C_2$

193. Заряд e массы m движется между обкладками плоского неподвижного конденсатора, где напряжённость электрического поля меняется по закону: $E = E_0 sin\omega t$. Найти уравнение движения заряда по оси х, если ось ОХ направлена вдоль вектора Е.

A) $x = -\frac{eE_0}{m\omega^2}sin\omega t + C_1 + C_2$

B) $x = \frac{eE_0}{m\omega}cos\omega t + C_1 t + C_2 t$

C) $x = -\frac{eE_0}{m\omega}cos\omega t + C_1$+t

D) $x = -\frac{eE_0}{m\omega^2}sin\omega t + C_1 t + C_2$

E) $x = \frac{eE_0}{m\omega}sin\omega t + C_1$

194. Заряд e массы m движется между обкладками плоского неподвижного конденсатора, где напряжённость электрического поля меняется по закону: $E = E_0 cost$. Найти постоянную интегрирования C_1, удовлетворяющую начальным условиям: $V(0) = 2$

A) 2

B) -1

C) 4

D) 0

E) -2

195. Заряд e массы m движется между обкладками плоского неподвижного конденсатора, где напряжённость электрического поля меняется по

закону: $E = E_0 cost.$ Найти постоянную интегрирования C_1, удовлетворяющую начальным условиям: $V(\pi) = \text{a}$

A) 2a

B) -1a

C) 4a

D) a

E) -2a

196. К твёрдому телу массой m, могущему двигаться вдоль оси x, приложена сила отталкивания, проекция которой на ось x, направленную по горизонтали, равна $S_x = k^2 mx$, где k – постоянный коэффициент. Составить уравнение движения.

A) $\ddot{x} + k^2 mx = 0$

B) $\ddot{x} - k^2 x = 0$

C) $m\ddot{x} + k^2 x = 0$

D) $\ddot{x} - k^2 x = 0$

E) $\ddot{x} + k^2 = 0$

Глава 2 Законы сохранения

2.1 Вопросы для самопроверки

1. Что такое интеграл движения? Запишите выражение для энергии системы. В связи с чем возникает закон сохранения энергии?
2. Является ли энергия аддитивной величиной? Почему? Какая система называется консервативной?
3. Какая величина называется импульсом материальной точки?
4. Системы? Закон сохранения импульса. В связи с чем он возникает?
5. Что такое обобщённые импульсы и обобщённые силы? Сохраняются ли все три компоненты импульса?
6. Формула преобразования импульса от одной ИСО к другой.
7. Что такое центр масс системы? Что называется покоем?
8. Что такое внутренняя энергия системы?
9. Что она в себя включает?
10. Чему равна внутренняя энергия системы, движущейся как целое? Формула преобразования энергии при переходе от одной ИСО к другой.
11. Какую величину называют моментом импульса? Закон сохранения момента импульса. В связи с чем возникает этот закон сохранения?
12. Справедлив ли закон сохранения момента для систем, находящихся во внешнем поле?
13. Формула преобразования момента.

2.2 Решение задач

Задача 22.

Частица с массой *m,* движущаяся со скоростью v_1, переходит из полупространства, в котором ее потенциальная энергия постоянна и равна U_1, в полупространство, где эта энергия тоже постоянна, но равна U_2. Определить изменение направления движения частицы (см. рисунок 14).

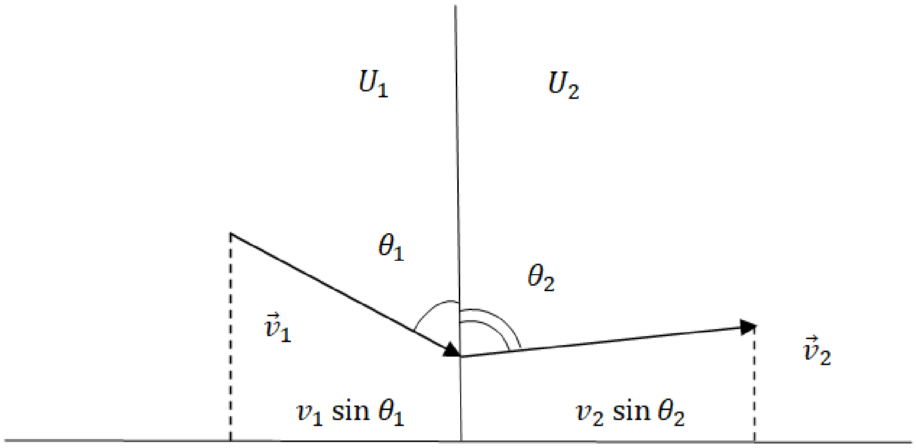

Рисунок 14 – К задаче 22

Решение

Потенциальная энергия не зависит от координат вдоль осей, параллельных плоскости раздела между полупространствами. Поэтому сохраняется проекция импульса частицы на эту плоскость. Обозначая посредством θ_1 и θ_2 углы между нормалью к плоскости раздела и скоростями v_1 и v_2 частицы до и после перехода, запишем закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2$$

Откуда, спроектировав на горизонтальную ось:

$$m_1 v_1 sin\theta_1 = m_1 v_2 sin\theta_2$$
$$v_1 sin\theta_1 = v_2 sin\theta_2$$

Связь же между v_1 и v_2 дается законом сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + U_1 = \frac{m_1 v_2^2}{2} + U_2$$

Выразим v_2 из $v_1 sin\theta_1 = v_2 sin\theta_2$: $v_2 = v_1 \frac{sin\theta_1}{sin\theta_2}$ и подставим в закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + U_1 = \frac{m_1}{2}\left(v_1 \frac{sin\theta_1}{sin\theta_2}\right)^2 + U_2$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + U_1 = \frac{m_1}{2} v_1^2 \left(\frac{sin\theta_1}{sin\theta_2}\right)^2 + U_2$$

Выражаем соотношение, определяющее изменение направления движения частицы:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} \left(\frac{sin\theta_1}{sin\theta_2}\right)^2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + U_1 - U_2$$

$$m_1 v_1^2 \left(\frac{sin\theta_1}{sin\theta_2}\right)^2 = m_1 v_1^2 + 2(U_1 - U_2)$$

$$\left(\frac{sin\theta_1}{sin\theta_2}\right)^2 = 1 + \frac{2(U_1 - U_2)}{m_1 v_1^2}$$

и в результате находим:

$$\frac{sin\theta_1}{sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{m v_1^2}(U_1 - U_2)}.$$

Задача 23.

Найти закон преобразования действия при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Решение

Функция Лагранжа, равна разности кинетической и потенциальной энергий

$$L = T - U$$

Энергия же есть сумма кинетической и потенциально энергий

$$E = T + U$$

Энергия при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой преобразуется согласно формуле

$$E = E' + VP' + \frac{\mu V^2}{2}$$

Запишем исходные равенства для двух систем:

$$L = T - U, L' = T' - U$$
$$E = T + U, E' = T' + U$$

Найдём разность $L - E$ для двух систем, вычитая почленно:

$$L - E = T - T - U - U = -2U$$
$$L' - E' = T' - T' - U - U = -2U$$

Равны правые части, приравняем левые:

$$L - E = L' - E'$$

Перепишем в виде, удобном для дальнейшего преобразования:

$$L - L' = E - E'$$

Правую часть можно выразить из формулы преобразования энергии:

$$E - E' = VP' + \frac{\mu V^2}{2}$$

Т.о., можно найти

$$E - E' = VP' + \frac{\mu V^2}{2} = L - L'$$

Откуда

$$L - L' = VP' + \frac{\mu V^2}{2}$$

и

$$L = L' + VP' + {}^1\!/_2\, \mu V^2.$$

Мы нашли формулу для преобразования функции Лагранжа при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

Действие есть интеграл по времени от функции Лагранжа:

$$S = \int_{t1}^{t2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt$$

Подставим в подынтегральное выражение найденный закон преобразования функции Лагранжа с пределами от 0 до t:

$$S = \int_{o}^{t} Ldt = \int_{0}^{t} \left(L' + VP' + {}^1\!/_2\, \mu V^2 \right) dt$$

$$S = \int_{0}^{t} L'dt + \int_{0}^{t} VP'dt + \int_{0}^{t} {}^1\!/_2\, \mu V^2 dt$$

Интегрируем по отдельности каждое слагаемое:

$$S = \int_{0}^{t} L'dt = S'$$

$$\int_{0}^{t} VP'dt = V \int_{0}^{t} P'dt = V\mu R'$$

$$\int_{0}^{t} {}^1\!/_2\, \mu V^2 dt = {}^1\!/_2\, \mu V^2 t$$

Суммируя эти выражения, найдем искомый закон преобразования действия:

$$S = S' + \mu V R' + {}^1\!/_2\, \mu V^2 t\,,$$

где R' – радиус-вектор центра инерции в системе K'.

Задача 24.

Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы в цилиндрических координатах r, φ, z.

Решение

Вектор момента импульса частицы определяется векторным произведением вектора импульса на радиус-вектор, проведённый в точку приложения импульса:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{r}$$

Для того, чтобы найти компоненты вектора в декартовых координатах, воспользуемся представлением векторного произведения в виде определителя третьего порядка:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

Раскрываем определитель, учитывая, что

$$r_x = x, r_y = y, r_z = z$$

и получаем:

$$\vec{M} = \left(yp_z - p_y z\right)\vec{\imath} + (zp_x - p_z x)\vec{\jmath} + \left(xp_y - p_x y\right)\vec{k}$$

Откуда для проекций вектора момента получим выражения:

$$M_x = yp_z - p_y z$$
$$M_y = zp_x - p_z x$$
$$M_z = xp_y - p_x y$$

Учитывая, что $p_x = mv_x = m\dot{x}$, $p_y = mv_y = m\dot{y}$, $p_z = mv_z = m\dot{z}$, перепишем проекции в виде:

$$M_x = my\dot{z} - m\dot{y}z = m(y\dot{z} - z\dot{y})$$
$$M_y = zp_x - p_z x = m(z\dot{x} - x\dot{z})$$
$$M_z = xp_y - p_x y = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Цилиндрические координаты определяются равенствами:

$$x = r \cdot cos\varphi,$$
$$y = r \cdot sin\varphi,$$
$$z = z$$

Находим первые производные от соответствующих координат, не забывая про неявную зависимость координат от времени.

$$\dot{x} = (r \cdot cos\varphi)'_t = r'cos\varphi + r(cos\varphi)' = \dot{r}cos\varphi + r(-sin\varphi \cdot \dot{\varphi})' =$$

$$= \dot{r}cos\varphi - r\dot{\varphi}sin\varphi$$

$$\dot{y} = (r \cdot sin\varphi)'_t = r'sin\varphi + r(sin\varphi)' = \dot{r}sin\varphi + r(cos\varphi \cdot \dot{\varphi})' =$$
$$= \dot{r}sin\varphi + r\dot{\varphi}cos\varphi$$

$$\dot{z} = \dot{z}$$

Подставляем найденные скорости в выражения для проекций вектора момента импульса и учитывая выражения для связи между системами координат:

$$M_x = my\dot{z} - mz\dot{y} = mrsin\varphi \cdot \dot{z} - mz(\dot{r}sin\varphi + r\dot{\varphi}cos\varphi) =$$
$$= mr\dot{z}sin\varphi - mz\dot{r}sin\varphi - mzr\dot{\varphi}cos\varphi = msin\varphi(r\dot{z} - z\dot{r}) - mzr\dot{\varphi}cos\varphi$$

$$M_y = mz\dot{x} - mx\dot{z} = mz(\dot{r}cos\varphi - r\dot{\varphi}sin\varphi) - mrcos\varphi \cdot \dot{z} =$$
$$= mz\dot{r}cos\varphi - mzr\dot{\varphi}sin\varphi - mr\dot{z}cos\varphi = mcos\varphi(z\dot{r} - r\dot{z}) - mzr\dot{\varphi}sin\varphi$$

$$M_z = mx\dot{y} - my\dot{x} =$$
$$= mrcos\varphi \cdot (\dot{r}sin\varphi + r\dot{\varphi}cos\varphi) - mrsin\varphi \cdot (\dot{r}cos\varphi - r\dot{\varphi}sin\varphi) =$$
$$= mrcos\varphi\dot{r}sin\varphi + mrcos\varphi r\dot{\varphi}cos\varphi - mrsin\varphi\dot{r}cos\varphi + mrsin\varphi r\dot{\varphi}sin\varphi =$$
$$= mr\dot{r}sin\varphi cos\varphi + mr^2\dot{\varphi}cos^2\varphi - mr\dot{r}sin\varphi cos\varphi + mr^2\dot{\varphi}sin^2\varphi =$$
$$= mr^2\dot{\varphi}cos^2\varphi + mr^2\dot{\varphi}sin^2\varphi = mr^2\dot{\varphi}(sin^2\varphi + cos^2\varphi) = mr^2\dot{\varphi}$$

Находим квадраты проекций вектора момента:

$$M_x^2 = (msin\varphi(r\dot{z} - z\dot{r}) - mzr\dot{\varphi}cos\varphi)^2 = [msin\varphi(r\dot{z} - z\dot{r})]^2 -$$
$$-2msin\varphi(r\dot{z} - z\dot{r}) \cdot mzr\dot{\varphi}cos\varphi + [mzr\dot{\varphi}cos\varphi]^2 =$$
$$= m^2sin^2\varphi(r\dot{z} - z\dot{r})^2 - 2m^2zr\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi(r\dot{z} - z\dot{r}) + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi =$$
$$= m^2sin^2\varphi \cdot (r^2\dot{z}^2 - 2r\dot{z}z\dot{r} + z^2\dot{r}^2) - 2m^2zrr\dot{z}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi +$$
$$+2m^2zrz\dot{r}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi =$$
$$= m^2sin^2\varphi \cdot r^2\dot{z}^2 - m^2sin^2\varphi \cdot 2r\dot{z}z\dot{r} + m^2sin^2\varphi \cdot z^2\dot{r}^2 -$$
$$-2m^2r^2z\dot{z}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + 2m^2z^2r\dot{r}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi =$$
$$= m^2r^2\dot{z}^2sin^2\varphi - 2m^2r\dot{r}z\dot{z}sin^2\varphi + m^2z^2\dot{r}^2sin^2\varphi +$$
$$-2m^2r^2z\dot{z}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + 2m^2z^2r\dot{r}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi$$

$$M_y^2 = (mcos\varphi(z\dot{r} - r\dot{z}) - mzr\dot{\varphi}sin\varphi)^2 = [mcos\varphi(z\dot{r} - r\dot{z})]^2 -$$
$$-2mcos\varphi(z\dot{r} - r\dot{z}) \cdot mzr\dot{\varphi}sin\varphi + [mzr\dot{\varphi}sin\varphi]^2 =$$
$$= m^2cos^2\varphi(z\dot{r} - r\dot{z})^2 - 2m^2zr\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi(z\dot{r} - r\dot{z}) + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi =$$
$$= m^2cos^2\varphi \cdot (z^2\dot{r}^2 - 2z\dot{r}r\dot{z} + r^2\dot{z}^2) - 2m^2zz\dot{r}r\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi +$$
$$+2m^2zrr\dot{z}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi =$$
$$= m^2z^2\dot{r}^2cos^2\varphi - 2m^2z\dot{r}r\dot{z}cos^2\varphi + m^2r^2\dot{z}^2cos^2\varphi -$$
$$-2m^2z^2r\dot{r}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + 2m^2r^2z\dot{z}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi =$$
$$= m^2z^2\dot{r}^2cos^2\varphi - 2m^2r\dot{r}z\dot{z}cos^2\varphi + m^2r^2\dot{z}^2cos^2\varphi -$$
$$-2m^2z^2r\dot{r}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + 2m^2r^2z\dot{z}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi$$

$$M_z^2 = (mr^2\dot{\varphi})^2 = m^2r^4\dot{\varphi}^2$$

Находим квадрат модуля вектора момента:

$$\left|\vec{M}\right|^2 = M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 =$$
$$= m^2r^2\dot{z}^2sin^2\varphi - 2m^2r\dot{r}z\dot{z}sin^2\varphi + m^2z^2\dot{r}^2sin^2\varphi +$$
$$-2m^2r^2z\dot{z}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + 2m^2z^2r\dot{r}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi +$$
$$+m^2z^2\dot{r}^2cos^2\varphi - 2m^2r\dot{r}z\dot{z}cos^2\varphi + m^2r^2\dot{z}^2cos^2\varphi -$$
$$-2m^2z^2r\dot{r}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + 2m^2r^2z\dot{z}\dot{\varphi}sin\varphi cos\varphi + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi + m^2r^4\dot{\varphi}^2$$
$$= m^2r^2\dot{z}^2sin^2\varphi - 2m^2r\dot{r}z\dot{z}sin^2\varphi + m^2z^2\dot{r}^2sin^2\varphi +$$
$$+m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi + m^2z^2\dot{r}^2cos^2\varphi - 2m^2r\dot{r}z\dot{z}cos^2\varphi +$$
$$+m^2r^2\dot{z}^2cos^2\varphi + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi + m^2r^4\dot{\varphi}^2 =$$
$$= (m^2r^2\dot{z}^2sin^2\varphi + m^2r^2\dot{z}^2cos^2\varphi) - (2m^2r\dot{r}z\dot{z}sin^2\varphi + 2m^2r\dot{r}z\dot{z}cos^2\varphi) +$$
$$+(m^2z^2\dot{r}^2sin^2\varphi + m^2z^2\dot{r}^2cos^2\varphi) + (m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi) +$$
$$+m^2r^4\dot{\varphi}^2 = m^2r^2\dot{z}^2(sin^2\varphi + cos^2\varphi) - 2m^2r\dot{r}z\dot{z}(sin^2\varphi + cos^2\varphi) +$$
$$+m^2z^2\dot{r}^2(sin^2\varphi + cos^2\varphi) + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi) + m^2r^4\dot{\varphi}^2 =$$
$$= m^2r^2\dot{z}^2 - 2m^2r\dot{r}z\dot{z} + m^2z^2\dot{r}^2 + m^2z^2r^2\dot{\varphi}^2 + m^2r^4\dot{\varphi}^2 =$$
$$= m^2r^2\dot{\varphi}^2(r^2 + z^2) - m^2(r\dot{z} - z\dot{r})^2$$

Окончательно запишем ответ в виде:

$$\left|\vec{M}\right| = M = \sqrt{m^2r^2\dot{\varphi}^2(r^2 + z^2) - m^2(r\dot{z} - z\dot{r})^2}$$

Задача 25.

Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы в сферических координатах r, θ, z.

Решение

Вектор момента импульса частицы определяется векторным произведением вектора импульса на радиус-вектор, проведённый в точку приложения импульса:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{r}$$

Для того, чтобы найти компоненты вектора в декартовых координатах, воспользуемся представлением векторного произведения в виде определителя третьего порядка:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

Раскрываем определитель, учитывая, что

$$r_x = x, r_y = y, r_z = z$$

и получаем:

$$\vec{M} = (yp_z - p_yz)\vec{\imath} + (zp_x - p_zx)\vec{\jmath} + (xp_y - p_xy)\vec{k}$$

Откуда для проекций вектора момента получим выражения:

$$M_x = yp_z - p_y z$$
$$M_y = zp_x - p_z x$$
$$M_z = xp_y - p_x y$$

Учитывая, что $p_x = mv_x = m\dot{x}$, $p_y = mv_y = m\dot{y}$, $p_z = mv_z = m\dot{z}$, перепишем проекции в виде:

$$M_x = my\dot{z} - m\dot{y}z = m(y\dot{z} - z\dot{y})$$
$$M_y = zp_x - p_z x = m(z\dot{x} - x\dot{z})$$
$$M_z = xp_y - p_x y = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Сферические координаты определяются равенствами:

$$x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi,$$
$$y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi,$$
$$z = r \cdot cos\theta$$

Находим первые производные от соответствующих координат, не забывая про неявную зависимость координат от времени.

$$\dot{x} = (r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi)'_t = (r \cdot sin\theta)' cos\varphi + (r \cdot sin\theta)(cos\varphi)' =$$
$$= [r' sin\theta + r(sin\theta)']cos\varphi + r \cdot sin\theta(cos\varphi)' =$$
$$= \left(\dot{r} sin\theta + rcos\theta \cdot \dot{\theta}\right)cos\varphi + r \cdot sin\theta(-sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) =$$
$$= \dot{r}\dot{\theta} sin\theta cos\varphi + rcos\theta cos\varphi - r\dot{\varphi} sin\theta sin\varphi$$

$$\dot{y} = (r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi)'_t = (r \cdot sin\theta)' sin\varphi + (r \cdot sin\theta)(sin\varphi)' =$$
$$= [r' sin\theta + r(sin\theta)']sin\varphi + r \cdot sin\theta(sin\varphi)' =$$
$$= \left(\dot{r} sin\theta + rcos\theta \cdot \dot{\theta}\right)sin\varphi + r \cdot sin\theta cos\varphi \cdot \dot{\varphi} =$$
$$= \dot{r} sin\theta sin\varphi + r\dot{\theta} cos\theta sin\varphi + r\dot{\varphi} sin\theta cos\varphi$$

$$\dot{z} = (r \cdot cos\theta)'_t = \dot{r} cos\theta + r(cos\theta)' = \dot{r} cos\theta - rsin\theta \cdot \dot{\theta}$$

Подставляем найденные скорости в выражения для проекций вектора момента импульса и учитывая выражения для связи между системами координат:

- проекция на ось x

$$M_x = my\dot{z} - m\dot{y}z = mrsin\theta sin\varphi \cdot \left(\dot{r} cos\theta - r\dot{\theta} sin\theta\right) -$$
$$-mrcos\theta \cdot \left(\dot{r} sin\theta sin\varphi + r\dot{\theta} cos\theta sin\varphi + r\dot{\varphi} sin\theta cos\varphi\right) =$$

$$= mrsin\theta sin\varphi \cdot \dot{r}cos\theta - mrsin\theta sin\varphi \cdot r\dot{\theta}sin\theta -$$
$$-mrcos\theta \cdot \dot{r}sin\theta sin\varphi - mrcos\theta \cdot r\dot{\theta}cos\theta sin\varphi - mrcos\theta \cdot r\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi =$$
$$= mr\dot{r}sin\theta sin\varphi cos\theta - mr^2\dot{\theta}sin^2\theta sin\varphi - mr\dot{r}sin\theta sin\varphi cos\theta -$$
$$-mr^2\dot{\theta}cos^2\theta sin\varphi - mr^2\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi cos\theta =$$
$$= -mr^2\dot{\theta}sin^2\theta sin\varphi - mr^2\dot{\theta}cos^2\theta sin\varphi - mr^2\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi cos\theta =$$
$$= -mr^2\dot{\theta}sin\varphi(sin^2\theta + cos^2) - mr^2\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi cos\theta =$$
$$= -mr^2\dot{\theta}sin\varphi - mr^2\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi cos\theta = -mr^2\left(\dot{\theta}sin\varphi + \dot{\varphi}sin\theta cos\theta cos\varphi\right)$$

- проекция на ось y

$$M_y = mz\dot{x} - mx\dot{z} = mrcos\theta \cdot \left(\dot{r}sin\theta cos\varphi + r\dot{\theta}cos\theta cos\varphi - r\dot{\varphi}sin\theta sin\varphi\right) -$$
$$-mrsin\theta cos\varphi \cdot \left(\dot{r}cos\theta - rsin\theta \cdot \dot{\theta}\right) = mrcos\theta \cdot \dot{r}sin\theta cos\varphi +$$
$$+mr\dot{\theta}cos\theta \cdot rcos\theta cos\varphi - mrcos\theta \cdot r\dot{\varphi}sin\theta sin\varphi - mrsin\theta cos\varphi \cdot \dot{r}cos\theta +$$
$$+mrsin\theta cos\varphi \cdot rsin\theta \cdot \dot{\theta} = mr\dot{r}cos\theta sin\theta cos\varphi +$$
$$+mr^2\dot{\theta}cos^2\theta cos\varphi - mr^2\dot{\varphi}cos\theta sin\theta sin\varphi - mr\dot{r}sin\theta cos\varphi\, cos\theta +$$
$$+mr^2\dot{\theta}sin^2\theta cos\varphi = mr^2\left(\dot{\theta}cos^2\theta cos\varphi - \dot{\varphi}cos\theta sin\theta sin\varphi + \dot{\theta}sin^2\theta cos\varphi\right) =$$
$$= mr^2\left[\dot{\theta}cos\varphi(cos^2\theta + sin^2\theta) - \dot{\varphi}cos\theta sin\theta sin\varphi\right] =$$
$$= mr^2\left(\dot{\theta}cos\varphi - \dot{\varphi}cos\theta sin\theta sin\varphi\right)$$

- проекция на ось z

$$M_z = mx\dot{y} - my\dot{x} = mrsin\theta cos\varphi \cdot \left(\dot{r}sin\theta sin\varphi + r\dot{\theta}cos\theta sin\varphi + r\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi\right) -$$
$$-mrsin\theta sin\varphi \cdot \left(\dot{r}sin\theta cos\varphi + r\dot{\theta}cos\theta cos\varphi - r\dot{\varphi}sin\theta sin\varphi\right) =$$
$$= mrsin\theta cos\varphi \cdot \dot{r}sin\theta sin\varphi + mrsin\theta cos\varphi \cdot r\dot{\theta}cos\theta sin\varphi +$$
$$+mrsin\theta cos\varphi \cdot r\dot{\varphi}sin\theta cos\varphi - mrsin\theta sin\varphi \cdot \dot{r}sin\theta cos\varphi -$$
$$-mrsin\theta sin\varphi \cdot r\dot{\theta}cos\theta cos\varphi + mrsin\theta sin\varphi \cdot r\dot{\varphi}sin\theta sin\varphi =$$
$$= mr\dot{r}sin^2\theta cos\varphi sin\varphi + mr^2\dot{\theta}sin\theta cos\varphi cos\theta sin\varphi +$$
$$+mr^2\dot{\varphi}sin^2\theta cos^2\varphi - mr\dot{r}sin^2\theta sin\varphi cos\varphi -$$
$$-mr^2\dot{\theta}sin\theta sin\varphi cos\theta cos\varphi + mr^2\dot{\varphi}sin^2\theta sin^2\varphi =$$
$$= mr^2\dot{\varphi}sin^2\theta cos^2\varphi + mr^2\dot{\varphi}sin^2\theta sin^2\varphi = mr^2\dot{\varphi}sin^2\theta(cos^2\varphi + sin^2\varphi) =$$
$$= mr^2\dot{\varphi}sin^2\theta$$

Для нахождения модуля вектора момента импульса выпишем найдённые проекции и применим формулу $\left|\vec{M}\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$

$$M_x = -mr^2\left(\dot{\theta}sin\varphi + \dot{\varphi}sin\theta cos\varphi cos\theta\right)$$
$$M_y = mr^2\left(\dot{\theta}cos\varphi - \dot{\varphi}cos\theta sin\theta sin\varphi\right)$$
$$M_z = mr^2\dot{\varphi}sin^2\theta$$

Находим квадраты проекций

$$M_x^2 = \left[-mr^2\left(\dot{\theta}sin\varphi + \dot{\varphi}sin\theta cos\varphi cos\theta\right)\right]^2 =$$

$$= m^2r^4\left(\dot\theta^2 sin^2\varphi + 2\dot\theta sin\varphi\dot\varphi sin\theta cos\varphi cos\theta + \dot\varphi^2 sin^2\theta cos^2\varphi cos^2\theta\right) =$$

$$M_y^2 = \left[mr^2\left(\dot\theta cos\varphi - \dot\varphi cos\theta sin\theta sin\varphi\right)\right]^2 =$$

$$= m^2r^4\left(\dot\theta^2 cos^2\varphi - 2\dot\theta cos\varphi\dot\varphi cos\theta sin\theta sin\varphi + \dot\varphi^2 cos^2\theta sin^2\theta sin^2\varphi\right)$$

$$M_z^2 = (mr^2\dot\varphi sin^2\theta)^2 = m^2r^4\dot\varphi^2 sin^4\theta$$

Находим квадрат модуля вектора момента:

$$\left|\vec{M}\right|^2 = M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 =$$

$$= m^2r^4\left(\dot\theta^2 sin^2\varphi + 2\dot\theta sin\varphi\dot\varphi sin\theta cos\varphi cos\theta + \dot\varphi^2 sin^2\theta cos^2\varphi cos^2\theta\right) +$$

$$+m^2r^4\left(\dot\theta^2 cos^2\varphi - 2\dot\theta cos\varphi\dot\varphi cos\theta sin\theta sin\varphi + \dot\varphi^2 cos^2\theta sin^2\theta sin^2\varphi\right) +$$

$$+m^2r^4\dot\varphi^2 sin^4\theta = m^2r^4(\dot\theta^2 sin^2\varphi + 2\dot\theta sin\varphi\dot\varphi sin\theta cos\varphi cos\theta +$$

$$+\dot\varphi^2 sin^2\theta cos^2\varphi cos^2\theta + \dot\theta^2 cos^2\varphi - 2\dot\theta cos\varphi\dot\varphi cos\theta sin\theta sin\varphi +$$

$$+\dot\varphi^2 cos^2\theta sin^2\theta sin^2\varphi + \dot\varphi^2 sin^4\theta) =$$

$$= m^2r^4(\dot\theta^2 sin^2\varphi + \dot\varphi^2 sin^2\theta cos^2\varphi cos^2\theta + \dot\theta^2 cos^2\varphi + \dot\varphi^2 cos^2\theta sin^2\theta sin^2\varphi +$$

$$+\dot\varphi^2 sin^4\theta) = m^2r^4(\dot\theta^2[sin^2\varphi + cos^2\varphi] + \dot\varphi^2 sin^2 cos^2\theta[cos^2\varphi + sin^2\varphi] +$$

$$+\dot\varphi^2 sin^4\theta) = m^2r^4\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 sin^2\theta cos^2\theta + \dot\varphi^2 sin^4\theta\right) =$$

$$= m^2r^4\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 sin^2\theta[cos^2\theta + sin^2\theta]\right) = m^2r^4\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 sin^2\theta\right)$$

Окончательный ответ имеет вид:

$$\left|\vec{M}\right| = \sqrt{m^2r^4\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 sin^2\theta\right)} = mr^2\sqrt{\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 sin^2\theta}$$

2.3 Задания для самостоятельного решения

1. Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы в эллиптических координатах μ, ν.
2. Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы в двумерных параболических координатах σ, τ.
3. Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы в трёхмерных параболических координатах σ, τ, z.
4. Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы в цилиндрических параболических координатах u, v, z.
5. Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы в тороидальных координатах α, β, φ.
6. Как относятся времена движения по одинаковым траекториям точек с различными массами при одинаковой потенциальной энергии?
7. Как изменяются времена движения по одинаковым траекториям при изменении потенциальной энергии на постоянный множитель?

2.4 Тестовые задания

1. Как называются функции, которые сохраняют при движении механической системы постоянные значения?
   A) Обобщённые импульсы
   B) Вариации функции Лагранжа
   C) Интегралы движения
   D) Консервативные функции
   E) Дифференциалы энергии
2. Сколько существует интегралов движения для системы с S степенями свободы?
   A) S
   B) 2S-1
   C) 3S
   D) S^2
   E) S(S+2)
3. Сколько интегралов движения имеют особенно важную роль в классической механике?
   A) 3
   B) 5
   C) 7
   D) 9
   E) 11
4. Какой интеграл движения связан с однородностью времени?
   A) Энергии
   B) Импульса
   C) Момента импульса
   D) Силы
   E) Ускорения
5. Какой интеграл движения связан с однородностью пространства?
   A) Массы
   B) Силы
   C) Момента импульса
   D) Энергии
   E) Импульса
6. Какой интеграл движения связан с изотропией пространства?
   A) Момента импульса
   B) Энергии
   C) Скорости
   D) Массы
   E) Импульса
7. Выберите интеграл движения:
   A) Координата
   B) Скорость
   C) Импульс

D) Сила
E) Период

8. Выберите интеграл движения:
A) Ускорение
B) Энергия
C) Период
D) Частота
E) Сила

9. Выберите интеграл движения:
A) Период
B) Координата
C) Частота
D) Сила
E) Момент импульса

10. Укажите выражение для энергии механической системы:
A) $E = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - L$
B) $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
C) $E = \sum_{\dot{q}_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$
D) $E = -\vec{F}\vec{r}L$
E) $E = \frac{\sum m_a r_a}{\sum m_a}$

11. Найти полную механическую энергию системы, функция Лагранжа которой имеет вид: $L = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \dot{y}^2) + mgssin\alpha$
A) $E = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \dot{y}^2) + mgssin\alpha$
B) $E = m(\dot{s}^2 + \dot{y}^2)$
C) $E = mgssin\alpha$
D) $E = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \dot{y}^2) - mgssin\alpha$
E) $E = -mgssin\alpha$

12. Как преобразуется энергия при переходе от одной ИСО к другой?
A) $E = E' + \vec{V}\vec{p} + \frac{\mu V^2}{2}$
B) $E = M' + \mu[\vec{R}\vec{V}]$
C) $E = \frac{\sum m_a r_a}{\sum m_a} + L$
D) $E = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$
E) $E = m_a \frac{dv_a}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$

13. Как называется механическая система, энергия которой сохраняется?
A) Обособленной
B) Консервативной

C) Аддитивной
D) Диссипативной
E) Связанной

14. Какой закон сохранения связан с однородностью времени?
A) Энергии
B) Импульса
C) Момента импульса
D) Силы
E) Ускорения

15. Какой закон сохранения связан с однородностью пространства?
A) Массы
B) Силы
C) Момента импульса
D) Энергии
E) Импульса

16. Какой закон сохранения связан с изотропией пространства?
A) Момента импульса
B) Энергии
C) Скорости
D) Массы
E) Импульса

17. Выражение для импульса системы имеет вид:
A) $\vec{P} = \int L(q, \dot{q}, t)dt$
B) $\vec{P} = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2}$
C) $\vec{P} = \sum_{\dot{q}_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$
D) $\vec{P} = -\vec{F}\vec{r}$
E) $\vec{P} = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \vec{V_{\alpha}}}$

18. Какая величина называется обобщённым импульсом механической системы?
A) $p_i = \frac{\sum m_a \vec{r}_a}{\sum m_a}$
B) $p_i = M' + \mu[\vec{R}\vec{V}]$
C) $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
D) $p_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$
E) $p_i = -\vec{F}\vec{r}$

19. Найдите проекцию импульса p_s механической системы, если она описывается функцией Лагранжа вида: $L = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \dot{y}^2) + mgssin\alpha$
A) $p_s = m\dot{s}$
B) $p_s = mgcos\alpha$
C) $p_s = -mgcos\alpha$

D) $p_s = 2m\dot{s}$
E) $p_s = \frac{m}{2}\dot{s}$

20. Найдите проекцию импульса $p_у$ механической системы, если она описывается функцией Лагранжа вида: $L = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \dot{y}^2) + mgssin\alpha$
A) $p_y = 2m\dot{y}$
B) $p_y = mgscos\alpha$
C) $p_y = m\dot{y}$
D) $p_y = -mgycos\alpha$
E) $p_y = \frac{m}{2}\dot{y}$

21. Найдите полный импульс механической системы, если она описывается функцией Лагранжа вида: $L = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \dot{y}^2) + mgssin\alpha$
A) $p = \sqrt{\dot{s}^2 + \dot{y}^2}$
B) $p = m\sqrt{\dot{s}^2 + \dot{y}^2}$
C) $p = \frac{m}{2}\sqrt{\dot{s}^2 + \dot{y}^2}$
D) $p = \sqrt{\dot{s} + \dot{y}}$
E) $p = \dot{s} + \dot{y}$

22. Укажите выражение для обобщённых сил:
A) $\vec{F_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$
B) $\vec{F_i} = \int L(q, \dot{q}, t)dt$
C) $\vec{F_i} = \sum \dot{q_\iota}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\iota}} - L$
D) $\vec{F_i} = \frac{\sum m_a \vec{r}_a}{\sum m_a}$
E) $\vec{F_i} = M' + \mu[\vec{R}\vec{V}]$

23. Найдите проекцию силы F_s механической системы, если она описывается функцией Лагранжа вида: $L = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \dot{y}^2) + mgssin\alpha$
A) $F_s = m\dot{s}$
B) $F_s = mgsin\alpha$
C) $F_s = -mgcos\alpha$
D) $F_s = 0$
E) $F_s = \frac{m}{2}\dot{s}$

24. Найдите проекцию силы $F_у$ механической системы, если она описывается функцией Лагранжа вида: $L = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \dot{y}^2) + mgssin\alpha$
A) $F_у = 2m\dot{y}$
B) $F_у = mgscos\alpha$
C) $F_у = m\dot{y}$
D) $F_у = -mgycos\alpha$
E) $F_у = 0$

25. Чему равна производная функции Лагранжа по скорости?
   A) Энергии
   B) Моменту импульсу
   C) Массе
   D) Импульсу
   E) Силе
26. Чему равна производная функции Лагранжа по координатам?
   A) Моменту импульса
   B) Силе
   C) Ускорению
   D) Энергии
   E) Массе
27. Как преобразуется импульс при переходе от одной ИСО к другой?
   A) $\vec{P} = \frac{\sum m_a \vec{r}_a}{\sum m_a}$
   B) $\vec{P} = \int L(q, \dot{q}, t)dt$
   C) $\vec{P} = \vec{P}' + \vec{V} \sum m_a$
   D) $\vec{P} = \sum \dot{q}_\iota \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota} - \vec{P}'$
   E) $\vec{P} = m_a \frac{dv_a}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$
28. Укажите выражение для центра масс механической системы:
   A) $\vec{F}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$
   B) $\vec{R} = \frac{\sum m_a \vec{r}_a}{\sum m_a}$
   C) $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
   D) $U = -\vec{F}\vec{r}L$
   E) $\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$
   F) Как называется величина: $\vec{M} = \sum \vec{r}_a \, p_a$
29.
   A) Энергия
   B) Масса системы
   C) Импульс
   D) Момент импульса
   E) Сила
30. Как изменяется момент импульса системы при переходе от одной ИСО к другой?
   A) $\vec{M} = \vec{M}' + \mu[\vec{R}\vec{V}]$
   B) $\vec{M} = \vec{M}' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
   C) $\vec{M} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$
   D) $\vec{M} = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - L$

E) $\vec{M} = E' + \vec{V}\vec{p} + \frac{\mu V^2}{2}$

31. Какая операция над функцией Лагранжа очевидным образом не меняет уравнений движения?
A) Возведение в n степень
B) Прибавление полного дифференциала действия
C) Умножение на постоянный множитель
D) Деление на потенциальную энергию
E) Дифференцирование по времени
32. Определить энергию механической системы, если её функция Лагранжа $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi$.
A) $E = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi$
B) $E = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mglcos\varphi$
C) $E = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2$
D) $E = ml^2\dot{\varphi}^2 + mglsin\varphi$
E) $E = ml^2\dot{\varphi}^2$
33. Определить импульс механической системы, если её функция Лагранжа $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi$.
A) $p = ml\dot{\varphi}^2$
B) $p = ml^2\dot{\varphi}^2$
C) $p = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2$
D) $p = ml^2\dot{\varphi}$
E) $p = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}$
34. Определить силу, действующую на механическую систему, если её функция Лагранжа $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi$.
A) $F = -mglsin\dot{\varphi}$
B) $F = -mglcos\varphi$
C) $F = mglcos\varphi\dot{\varphi}$
D) $F = mglsin\varphi$
E) $F = -mglsin\varphi$
35. Определить кинетическую энергию механической системы, если её функция Лагранжа $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi$.
A) $E = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2$
B) $E = \frac{ml^2}{2}$
C) $E = mglcos\varphi$
D) $E = -mglsin\varphi$
E) $\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2$

36. Определить потенциальную энергию механической системы, если её функция Лагранжа $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi$.
A) $E = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2$
B) $E = \frac{ml^2}{2}$
C) $E = mglsin\varphi$
D) $E = -mglcos\varphi$
E) $\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2$
37. Укажите условие однородности потенциальной энергии по координатам:
A) $U(\alpha\vec{r}_1, \dots, \alpha\vec{r}_n) + \alpha^k U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = 1$
B) $U(\alpha\vec{r}_1, \dots, \alpha\vec{r}_n) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$
C) $U(\alpha\vec{r}_1, \dots, \alpha\vec{r}_n) = U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$
D) $U(\alpha\vec{r}_1, \dots, \alpha\vec{r}_n) = \alpha U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$
E) $U(\alpha\vec{r}_1, \dots, \alpha\vec{r}_n) = \alpha^k + U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$
38. Чему равен коэффициент подобия в случае малых колебаний?
A) -1
B) 0
C) -2
D) 1
E) 2
39. Чему равен коэффициент подобия в случае однородного силового поля?
A) -1
B) 0
C) -2
D) 1
E) 2
40. Чему равен коэффициент подобия в случае ньютоновского взаимодействия?
A) -1
B) 0
C) -2
D) 1
E) 2
41. Чему равен коэффициент подобия в случае кулоновского взаимодействия?
A) -1
B) 0
C) -2
D) 1
E) 2
42. Как называется утверждение о том, что квадраты времён обращения по орбитам пропорциональны кубам их размеров?
A) Принцип относительности Галилея

B) Третий закон Кеплера
C) Второй закон Ньютона
D) Теорема Пуассона
E) Правило Мопертюи

43. Как связано среднее значение потенциальной энергии и полной энергии системы?
A) $\overline{U} = \frac{1}{k+2}E$
B) $\overline{U} = \frac{2}{k+2}E$
C) $\overline{U} = \frac{k}{k+1}E$
D) $\overline{U} = \frac{2}{E+2}k$
E) $= \frac{k}{k-2}E$

44. Как можно выразить среднее значение кинетической энергии через полную энергию системы?
A) $\overline{T} = \frac{k}{k+2}E$
B) $\overline{T} = \frac{2}{k+1}E$
C) $\overline{T} = \frac{k}{E+2}k$
D) $\overline{T} = \frac{2}{k-2}E$
E) $\overline{T} = \frac{1}{k+2}E$

45. Как связаны средние значения потенциальной и кинетической энергии в общем случае?
A) $k\overline{T} = 2\overline{U}$
B) $\overline{T} = 2k\overline{U}$
C) $2\overline{T} = k\overline{U}$
D) $\overline{T} = k\overline{U}$
E) $2k\overline{T} = \overline{U}$

46. Как связаны средние значения кинетической и потенциальной энергии в случае малых колебаний?
A) $\overline{T} = \frac{\overline{U}}{k}$
B) $\overline{T} = -2\overline{U}$
C) $\overline{T} = -\overline{U}$
D) $\overline{T} = \frac{\overline{U}}{2}$
E) $\overline{T} = \overline{U}$

47. Каково соотношение между средними значениями кинетической и потенциальной энергии в случае ньютоновского взаимодействия?
A) $\overline{T} = \frac{\overline{U}}{k}$
B) $\overline{T} = 2\overline{U}$
C) $\overline{T} = -\overline{U}$

D) $\bar{T} = -\frac{\bar{U}}{2}$
E) $\bar{T} = 2\bar{U}$

48. Как связаны полная и кинетическая энергия частицы в случае ньютоновского взаимодействия?
A) $E = -\bar{T}/2$
B) $E = \bar{T}$
C) $E = -\bar{T}$
D) $E = \bar{T}/2$
E) $E = -2\bar{T}$

49. Укажите математическую формулировку третьего закона Кеплера:
A) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/2}$
B) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2}$
C) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{2/3}$
D) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/3}$
E) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)$

50. Как соотносятся скорости и размеры траектории в случае механического подобия?
A) $\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{2/k}$
B) $\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+k/3}$
C) $\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}$
D) $\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3k/2}$
E) $\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}$

51. Каково соотношение между энергиями и размерами траектории в случае механического подобия?
A) $\frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{2/k}$
B) $\frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+k/3}$
C) $\frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}$
D) $\frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3k/2}$
E) $\frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}$

52. Моменты импульса и размеры траектории в случае механического подобия связаны соотношением:

A) $\frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{2/k}$

B) $\frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+k/2}$

C) $\frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}$

D) $\frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3k/2}$

E) $\frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}$

53. В случае механического подобия времена и размеры траектории движения связаны соотношением:

A) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/2}$

B) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}$

C) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{2/3}$

D) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/3}$

E) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)$

54. В случае механического подобия времена и размеры траектории движения для однородного силового поля связаны соотношением:

A) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/2}$

B) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2}$

C) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{2/3}$

D) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/3}$

E) $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)$

55. Как относятся времена движения по одинаковым траекториям точек с различными массами при одинаковой потенциальной энергии?

A) $\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m}{m'}}$

B) $\frac{t'}{t} = \sqrt{k\frac{m'}{m}}$

C) $\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{m'}{m}}$

D) $\frac{t'}{t} = -\sqrt{\frac{m'}{m}}$

E) $\frac{t'}{t} = \frac{m'}{m}$

56. Как изменяются времена движениям по одинаковым траекториям при изменении потенциальной энергии на постоянный множитель?
A) $\frac{t'}{t} = k\frac{U}{U'}$
B) $\frac{t'}{t} = \frac{U}{U'}$
C) $\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{U'}{U}}$
D) $\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{U}{U'}}$
E) $\frac{t'}{t} = -\sqrt{\frac{U'}{U}}$

Глава 3 Интегрирование уравнений движения

3.1 Вопросы для самопроверки

1. Сколько интегралов движения имеет замкнутая система? Назовите их. Какое поле называют центрально-симметричным?
2. Что такое одномерное движение? Как происходит движение частицы в потенциальной яме?
3. Что такое точки остановки? Когда движение частицы финитно? Инфинитно?
4. Как определяется функция Лагранжа системы, состоящей из двух тел? Что такое приведённая масса?
5. Какое поле называется центральным?
6. Что такое циклическая координата?
7. Чему равна сила, действующая на частицу в центральном поле? Куда она направлена?
8. Что такое секториальная скорость? Сформулируйте второй закон Кеплера. Какую величину называют центробежной энергией?
9. Сформулируйте задачу двух тел. В чём состоит задача Кеплера?
10. Каковы условия финитного и инфинитного движения? Уравнение движения частицы в центральном поле. Что такое параметр и эксцентриситет?
11. Каковы условия эллиптического, параболического и гиперболического движения в зависимости от полной энергии частицы? Как определяются эксцентриситеты соответствующих орбит?
12. Что такое перигелий и афелий?
13. Чему равен период обращения частицы, движущейся по эллиптической орбите?

3.2. Решение задач

Задача 26.

Определить период колебаний плоского математического маятника (точка m на конце нити длиной l в поле тяжести, см. рисунок 15) в зависимости от его амплитуды.

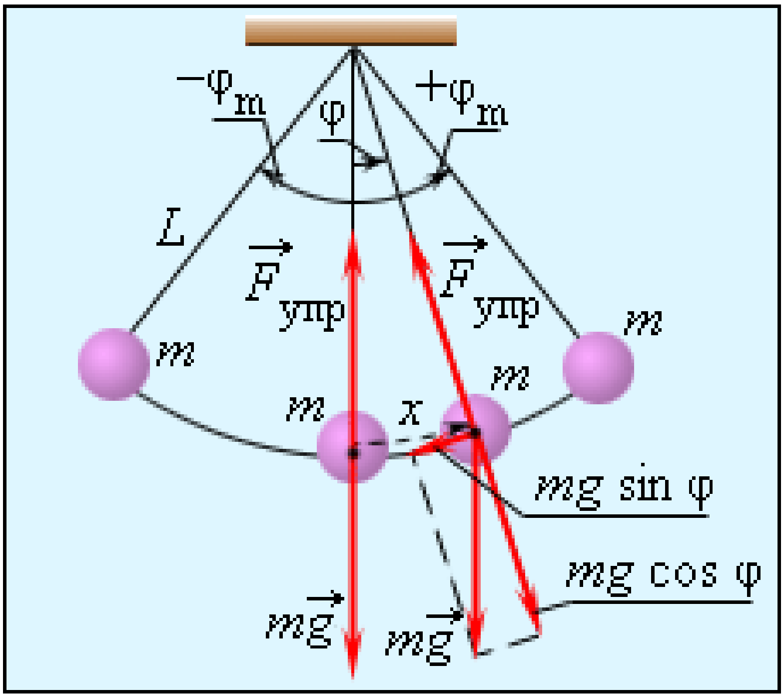

Рисунок 15 – Математический маятник

Решение

Энергия маятника в любой момент времени определяется выражением

$$E = T + U = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\,cos\varphi,$$

где φ – угол отклонения нити от вертикали в произвольный момент времени.

В качестве границ движения возьмём начальное положение маятника $\varphi_1 = 0$ и максимальный угол отклонения $\varphi_2 = \varphi_0$. В крайнем положении полная энергия маятника равна его потенциальной энергии:

$$E = -mgl\,cos\varphi_0$$

где φ_0 – максимальный угол отклонения, т.е. амплитуда. Тогда для полной энергии можно написать:

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\,cos\varphi = -mgl\,cos\varphi_0,$$

Определим t из этого уравнения

$$\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} = -mgl\,cos\varphi_0 + mgl\,cos\varphi$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{ml^2}(mgl\,cos\varphi - mgl\,cos\varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2mgl}{ml^2}(cos\varphi - cos\varphi_0) = 2\frac{g}{l}(cos\varphi - cos\varphi_0)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(cos\varphi - cos\varphi_0)}$$

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}(cos\varphi - cos\varphi_0)}} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(cos\varphi - cos\varphi_0)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(cos\varphi - cos\varphi_0)}}$$

При выбранных границах движения (от 0 до φ_0) период будет равен учетверенному времени прохождения интервала углов от нуля до φ_0, учитывая это, находим:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{cos\varphi - cos\varphi_0}}$$

Преобразуем подкоренное выражение, выразив косинусы через синусы половинного аргумента по формуле $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos\alpha}{2}$$

$$\frac{\cos\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}, \cos\varphi_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2},$$

$$\cos\varphi - \cos\varphi_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - 1 + 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$$

$$\cos\varphi - \cos\varphi_0 = 2\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

Подставим полученную разность в интеграл

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}} = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}},$$

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{sin^2\frac{\varphi_0}{2} - sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Для преобразования этого интеграла используем подстановку $\frac{sin^1/_2\varphi}{sin^1/_2\varphi_0} = sin\omega$.

$$sin^2\frac{\varphi_0}{2} - sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{sin^2\frac{\varphi}{2}}{sin^2\frac{\varphi_0}{2}} = 1 - \left(\frac{sin\,^1/_2\,\varphi}{sin\,^1/_2\,\varphi_0}\right)^2 = 1 - sin^2\omega$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{sin\,^1/_2\,\varphi}{sin\,^1/_2\,\varphi_0}\right) = \frac{d}{d\omega}(sin\omega)$$

$$\frac{1}{sin\,^1/_2\,\varphi_0}\cdot\frac{d}{d\varphi}\left(sin\,^1/_2\,\varphi\right) = \frac{d}{d\omega}(sin\omega)$$

$$\frac{1}{sin\,^1/_2\,\varphi_0}\cdot cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}d\varphi = cos\omega d\omega$$

$$\frac{cos\frac{\varphi}{2}}{2sin\,^1/_2\,\varphi_0}d\varphi = cos\omega d\omega,$$

$$d\varphi = \frac{2sin\,^1/_2\,\varphi_0}{cos\frac{\varphi}{2}}cos\omega d\omega$$

$$cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$d\varphi = \frac{2sin\,^1/_2\,\varphi_0}{\sqrt{1 - sin^2\frac{\varphi}{2}}}cos\omega d\omega$$

$$sin\,^1/_2\,\varphi = sin\,^1/_2\,\varphi_0\cdot sin\omega$$

$$sin^2\frac{\varphi}{2} = sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot sin^2\omega$$

$$d\varphi = \frac{2sin\,^1/_2\,\varphi_0}{\sqrt{1 - sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot sin^2\omega}}cos\omega d\omega$$

$$cos\omega = \sqrt{1 - \sin^2\omega}$$

$$d\varphi = 2sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2\omega}}{\sqrt{1-sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot sin^2\omega}}d\omega$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{sin^2\frac{\varphi_0}{2}-sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2\omega}}\cdot 2sin\frac{\varphi_0}{2}\frac{\sqrt{1-\sin^2\omega}}{\sqrt{1-sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot sin^2\omega}}d\omega =$$

$$= 2sin\frac{\varphi_0}{2}\frac{d\omega}{\sqrt{1-sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot sin^2\omega}}$$

Подставляем в исходный интеграл, изменяя старые пределы интегрирования на новые:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} 2sin\frac{\varphi_0}{2}\frac{d\omega}{\sqrt{1-sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot sin^2\omega}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot sin\frac{\varphi_0}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\omega}{\sqrt{1-sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot sin^2\omega}}$$

Запишем данный интеграл в виде

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot K\left(sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

где

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2sin^2\omega}}, k = sin\frac{\varphi_0}{2}$$

- так называемый полный эллиптический интеграл первого рода. Его можно представить в виде степенного ряда

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\sum\left[\frac{(2n)}{2^{2n}n!^2}\right]^2 k^{2n}$$

что эквивалентно выражению

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\cdots..+\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}+\cdots\right\}$$

где $n!!$ означает двойной факториал.

В нашем случае $k = sin\frac{\varphi_0}{2}$. Запишем первые три члена ряда и подставим в формулу для периода:

$$K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)^4 + \cdots\right\}$$

$$K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \cdots\right\}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \cdots\right\} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left\{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \cdots\right\}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}$$

Что и решает поставленную задачу. Однако важным случаем является случай малых колебаний при $\sin\frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2} \ll 1$. В этом случае разложение функции $K(k)$ дает:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \frac{9}{1024}\varphi_0^4 + \cdots\right).$$

Первый член этого разложения отвечает известной элементарной формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ для малых колебаний математического маятника, известной из средней школы.

Задача 27.

Система состоит из одной частицы с массой M и n частицы с одинаковыми массами m. Исключить движение центра инерции и свести задачу к задаче о движении n частиц.

Решение

Пусть R – радиус-вектор частицы M, а R_a $(a = 1, 2, \dots, n)$ – радиус-векторы частиц с массами m. Введем расстояния от частицы M до частицы m

$$r_a = R_a - R$$

и поместим начало координат в центре инерции:

$$MR + m\sum_a R_a = 0\,.$$

Из этих равенств находим:

$$R=-\frac{m}{\mu}\sum_a r_a\ , R_a=R+r_a\ ,$$

где $\mu=M+nm$. Подставив эти выражения в функцию Лагранжа

$$L=\frac{M\dot{R}^2}{2}+\frac{m}{2}\sum_a \dot{R}_a^2-U\ ,$$

получим :

$$L=\frac{m}{2}\sum_a v_a^2-\frac{m^2}{2\mu}\left(\sum_a v_a\right)^2-U\ ,$$

где $v_a=\dot{r}_a$.

Потенциальная энергия зависит лишь от расстояний между частицами и потому может быть представлена как функция от векторов r_a.

Задача 28.

Проинтегрировать уравнения движения сферического маятника – материальной точки m, движущейся по поверхности сферы радиуса l в поле тяжести.

Решение

Для составления функции Лагранжа необходимо знать выражение для кинетической и потенциальной энергии маятника в сферических координатах. Воспользуемся функцией Лагранжа для свободной материальной точки в сферических координатах, полученной в задаче 10:

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta\right)$$

Тогда в сферических координатах с началом в центре сферы и полярной осью, направленной вертикально вниз, функция Лагранжа маятника

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2sin^2\theta\right)-(-mglcos\theta)=$$
$$=\frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}^2sin^2\theta\right)+mglcos\theta.$$

где $r=l$ - длина маятника и слагаемое $\dot{r}^2=0$, т.к. длина нити постоянна.

Координата φ – циклическая, поэтому сохраняется обобщенный импульс p_φ, совпадающий с z – компонентой момента. Найдём проекцию момента M_z:

$$M_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left[\frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}^2sin^2\theta\right)+mglcos\theta\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left[\frac{ml^2}{2}\dot{\theta}+\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2sin^2\theta+mglcos\theta\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left(\frac{ml^2}{2}\dot{\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left(\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2sin^2\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}(mglcos\theta)$$

Производные $\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left(\frac{ml^2}{2}\dot{\theta}\right) = 0, \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}(mglcos\theta) = 0$, т.к. они не зависят от $\dot{\varphi}$, производная второго слагаемого даёт:

$$\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left(\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) = \frac{ml^2}{2} sin^2\theta \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}(\dot{\varphi}^2) = \frac{ml^2}{\cancel{2}} sin^2\theta \cdot \cancel{2}\dot{\varphi}$$

$$M_z = ml^2 sin^2\theta \cdot \dot{\varphi} = const.$$

Энергия маятника равна

$$E = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2\right) - mgl\, cos\theta$$

Выразим $\dot{\varphi}^2$ из выражения для проекции момента:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z}{ml^2 sin^2\theta}, \dot{\varphi}^2 = \frac{M_z^2}{m^2 l^4 sin^4\theta}$$

и подставим его в уравнение энергии

$$E = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta \cdot \frac{M_z^2}{m^2 l^4 sin^4\theta}\right) - mgl\, cos\theta =$$

$$= \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{ml^2}{2} sin^2\theta \cdot \frac{M_z^2}{m^2 l^4 sin^4\theta} - mgl\, cos\theta =$$

$$= \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2ml^2 sin^2\theta} - mgl\, cos\theta.$$

Определим отсюда $\dot{\theta}$

$$\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} = E - \frac{M_z^2}{2ml^2 sin^2\theta} + mgl\, cos\theta,$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{ml^2}\left[E - \frac{M_z^2}{2ml^2 sin^2\theta} + mgl\, cos\theta\right],$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}\left[E - \frac{M_z^2}{2ml^2 sin^2\theta} + mgl\, cos\theta\right]}$$

Введём так называемую «эффективную потенциальную энергию», определяемую соотношением

$$U_{эфф}(\theta) = \frac{M_z^2}{2ml^2 sin^2\theta} - mgl\, cos\theta$$

Тогда выражение для $\dot{\theta}$ запишется в виде

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}\left[E - U_{эфф}(\theta)\right]}$$

и разделяя переменные, получим:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}\left[E - U_{эфф}(\theta)\right]}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}\left[E - U_{эфф}(\theta)\right]}} = dt$$

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2\left[E - U_{эфф}(\theta)\right]}{ml^2}}} = \sqrt{\frac{ml^2}{2\left[E - U_{эфф}(\theta)\right]}}d\theta$$

$$dt = l\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{E - U_{эфф}(\theta)}}$$

откуда

$$t = l\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{E - U_{эфф}(\theta)}}.$$

Для определения угла φ, используем выражение для момента $M_z = ml^2 sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z}{ml^2 sin^2\theta}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_z}{ml^2 sin^2\theta}$$

а dt определяется выражением $dt = l\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{E - U_{эфф}(\theta)}}$, которое было получено выше.

Тогда можно написать

$$\frac{d\varphi}{l\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{E - U_{эфф}(\theta)}}} = \frac{M_z}{ml^2 sin^2\theta}$$

Откуда

$$d\varphi = \frac{M_z}{ml^2 sin^2\theta}l\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{E - U_{эфф}(\theta)}}$$

$$d\varphi = \frac{M_z}{ml^2}l\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{d\theta}{sin^2\theta\sqrt{E - U_{эфф}(\theta)}}$$

$$d\varphi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}} \cdot \frac{d\theta}{sin^2\theta\sqrt{E - U_{эфф}(\theta)}}$$

Откуда найдем

$$\varphi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{sin^2\theta\sqrt{E - U_{эфф}(\theta)}}$$

Интегралы

$$t = l\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{E - U_{эфф}(\theta)}}, \varphi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{sin^2\theta\sqrt{E - U_{эфф}(\theta)}}$$

приводятся к эллиптическим интегралам соответственно первого и третьего рода.

Область движения по углу θ определяется условием $E > U_{эфф}$, а ее границы – уравнением $E = U_{эфф}$. Последнее представляет собой кубическое уравнение для $\cos\theta$, имеющее в промежутке от -1 до +1 два корня, определяющих положение двух параллельных окружностей на сфере, между которыми заключена вся траектория.

Задача 29.

Проинтегрировать уравнения движения материальной точки, движущейся по поверхности конуса (с углом 2α при вершине), расположенного вертикально, вершиной вниз, в поле тяжести.

Решение

Аналогично предыдущей задачи в сферических координатах с началом в вершине конуса и полярной осью, направленной вертикально вверх, функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 sin^2\alpha \cdot \dot{\varphi}^2) - mgr\, cos\alpha.$$

Координата φ – циклическая, так что сохраняется момент на ось z. Найдём проекцию момента M_z:

$$M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}[(\dot{r}^2 + r^2 sin^2\alpha \cdot \dot{\varphi}^2) - mgr\, cos\alpha] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left[\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 sin^2\alpha \cdot \dot{\varphi}^2 - mgr\, cos\alpha\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{m}{2} r^2 sin^2\alpha \cdot \dot{\varphi}^2\right) - \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}(mgr\, cos\alpha)$$

Производные $\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2\right) = 0, \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}(mgr\, cos\alpha) = 0$, т.к. они не зависят от $\dot{\varphi}$, производная второго слагаемого даёт:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{m}{2} r^2 sin^2\alpha \cdot \dot{\varphi}^2\right) = \frac{mr^2}{2} sin^2\theta \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}(\dot{\varphi}^2) = \frac{mr^2}{\cancel{2}} sin^2\theta \cdot \cancel{2}\dot{\varphi}$$

$$M_z = mr^2 sin^2\alpha \cdot \dot{\varphi} = const.$$

Энергия

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 sin^2\alpha \cdot \dot{\varphi}^2) + mgr\,cos\alpha.$$

Выразим $\dot{\varphi}^2$ из выражения для проекции момента:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z}{mr^2 sin^2\alpha}, \dot{\varphi}^2 = \frac{M_z^2}{m^2 r^4 sin^4\alpha}$$

и подставим его в уравнение энергии

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 sin^2\alpha \cdot \frac{M_z^2}{m^2 r^4 sin^4\alpha}\right) + mgr\,cos\alpha =$$

$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 sin^2\alpha \cdot \frac{M_z^2}{m^2 r^4 sin^4\alpha} + mgr\,cos\alpha =$$

$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M_z^2}{2mr^2 sin^2\alpha} + mgr\,cos\alpha.$$

Определим отсюда $\dot{r}$

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = E - \frac{M_z^2}{2mr^2 sin^2\alpha} - mgr\,cos\alpha$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left[E - \frac{M_z^2}{2mr^2 sin^2\alpha} - mgr\,cos\alpha\right]$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{M_z^2}{2mr^2 sin^2\alpha} - mgr\,cos\alpha\right]}$$

Введём так называемую «эффективную потенциальную энергию», определяемую соотношением

$$U_{эфф}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2 sin^2\alpha} + mgr\,cos\alpha$$

Тогда выражение для $\dot{r}$ запишется в виде

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{эфф}(r)\right]}$$

и разделяя переменные, получим:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{эфф}(r)\right]}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{эфф}(r)\right]}} = dt$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\left[E - U_{эфф}(r)\right]}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{2\left[E - U_{эфф}(r)\right]}}\,dr$$

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{эфф}(r)}}$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{эфф}(r)}}.$$

Для определения угла φ, используем выражение для момента $M_z = mr^2 sin^2\alpha \cdot \dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z}{mr^2 sin^2\alpha}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_z}{mr^2 sin^2\alpha}$$

а dt определяется выражением $dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{эфф}(r)}}$, которое было получено выше.

Тогда можно написать

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{эфф}(r)}}} = \frac{M_z}{mr^2 sin^2\alpha}$$

Откуда

$$d\varphi = \frac{M_z}{mr^2 sin^2\alpha} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{эфф}(r)}}$$

и

$$\varphi = \frac{M_z}{\sqrt{2m} sin^2\alpha} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{эфф}(r)}}.$$

Условие $E = U_{эфф}(r)$ представляет собой (при $M_z \neq 0$) кубическое уравнение для r, имеющее два положительных корня; ими определяются положение двух горизонтальных окружностей на поверхности конуса, между которыми заключена траектория.

Задача 30.

Проинтегрировать уравнения движения плоского маятника, точка подвеса которого (с массой m_1 в ней) способна совершать движение в горизонтальном направлении.

Решение

В найденной в задаче 12 функции Лагранжа

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} cos\varphi) + m_2 gl cos\varphi$$

координата x – циклическая, т.к. не входит в неё в явном виде. Поэтому сохраняется обобщенный импульс $P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, совпадающий с горизонтальной компонентой полного импульса системы:

$$P_x = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}cos\varphi) + m_2 glcos\varphi\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}cos\varphi) =$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2}2\dot{x}^2 + m_2 l\dot{\varphi}cos\varphi$$

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\, cos\varphi = const,$$

производные от второго и четвёртого слагаемых равны нулю, т.к. не зависят от скорости.

Всегда можно считать систему, как целое покоящейся; тогда $const = 0$. Проинтегрируем уравнение для P_x

$$\int (m_1 + m_2)\dot{x}dt + \int m_2 l\dot{\varphi}\, cos\varphi dt = const$$

$$(m_1 + m_2)\int \frac{dx}{dt}dt + m_2 l\int \frac{d\varphi}{dt}\, cos\varphi dt = const$$

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l\int cos\varphi d\varphi = const$$

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l\, sin\varphi = const,$$

выражающее собой неподвижность центра инерции системы в горизонтальном направлении.

Зная функцию Лагранжа, запишем энергию системы

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}cos\varphi) - m_2 glcos\varphi,$$

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + 2\frac{m_2}{2}l\dot{x}\dot{\varphi}cos\varphi - m_2 glcos\varphi,$$

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2 l^2}{2}\dot{\varphi}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}cos\varphi - m_2 glcos\varphi$$

и, используя выражение для P_x

$$(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\, cos\varphi = 0$$

получим выражение для энергии, удобное для интегрирования, исключив из него $\dot{x}$:

$$(m_1 + m_2)\dot{x} = -m_2 l\dot{\varphi}\, cos\varphi$$

$$\dot{x} = -\frac{m_2 l\dot{\varphi}\, cos\varphi}{(m_1 + m_2)}$$

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2}\left[-\frac{m_2 l\dot{\varphi}\, cos\varphi}{(m_1 + m_2)}\right]^2 + \frac{m_2 l^2}{2}\dot{\varphi}^2 +$$

$$+ m_2 l\dot{\varphi}cos\varphi \cdot \left[-\frac{m_2 l\dot{\varphi}\, cos\varphi}{(m_1 + m_2)}\right] - m_2 glcos\varphi$$

$$E=\frac{m_1+m_2}{2}\cdot\frac{m_2^2l^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi}{(m_1+m_2)^2}+\frac{m_2l^2}{2}\dot{\varphi}^2-\frac{m_2^2l^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi}{(m_1+m_2)}-m_2glcos\varphi$$

$$E=\frac{m_2^2l^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi}{2(m_1+m_2)}-\frac{m_2^2l^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi}{(m_1+m_2)}+\frac{m_2l^2}{2}\dot{\varphi}^2-m_2glcos\varphi$$

$$E=-\frac{m_2^2l^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi}{2(m_1+m_2)}+\frac{m_2l^2}{2}\dot{\varphi}^2-m_2glcos\varphi$$

$$E=\frac{m_2l^2}{2}\dot{\varphi}^2\left(-\frac{m_2cos^2\varphi}{(m_1+m_2)}+1\right)-m_2glcos\varphi$$

$$E=\frac{m_2l^2\dot{\varphi}^2}{2}\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}cos^2\varphi\right)-m_2gl\,cos\varphi$$

Преобразуем выражение в скобках:

$$cos^2\varphi=1-sin^2\varphi$$

$$1-\frac{m_2}{m_1+m_2}(1-sin^2\varphi)=1-\frac{m_2-m_2sin^2\varphi}{m_1+m_2}=$$

$$=\frac{m_1+m_2-m_2+m_2sin^2\varphi}{m_1+m_2}=\frac{m_1+m_2sin^2\varphi}{m_1+m_2}$$

Энергия примет вид

$$E=\frac{m_2l^2\dot{\varphi}^2}{2}\left(\frac{m_1+m_2sin^2\varphi}{m_1+m_2}\right)-m_2gl\,cos\varphi,$$

откуда выразим $\dot{\varphi}$ и разделим переменные

$$\frac{m_2l^2\dot{\varphi}^2(m_1+m_2sin^2\varphi)}{2(m_1+m_2)}=E+m_2gl\,cos\varphi$$

$$m_2l^2\dot{\varphi}^2(m_1+m_2sin^2\varphi)=2(m_1+m_2)(E+m_2gl\,cos\varphi)$$

$$\dot{\varphi}^2=\frac{2(m_1+m_2)}{m_2l^2}\frac{(E+m_2gl\,cos\varphi)}{m_1+m_2sin^2\varphi}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{2(m_1+m_2)}{m_2l^2}\frac{(E+m_2gl\,cos\varphi)}{m_1+m_2sin^2\varphi}}$$

$$d\varphi=\sqrt{\frac{2(m_1+m_2)}{m_2l^2}}\sqrt{\frac{E+m_2gl\,cos\varphi}{m_1+m_2sin^2\varphi}}dt$$

$$dt=\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2(m_1+m_2)}{m_2l^2}}\sqrt{\frac{E+m_2gl\,cos\varphi}{m_1+m_2sin^2\varphi}}}$$

$$dt=l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1+m_2)}}\sqrt{\frac{m_1+m_2sin^2\varphi}{E+m_2gl\,cos\varphi}}d\varphi.$$

Отсюда

$$t = l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1+m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1+m_2 sin^2\varphi}{E+m_2 gl\,cos\varphi}}\,d\varphi.$$

Выразим координаты $x_2 = x + l\,sin\varphi$, $y_2 = l\,cos\varphi$ частицы m_2 с помощью условия, выражающего неподвижность центра инерции $(m_1 + m_2)x + m_2 l\,sin\varphi = const$, через φ (полагая $const = 0$):

$$(m_1+m_2)x + m_2 l\,sin\varphi = 0$$

$$(m_1+m_2)x = -m_2 l\,sin\varphi$$

$$x = -\frac{m_2 l\,sin\varphi}{m_1+m_2}$$

$$x_2 = x + l\,sin\varphi = -\frac{m_2 l\,sin\varphi}{m_1+m_2} + l\,sin\varphi = \,sin\varphi\left(l - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right) =$$

$$= \,sin\varphi\left(\frac{lm_1}{m_1+m_2}\right).$$

Уравнения для x_2 и y_2 есть не что иное, как уравнение эллипса в параметрической форме. Т.о., мы находим, что траектория этой частицы представляет собой отрезок эллипса с горизонтальной полуосью $lm_1/(m_1+m_2)$ и вертикальной l. При $m_1 \to \infty$ величина $\frac{m_1}{m_1+m_2} \to 1$ и мы возвращаемся к обычному математическому маятнику, качающемуся по дуге окружности радиуса l.

Задача 31.

Найти зависимость координат частицы от времени при движении в поле $U = -\alpha/r$ с энергией $E = 0$ (по параболе).

Решение

В интеграле

$$t = \int\frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}r - \frac{M^2}{m^2}}}$$

делаем подстановку

$$r = \frac{M^2}{2m\alpha}(1+\eta^2) = \frac{p}{2}(1+\eta^2)$$

В результате получаем следующее параметрическое представление искомой зависимости:

$$r = \frac{p}{2}(1+\eta^2),$$

$$t = \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\frac{\eta}{2}(1+\frac{\eta^2}{3}),$$

$$x = \frac{p}{2}(1 - \eta^2),$$
$$y = p\eta\,.$$

Параметр η пробегает значения от$-\infty$ до $+\infty$.

Задача 32.

Проинтегрировать уравнение движения материальной точки в центральном поле $U = -\alpha/r^2$, $\alpha > 0$.

Решение

Найдем, с соответствующим выбором начала отсчета, φ и t:

а) при $E > 0$, $\quad \frac{M^2}{2m} > \alpha \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2m\alpha}} \cos\left[\varphi\sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{M^2}}\right]$,

б) при $E > 0$, $\quad \frac{M^2}{2m} < \alpha \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - m^2}}\ \mathrm{sh}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1}\right]$,

в) при $E < 0$, $\quad \frac{M^2}{2m} < \alpha \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - M^2}}\ \mathrm{ch}\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1}\right]$.

Во всех трех случаях

$$t = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha}\,.$$

В случаях б) и в) частица «падает» на центр по траектории, приближающейся к началу координат при $\varphi \to \infty$. Падение с заданного расстояния r происходит за конечное время, равное

$$\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left\{\sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m} + Er^2} - \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m}}\right\}.$$

Задача 33.

При добавлении к потенциальной энергии $U = -\alpha/r$ малой добавки $\delta U(r)$ траектории финитного движения перестают быть замкнутыми и при каждом обороте перигелий орбиты смещается на малую угловую величину $\delta\varphi$. Определить $\delta\varphi$ для случаев а) $\delta U = \beta/r^2$, б) $\delta U = \gamma/r^3$.

Решение

При изменении r от r_{min} до r_{max} и снова до r_{min} угол $\delta\varphi$ меняется на величину, которую представим в виде

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}dr$$

(с целью избежать ниже фиктивно расходящихся интегралов). Положим $U = -\alpha/r + \delta U$ и разложим подынтегральное значение по степеням δU; нулевой член разложения дает 2π, а член первого порядка – искомое смещение $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{2m\delta U \cdot dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi} r^2\delta U d\varphi\right), \qquad (1)$$

где от интегрирования по dr мы перешли к интегрированию по $d\varphi$ вдоль траектории «невозмущенного» движения.

В случае а) интегрирование в (1) тривиально и дает:

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

(p – параметр невозмущенного эллипса). В случае б) $r^2\delta U = -\gamma/r$, и, взяв $1/r$, получим:

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}.$$

3.3 Задачи для самостоятельного решения

Задачи на уравнения движения материальной точки

1. Проинтегрировать уравнение движения $\ddot{x} = k\sin\frac{x}{a}$, если $x(0) = \pi a, \dot{x}(0) = 2\sqrt{ka}$ (k,a>0).
2. Заряд e<0 в начальный момент времени находился на расстоянии h от бесконечной проводящей плоскости. Определить время, за которое заряд достигнет плоскости.
3. Орудие установлено на холме высоты h (см. рисунок 16). Начальная скорость снаряда $\vec{v}_0$ направлена под углом α к горизонту. Определить, при каком значении угла α_1 дальность полёта снаряда максимальна (сопротивлением воздуха пренебречь).

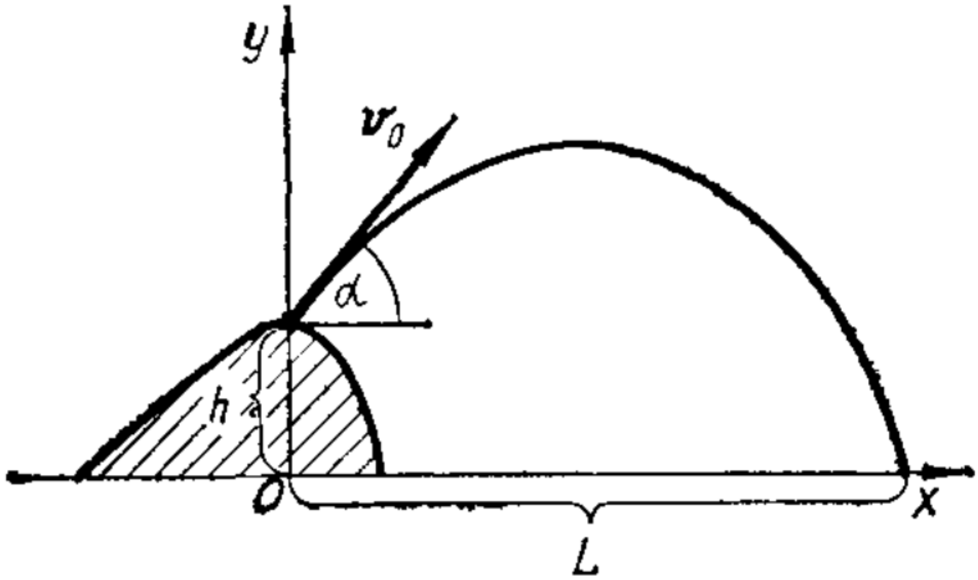

Рисунок 16 – К задаче 3

4. Шарик массы m падает на горизонтальную плоскость с высоты h. Начальная скорость шарика равна нулю. Движение происходит в среде с квадратичным по скорости сопротивлением.
   Найти высоту подъёма шарика после упругого удара о плоскость.
5. Тело движется в однородном поле тяжести Земли. Сила сопротивления среды пропорциональна квадрату скорости. В начальный момент времени тело находилось на высоте H, а его скорость равнялась нулю.
   Найти зависимость скорости от времени, скорости от высоты и высоты от времени.
6. Заряд e движется в поле $\vec{E} = E_0 \sin\frac{z}{a} \cdot \vec{n}_x$ электрического ондулятора. В начальный момент времени $\vec{r}(0) = 0, \vec{v} = v_0\vec{n}_z$. Найти закон движения заряда.
7. Электрон движется в магнитном поле с напряжённостью $\vec{H} = H_0 \cos ay \cdot \vec{n}_z$. Найти закон движения и траекторию электрона, если $\vec{r}(0) = 0, \vec{v}(0) = \dot{y}_0\vec{n}_y$.
8. Частица массы m движется под действием силы $\vec{F} = (-m\lambda^2 x,\ -m\lambda^2 y, 0)$ и $\vec{F}^d = (-2m\lambda\dot{x}, -2m\lambda\dot{y}, 0)$ силы сопротивления , где λ - постоянный коэффициент.
   Найти уравнение траектории, если $x(0) = a, y(0) = 0, z(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = \lambda a, \dot{z} = 0$.
9. Точка движется в плоскости Oxy под действием силы $\vec{F} = (a\dot{x}, b\dot{y}, 0)$. Найти уравнение траектории.
10. Точка движется вдоль оси x под действием силы $F_x = \alpha x - \gamma x^3$. Найти закон движения $x(t)$, если $x(0) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}, \dot{x}(0) = 0$.

3.4 Тестовые задания

1. Как называется движение системы с одной степенью свободы?
   A) Циклическим
   B) Финитным
   C) Центральным
   D) Одномерным
   E) Инфинитным
2. Какой вид имеет функция Лагранжа для одномерного движения системы, находящейся в постоянных внешних полях?
   A) $L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$
   B) $L = \frac{1}{2}\mu V^2 + E_{внутр}$
   C) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$
   D) $L = -\vec{F}\vec{r}$
   E) $L = \int L(q, \dot{q}, t)dt$
3. Как определяется время движения в случае одномерного движения?
   A) $t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} + const$
   B) $t = \sqrt{\frac{2}{m}}\int \frac{dx}{\sqrt{U(x)}} + const$
   C) $t = \sqrt{\frac{1}{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} + const$
   D) $t = \int \frac{dx}{\sqrt{E}} + const$
   E) $t = m\int \frac{dx}{\sqrt{E}} + const$
4. Если область движения материальной точки ограничена двумя точками остановки, то такое движение называется:
   A) Центральным
   B) Финитным
   C) Симметричным
   D) Аддитивным
   E) Циклическим
5. Если область движения материальной точки не ограничено или ограничена одной точкой остановки с одной стороны, то движение называется:
   A) Симметричным
   B) Аддитивным
   C) Циклическим
   D) Центральным
   E) Инфинитным

6. Как называют точки, в которых потенциальная энергия равна полной энергии?
A) Покоя
B) Ремиссия
C) Остановки
D) Диссипации
E) Возврата
7. Определяется период колебаний в случае одномерного движения?
A) $t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E+U(x)}}$
B) $t = \sqrt{2m} \int \frac{dx}{\sqrt{E}}$
C) $t = \sqrt{\frac{2m}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{E+U(x)}}$
D) $t = \int \frac{dx}{\sqrt{U(x)}}$
E) $t = \sqrt{2m} \int \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$
8. Как называется силовое поле, в котором потенциальная энергия частицы зависит только от расстояния до определённой точки (центра)?
A) Центральным
B) Симметричным
C) Циклическим
D) Финитным
E) Диссипативным
9. Чему равна энергия системы в точках остановки?
A) Кинетической энергии
B) Удвоенному импульсу
C) Половине полной энергии
D) Потенциальной энергии
E) Нулю
10. Чему равна потенциальная энергия на дне потенциальной ямы?
A) Половине полной энергии
B) Нулю
C) Кинетической энергии
D) Удвоенной кинетической энергии
E) Полной энергии
11. Как называется обобщённая координата, которая не входит в функцию Лагранжа явным виде?
A) Приведённая
B) Одномерная
C) Секториальная
D) Диссипатвной
E) Циклическая

12. Как называется масса, определяемая выражением $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$?

A) Потенциальной
B) Приведённой
C) Обобщённой
D) Одномерной
E) Параметрической

13. Укажите выражение для секториальной скоростью?

A) $\dot{f} = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$
B) $\dot{f} = rp$
C) $\dot{f} = \frac{\sum m_a \vec{r}_a}{\sum m_a}$
D) $\dot{f} = \frac{M}{2m}$
E) $\dot{f} = M' + \mu[\vec{R}\vec{V}]$

14. Утверждение о том, что за равные промежутки времени радиус-вектор движущейся точки описывает равные площади, называется:

A) Законом Ньютона
B) Принципом Гамильтона
C) Теоремой Эйлера
D) Правилом Мопертюи
E) Вторым законом Кеплера

15. Какая величина называется центробежной энергией?

A) $\frac{M^2}{2mr^2}$
B) $\sum \vec{r}_a p_a$
C) $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
D) $\frac{\sum m_a r_a}{\sum m_a}$
E) $\sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$

16. Какая энергия определяется выражением: $\frac{M^2}{2mr^2}$

A) Полная
B) Кинетическая
C) Центральная
D) Дополнительная
E) Центробежная

17. Укажите условие инфинитного движения материальной точки:

A) $E = -1$
B) $E \to 0$
C) $E > 0$
D) $E < 0$

E) $E \to \infty$

18. Укажите условие финитного движения материальной точки:

A) $E = 0$

B) $E \to 0$

C) $E > 0$

D) $E < 0$

E) $E \to \infty$

19. Выберите уравнение конического сечения:

A) $\frac{p}{r} = L + \sum \frac{m_a \upsilon_a^2}{2}$

B) $\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$

C) $\frac{p}{r} = S + \int L(q, \dot{q}, t)dt$

D) $\frac{p}{r} = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$

E) $\frac{p}{r} = m_a \frac{dv_a}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$

20. Как называется ближайшая к фокусу точка траектории?

A) Перигелий

B) Центр

C) Афелий

D) Ремиссия

E) Осциллятор

21. Как называется наиболее удалённая от точки точка траектории?

A) Ремиссия

B) Осциллятор

C) Афелий

D) Перигелий

E) Центр

22. Что означает е в уравнении конического сечения: $\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$?

A) Параметр

B) Угол

C) Эксцентриситет

D) Энергия

E) Полуось

23. Укажите условие эллиптического движения материальной точки:

A) $E = 0$

B) $E > 0$

C) $E \to \infty$

D) $E \to 0$

E) $E < 0$

24. Укажите условие гиперболического движения материальной точки:

A) $E = 0$

B) $E \to 0$
C) $E > 0$
D) $E < 0$
E) $E \to \infty$

25. Укажите условие параболического движения материальной точки:
A) $E \to 0$
B) $E > 0$
C) $E < 0$
D) $E = 0$
E) $E \to \infty$

26. Какова траектория материальной точки, если её полная энергия меньше нуля?
A) Прямая
B) Парабола
C) Циклоида
D) Гипербола
E) Эллипс

27. Какова траектория материальной точки, если её полная энергия равна нулю?
A) Гипербола
B) Парабола
C) Циклоида
D) Эллипс
E) Прямая

28. Какова траектория материальной точки, если её полная энергия больше нуля?
A) Циклоида
B) Парабола
C) Прямая
D) Гипербола
E) Эллипс

29. Укажите условие эллиптического движения материальной точки:
A) $e = 1$
B) $e > 1$
C) $e \to \infty$
D) $e \to 1$
E) $e < 1$

30. Укажите условие гиперболического движения материальной точки:
A) $e = 1$
B) $e \to 1$
C) $e > 1$
D) $e < 1$
E) $e \to \infty$

31. Укажите условие параболического движения материальной точки:

A) $e \to 1$
B) $e > 1$
C) $e < 1$
D) $e = 1$
E) $e \to \infty$

32. Какова траектория материальной точки, если её эксцентриситет меньше единицы?
A) Прямая
B) Парабола
C) Циклоида
D) Гипербола
E) Эллипс

33. Какова траектория материальной точки, если её эксцентриситет равен единицы?
A) Гипербола
B) Парабола
C) Циклоида
D) Эллипс
E) Прямая

34. Какова траектория материальной точки, если её эксцентриситет больше единицы?
A) Циклоида
B) Парабола
C) Прямая
D) Гипербола
E) Эллипс

35. Чему равен период обращения точки по эллиптической орбите?
A) $T = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$
B) $T = \pi a \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$
C) $T = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$
D) $T = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| do$
E) $T = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$

36. Как определяется эксцентриситет орбиты материальной точки?
A) $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$
B) $e = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

C) $e = \pi a \sqrt{\dfrac{m}{2|E|^3}}$

D) $e = \dfrac{p_0^2}{2}\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)$

E) $e = \dfrac{\rho(\chi)}{\sin \chi}\left|\dfrac{d\rho}{d\chi}\right| do$

37. Каким выражением определяется параметр орбиты?

A) $\vec{p} = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$

B) $\vec{p} = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$

C) $\vec{p} = \dfrac{\sum m_a r_a}{\sum m_a}$

D) $p = \frac{M^2}{m\alpha}$

E) $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

38. Как определяется большая полуось эллиптической орбиты?

A) $a = \frac{e}{p-e^2}$

B) $a = \frac{p}{1-e^2}$

C) $a = \frac{p}{p+e^2}$

D) $a = \frac{p+1}{1-e^2}$

E) $a = \frac{e}{1+e^2}$

39. Каким выражением определяется малая полуось эллиптической орбиты?

A) $b = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$

B) $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$

C) $b = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$

D) $b = \frac{p}{\sqrt{p-e^2}}$

E) $b = \frac{p}{\sqrt{e-p^2}}$

40. Как определяется большая полуось эллиптической орбиты в поле $U = -\frac{\alpha}{r}$?

A) $a = \frac{\alpha}{2m|E|}$

B) $a = \frac{\alpha+1}{|E|}$

C) $a = \frac{E}{2|\alpha|}$

D) $a = \frac{\alpha}{|E|+1}$

E) $a = \frac{\alpha}{2|E|}$

41. Каким выражением определяется малая полуось эллиптической орбиты $U = -\frac{\alpha}{r}$?
   A) $b = \frac{2M}{\sqrt{m|E|}}$
   B) $b = \frac{m}{\sqrt{2M|E|}}$
   C) $b = \frac{E}{\sqrt{m|M|}}$
   D) $b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$
   E) $b = \frac{M}{\sqrt{m|E|}}$
42. В пространстве движутся две материальные точки массами 2 г и 8 г. Найти приведённую массу системы.
   A) 1,6
   B) 4,3
   C) 0,625
   D) 17
   E) 0,3

Глава 4 Столкновения частиц

4.1 Вопросы для самопроверки

1. Что такое самопроизвольный распад? Чему равна энергия распада? В каком случае распад возможен?
2. Как определяется абсолютное значение импульсов распавшихся частиц? Как направлены импульсы? Чему равны скорости распавшихся частиц в системе центра масс?
3. Какое столкновение называется упругим? Как связаны скорости частиц до столкновения в системе центра масс с их скоростями в лабораторной системе? Что можно сказать об импульсах частиц после их столкновения?
4. Что такое рассеяние частиц? Что такое прицельное расстояние? Как выражается энергия и момент через скорость на бесконечности и прицельное расстояние?
5. Что такое эффективное сечение рассеяния? Чем оно определяется? Как зависит эффективное сечение от угла рассеяния χ? От телесного угла do ?
6. Чему равно эффективное рассеяние в случае кулоновского поля? Как называется эта формула? Для какой системы отсчёта она справедлива? Формула для эффективного сечения как функции от потери энергии.
7. При каком условии углы отклонения малы? Чему равно эффективное сечение рассеяния в л-системе при малых углах?

4.2 Решение задач

Задача 34.

Найти связь между углами вылета θ_1, θ_2 (в л-системе) распадных частиц при распаде на две частицы.

Решение

В ц-системе углы вылета обеих частиц связаны посредством $\theta_{10} = \pi - \theta_{20}$. Обозначая θ_{10} просто как θ_0, пишем:

$$V + v_{10}cos\theta_0 = v_{10}sin\theta_2 ctg\theta_1,$$
$$V - v_{20}cos\theta_0 = v_{20}sin\theta_0 ctg\theta_2.$$

Из этих двух равенств надо исключить θ_0. Для этого определяем сначала из них $cos\theta_0$ и $sin\theta_0$, после чего составляем сумму $cos^2\theta_0 + sin^2\theta_0 = 1$. Учитывая также, что $v_{10}/v_{20} = m_2/m_1$, найдем в результате следующее уравнение:

$$\frac{m_2}{m_1}sin^2\theta_2 + \frac{m_1}{m_2}sin^2\theta_1 - 2sin\theta_1 sin\theta_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) =$$
$$= \frac{2\varepsilon}{(m_1 + m_2)V^2}sin^2(\theta_1 + \theta_2).$$

Задача 35.

Найти распределение распадных частиц по направлениям вылета в л-системе.

Решение

При $v_0 > V$ подставляем со знаком плюс перед корнем и получаем искомое распределение в виде

$$\frac{sin\theta\, d\theta}{2}\left[2\frac{V}{v_0}cos\theta + \frac{1 + \frac{V^2}{v_0^2}cos2\theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2}sin^2\theta}}\right](0 \le \theta \le \pi).$$

При $v_0 < V$ надо учитывать обе возможные связи θ_0с θ. Поскольку при увеличении θ одно из соответствующих ему значений θ_0 растет, а другое убывает, то надо взять разность (а не сумму) выражений $d\,cos\theta_0$с двумя знаками перед корнем. В результате получим:

$$sin\theta\, d\theta \frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}cos2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}sin^2\theta}} \qquad (0 \le \theta \le \theta_{max})$$

Задача 36.

Определить интервал значений, которые может иметь угол θ между направлениями вылеты обеих распадных частиц в л-системе.

Решение

Угол θ есть сумма $\theta_1 + \theta_2$ углов; проще всего вычисляется тангенс этого угла. Исследование экстремумов получающегося выражения приводит к следующим интервалам возможных значений θ в зависимости от относительной величины V и v_{10}, v_{20}(для определенности полагаем всегда $v_{20} > v_{10}$):

$$0 < \theta < \pi, \quad \text{если} v_{10} < V < v_{20};$$
$$\pi - \theta_m < \theta < \pi, \quad \text{если} \quad V < v_{10};$$
$$0 < \theta < \theta_m, \quad \text{если} \quad V > v_{20}.$$

Причем значение θ_m дается формулой

$$sin\theta_m = \frac{V(v_{10} + v_{20})}{V^2 + v_{10}v_{20}}$$

Задача 37.

Выразить скорости обеих частиц после столкновения движущейся частицы (m_1) с неподвижной (m_2) через их углы отклонения в л-системе.

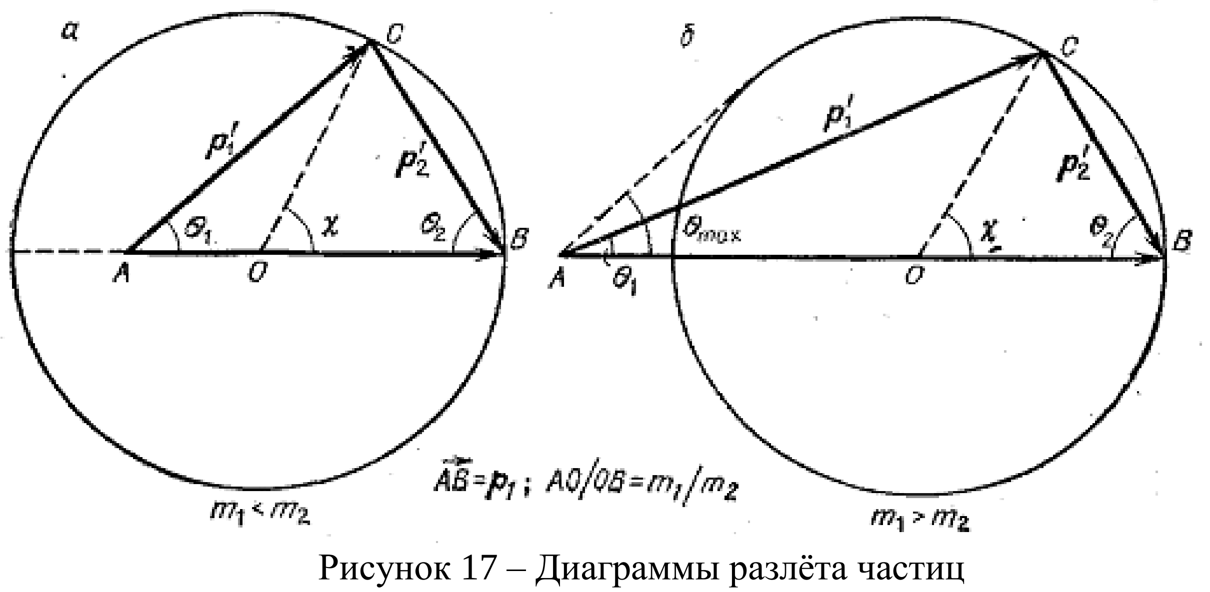

Рисунок 17 – Диаграммы разлёта частиц

Решение

Из рис. имеем $p_2' = 2 \cdot OB \cdot cos\theta_2$ или $v_2' = 2v\frac{m}{m_2}cos\theta_2$. Для импульса же $p_1' = AC$ имеем уравнение (см. рисунок 17):

$$OC^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2AO \cdot p_1' cos\theta_1$$

или

$$(\frac{v_1'}{v})^2 - \frac{2m}{m_2}\frac{v_1'}{v}cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_2^2 - m_1^2 sin^2\theta_1}$$

(при $m_1 > m_2$перед корнем допустимы оба знака, при $m_2 > m_1$–знак +).

Задача 38.

Определить эффективное сечение рассеяния частиц от абсолютно твердого шарика радиуса a (т.е. при законе взаимодействия $U = \infty$ при $r < a$ и $U = 0$ при $r > a$).

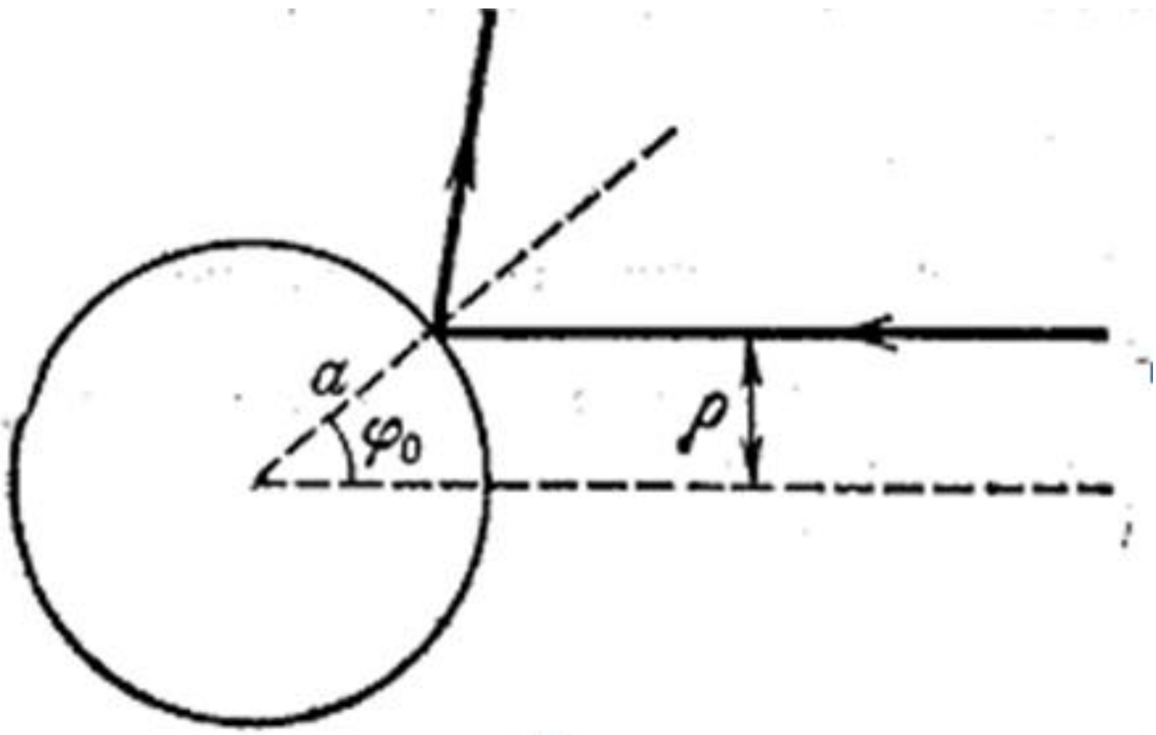

Рисунок 18 – К задача 38

Решение

Так как вне шарика частица движется свободно, а внутрь него проникнуть вообще не может, то траектория складывается из двух прямых, расположенных симметрично относительно радиуса, проведенного в точку их пересечения с шариком (см. рисунок 18). Как видно из рисунка

$$\rho = a\, sin\varphi_0 = a\, sin\frac{\pi-\chi}{2} = a\, cos\frac{\chi}{2}.$$

После подстановки, получим:

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} sin\chi d\chi = \frac{a^2}{4} do, \qquad (1)$$

т.е. в ц-системе рассеяние изотропно. Интегрируя $d\sigma$ по всем углам, найдем, что полное сечение $\sigma = \pi a^2$в соответствии с тем, что прицельная площадь, в которую должна попасть частица для того, чтобы рассеяться, есть площадь сечения шарика.

Для перехода к л-системе надо выразить χ через θ_1. При $m_1 < m_2$ (m_1– масса частиц, m_2- масса шариков) получим:

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4}\left[2\frac{m_1}{m_2}cos\theta_1 + \frac{1+\frac{m_1^2}{m_2^2}cos2\theta_1}{\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}sin^2\theta_1}}\right]do_1$$

($do_1 = 2\pi sin\theta_1 d\theta_1$). Если же $m_2 < m_1$, то

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1+\frac{m_1^2}{m_2^2}cos2\theta_1}{\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}sin^2\theta_1}}\right]do_1.$$

При $m_1 = m_2$ имеем:

$$d\sigma_1 = a^2|cos\theta_1|do_{1,}$$

что можно получить и прямой подстановкой $\chi = 2\theta_1$.

Для первоначально покоившихся шариков имеем всегда $\chi = \pi - 2\theta_2$, и подстановка в (1) дает:

$$d\sigma_2 = a^2|cos\theta_2|do_2.$$

Задача 39.

Для того же случая выразить эффективное сечение как функцию энергии ε, теряемой рассеиваемыми частицами.

Решение

Энергия, теряемая частицей m_2. Имеем:

$$\varepsilon = E'_2 = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2} v_\infty^2 sin^2\frac{\chi}{2} = \varepsilon_{max} sin^2\frac{\chi}{2},$$

Откуда

$$d\varepsilon = {}^1\!/_2\, \varepsilon_{max} sin\chi d\chi,$$

и, подставляя в формулу (1), получим:

$$d\sigma = \pi a^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{max}}.$$

Распределение рассеянных частиц по значениям ε оказывается однородным во всем интервале ε от нуля до ε_{max}.

Задача 40.

Как зависит эффективное сечение от скорости v_∞ частиц при рассеянии в поле $U \infty r^{-n}$?

Решение

Если потенциальная энергия есть однородная функция порядка $k = -n$, то для подобных траекторий $\rho \infty v^{-2/n}$ или

$$\rho = v_\infty^{-2/n} f(\chi)$$

(углы отклонения χ для подобных траекторий одинаковы). Найдем, что

$$d\sigma \infty v_\infty^{-4/n} do.$$

Задача 41.

Определить эффективное сечение для «падения» частиц на центр поля $U = -\alpha/r^2$.

Решение

«Падают» на центр те, частицы, для которых выполняется условие $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$, т. е. у которых прицельное расстояние не превышает значения $\rho_{max} = \sqrt{2\alpha/mv_\infty^2}$. Поэтому искомое эффективное сечение

$$\sigma = \pi\rho^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}.$$

Задача 42.

Определить эффективное сечение для «падения» частиц на центр поля $U = -\alpha/r^n (n > 2, \alpha > 0)$.

Решение

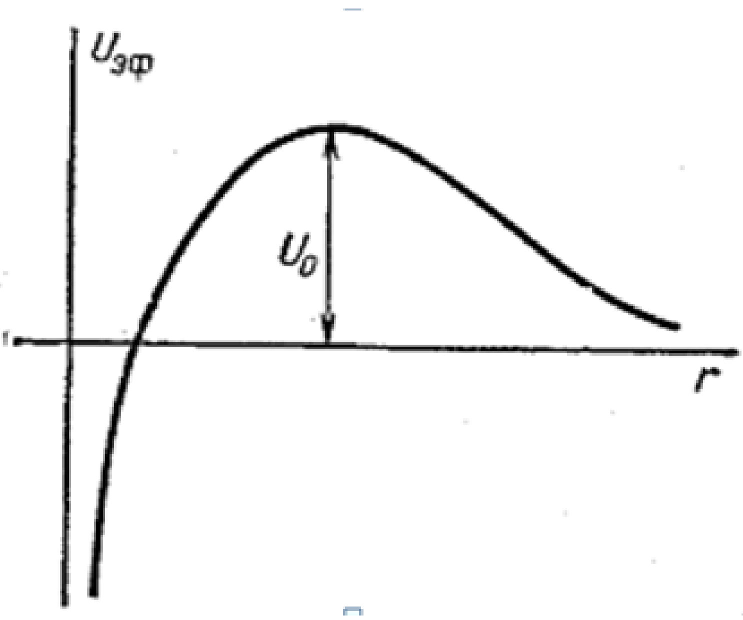

Рисунок 19 – Зависимость эффективной энергии от расстоянии в задаче 42

Зависимость эффективной потенциальной энергии

$$U_{эфф} = \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

от rимеет вид изображенный на рисунке с максимальным значением

$$(U_{эфф})_{max} = U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2} (\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{an})^{\frac{n}{n-2}}.$$

«Падают» на центр те частицы, у которых $U_0 < E$. Определяя ρ_{max}из условия $U_0 = E$, получим:

$$\sigma = \pi n(n-2)^{\frac{2-n}{n}} (\frac{\alpha}{mv_\infty^2})^{\frac{2}{n}}.$$

Задача 43.

Определить эффективное сечение для падения частиц (с массами m_1) на поверхность сферического тела (с массой m_2 и радиусом R), к которой они притягиваются по закону Ньютона.

Решение

Условие падения заключается в неравенстве $r_{min} < R$, где r_{min} – ближайшая к центру сферы точка траектории частицы. Наибольшее допустимое значение ρ определятся условием $r_{min} = R$, что сводится к решению уравнения $U_{эфф}(R) = E$ или

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2},$$

причем $\alpha = \gamma m_1 m_2$ (γ – гравитационная постоянная), и мы положили $m \approx m_1$, считая, что $m_2 \gg m_1$. Находя отсюда ρ_{max}^2, получим:

$$\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{2\gamma m_2}{R v_\infty^2}\right).$$

При$v_\infty \to \infty$эффективное сечение стремится, естественно, к геометрической площади сечения сферы.

Задача 44.

Восстановить вид рассеивающего поля $U(r)$по заданной зависимости эффективного сечения от угла рассеяния при заданной энергии E; предполагается, что $U(r)$ – монотонно убывающая функция r(поле отталкивания),причем $U(0) > E, U(\infty) = 0$.

Решение

Интегрирование $d\sigma$ по углу рассеяния определяет согласно формуле

$$\int_\chi^\pi \frac{d\sigma}{d\chi} d\chi = \pi\rho^2$$

квадрат прицельного расстояния, так что функцию(χ), а с ней ($\chi(\rho)$) тоже можно считать заданной.

Вводим обозначения:

$$s = 1/r, \quad x = 1/\rho^2, \ \omega = \sqrt{1 - U/E}.$$

Тогда запишем в виде:

$$\frac{\pi - \chi(x)}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{x\omega^2 - s^2}},$$

где $s_0(x)$– корень уравнения

$$x\omega^2(s_0) - s_0^2 = 0.$$

Уравнение $\frac{\pi-\chi(x)}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{x\omega^2-s^2}}$ – интегральное уравнение для функции $\omega(s)$. Разделив обе стороны на $\sqrt{\alpha - x}$ и проинтегрировав по dxв пределах от нуля до α, найдем:

$$\int_0^\alpha \frac{\pi-\chi(x)}{2}\frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} = \int_0^\alpha \int_0^{s_0(x)} \frac{ds\,dx}{\sqrt{(x\omega^2 - s^2)(\alpha - x)}} =$$
$$= \int_0^{s_0(\alpha)} \int_{x(s_0)}^{\alpha} \frac{dx\,ds}{\sqrt{(x\omega^2 - s^2)(\alpha - x)}} = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{\omega}.$$

Или, интегрируя по частям в левой стороне равенства:

$$\pi\sqrt{\alpha} - \int_0^\alpha \sqrt{\alpha - x}\frac{d\chi}{dx}dx = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{\omega}.$$

Полученное соотношение дифференцируем по α, после чего вместо $s_0(\alpha)$пишем просто s, соответственно чему заменяем α на s^2/ω^2; написав равенство в дифференциалах, получим:

$$\pi d\left(\frac{s}{\omega}\right) - \frac{1}{2}d\left(\frac{s^2}{\omega_2}\right)\int_0^{s^2/\omega_2} \frac{x'(x)dx}{\sqrt{\frac{s^2}{\omega^2} - x}} = \frac{\pi}{\omega}ds$$

или

$$-\pi d\ \ln\omega = d\left(\frac{s}{\omega}\right)\int_0^{s^2/\omega^2} \frac{\chi'(x)dx}{\sqrt{\frac{s^2}{\omega^2} - x}}.$$

Это уравнение интегрируется непосредственно, причем в правой стороне следует изменить порядок интегрирования по dxи$d(s/\omega)$. Учитывая, что при $s = 0$ (т. е. $r \to \infty$)должно быть $\omega = 1$ (т. е. $U = 0$), и возвращаясь к исходным переменным r и ρ, получим окончательный результат (в двух эквивалентных формах):

$$\omega = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{r\omega}^{\infty} Arch\frac{\rho}{r\omega}\cdot\frac{d\chi}{d\rho}d\rho\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{r\omega}^{\infty}\frac{\chi(\rho)d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2\omega^2}}\right\}.$$

Этой формулой определяется в неявном виде зависимость $\omega(r)$(а тем самым и $U(r)$) при всех $r > r_{min}$, т.е. в той области значений r, которая фактически проходится рассеиваемой частицей с заданной энергией E.

4.3 Тестовые задания

1. Распад частицы на две другие частицы, которые после распада движутся независимо, происходящий без воздействия внешних сил, называется:
   A) Свободным
   B) Самопроизвольным
   C) Когерентным
   D) Собственным
   E) Вынужденным
2. Чему равна энергия распада?
   A) $\varepsilon = A_{\text{внутр}} - A_{\text{внутр}1} - A_{\text{внутр}2}$
   B) $\varepsilon = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$
   C) $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$
   D) $\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$
   E) $\varepsilon = E' + \vec{V}\vec{p} + \frac{\mu V^2}{2}$
3. Какое условие для энергии распада должно выполняться, чтобы распад стал возможным?
   A) $E = 0$
   B) $E \to 0$
   C) $E > 0$
   D) $E < 0$
   E) $E \to \infty$
4. Столкновение частиц, не сопровождающееся изменением их внутреннего состояния, называется:
   A) Адиабатным
   B) Неупругим
   C) Инертным
   D) Финитным
   E) Упругим

5. Как называется отклонение частицы в поле неподвижного силового центра?
   A) Ремиссия
   B) Рассеяние
   C) Диссипация
   D) Инерция
   E) Столкновение
6. Как называется отношение числа частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале между $\chi u \chi + d\chi$ к числу частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка?
   A) Эффективное сечение
   B) Неупругий процесс
   C) Резерфордовское отклонение
   D) Малая вариация
   E) Одномерная осцилляция
7. Укажите формулу Резерфорда:
   A) $d\sigma = \frac{1}{2}\sum(m_{ik}k_i k_k - k_{ik}x_i x_k)$
   B) $d\sigma = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_\iota} + \sqrt{2m}\int \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$
   C) $d\sigma = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega^2 r^2 - \left(\vec{\Omega}\vec{r}\right)^2\right\}$
   D) $d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2m\upsilon_\infty^2}\right)^2 \frac{do}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$
   E) $d\sigma = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\lambda t + \delta)$
8. Как определяется эффектное сечение рассеяния?
   A) $d\sigma = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$
   B) $d\sigma = \cos(\omega t + \alpha)$
   C) $d\sigma = \frac{dN}{n}$
   D) $d\sigma = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$
   E) $d\sigma = \sum \vec{r}_a p_a$
9. Укажите формулу Резерфорда для эффективного сечения рассеиваемых частиц:
   A) $d\sigma = \sum m_{ik}k_k + \sum k_{ik}x_k$
   B) $d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2m\upsilon_\infty^2}\right)^2 \frac{do}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$
   C) $d\sigma = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}I_{uk}\Omega_i\Omega_k$

D) $d\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$

E) $d\sigma = \frac{dv_a}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$

10. Какой вид имеет формула для эффективного сечения как функции потери энергии?

A) $d\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$

B) $d\sigma = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$

C) $d\sigma = \frac{dv_a}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$

D) $d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 \upsilon_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}$

E) $d\sigma = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}\vec{r})^2\right\}$

Глава 5 Малые колебания

5.1 Вопросы для самопроверки

1. Какие колебания называют малыми? свободными? Что такое одномерный осциллятор? Какой вид имеет функция Лагранжа для одномерного осциллятора?
2. Дифференциальное уравнение движения одномерного осциллятора и его решение.
3. Чему равна частота его колебаний? От чего она зависит? Зависит ли она от начальных условий?
4. Что такое амплитуда? Фаза? От чего зависит начальное значение фазы?
5. Что можно сказать о потенциальной энергии осциллятора, если он находится в состоянии устойчивого равновесия? Чему равна энергия системы, совершающей малые колебания?
6. Что такое вынужденные колебания? Функция Лагранжа для системы, совершающей вынужденные колебания? Чем она отличается от функции Лагранжа одномерного осциллятора?
7. Какой вид имеет функция Лагранжа для колебания системы со многими степенями свободы? Уравнения движения?
8. Какие координаты называются нормальными? Какой вид имеет функция Лагранжа для системы со многими степенями свободы в нормальных координатах?
9. Какие степени свободы имеет молекула? Сколько колебательных степеней свободы имеет молекула в общем случае? В случае, когда все атомы расположены на одной прямой?

10. Что такое диссипация? Что такое затухающие колебания? Как можно записать обобщённую силу трения, действующую на систему, совершающую одномерные малые колебания?
11. Какой вид приобретает уравнение движения в случае затухающих колебаний? Чему равен коэффициент затухания? Решение уравнения затухающих колебаний: три случая - $\lambda < \omega_0, \lambda > \omega_0, \lambda = \omega_0$.
12. Чему равна частота затухающих колебаний? По какому закону в среднем убывает энергия системы, совершающей затухающие колебания?
13. Какой вид имеют обобщённые силы трения для системы со многими степенями свободы? Что такое диссипативная функция? Убыль энергии через диссипативную функцию.
14. Уравнение движения вынужденных колебаний при наличии сил трения и его решение. При какой частоте амплитуда колебания максимальна?
15. Что можно сказать о движении частицы в быстро осциллирующем поле? Как происходит усреднённое по осцилляциям движение частицы в быстро осциллирующем поле?

5.2 Решение задач

Задача 45.

Выразить амплитуду и начальную фазу колебаний через начальные значения x_0 и v_0 координаты и скорости.
Ответ:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \qquad tg\alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

Задача 46.

Найти отношение частот w и w' колебаний двух двухатомных молекул, состоящих из атомов различных изотопов; массы атомов равны соответственно m_1, m_2 и m_1', m_0'.

Решение

Поскольку атомы изотопов взаимодействуют одинаковым образом, то $k = k'$. Роль же коэффициентов m в кинетических энергиях молекул играют их приведенные массы. Находим:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m_1' m_2' (m_1 + m_2)}}.$$

Задача 47.

Найти частоту колебаний точки с массой m, способной двигаться по прямой и прикрепленной к пружине, другой конец которой закреплен в точке А (см. рисунок 19) на расстоянии l, натянута силой F.

Решение

Потенциальная энергия пружины (с точностью до малых величин высшего порядка) равна произведению силы F на удлинение δl пружины. При $x \ll l$ имеем:

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx x^2/2l,$$

так что $U = Fx^2/2l$. Поскольку кинетическая энергия есть $m\dot{x}^2/2$, то

$$\omega = \sqrt{F/ml}\,.$$

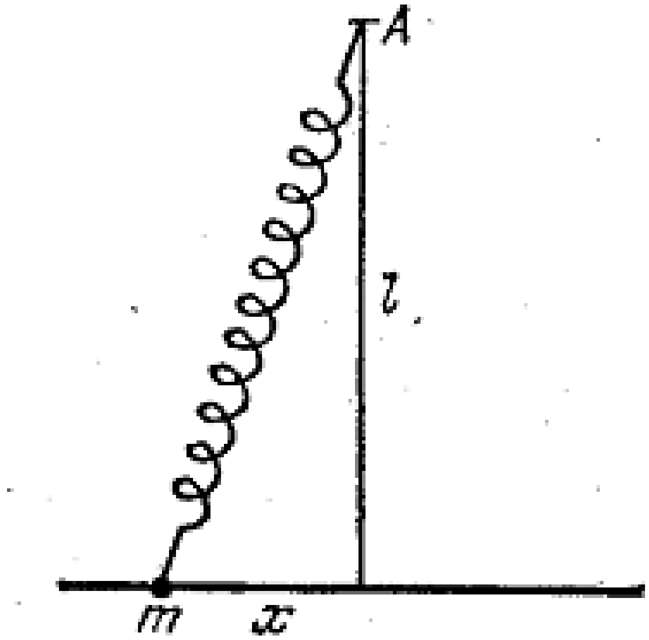

Рисунок 19 – К задаче 47

Задача 48.

Найти частоту колебаний точки с массой m, которая движется по окружности радиуса r, и прикрепленной к пружине, другой конец которой закреплен в точке А (см. рисунок 20) на расстоянии l, натянута силой F.

Решение

В этом случае удлинение пружины (при $\varphi \ll 1$)

$$\delta l = \sqrt{r^2 + (l+r)^2 - 2r(l+r)cos\varphi} - l \approx \frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2.$$

Кинетическая энергия $T = {}^1\!/_2\, mr^2\dot{\varphi}^2$. Отсюда частота

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}}\,.$$

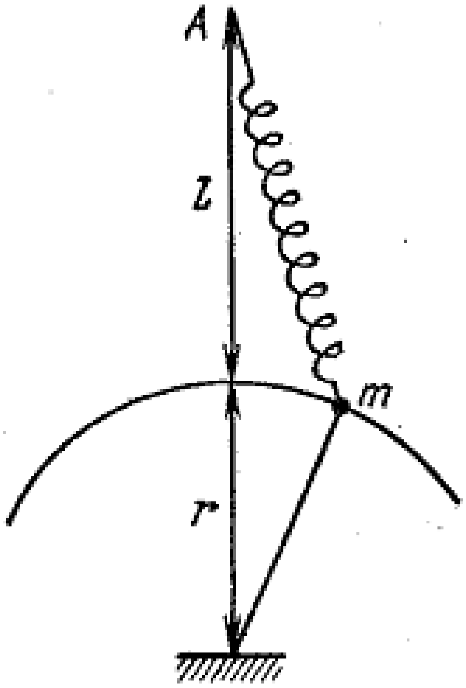

Рисунок 20 – К задаче 48

Задача 49.

Найти частоту колебаний изображенного на рис.2 маятника, точка подвеса которого (с массой m_1 в ней) способна совершать движение в горизонтальном направлении.

Решение

При $\varphi \ll 1$ находим:

$$T = \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m^1 + m_2)} \dot{\varphi}^2, \qquad U = \frac{m_2 g l}{2} \varphi^2.$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}}.$$

Задача 50.

Определить форму кривой, при качании вдоль которой (в поле тяжести) частота колебаний не зависит от амплитуды.

Решение

Поставленному условию будет удовлетворять такая кривая, при движении вдоль которой потенциальная энергия частиц будет $U = ks^2/2$ где s – длина дуги, отсчитываемая от положения равновесия; при этом кинетическая энергия будет кинетическая энергия $T = m\dot{s}^2/2$ (m – масса частицы) и частота колебаний будет $\omega = \sqrt{k/m}$ вне зависимости от начального значения s.

Но в поле тяжести $U = mgy$, где y – вертикальная координата. Поэтому имеем:$\frac{ks^2}{2} = mgy$ или

$$y = \frac{\omega^2}{2g} s^2.$$

С другой стороны , $ds^2 = dx^2 + dy^2$ откуда

$$x = \int \sqrt{(\frac{ds}{dy})^2 - 1}\, dy = \int \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1} dy\,.$$

Интегрирование удобно произвести, сделав подстановку

$$y = \frac{g}{4\omega^2}(1 - cos\xi).$$

Тогда получим:

$$x = \frac{g}{4\omega^2}(\xi + sin\xi).$$

Эти два равенства определяют в параметрическом виде уравнение искомой кривой; она представляет собой циклоиду.

Задача 51.

Определить вынужденные колебания системы под влиянием силы $F(t)$, если в начальный момент $t = 0$ система покоится в положении равновесия $(x = 0, \dot{x} = 0)$ для случаев

а) $F = const = F_0$.

Ответ: $x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - cos\omega t)$; действие постоянной силы приводит к смещению положения равновесия, вокруг которого происходят колебания.

б) $F = at$.

Ответ: $x = \frac{a}{m\omega^3}(\omega t - \sin \omega t)$.

Задача 52.

Определить конечную амплитуду колебаний системы после действия внешней силы, меняющейся по закону $F = 0$ при $t < 0,\ F = F_0 t/T$ при $0 < t < T, F = F_0$ при $t > T$ (м. рисунок 21); до момента $t = 0$ система покоится в положении равновесия.

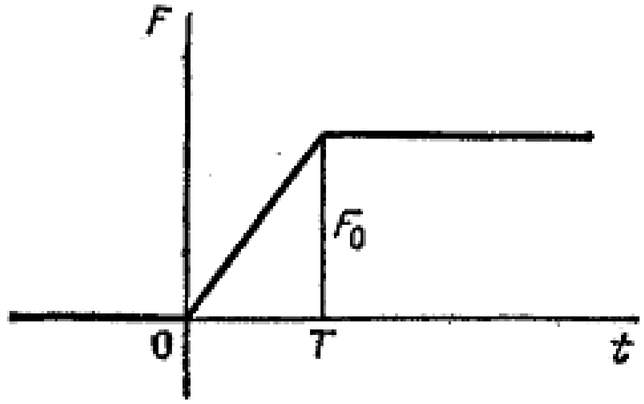

Рисунок 21 – Зависимость силы от времени

Решение

В интервале времени $0 < t < T$ колебания, удовлетворяющие начальному условию, имеют вид

$$x = \frac{F_0}{mT\omega^3}(\omega t - \sin \omega t).$$

При $t > T$ ищем решение в виде

$$x = c_1 cos\ \omega(t - T) + c_2 sin\omega(t - T) + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Из условий непрерывности x и $\dot{x}$ при $t = T$ находим:

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^3}\sin \omega T, \qquad c_2 = \frac{F_0}{mT\omega^3}(1 - \cos \omega T).$$

При этом амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^3}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

Отметим, что она тем меньше, чем медленнее «включается» сила F_0 (т.е. чем больше T).

Задача 53.

Определить то же, что и в задаче 51 в случае постоянной силы F_0, действующей в течение ограниченного времени T (см. рисунок 22).

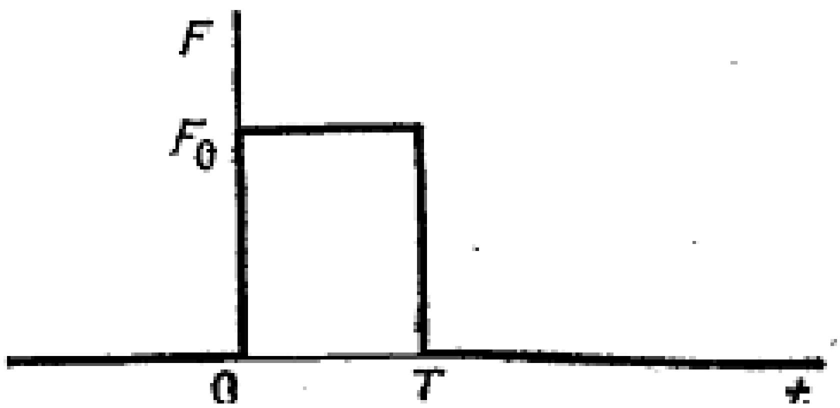

Рисунок 22 – Зависимость силы от времени

Решение

При $t > T$ имеем свободные колебания вокруг положения $x = 0$; при этом

$$\xi = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}\int_0^T e^{-i\omega t}dt = \frac{F_0}{i\omega m}\left(1 - e^{-i\omega T}\right)e^{i\omega t};$$

квадрат же модуля $\boldsymbol{\xi}$ дает амплитуду согласно формуле $|\xi|^2 = a^2\omega^2$. В результате находим:

$$a = \frac{2F_0}{m\omega^2}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

Задача 54.

Определить то же, что и в задаче 51 в случае силы, действующей в течение времени от нуля до T по закону $F = F_0 t/T$ (см. рисунок 23).

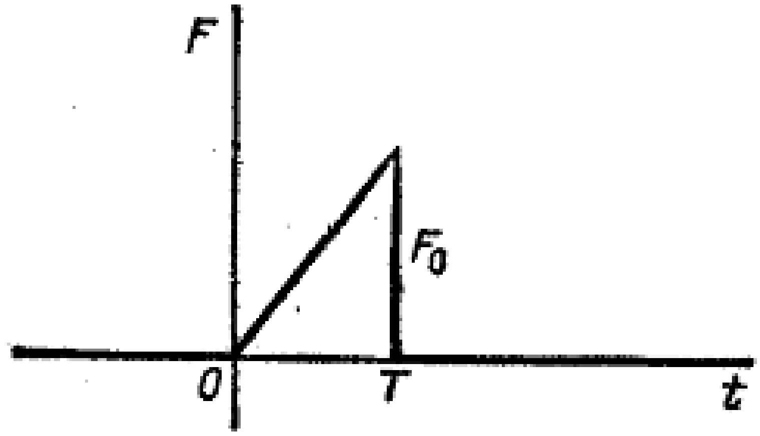

Рисунок 23 – Зависимость силы от времени

Решение

Тем же способом получим:

$$a = \frac{F_0}{Tm\omega^3}\sqrt{\omega^2T^2 - 2\omega T \sin \omega T + 2(1 - \cos \omega T)}\,.$$

Задача 55.

Определить то же, что и в задаче 51 в случае силы, меняющейся в течение времени от нуля до $T = 2\pi/\omega$ по закону $F = F_0 \sin \omega t$ (м. рисунок 24).

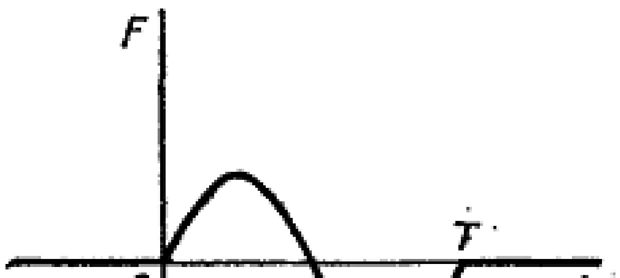

Рисунок 24 – Зависимость силы от времени

Решение

Подставив, как и в решении задачи 52, получим:

$$F(t) = F_0 \sin \omega t = \frac{F_0}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

И проинтегрировав от нуля до T, получим:

$$a = F_0\pi/m\omega^2.$$

5.3 Тестовые задания

1. Как называются колебания, которые система совершает вблизи своего положения равновесия?
   A) Свободными
   B) Малыми
   C) Случайными
   D) Хаотическими
   E) Осциллирующми
2. Колебания, имеющие одну степень свободы, называются:
   A) Свободными
   B) Затухающими
   C) Вынужденными
   D) Малыми
   E) Одномерными
3. Сколько степеней имеет точка, совершающая одномерные колебания?
   A) 1
   B) 2
   C) 3
   D) 4
   E) 5
4. Что такое осциллятор?
   A) Это система, совершающая многомерные колебания
   B) Это система, движение по окружности или любой замкнутой траектории
   C) Это система, совершающая малые одномерные колебания
   D) Это система совершающая инфинитные движения
   E) Это система, движение которой ограничено двумя точками поворота
5. Какой вид имеет функция Лагранжа системы, совершающей малые одномерные колебания?
   A) $L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{uk} \Omega_i \Omega_k$
   B) $L = \frac{m\dot{v}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$
   C) $L = \frac{m\dot{v}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t)$
   D) $L = \sum \frac{m_a \upsilon_a^2}{2}$
   E) $L = \sum \frac{m_\alpha}{2} \left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha^2 \right)$
6. Система, совершающая малые одномерные колебания, называется:
   A) Одномерным осциллятором
   B) Маятником Максвелла
   C) Ротатором
   D) Вибратором

E) Волчком

7. Какое колебание совершает система вблизи положения устойчивого равновесия?

A) Вынужденное
B) Непериодическое
C) Ангармоническое
D) Гармоническое
E) Апериодическое

8. Каково уравнение движения одномерного осциллятора?

A) $L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha \upsilon_\alpha^2}{2}$
B) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
C) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
D) $x = \cos(\omega t + \alpha)$
E) $\sum m_{ik} k_k + \sum k_{ik} x_k = 0$

9. Укажите решение уравнения движения уравнения одномерного осциллятора:

A) $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t)$
B) $x_k = \sum_\alpha \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha$
C) $x = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$
D) $x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\lambda t + \delta)$
E) $x = \cos(\omega t + \alpha)$

10. Как определяется циклическая частота при свободных колебаниях?

A) $\omega = \frac{2m^2}{m_2} \upsilon_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}$
B) $d\omega = \frac{dN}{n}$
C) $\omega = \pi a \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$
D) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
E) $\omega = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$

11. Найти частоту колебаний пружинного маятника (в Гц) массой 2 кг, если жёсткость пружины 8 Н/м.

A) $\frac{2\pi}{3}$
B)
C) $\frac{1}{\pi}$
D) $\frac{2}{\pi}$

E) 2π
F) π

12. Как называются колебания системы, на которую не действуют внешние силы?
A) Свободные
B) Вынужденные
C) Ангармонические
D) Сингулярные
E) Затухающие

13. Чему равна энергия системы, совершающей малые колебания?
A) $E = E' + \vec{V}\vec{p} + \frac{\mu V^2}{2}$
B) $E = \frac{m\upsilon_\infty^2}{2}$
C) $L = \frac{m\dot{v}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$
D) $\overline{E} = E_0 e^{-2\lambda t}$
E) $E = \sum \dot{q}_\iota \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\iota} - L$

14. Как определяется энергия системы, совершающей малые колебания?
A) $\overline{E} = E_0 e^{-2\lambda t}$
B) $E = E' + \vec{V}\vec{p} + \frac{\mu V^2}{2}$
C) $E = \frac{m\upsilon_\infty^2}{2}$
D) $E = M' + \mu[\vec{R}\vec{V}]$
E) $E = \frac{m}{2}(\ddot{x} + \omega^2 x^2)$

15. Как выражается энергия одномерного осциллятора через амплитуду?
A) $E = \frac{a\upsilon_\infty^2}{2}$
B) $E = \frac{m\omega^2 a^2}{2}$
C) $\overline{E} = E_0 e^{-2\lambda t}$
D) $E = ae^{i\alpha}$
E) $E = \mathrm{Re}\{Ae^{i\omega t}\}$

16. Вычислите энергию одномерного осциллятора массой 2 кг, частота которого $\frac{2}{\pi}$ Гц и амплитуда 0,1 м.
A) 16
B) 0,2
C) 0,16
D) 0,04
E) 1,6

17. Как называются колебания системы под действием сил трения?
A) Свободные

B) Вынужденные
C) Ангармонические
D) Сингулярные
E) Затухающие

18. Какой вид имеет функция Лагранжа для системы, совершающей вынужденные колебания?
A) $L = \frac{m\dot{v}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t)$
B) $L = \sum \frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2\theta_\alpha^2\right)$
C) $L = \sum \frac{m_a \upsilon_a^2}{2}$
D) $L = \frac{m\dot{v}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$
E) $L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - U(r)$

19. Как называются колебания в системе, на которое действует некоторое переменное внешнее поле?
A) Затухающие
B) Вынужденные
C) Свободные
D) Ангармонические
E) Несвободные

20. Каково уравнение движения вынужденных колебаний?
A) $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} xF(t)$
B) $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
C) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
D) $x = \cos(\omega t + \alpha)$
E) $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\lambda t + \delta)$

21. Выберите решение уравнения движения системы, совершающей вынужденные колебания под действием периодической силы $F(t) = f\cos(\gamma t + \beta)$:
A) $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\lambda t + \delta)$
B) $x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\cos)(\gamma t + \beta)$
C) $x = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}\vec{r})\right)^2 x$
D) $x = \cos(\omega t + \alpha)$
E) $x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t\, \mathrm{si}\, n(\omega t + \beta)$

22. Какой вид имеет решение уравнения вынужденных колебаний в случае резонанса?
A) $x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t\, \mathrm{si}\, n(\omega t + \beta)$
B) $x = \cos(\omega t + \alpha)$
C) $x = \frac{1}{2}\sum(m_{ik}k_i k_k - k_{ik}x_i x_k)$

D) $x = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{E+U(x)}}$

E) $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha)+b\cos(\lambda t+\delta)$

23. Как в общем случае определяется потенциальная энергия системы со многими степенями свободы?

A) $U_k = \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha$

B) $U_{ik} = \sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)$

C) $U = \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k$

D) $U = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{uk}\Omega_i\Omega_k$

E) $U_i = I_{ik}\Omega_k$

24. Как в общем случае определяется кинетическая энергия системы со многими степенями свободы?

A) $T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{uk}\Omega_i\Omega_k$

B) $T = \frac{1}{2}\sum m_{ik}k_i k_k$

C) $T_k = \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha$

D) $T = \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k$

E) $T_{ik} = \sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)$

25. Какой вид имеет функция Лагранжа системы со многими степенями свободы?

A) $L_{ik} = \sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)$

B) $L = \sum m_{ik}k_k + \sum k_{ik}x_k$

C) $L_k = \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha$

D) $L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{uk}\Omega_i\Omega_k$

E) $L = \frac{1}{2}\sum(m_{ik}k_i k_k - k_{ik}x_i x_k)$

26. Уравнения движения системы со многими степенями свободы:

A) $x = \frac{1}{2}\sum(m_{ik}k_i k_k - k_{ik}x_i x_k)$

B) $x = \sum \frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2\theta_\alpha^2\right)$

C) $\sum m_{ik}k_k + \sum k_{ik}x_k = 0$

D) $x = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$

E) $x = \sum \Delta_{k\alpha}\theta_\alpha$

27. Решение уравнения движения системы со многими степенями свободы имеет вид:

A) $x_{ik} = \sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)$
B) $x_i = I_{ik}\Omega_k$
C) $\sum m_{ik}k_k + \sum k_{ik}x_k = 0$
D) $x = \sum \frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2\theta_\alpha^2\right)$
E) $x_k = \sum_\alpha \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha$, где $\Theta_\alpha = \operatorname{Re}\left\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\}$

28. Функция Лагранжа системы со многими степенями свободы в нормальных координатах
A) $L = \frac{1}{2}\sum(m_{ik}k_i k_k - k_{ik}x_i x_k)$
B) $L = \sum \frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2\theta_\alpha^2\right)$
C) $L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}I_{uk}\Omega_i\Omega_k$
D) $L_{ik} = \sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)$
E) $L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega^2 r^2 - \left(\vec{\Omega}\vec{r}\right)^2\right)$

29. Какому уравнению удовлетворяют нормальные координаты?
A) $\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2\theta_\alpha^2 = 0$
B) $x_k = \sum_\alpha \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha$
C) $M_i = I_{ik}\Theta_k$
D) $\Theta_\alpha = \operatorname{Re}\left\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\}$
E) $2\Theta = \frac{\alpha}{m}$

30. Какое уравнение называется характеристическим?
A) $M_i = I_{ik}\Omega_k$
B) $x_k = \sum_\alpha \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha$
C) $\Theta_\alpha = \operatorname{Re}\left\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\}$
D) $\left|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}\right| = 0$
E) $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\lambda t + \delta)$

31. Чему равно число колебательных степеней свободны n—атомной молекулы в общем случае?
A) 3n-6
B) 2n-5
C) 3n+4
D) n-1
E) 4n+2

32. Чему равно число колебательных степеней свободны n—атомной молекулы, все атомы которой расположены вдоль одной оси?
A) 3n-6
B) 3n+4

C) 3n-5
D) n-1
E) 4n+2

33. Чему равно число колебательных степеней свободны n—атомной линейной молекулы?
A) 3n-6
B) 3n+4
C) 3n-5
D) n-1
E) 4n+2

34. Выберите уравнение движения системы, совершающей затухающие колебания:
A) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
B) $x = \sum \Delta_{k\alpha}\theta_\alpha$
C) $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\lambda t + \delta)$
D) $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha)$
E) $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

35. Как определят коэффициент затухания?
A) $2\lambda = \dfrac{\alpha}{m}$
B) $M' = I\Omega$
C) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$
D) $\overline{E} = E_0 e^{-2\lambda t}$
E) $\Theta_\alpha = \mathrm{Re}\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}$

36. Какой вид имеет <u>общее решение</u> уравнения движения системы, совершающей затухающие колебания?
A) $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\lambda t + \delta)$
B) $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha)$
C) $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$
D) $x_k = \sum\limits_\alpha \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha$
E) $x = \cos(\omega t + \alpha)$

37. Укажите решение уравнения движения системы, совершающей затухающие колебания при $\lambda < \omega_0$:
A) $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\lambda t + \delta)$
B) $x = \cos(\omega t + \alpha)$
C) $x = (c_1 + c_2)e^{-\lambda t}$
D) $x_k = \sum\limits_\alpha \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha$
E) $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha)$

38. Укажите решение уравнения движения системы, совершающей затухающие колебания при $\lambda = \omega_0$:

A) $x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\lambda t + \delta)$

B) $x = (c_1 + c_2)e^{-\lambda t}$

C) $x = \cos(\omega t - \alpha)$

D) $x_k = \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha$

E) $x = \cos(\omega t + \alpha)$

39. Чему равна частота при затухающих колебаниях?

A) $\omega = I\Omega$

B) $\omega = \overline{E} + E_0 e^{-2\lambda t}$

C) $2\omega = \dfrac{\alpha}{m}$

D) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

E) $\omega = -\Theta_\alpha + \operatorname{Re}\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}$

40. По какому закону происходит убыль энергии системы, совершающей затухающие колебания?

A) $E = \dfrac{mV^2}{2} - \dfrac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\vec{r}\right)^2 + U$

B) $\overline{E} = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha)$

C) $\dfrac{\partial E}{\partial q_i} = p_i$

D) $\overline{E} = E_0 e^{-2\lambda t}$

E) $\int dE = const$

41. Выберите диссипативную функцию:

A) $F = \frac{1}{2}\sum \alpha_{ik}k_i k_k$

B) $F = f_{\text{тр}} - \frac{\partial F}{\partial x_i}$

C) $F = \dfrac{dE}{dt} - 2F'$

D) $F = \sum m_{ik}k_k + \sum k_{ik}x_k - \sum \alpha_{ik}k_i k_k$

E) $F = \sum_k \left(m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}\right)A_k$

42. Как выражаются силы трения через диссипативную функцию?

A) $\sum_k \left(m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}\right)F_k = 0$

B) $f_{\text{тр}} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$

C) $F = \frac{1}{2}\sum \alpha_{ik}k_i k_k$

D) $\overline{E} = F_0 e^{-2\lambda t}$

E) $\dfrac{dE}{dt} = -2F$

43. Как записывается убыль энергии при затухающих колебаниях через диссипативную функцию

A) $f_{\text{тр}} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$

B) $\sum_k \left(m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}\right) E_k = 0$

C) $\frac{dE}{dt} = -2F$

D) $\sum m_{ik} k_k + \sum k_{ik} x_k = -\sum \alpha_{ik} k_i k_k$

E) $E = \frac{1}{2} \sum \alpha_{ik} k_i k_k$

44. Какой вид имеют уравнения движения малых колебаний при наличии сил трения?

A) $\frac{dE}{dt} = -2F$

B) $F = \frac{1}{2} \sum \alpha_{ik} k_i k_k$

C) $f_{\text{тр}} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$

D) $\sum m_{ik} k_k + \sum k_{ik} x_k = -\sum \alpha_{ik} k_i k_k$

E) $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \lambda t$

45. Решения уравнения движения системы со многими степенями свободы при наличии терния:

A) $x = \sum \Delta_{k\alpha} \theta_\alpha$

B) $\sum_k \left(m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}\right) A_k = 0$

C) $F = \frac{1}{2} \sum \alpha_{ik} k_i k_k$

D) $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \lambda t$

E) $x = \cos(\omega t + \alpha)$

46. Уравнения движения вынужденных колебаний при наличии сил трения имеют вид:

A) $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \lambda t$

B) $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t)$

C) $2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

D) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

E) $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

47. Каково решение уравнения движения вынужденных колебаний при наличии сил трения?

A) $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t)$

B) $x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta)$

C) $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

D) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

E) $x = \cos(\omega t + \alpha)$

48. При какой частоте амплитуда вынужденных колебаний при наличии сил трения максимальна?

A) $\left| k_{ik} - \omega^2 m_{ik} \right| = 0$

B) $\gamma = \dfrac{1}{2\pi}\oint pdq$

C) $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

D) $\gamma = \vec{K}' + [\vec{a}\vec{F}]$

E) $\gamma_k = \sum\limits_{\alpha} \Delta_{k\alpha}\Theta_{\alpha}$

49. Укажите диссипативную функцию для одномерного осциллятора:

A) $F(\varepsilon) = \dfrac{f^2}{4m}\dfrac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}$

B) $F = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta)$

C) $F = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

D) $\int dF = const$

E) $F = \dfrac{1}{2\pi}\oint pdq$

50. Какой вид зависимости поглощения от частоты называется *дисперсионным*?

A) $I(\varepsilon) = \dfrac{f^2}{4m}\dfrac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}$

B) $F(\varepsilon) = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta)$

C) $E(\varepsilon) = \dfrac{m\upsilon^2}{2} - \dfrac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 + U$

D) $\vec{K}(\varepsilon) = \vec{K}' + [\vec{a}\vec{F}]$

E) $d\sigma(\varepsilon) = 2\pi\dfrac{\alpha^2}{m_2\upsilon_\infty^2}\dfrac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}$

51. Количество энергии, поглощённой в среднем в единицу времени, как функция частоты внешней силы, в случае одномерного осциллятора определяется выражением:

A) $\vec{K} = \vec{K}' + [\vec{a}\vec{F}]$

B) $I = \dfrac{1}{2\pi}\oint pdq$

C) $\dfrac{\partial S}{\partial t} = -H.$

D) $I(\gamma) = \lambda m b^2 \gamma^2$

E) $\int d\Gamma = const$

52. Выберите функцию Лагранжа ангармонических колебаний с одной степенью свободы:

A) $L = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - \dfrac{kx^2}{2}$

B) $L=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{m\omega_0^2}{2}-\frac{m\alpha}{3}x^3-\frac{m}{3}x^4$

C) $L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}+xF(t)$

D) $L=\frac{1}{2}\sum(m_{ik}k_ik_k-k_{ik}x_ix_k)$

E) $L=\sum\frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{\theta}_\alpha^2-\omega_\alpha^2\theta_\alpha^2\right)$

53. Какой вид имеет уравнение движения ангармонических колебаний?

A) $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0$

B) $\ddot{x}+\omega_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^2$

C) $\ddot{x}+\omega^2x=0$

D) $\ddot{x}-\omega^2x=0$

E) $\ddot{x}-2\lambda\dot{x}-\omega_0^2x=0$

54. Укажите решение уравнения ангармонических колебаний в первом приближении:

A) $x^{(1)}=acos\omega t$

B) $x^{(1)}=\frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{8\omega_0}+\frac{\beta}{2}\right)$

C) $x^{(1)}=-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}+\frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}cos2\omega t$

D) $x^{(1)}=\frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{8\omega_0}+\frac{\beta}{2}\right)cos3\omega t$

E) $x^{(1)}=-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}$

55. Укажите решение уравнения ангармонических колебаний во втором приближении:

A) $x^{(2)}=acos\omega t$

B) $x^{(2)}=\frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{8\omega_0}+\frac{\beta}{2}\right)$

C) $x^{(2)}=-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}+\frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}cos2\omega t$

D) $x^{(2)}=\frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{8\omega_0}+\frac{\beta}{2}\right)cos3\omega t$

E) $x^{(2)}=-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}$

56. Укажите решение уравнения ангармонических колебаний в третьем приближении:

A) $x^{(3)}=-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}+\frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}cos2\omega t$

B) $x^{(3)}=\frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{8\omega_0}+\frac{\beta}{2}\right)cos3\omega t$

C) $x^{(3)}=-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}$

D) $x^{(3)}=acos\omega t$

E) $x^{(3)}=\frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{8\omega_0}+\frac{\beta}{2}\right)$

57. Чему равна частота ангармонических колебаний в первом приближении?

A) 1
B) $\omega = \sum m_{ik} k_i k_k$
C) 0
D) -1
E) $\omega = \sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k$

58. Чему равна частота ангармонических колебаний во втором приближении?
A) $\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{2} - \frac{5a^2}{12\omega_0^3}\right) a^2$
B) $\omega^{(2)} = \left(2 - \frac{5a^2}{12\omega_0^3}\right)$
C) $\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5a^2}{12\omega_0^3}\right) a^2 + 1$
D) $\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5a^2}{12\omega_0^3}\right) a^2$
E) $\omega^{(2)} = \left(\frac{1}{8\omega_0} - \frac{5a^2}{12\omega_0^3}\right) a^2$

59. Какой вид имеет решение уравнения вынужденных ангармонических колебаний в первом приближении?
A) $x^{(1)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{8\omega_0} + \frac{\beta}{2}\right) cos3\omega t$
B) $x^{(1)} = acos\omega t$
C) $x^{(1)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{8\omega_0} + \frac{\beta}{2}\right)$
D) $x^{(1)} = \left(\frac{1}{8\omega_0} - \frac{5a^2}{12\omega_0^2}\right) a^2$
E) $x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2} cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \varepsilon\right) t$

60. Уравнение движения частицы в быстро осциллирующем поле имеет вид:
A) $m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f$
B) $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
C) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
D) $mx = \cos(\omega t + \alpha)$
E) $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

61. Чему равна величина малых осцилляций частицы в быстро осциллирующем поле?
A) $\sum m_{ik} k_k + \sum k_{ik} x_k = 0$
B) $\xi = -\frac{f}{m\omega^2}$
C) $I'_{ik} = I_{ik} + \mu\left(a_l^2 \delta_{ik} - a_i a_k\right)$
D) $\sum \frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha^2\right) = 0$
E) $T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega^2 r^2 - \left(\vec{\Omega}\vec{r}\right)^2\right\}$

62. Чему равна эффективная потенциальная энергия частицы в быстро осциллирующем поле?

A) $\mathrm{U}_{\acute{y}\hat{o}\hat{o}} = \gamma + \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

B) $\mathrm{U}_{\acute{y}\hat{o}\hat{o}} = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta)$

C) $U_{эфф} = U + \frac{m}{2}\bar{\dot{\xi}}^2$

D) $\mathrm{U}_{\acute{y}\hat{o}\hat{o}} = I(\gamma) + \lambda m b^2 \gamma^2$

E) $U_{эфф} = \frac{mV^2}{2} - \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\vec{r}\right)^2 + U$

63. Какой вид имеет выражение для потенциальной энергии частицы в быстро осциллирующем поле в обобщённых координатах?

A) $\mathrm{U}_{\acute{y}\hat{o}\hat{o}} = I_{ik} + \mu\left(a_l^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$

B) $U_{эфф} = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega^2 r^2 - \left(\vec{\Omega}\vec{r}\right)^2\right)$

C) $U_{эфф} = \xi - \frac{f}{m\omega^2}$

D) $U_{эфф} = \frac{1}{2}\sum \alpha_{ik} k_i k_k$

E) $U_{эфф} = U + \sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{2}\overline{\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k}$

Глава 6 Движение твёрдого тела

6.1 Вопросы для самопроверки

1. Что такое твёрдое тело? Существуют ли в природе абсолютно твёрдые тела? Какие системы координат задают, чтобы описывать положение твёрдого тела в пространстве?
2. Сколько координат необходимо знать, чтобы определить положение твёрдого тела? Как скорость любой точки твёрдого тела относительно неподвижной системы координат связана с его поступательной скоростью и угловой скоростью его вращения?
3. Каким выражением определяется кинетическая энергия твёрдого тела? В виде суммы каких частей она может быть представлена?
4. Функция Лагранжа твёрдого тела. Что такое тензор инерции?
5. Дать определения понятиям: *главные оси инерции, главные моменты инерции, асимметрический волчок, симметрический волчок, шаровой волчок, ротатор*.
6. Чему равен момент импульса твёрдого тела относительно центра инерции? Совпадает ли по направлению вектор момента и угловой скорости?
7. Что такое регулярная прецессия? Чему равна угловая скорость прецессии?
8. Уравнения движения твёрдого тела в неподвижной системе координат. Какой вектор называют моментом силы?

9. Как изменяется вектор момента силы при переносе начала координат? Когда величина момента сил не зависит от выбора начала координат?
10. Как определяются эйлеровы углы? Как выражаются компоненты угловой скорости по подвижным осям через эйлеровы углы?
11. Уравнения Эйлера. Уравнения Эйлера при свободном вращении.
12. Условия равновесия твёрдого тела. Какие существуют типы движения соприкасающихся тел? Чем они характеризуются?
13. Что такое абсолютно гладкая поверхность? Абсолютно шероховатая поверхность?
14. Какой вид имеет функция Лагранжа и уравнения движения в неинерциальной системе отсчёта?
15. Из каких частей слагаются силы инерции, обусловленные вращением системы отсчёта? Чему равна энергия частицы в случае равномерно вращающейся системе отсчёта, не имеющей поступательного ускорения?

6.2 Решение задач

Задача 56.

Определить главные моменты инерции для молекул, рассматриваемых как системы частиц, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга, в случае молекулы из атомов, расположенных на одной прямой.
Ответ:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu}\sum_{a\neq b} m_a m_b l_{ab}^2, \qquad I_3 = 0,$$

где m_a - массы атомов, l_{ab} – расстояние между атомами a и b; суммирование производится по всем парам атомов в молекуле (причем каждая пара значений a, b входит в сумму по одному разу).

Для двухатомной молекулы сумма сводится к одному члену, давая заранее очевидный результат – произведение приведенной массы обоих атомов на квадрат расстояния между ними:

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

Задача 57.

Определить главные моменты инерции для молекул, рассматриваемых как системы частиц, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга, в случае трехатомной молекулы в виде равнобедренного треугольника (см. рисунок 24).

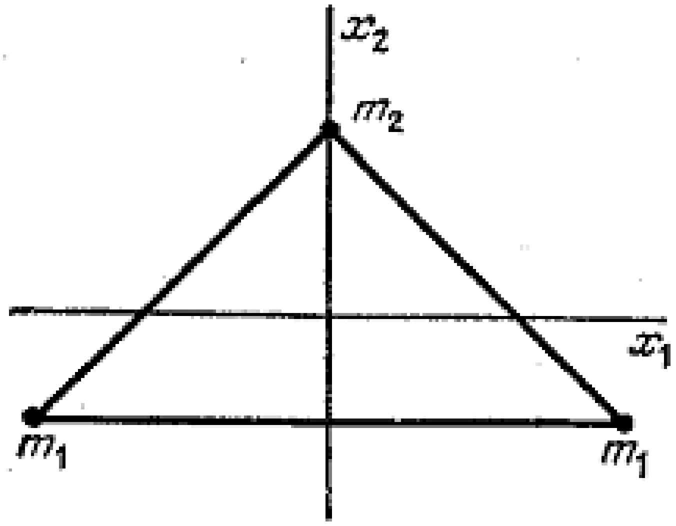

Рисунок 24 – Схематичная модель двухатомной молекулы

Ответ: Центр инерции лежит на высоте треугольника на расстоянии $X_2 = m_2 h/\mu$ от его основания. Моменты инерции:

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{\mu} h^2, \qquad I_2 = \frac{m_1}{2} a^2, \qquad I_3 = I_1 + I_2.$$

Задача 58.

Определить главные моменты инерции для молекул, рассматриваемых как системы частиц, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга, в случае четырехатомной молекулы с атомами, расположенными в вершинах правильной треугольной пирамиды (см. рисунок 25).

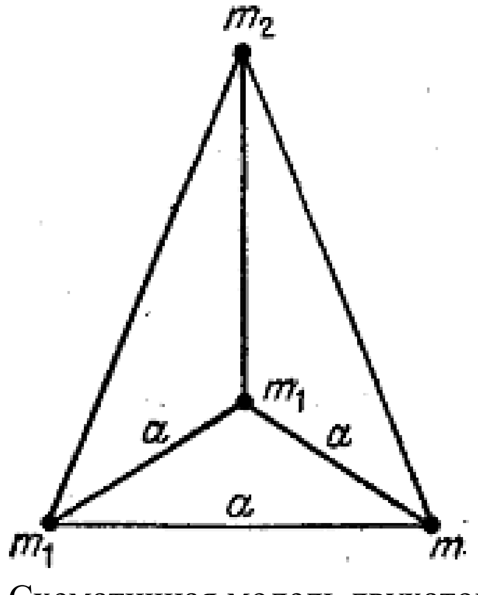

Рисунок 25 – Схематичная модель двухатомной молекулы

Ответ: Центр инерции лежит на высоте пирамиды на расстоянии $X_3 = m_2 h/\mu$ от ее основания. Моменты инерции:

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1m_2}{\mu}h^2 + \frac{m_1a^2}{2}, \qquad I_3 = m_1a^2.$$

При $m_1 = m_2$, $h = a\sqrt{2/3}$ мы получаем тетраэдрическую молекулу с моментами инерции

$$I_1 = I_2 = I_3 = m_1a^2.$$

Задача 59.

Определить главные моменты инерции для молекул, рассматриваемых как системы частиц, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга, в случае кругового конуса с высотой h и радиусом основания R.

Решение

Вычисляем сначала тензор I'_{ik} по отношению к осям с началом в вершине конуса (см. рисунок 26). Вычисление легко производится в цилиндрических координатах и дает:

$$I'_1 = I'_2 = \frac{3}{5}\mu\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right),$$

$$I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2.$$

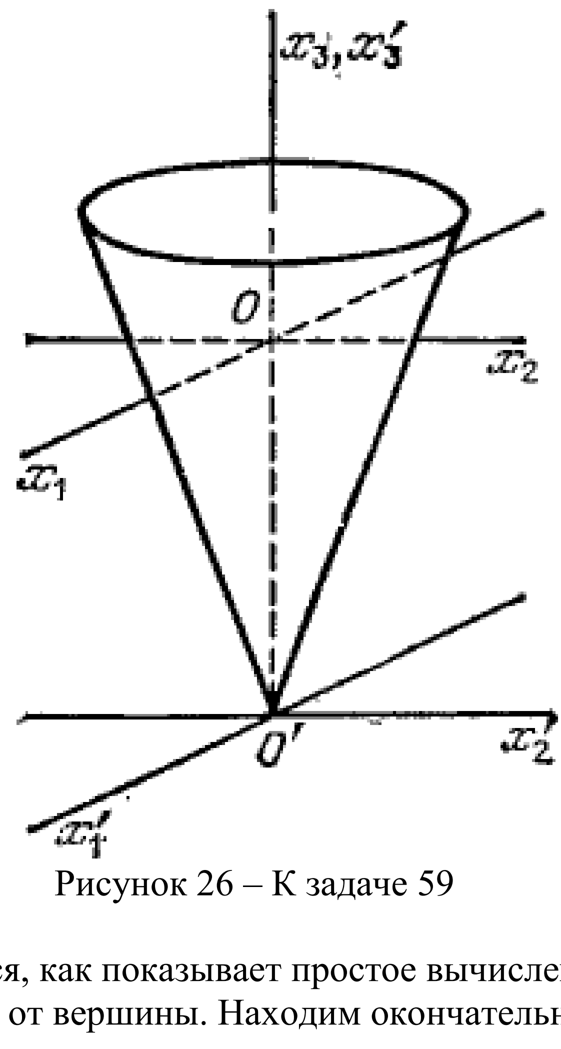

Рисунок 26 – К задаче 59

Центр тяжести находится, как показывает простое вычисление, на оси конуса на расстоянии $a = 3h/4$ от вершины. Находим окончательно

$$I_1 = I_2 = I' - \mu a^2 = \frac{3}{20}\mu\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right), \qquad I_3 = I_3' = \frac{3}{10}\mu R^2.$$

Задача 60.

Определить главные моменты инерции для молекул, рассматриваемых как системы частиц, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга, в случае трехосного эллипсоид с полуосями a, b, c.

Решение

Центр инерции совпадает с центром эллипсоида, а главные оси инерции – с его осями. Интегрирование п объему эллипсоида может быть сведено к интегрированию по объему сферы путем преобразования координат $x = a\xi, y = b\eta, z = c\zeta,$ превращающего уравнение поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в уравнение поверхности единичной сферы

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Так, для момента инерции относительно оси x получаем:

$$I_1 = \rho \int\int\int (y^2 + z^2) dxdydz$$
$$= \rho abc \int\int\int (b^2\eta^2 + c^2\zeta^2) d\xi d\eta d\zeta = abc \frac{1}{2} I'(b^2 + c^2),$$

Где I' - момент инерции шара единичного радиуса. Учитывая, что объем эллипсоида равен $4\pi abc/3$, получим окончательно моменты инерции

$$I_1 = \frac{\mu}{5}(b^2 + c^2), \qquad I_2 = \frac{\mu}{5}(a^2 + c^2), \qquad I_3 = \frac{\mu}{5}(a^2 + b^2).$$

Задача 61.

Определить движение волчка в случае, когда кинетическая энергия его собственного вращения велика по сравнению с энергией в поле тяжести (так называемый «быстрый» волчок, см. рисунок 27).

Решение

В пером приближении, если пренебречь полем тяжести, происходит свободная прецессия оси волчка вокруг направления момента M (отвечающая в данном случае нутации волчка); она происходит с угловой скоростью

$$\Omega_{нут} = \frac{M}{I_1'}.$$

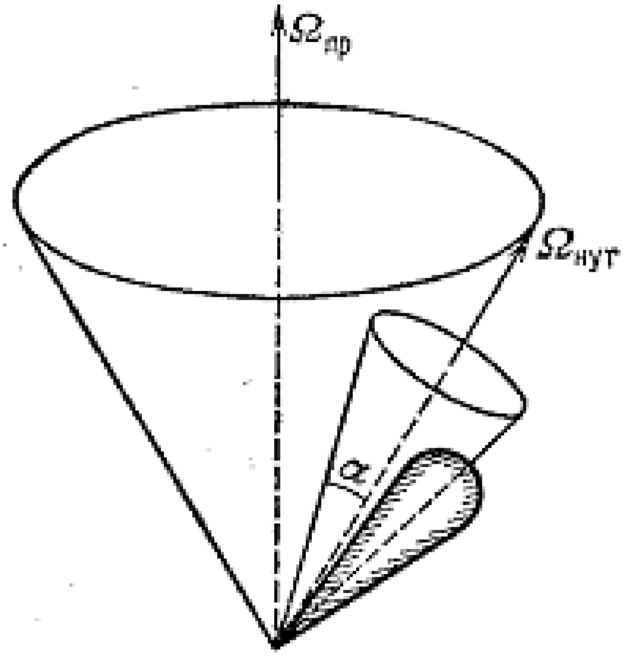

Рис. 50

Рисунок 27 – Волчок

В следующем приближении появляется медленная прецессия момента M вокруг направления вертикали (рис.50). Для определения скорости этой прецессии усредним точное уравнение движения

$$\frac{dM}{dt} = K$$

по периоду нутации. Момент сил тяжести, действующих на волчок, равен $K = \mu l[n_3 g]$, гдеn_3 – единичный вектор в направлении оси волчка. Из соображений симметрии очевидно, что результат усреднения K по «конусу нутации» сводится к замене вектора n_3 его проекцией $\cos \mathrm{M}/M$ на направление М (α – угол между М и осью волчка). Таким образом, получим уравнение

$$\overline{\frac{d\mathrm{M}}{dt}} = -\cos\alpha\,\frac{\mu l}{M}[g\mathrm{M}].$$

Оно означает, что вектор М прецессирует вокруг направления g (вертикали) со средней угловой скоростью

$$\bar{\Omega}_{пр} = -\frac{\mu l \cos\alpha}{M} g \qquad (2)$$

(малой по сравнению с $\Omega_{нут}$).

В рассматриваемом приближении входящие в формулы (1) и (2) величины M *и* $\cos\alpha$ постоянны (хотя и не являются, строго говоря, интегралами движения). Они связаны, с той же точностью, со строго сохраняющимися величинами E *и* M_3 соотношениями

$$M_3 = M\cos\alpha, \qquad E \approx \frac{M^2}{2}\left(\frac{cos^2\alpha}{I_3} + \frac{sin^2\alpha}{I_1'}\right).$$

6.3 Тестовые задания

1. Как определяется скорость твёрдого тела относительно неподвижной системы отсчёта?

A) $\vec{v} = \vec{V}[\vec{\Omega}\vec{r}]$

B) $\vec{v} = [\vec{\Omega}\vec{r}]$

C) $\vec{v} = 1 + a[\vec{\Omega}\vec{r}]$

D) $\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\Omega}\vec{r}]$

E) $\vec{v} = \vec{V} + [\overrightarrow{\Omega a}\vec{r}]$

2. Чему равна кинетическая энергия твёрдого тела?

A) $T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}\vec{r})^2\right)$

B) $T = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}(\vec{\Omega}\vec{r})^2 + U$

C) $T = U + \sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{2}\overline{\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k}$

D) $T = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta)$

E) $\text{T} = I_{ik} + \mu(a_l^2\delta_{ik} - a_i a_k)$

3. Укажите тензор инерции:

A) $I_{ik} = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}\vec{r})^2\right)$

B) $I_{ik} = I_{ki}$

C) $I_{ik} = \sum m(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k)$

D) $I'_{ik} = I_{ik} + \mu(a_l^2\delta_{ik} - a_i a_k)$

E) $M_i = I_{ik}\Omega_k$

4. Как запишется выражение для кинетической энергии твёрдого тела через тензор инерции?

A) $T = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5a^2}{12\omega_0^2}\right)a^2 + 1$

B) $T = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\lambda t + \delta)$

C) $T'_{ik} = I_{ik} + \mu(a_l^2\delta_{ik} - a_i a_k)$

D) $T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}I_{uk}\Omega_i\Omega_k$

E) $T = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}(\vec{\Omega}\vec{r})^2 + U$

5. Выберите функцию Лагранжа для твёрдого тела?

A) $L = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}(\vec{\Omega}\vec{r})^2 + U$

B) $L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}\vec{r})^2\right)$

C) $L = \lambda m b^2 \gamma^2$

D) $L = \frac{f^2}{4m}\frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}$

E) $L=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}I_{uk}\Omega_i\Omega_k-U$

6. Какое выражение указывает на симметричность тензора инерции?
   A) $I_{ik}=0$
   B) $I_{ik}=I_{ki}$
   C) $I_{ik}=-1$
   D) $I_{ik}=-I_{ki}$
   E) $I_{ik}=1$
7. Как называется тело, у которого все три момента инерции различны?
   A) Симметричный волчок
   B) Подвижный волчок
   C) Шаровой волчок
   D) Асимметричный волчок
   E) Эллиптический волчок
8. Как называется тело, у которого два момента инерции одинаковы?
   A) Симметричный волчок
   B) Шаровой волчок
   C) Асимметричный волчок
   D) Эллиптический волчок
   E) Подвижный волчок
9. Как называется тело, у которого все три момента инерции совпадают?
   A) Симметричный волчок
   B) Подвижный волчок
   C) Шаровой волчок
   D) Асимметричный волчок
   E) Эллиптический волчок
10. Как называется система, у которой два главных момента инерции совпадает, а третий равен нулю?
    A) Шаровой волчок
    B) Ротатор
    C) Замкнутая система
    D) Симметричный волчок
    E) Гироскоп
11. Момент инерции твёрдого тела относительно центра инерции определяется выражением:
    A) $M_i=I_{ik}\Omega_k$
    B) $M_i=\mathrm{Re}\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}$
    C) $M_i=(\tilde{n}_1+\tilde{n}_2)e^{-\lambda t}$
    D) $M_i=E_0e^{-2\lambda t}$
    E) $M_i=-\frac{\partial F}{\partial x_i}$
12. Как определяется момент инерции твёрдого тела в случае шарового волчка?
    A) $\vec{M}=\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}$

B) $\vec{M} = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\lambda t + \delta)$
C) $\vec{M} = I\vec{\Omega}$
D) $\vec{M} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$
E) $\vec{M} = \sum \alpha_{ik} k_i k_k$
13. Как преобразуется тензор инерции при переходе к другому началу?
A) $I'_{ik} = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 \upsilon_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}$
B) $I'_{ik} = I_{ik} + \mu\left(a_l^2 \delta_{ik} - a_i a_k\right)$
C) $I'_{ik} = \sum m_{ik} k_k$
D) $I'_{ik} = (\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2) e^{-\lambda t}$
E) $I'_{ik} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$
14. Чему равна угловая скорость прецессии?
A) $\Omega = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}$
B) $\Omega = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 \upsilon_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}$
C) $\Omega = \frac{1}{2} \sum \alpha_{ik} k_i k_k$
D) $\Omega = \frac{M}{I_1}$
E) $\Omega_\alpha = \operatorname{Re}\left\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\}$
15. Как называется равномерное вращение оси волчка вокруг направления вектора момента импульса?
A) Колебания
B) Инерция
C) Осцилляция
D) Прецессия
E) Ротация
16. Какую поверхность описывает ось волчка, в результате прецессии?
A) Эллипс
B) Конус
C) Шар
D) Гипербола
E) Прямая
17. Вокруг направления какого вектора совершается прецессия волчка?
A) Момент импульса
B) Скорость
C) Угловая скорость
D) Угловое ускорение
E) Радиус-вектор
18. Сколько независимых уравнений содержит общая система уравнений движения твёрдого тела?

A) 2
B) 3
C) 5
D) 6
E) 9

19. Укажите формулу преобразования момента силы при переходе от одного начала к другому:
A) $K = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\vec{r}\right)^2 + U$
B) $K = K' + [aF]$
C) $K = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega^2 r^2 - \left(\vec{\Omega}\vec{r}\right)^2\right)$
D) $K = \sum m_{ik} k_k + \sum k_{ik} x_k$
E) $K = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\,(\Omega^2 r^2 - a^2)$

20. Как называются углы, при помощи которых можно характеризовать положение твёрдого тела в пространстве?
A) Ньютоновы
B) Эйлеровы
C) Лагранжевы
D) Якоби
E) Лиувилля

21. Укажите уравнения движения твёрдого тела:
A) $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}$
B) $\overline{E} = E_0 e^{-2\lambda t}$
C) $f_{\text{тр}} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$
D) $\sum m_{ik} k_k + \sum k_{ik} x_k = 0$
E) $\vec{F} = \sum f = 0, \vec{F} = [\vec{r}\vec{f}] = 0$

22. Как называются силы, приложенные в точках соприкосновения тел?
A) Активные
B) Стационарные
C) Реакции
D) Пассивные
E) Голономные

23. Сколько типов движения соприкасающихся тел возможно?
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

24. Какой вид имеют условия равновесия твёрдого тела?
A) $\sum m_{ik} k_k + \sum k_{ik} x_k = 0$
B) $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}$

C) $I'_{ik} = I_{ik} + \mu\left(a_l^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$

D) $\Theta_\alpha = \mathrm{Re}\left\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\}$

E) $\vec{F} = \sum f = 0, \vec{F} = [\vec{r}\vec{f}] = 0$

25. Выберите функцию Лагранжа твёрдого тела в неинерциальной системе отсчёта:

A) $L = \frac{mv^2}{2} + mv\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - U$

B) $L = mv\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U$

C) $L = mv\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r}$

D) $L = \frac{mv^2}{2}mv\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U$

E) $L = \frac{mv^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U$

26. Какой вид имеет уравнение движения твёрдого тела в неинерциальной системе отсчёта?

A) $m\frac{dv}{dt} = \frac{mv^2}{2} + mv\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - U$

B) $m\frac{dv}{dt} = mv\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U$

C) $m\frac{dv}{dt} = mv\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r}$

D) $m\frac{dv}{dt} = \frac{mv^2}{2}mv\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U$

E) $m\frac{dv}{dt} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U$

27. Как определяется сила Кориолиса?

A) $2m\left[\vec{\Omega}\vec{v}\right]$

B) $m\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]$

C) $m\vec{W}$

D) $[\vec{\Omega}\vec{v}]$

E) $m\frac{dv}{dt}$

28. Чему равна центробежная сила?

A) $m\left[\vec{\Omega}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]\right]$

B) $2m\left[\vec{\Omega}\vec{v}\right]$

C) $m\vec{W}$

D) $\left[\vec{\Omega}\vec{v}\right]$

E) $m\frac{dv}{dt}$

29. Какой вил имеет функция Лагранжа системы в случае равномерно вращающейся системы координат, не имеющей поступательного движения?

A) $L = m\vec{v} + \left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]$

B) $L = \frac{mv^2}{2} + mv\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2 - U$

C) $L = m\left[\vec{\Omega}[\vec{\Omega}\vec{r}]\right] + 2m[\vec{\Omega}\vec{v}]$

D) $L = mv[\vec{\Omega}\vec{r}] - m\vec{W}\vec{r} + 2m[\vec{\Omega}\vec{v}]$

E) $L = -m\vec{W}\vec{r} + 2m[\vec{\Omega}\vec{v}]$

F) Как запишутся уравнения движения с

30. истемы в случае равномерно вращающейся системы координат, не имеющей поступательного движения?

A) $m\frac{d\overset{\varpi}{v}}{dt} = 2\pi\frac{\alpha^2}{m_2\upsilon_\infty^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}$

B) $m\frac{dv}{dt} = mv[\vec{\Omega}\vec{r}] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}] + U$

C) $m\frac{dv}{dt} = \Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}\vec{r})^2 - L$

D) $m\frac{dv}{dt} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 + U$

E) $m\frac{dv}{dt} = \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}] + U$

31. Чему равен импульс системы в случае равномерно вращающейся системы координат, не имеющей поступательного движения

A) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$

B) $\vec{p} = m\vec{v} + [\vec{\Omega}\vec{r}]$

C) $\frac{\partial S}{\partial t} = -H + \overset{\rho}{p}$

D) $\int d\Gamma = const$

E) $\overset{\rho}{p}_0 = \int\sum_i p_i dq_i$

32. Как определяется центробежная энергия?

A) $\frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2$

B) $m\vec{W}$

C) $m\frac{dv}{dt}$

D) $E_0 - [\vec{\Omega}\vec{M}]$

E) $[\vec{\Omega}\vec{r}]$

33. Как преобразуется энергия при переходе к равномерно вращающейся системе отсчёта?

A) $E = E_0 + \vec{\Omega}\vec{M} - U$

B) $E = \vec{\Omega}\vec{M} + v$

C) $E = E_0 + \vec{\Omega}\vec{M} + U$

D) $E = E_0 + \vec{\Omega}\vec{M}$

E) $E = -\vec{\Omega}\vec{M}$

34. Чему равна энергия частицы в случае равномерно вращающейся системы координат, не имеющей поступательного движения?

A) $E = \frac{mv^2}{2} + (\vec{\Omega}\vec{r})^2 + U$

B) $E = 0$

C) $E = \frac{mv^2}{2} - (\vec{\Omega}\vec{r})^2 + U$

D) $E = \frac{m\upsilon^2}{2} + U$

E) $E = -\frac{m}{2}(\vec{\Omega}\vec{r})^2 + U$

Глава 7 Канонические преобразования

7.1 Вопросы для самопроверки

1. Заданием каких переменных осуществляется формулирование законов механики в методе Лагранжа? Является ли этот метод единственно возможным? Что такое преобразования Лежандра?
2. Какой вид имеет функция Гамильтона? Уравнения движения в переменных p и q. Как называются эти уравнения?
3. К какому закону приходим в случае, когда функция Гамильтона не зависит явно от времени? Как связаны между собой частные производные по времени от функции Лагранжа и Гамильтона?
4. Что такое скобки Пуассона? Условии для того, чтобы функция f была интегралом движения. Свойства скобки Пуассона.
5. Тождество Якоби и теорема Пуассона.
6. Чему равны частные производные от действия по координатам? Чему равна частная производная от действия по времени?
7. Чему равен полный дифференциал действия как функции координат и времени? Какой вид имеет выражение для укороченного действия?
8. Какие преобразования называются каноническими? Каким условиям должны удовлетворять новые и старые координаты чтобы преобразование было каноническим? Как это условие записывается при помощи скобок Пуассона?
9. Что такое фазовое пространство? Фазовая траектория? Теорема Лиувилля.
10. Какой вид имеет уравнение Гамильтона-Якоби? Какое изменение называется адиабатическим? Что такое адиабатический инвариант?
11. Выражение для адиабатического инварианта. Функцией каких величин является адиабатический инвариант системы? Что определяет частная производная от адиабатического инварианта по энергии?

7.2 Решение задач

Задача 62.

Найти функцию Гамильтона для одной материальной точки в декартовых координатах.

Решение

Функция Лагранжа материальной точки в декартовых координатах имеет вид (см. задачу 8, где была найдена функция Лагранжа свободной материальной точки в декартовых координатах)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

Функция Гамильтона определяется выражением:

$$H(p, q, t) = \sum p_i \dot{q}_i - L,$$

где $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Запишем для нашего случая декартовых координат

$$H(p, q, t) = \left(p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z}\right) - L =$$
$$= \left(p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z}\right) - \left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)\right] =$$
$$= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z)$$

Определяем величины p_x, p_y, p_z

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] - \frac{\partial}{\partial \dot{x}}[U(x, y, z)] =$$
$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}2\dot{x} = m\dot{x}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] - \frac{\partial}{\partial \dot{y}}[U(x, y, z)] =$$
$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\dot{y}^2 = \frac{m}{2}2\dot{y} = m\dot{y}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] - \frac{\partial}{\partial \dot{z}}[U(x, y, z)] =$$
$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{z}}\dot{z}^2 = \frac{m}{2}2\dot{z} = m\dot{z}$$

Тогда

$$H(p, q, t) = (m\dot{x}\dot{x} + m\dot{y}\dot{y} + m\dot{z}\dot{z}) - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z) =$$
$$= m\dot{x}\dot{x} + m\dot{y}\dot{y} + m\dot{z}\dot{z} - \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{m}{2}\dot{z}^2 + U(x, y, z) =$$

$$= m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{m}{2}\dot{z}^2 + U(x,y,z) =$$

$$= \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} + U(x,y,z)$$

По определению вектор импульса $\vec{p} = m\vec{v}$ или, в проекциях на оси декартовой системы, $p_x = mv_x = m\dot{x}, p_y = mv_y = m\dot{y}, p_z = mv_z = m\dot{z}$. Тогда

$$m\dot{x}^2 = \frac{m}{m}m\dot{x}^2 = \frac{m^2\dot{x}^2}{m} = \frac{(m\dot{x})^2}{m} = \frac{p_x^2}{m}$$

$$m\dot{y}^2 = \frac{m}{m}m\dot{y}^2 = \frac{m^2\dot{y}^2}{m} = \frac{(m\dot{y})^2}{m} = \frac{p_y^2}{m}$$

$$m\dot{z}^2 = \frac{m}{m}m\dot{z}^2 = \frac{m^2\dot{z}^2}{m} = \frac{(m\dot{z})^2}{m} = \frac{p_z^2}{m}$$

Подставляя данные выражения в полученную функцию Гамильтона, имеем:

$$H(p,q,t) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + U(x,y,z)$$

Или, окончательно:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x,y,z).$$

Задача 63.

Найти функцию Гамильтона для одной материальной точки в цилиндрических координатах.

Решение

Функция Лагранжа материальной точки в силовом поле в декартовых координатах имеет вид (см. задачу 9, где была найдена функция Лагранжа свободной материальной точки в цилиндрических координатах)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r,\varphi,z)$$

Функция Гамильтона определяется выражением:

$$H(p,q,t) = \sum p_i\dot{q}_i - L,$$

где $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Запишем для нашего случая цилиндрических координат

$$H(p,q,t) = \left(p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z}\right) - L =$$

$$= \left(p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z}\right) - \left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r,\varphi,z)\right] =$$

$$= \left(p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z}\right) - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(r,\varphi,z) =$$

$$= \left(p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z}\right) - \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2}\dot{z}^2 + U(r,\varphi,z)$$

Определяем выражения p_r, p_φ, p_z:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r,\varphi,z)\right] =$$

$$=\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{r}}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-\frac{\partial}{\partial\dot{r}}U(r,\varphi,z)=\frac{m}{2}2\dot{r}=m\dot{r}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}=\left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-U(r,\varphi,z)\right]=$$

$$=\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}U(r,\varphi,z)=\frac{m}{2}r^2 2\dot{\varphi}=mr^2\dot{\varphi}$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=\frac{\partial}{\partial\dot{z}}\left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-U(r,\varphi,z)\right]=$$

$$=\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{z}}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-\frac{\partial}{\partial\dot{z}}U(r,\varphi,z)=\frac{m}{2}2\dot{z}=m\dot{z}$$

Подставляем найденные значения в функцию Гамильтона:

$$H(p,q,t)=(m\dot{r}\dot{r}+mr^2\dot{\varphi}\dot{\varphi}+m\dot{z}\dot{z})-\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)+U(x,y,z)=$$

$$=m\dot{r}^2+mr^2\dot{\varphi}^2+m\dot{z}^2-\frac{m}{2}\dot{r}^2-\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2-\frac{m}{2}\dot{z}^2+U(x,y,z)=$$

$$=\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2+\frac{m}{2}\dot{z}^2+U(x,y,z)$$

По определению вектор импульса $\vec{p}=m\vec{v}$ или, в проекциях на оси цилиндрической системы, $p_r=mv_r=m\dot{r},p_\varphi=mv_\varphi=m\dot{\varphi},p_z=mv_z=m\dot{z}$. Тогда

$$m\dot{r}^2=\frac{m}{m}m\dot{r}^2=\frac{m^2\dot{r}^2}{m}=\frac{(m\dot{r})^2}{m}=\frac{p_r^2}{m}$$

$$mr^2\dot{\varphi}^2=\frac{m}{m}\frac{r^2}{r^2}\cdot mr^2\dot{\varphi}^2=\frac{m^2r^4\dot{\varphi}^2}{mr^2}=\frac{(mr^2\dot{\varphi})^2}{mr^2}=\frac{p_\varphi^2}{mr^2}$$

$$m\dot{z}^2=\frac{m}{m}m\dot{z}^2=\frac{m^2\dot{z}^2}{m}=\frac{(m\dot{z})^2}{m}=\frac{p_z^2}{m}$$

Подставляя данные выражения в полученную функцию Гамильтона, имеем:

$$H(p,q,t)=\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2+\frac{m}{2}\dot{z}^2+U(x,y,z)=$$

$$=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}+\frac{p_z^2}{2m}+U(x,y,z)$$

или, окончательно

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}+p_z^2\right)+U(r,\varphi,z).$$

Задача 64.

Найти функцию Гамильтона для одной материальной точки в сферических координатах.

Решение

Функция Лагранжа материальной точки в силовом поле в декартовых координатах имеет вид (см. задачу 10, где была найдена функция Лагранжа свободной материальной точки в цилиндрических координатах)

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) - U(r,\varphi,z)$$

Функция Гамильтона определяется выражением:

$$H(p,q,t) = \sum p_i\dot{q}_i - L,$$

где $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Запишем для нашего случая сферических координат

$$H(p,q,t) = \left(p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_\theta\dot{\theta}\right) - L =$$

$$= \left(p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_\theta\dot{\theta}\right) - \left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) - U(r,\varphi,z)\right] =$$

$$= \left(p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_\theta\dot{\theta}\right) - \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) + U(r,\varphi,z) =$$

$$= \left(p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_\theta\dot{\theta}\right) - \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta + U(r,\varphi,z)$$

Определяем выражения p_r, p_φ, p_z:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) - U(r,\varphi,z)\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \dot{r}}U(r,\varphi,z) = \frac{m}{2}2\dot{r} = m\dot{r}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} = \left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) - U(r,\varphi,z)\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}U(r,\varphi,z) =$$

$$= \frac{m}{2}r^2 sin^2\theta \cdot 2\dot{\varphi} = mr^2 sin^2\theta\dot{\varphi}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) - U(r,\varphi,z)\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}U(r,\varphi,z) =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(r^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{m}{2}r^2\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\dot{\theta}^2\right) = \frac{m}{2}r^2 \cdot 2\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$$

Подставляем найденные значения в функцию Гамильтона:

$$H(p,q,t) = \left[m\dot{r}\dot{r} + mr^2 sin^2\theta\dot{\varphi}\dot{\varphi} + mr^2\dot{\theta}\dot{\theta}\right] -$$

$$- \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) + U(x,y,z) =$$

$$= m\dot{r}^2 + mr^2 sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta - \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2 sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2$$

По определению вектор импульса $\vec{p} = m\vec{v}$ или, в проекциях на оси цилиндрической системы, $p_r = mv_r = m\dot{r}, p_\varphi = mv_\varphi = m\dot{\varphi}, p_\theta = mv_\theta = m\dot{\theta}$. Тогда

$$m\dot{r}^2 = \frac{m}{m}m\dot{r}^2 = \frac{m^2\dot{r}^2}{m} = \frac{(m\dot{r})^2}{m} = \frac{p_r^2}{m}$$

$$mr^2 sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{m}{m}\frac{r^2}{r^2}\frac{sin^2\theta}{sin^2\theta} \cdot mr^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2 = \frac{m^2 r^4 sin^4\theta\dot{\varphi}^2}{mr^2 sin^2\theta} =$$
$$= \frac{(mr^2 sin^2\theta\dot{\varphi})^2}{mr^2 sin^2\theta} = \frac{p_\varphi^2}{mr^2 sin^2\theta}$$
$$mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{m}{m}\frac{r^2}{r^2} \cdot mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{m^2 r^4\dot{\theta}^2}{mr^2} = \frac{\left(mr^2\dot{\theta}\right)^2}{mr^2} = \frac{p_\theta^2}{mr^2}$$

Подставляя данные выражения в полученную функцию Гамильтона, имеем:

$$H(p,q,t) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2 sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + U(x,y,z) =$$
$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + U(x,y,z)$$

или, окончательно

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 sin^2\theta}\right) + U(r,\theta,\varphi).$$

Задача 65.

Найти функцию Гамильтона частицы в равномерно вращающейся системе отсчета.

Решение

Функцию Гамильтона $H(p,q,t) = \sum p_i\dot{q}_i - L$ запишем в виде $H = \vec{p}\vec{v} - L$ и преобразуем:

$$H = \vec{p}\vec{v} - L = \vec{p}\vec{v} - (2T - E) = \vec{p}\vec{v} + 2T + E =$$
$$\frac{m}{m}\vec{p}\vec{v} - L = \frac{\vec{p}}{m}m\vec{v} - L = \frac{\vec{p}}{m}\vec{p} - L = \frac{p^2}{2m} - L$$

Общий вид функции Лагранжа частицы в произвольно неинерциальной системе отсчёта

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U,$$

где $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ - ускорение поступательного движения системы отсчёта K’ относительно инерциальной системы отсчёта, $\vec{\Omega}$ - угловая скорость вращения системы отсчёта K’ относительно инерциальной системы отсчёта. Тогда функция Лагранжа для равномерно вращающейся системы координат получится при $\vec{\Omega} = const, \vec{W} = 0$:

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2 - U.$$

Найдём обобщённый импульс:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial\vec{v}} = \frac{\partial}{\partial\vec{v}}\left(\frac{mv^2}{2} + m\vec{v}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2 - U\right) = \frac{m}{2}2\vec{v} + m\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] =$$
$$= m\vec{v} + m\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right].$$

Подставив его в выражение $E = \vec{p}\vec{v} - L$, найдём энергию частицы:

$$E = \left(m\vec{v} + m[\vec{\Omega}\vec{r}]\right)\vec{v} - \left(\frac{mv^2}{2} + m\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - U\right) =$$

$$= mv^2 + m\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] - \frac{mv^2}{2} - m\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] - \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 + U =$$

$$= \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 + U$$

Из выражений для энергии и импульса находим:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \Omega(\vec{r}\vec{p}) + U.$$

Задача 66.

Найти функцию Гамильтона системы из одной частицы с массой M и n частиц с массами m, с исключенным движением центра инерции.

Решение

Обобщенные импульсы:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = mv_\alpha - \frac{m^2}{\mu}\sum_\alpha v_\alpha.$$

Отсюда имеем:

$$\sum p_\alpha = m\sum v_\alpha - \frac{nm^2}{\mu}\sum v_\alpha = \frac{mM}{\mu}\sum v_\alpha,$$

$$v_\alpha = \frac{p_\alpha}{m} + \frac{1}{m}\sum p_\alpha.$$

Подставляя в E, найдем:

$$H = \frac{1}{2m}\sum_\alpha p_\alpha^2 + \frac{1}{2M}(\sum_\alpha p_\alpha)^2 + U.$$

Задача 67.

Найти функцию Рауса симметрического волчка во внешнем поле $U(\varphi, \theta)$, исключив циклическую координату ψ ($\psi,\ \varphi, \theta$ − эйлеровы углы).

Решение

Функция Лагранжа

$$L = \frac{I_1'}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - U(\varphi, \theta)$$

Функция Рауса

$$R = p_\psi\dot{\psi} - L = \frac{p_\psi^2}{2I_3} - p_\psi\dot{\varphi}\cos\theta - \frac{I_1'}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \varphi^2 sin^2\theta\right) + U(\varphi, \theta);$$

Первый член в этом выражении представляет собой постоянную, которая может быть опущена.

Задача 68.

Определить скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент импульса p и момента импульса M = [rp] материальной частицы.

Решение

С помощью формулы, находим:

$$(M_x p_x) = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(yp_z - zp_y\right) = -p_z$$

И аналогичным образом еще две формулы

$$\{M_x p_x\} = 0,$$
$$\{M_x p_z\} = p_y.$$

Остальные скобки получаются отсюда циклической перестановкой индексов x, y, z.

Задача 69.

Определить скобки Пуассона, составленные из компонент M.

Решение

Прямое вычисление дает:

$$\left\{M_x M_y\right\} = -M_z, \qquad \left\{M_y M_z\right\} = -M_x, \qquad \{M_z M_x\} = -M_y.$$

Поскольку импульсы и координаты различных частиц являются независимыми друг от друга переменными, то легко видеть, что полученные в задачах 1 и 2 формулы справедливы и для полных импульса и момента любой системы частиц.

Задача 70.

Показать, что

$$\{\varphi M_z\} = 0,$$

где φ – любая скалярная функция координат и импульса частицы.

Решение

Скалярная функция может зависеть от компонент векторов r и p только в комбинациях $r^2,\ p^2, rp$. Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial (r^2)} 2r + \frac{\partial \varphi}{\partial (pr)} p$$

и аналогично для $\partial\varphi/\partial p$. Искомое соотношение проверяется прямым вычислением с учетом указанных правил дифференцирования.

Задача 71.

Показать, что

$$\{fM_z\} = [fn].$$

где f– векторная функция координат и импульса частицы, а n– единичный вектор в направлении оси z.

Решение

Произвольный вектор $f(r,p)$ может быть написан в виде $f = r\varphi_1 + p\varphi_2 + [rp]\varphi_3$, где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$- скалярные функции. Искомое соотношение проверяется прямым вычислением.

Задача 72.

Из вариационного принципа получить дифференциальное уравнение траектории.

Решение

Производя варьирование, имеем:

$$\delta\int\sqrt{E-U}\,dl = -\int\{\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\delta r}{2\sqrt{E-U}}dl - \sqrt{E-U}\frac{dr}{dl}d\;\delta r\}.$$

Во втором члене учтено, что $dl^2 = dr^2$ и потому $dl\,d\delta l = dr\,d\delta r$; произведя в этом члене интегрирование по частям и приравняв затем нулю коэффициент при δr в подынтегральном выражении, получим дифференциальное уравнение траектории

$$2\sqrt{E-U}\frac{d}{dl}\left(\sqrt{E-U}\frac{dr}{dl}\right) = -\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Раскрыв производную в левой стороне равенства и вводя силу $F = -\partial U/\partial r$, можно представить это уравнение в виде

$$\frac{d^2r}{dl^2} = \frac{F-(Ft)t}{2(E-U)},$$

где $t = dr/dl$– единичный вектор касательной к траектории. Разность $F-(Ft)t$ есть нормальная к траектории компонента силы F_n. Производная же $d^2r/d\,l^2 = dt/dl$, как известно из дифференциальной геометрии, равна n/R, где R– радиус кривизны траектории, а n– единичный вектор главной нормали к ней. Заменив также $E-U$ на $mv^2/2$, получим:

$$n\frac{mv^2}{R} = F_n$$

в соответствии с известным выражением для нормального ускорения при движении по искривленной траектории.

Задача 73.

Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для движения частицы в поле

$$U = \frac{\alpha}{r} - F_z$$

(наложение кулоновского и однородного полей); найти специфическую для такого движения сохраняющуюся функцию координат и импульсов.

Решение

Данное поле относится к типу (48,15), причем

$$\alpha(\xi) = \alpha - \frac{F}{2}\xi^2, \qquad b(\eta) = \alpha + \frac{F}{2}\eta^2.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби дается формулой (48,16) с этими функциями $\alpha(\xi)$ и $b(\eta)$.

Для выяснения смысла постоянной β пишем уравнения

$$2\xi p_\xi^2 + ma(\xi) - mE\xi + \frac{p_\varphi^2}{2\xi} = \beta,$$
$$2\eta p_\eta^2 + mb(\eta) - mE\eta + \frac{p_\varphi^2}{2\eta} = -\beta.$$

Вычтя одно из этих уравнений из другого и выразив импульсы $p_\eta = \partial S/\partial\xi$ и $p_\eta = \partial S/\partial\eta$ через импульсы $p_\rho = \partial S/\partial\rho$ и $p_z = \partial S/\partial z$в цилиндрических координатах, получим после простого приведения:

$$\beta = -m\left[\frac{\alpha z}{r} + \frac{p_\rho}{m}\left(zp_\rho - \rho p_z\right) + \frac{p_\varphi^2}{m\rho^2}z\right] - \frac{m}{2}F\rho^2.$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой интеграл движения, специфический для чисто кулоновского поля.

Задача 74.

Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для движения частицы в поле

$$U = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$$

(кулоновское поле двух неподвижных центров на расстоянии 2σ друг от друга, см. рисунок 28).

Решение

Данное поле относится к типу (48,21), причем

$$\alpha(\xi) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sigma}\xi, \qquad b(\eta) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sigma}\eta.$$

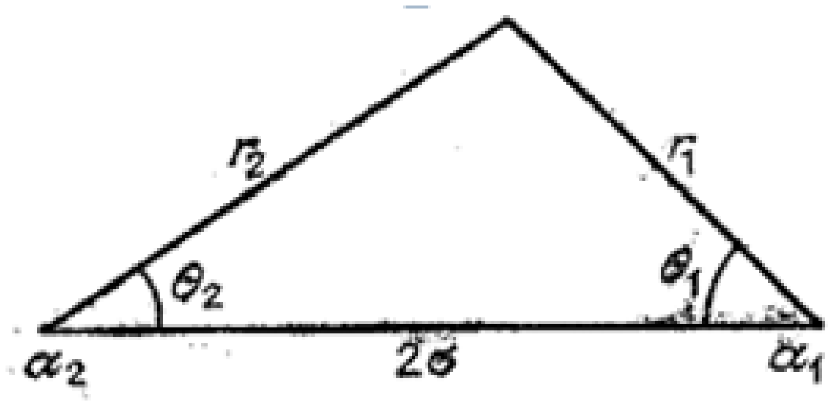

Рисунок 28 – Неподвижные центры кулоновского поля

Действие $S(\xi, \eta; \varphi, t)$ получается подстановкой этих выражений в (48,22). Смысл постоянной β выясняется аналогично тому, как это было сделано в задаче 1; она выражается собой в данном случае сохранение следующей величины:

$$\beta = \sigma^2\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right) - M^2 + 2m\sigma(\alpha_1 \cos\theta_1 + \alpha_2 \cos\theta_2),$$

где

$$M^2 = [rp]^2 = p_\rho^2 z^2 + p_z^2\rho^2 + \frac{r^2 p_\varphi^2}{\rho^2} - 2z\rho p_z p_\rho,$$

а θ_1 и θ_2– углы, указанные на рис 55.

7.3 Задачи для самостоятельного рассмотрения

Найти функцию Гамильтона в следующих системах криволинейных координат: полярная (r, φ), эллиптическая (μ, ν), двумерная параболическая (σ, τ), трёхмерная параболическая (σ, τ, z), биполярная (σ, τ), тороидальная (α, β, φ).

7.4 Тестовые задания

1. Укажите функцию Гамильтона:

A) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$
B) $dS = \sum_i p_i dq_i - Hdt$
C) $H = \sum_i p_i q_i - L$
D) $\int d\Gamma = const$
E) $\frac{\partial S}{\partial t} = -H + U$
2. Какие переменные используются в методе Гамильтона?
A) Скорость и ускорение
B) Координата и импульс
C) Ускорение и координата
D) Энергия и скорость
E) Импульс и время
3. Какие переменные используются в методе Лагранжа?
A) Скорость и ускорение
B) Энергия и импульс
C) Ускорение и координата
D) Координата и скорость
E) Импульс и время
4. Переход от одного набора независимых переменных к другому называется преобразованиями…
A) Гамильтона
B) Якоби
C) Лежандра
D) Мопертюи
E) Лагранжа
5. Какой вид имеют канонические уравнения Гамильтона для механической системы?
A) $q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$
B) $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$, $T = 2\pi \frac{\partial I}{\partial E}$
C) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$, $I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq$
D) $dS = \sum_i p_i dq_i - Hdt$
E) $\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0$
6. Уравнения $q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ называются уравнениями:
A) Якоби
B) Мопертюи
C) Лагранжа
D) Гамильтона

E) Пуассона

7. Как ещё называются уравнения Гамильтона?

A) Гиперболические

B) Канонические

C) Симметрические

D) Асимметрические

E) Адиабатическими

8. Какой закон сохранения следует из выражения $\frac{\partial H}{\partial t}=0$?

A) Импульса

B) Массы

C) Заряда

D) Момента

E) Энергии

9. Укажите связь между функциями Лагранжа и Гамильтона:

A) $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{p,q}$

B) $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -L$

C) $\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{p,q}$

D) $-\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{p,q} = H$

E) $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = H-\left(\frac{\partial L}{\partial S}\right)_{p,q}$

10. Как энергия выражается через функцию Рауса?

A) $E = R - \xi\frac{\partial R}{\partial \xi}$

B) $E = p - \xi\frac{\partial R}{\partial \xi}$

C) $E = p - \xi\frac{\partial R}{\partial \xi}$

D) $E = R - \frac{\partial R}{\partial \xi}$

E) $E = 2R - \xi\frac{\partial R}{\partial t}$

11. Какое выражение указывает на закон сохранения энергии?

A) $I=\frac{1}{2\pi}\oint pdq$

B) $\frac{\partial H}{\partial t}=0$

C) $\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i$

D) $\frac{\partial S}{\partial t}=-H$

E) $I=\frac{1}{2\pi}\oint pdq$

12. Укажите скобки Пуассона:

A) $\{f\{gh\}\}+\{g\{hf\}\}+\{h\{fg\}\}=0$

B) $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q}=-\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{p,q}$

C) $\{Hf\}=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)$

A) $q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$

D) $\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,...q_s;\frac{\partial S}{\partial q_1},...\frac{\partial S}{\partial q_s},t\right)=0$

E) $\int d\Gamma=const$

197. Укажите свойство скобки Пуассона:

A) $\{fg\}=-\{gf\}$

B) $\{fg\}=0$

C) $\{fg\}=\{gf\}$

D) $\{fg\}=\{g-f\}$

E) $\{fg\}=\{g+f\}$

198. Укажите свойство скобки Пуассона (c – постоянная величина):

A) $\{fc\}=1$

B) $\{fc\}=\{f\}\{c\}$

C) $\{fc\}=-\{cf\}$

D) $\{fc\}=\{fc\}$

E) $\{fc\}=0$

199. Укажите свойство скобки Пуассона:

A) $\{f_1+f_2,g\}=\{f_1+g\}\{f_2+g\}$

B) $\{f_1+f_2,g\}=\{f_1g\}\{f_2g\}$

C) $\{f_1+f_2,g\}=\{f_1g\}-\{f_2g\}$

D) $\{f_1+f_2,g\}=\{f_1g\}+\{f_2g\}$

E) $\{f_1+f_2,g\}=-\{f_1g\}+\{f_2g\}$

200. Укажите свойство скобки Пуассона:

A) $\{f_1f_2,g\}=f_1\{f_2g\}/f_2\{f_1g\}$

B) $\{f_1f_2,g\}=f_1\{f_2g\}+f_2\{f_1g\}$

C) $\{f_1f_2,g\}=f_1\{f_2g\}-f_2\{f_1g\}$

D) $\{f_1f_2,g\}=f_2\{f_2g\}+f_1\{f_1g\}$

E) $\{f_1f_2,g\}=-f_1\{f_2g\}-f_2\{f_1g\}$

201. Выражение $\{f\{gh\}\}+\{g\{hf\}\}+\{h\{fg\}\}=0$ называется скобкой:

A) Лежандра

B) Мопертюи

C) Пуассона

D) Лагранжа

E) Гамильтона

202. Если f и g – интегралы движения, теорема Пуассона имеет вид:

A) $\{fg\} = \infty$

B) $\{fg\} = -1$

C) $\{fg\} = 0$

D) $\{fg\} = 1$

E) $\{fg\} = const$

203. Вариационный принцип, определяющий траекторию системы, называется принципом:

A) Гамильтона

B) Пуассона

C) Мопертюи

D) Лагранжа

E) Лежандра

204. Какое уравнение указывает на тот факт, что частица движется по прямой линии?

A) $\delta\int dl = 0$

B) $\{fc\} = 1$

C) $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$

D) $q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

E) $\int d\Gamma = const$

13. Какой вид имеет тождество Якоби?

A) $I = \frac{1}{2\pi}\oint pdq$

B) $\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0$

C) $E = R - \xi\frac{\partial R}{\partial \xi}$

D) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$

E) $\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0$

14. Как называется функция, при помощи которой характеризуется всякое каноническое преобразование?

A) Интегрирующая

B) Адиабатическая

C) Инвариантная

D) Производящая

E) Вариационная

15. Укажите условия, которым должны удовлетворять переменные p и Q, чтобы преобразование $p, q \to P, Q$ было каноническим:

A) $\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = 0, \{P_i, P_k\}_{p,q} = 0, \{P_i, Q_k\}_{p,q} = 0$

B) $\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}, \{P_i, P_k\}_{p,q} = 0, \{P_i, Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}$

C) $\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = 0, \{P_i, P_k\}_{p,q} = 0, \{P_i, Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}$
D) $\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}, \{P_i, P_k\}_{p,q} = 0, \{P_i, Q_k\}_{p,q} = 0$
E) $\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = 0, \{P_i, P_k\}_{p,q} = \delta_{ik}, \{P_i, Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}$

16. Какую величину даёт частная производная от действия по координатам?
A) Импульс
B) Полное действие
C) Энергия
D) Момент
E) Ускорение

17. Чему равна частная производная от действия по времени?
A) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$
B) $\frac{\partial S}{\partial t} = 2\pi \frac{\partial I}{\partial E}$
C) $\frac{\partial S}{\partial t} = \omega$
D) $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$
E) $\frac{\partial S}{\partial t} = R - \frac{\partial R}{\partial \xi}$

18. Чему равна частная производная от действия по координатам?
A) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial I}{\partial E}$
B) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = R - \frac{\partial R}{\partial \xi}$
C) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$
D) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = I_i$
E) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$

19. Какой величине равна полная производная от действия по времени?
A) Полной энергии
B) Функции Лагранжа
C) Обобщённым импульсам
D) Гамильтониану
E) Адиабатическому инварианту

20. Как определяется укороченное действие?
A) $S_0 = \sum_i p_i q_i$
B) $S_0 = \int \sum_i p_i dq_i + U$
C) $S_0 = \int \sum_i dp_i$
D) $S_0 = \int \sum_i dq_i$

E) $S_0 = \int \sum_i p_i dq_i$

21. Чему равен полный дифференциал действия?

A) $dS = \frac{1}{2\pi} \oint pdq$

B) $dS = \sum_i p_i dq_i - Hdt$

C) $dS_0 = \int \sum_i p_i dq_i + U$

D) $\frac{dS}{\partial t} + H(q, p, t) = 0$

E) $dS = R - \frac{\partial R}{\partial \xi}$

22. Укажите математическую формулировку теоремы Лиувилля:

A) $T = 2\pi \frac{\partial I}{\partial E}$

B) $S_0 = \int \sum_i p_i dq_i$

C) $\frac{\partial E}{\partial I} = \omega$

D) $\int d\Gamma = const$

E) $\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0$

23. Утверждение о том, что при движении механической системы её фазовый объём остаётся неизменным, называется теоремой:

A) Якоби

B) Гамильтона

C) Пуассона

D) Лиувилля

E) Мопертюи

24. Выберите уравнение Гамильтона-Якоби:

A) $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial S}{\partial q_s}, t \right) = 0$

B) $\frac{\partial E}{\partial I} = \omega$

C) $\int d\Gamma = const$

D) $dS = \sum_i p_i dq_i - Hdt$

E) $q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

25. Как определяется адиабатический инвариант?

B) $I = \sum_i p_i q_i - L$

C) $q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

D) $I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq$

E) $\frac{\partial I}{\partial t} = -H$

F) $I = R - \xi \frac{\partial R}{\partial \xi}$

26. Как выражается период системы через адиабатический инвариант?

A) $\frac{\partial T}{\partial t} = -H$

B) $T = R - \xi \frac{\partial R}{\partial \xi}$

C) $T = \sum_i p_i dq_i - Hdt$

D) $T = \sum_i p_i q_i - L$

E) $T = 2\pi \frac{\partial I}{\partial E}$

27. Как называется величина, которая остаётся постоянной при движении системы с медленно меняющимися параметрами?

A) Фазовый объём
B) Гамильтониан
C) Адиабатический инвариант
D) Квазипериодический импульс
E) Каноническая траектория

28. Как выражается частота системы через адиабатический инвариант?

A) $\frac{\partial I}{\partial t} = -\omega$

B) $\frac{\partial E}{\partial I} = \omega$

C) $\frac{\partial S}{\partial q_i} = \omega$

D) $R - \frac{\partial R}{\partial \xi} = I\omega$

E) $I \frac{\partial H}{\partial p_i} = \omega$

29. Элемент фазового объёма для координаты и импульса имеет вид:

A) $\left(d\tilde{A} = dq_1 ... dq_s dp_1 ... dp_s\right)^2$

B) $\left(d\tilde{A} = \sqrt{dq_1 ... dq_s dp_1 ... dp_s}\right)$

C) $\left(d\tilde{A} = dq_1 - dq_s dp_1 - dp_s\right)$

D) $\left(d\Gamma = dq_1 ... dq_s dp_1 ... dp_s\right)$

E) $\left(d\tilde{A} = dq_1 . + dq_s dp_1 . + dp_s\right)$

30. Укажите критерий медленности изменения величины λ:

A) $T \frac{d\lambda}{dt} << \lambda$

B) $T \frac{d\lambda}{dt} = \lambda$

C) $T\frac{d\lambda}{dt} > \lambda$

D) $T\frac{d\lambda}{dt} >> \lambda$

E) $T\frac{d\lambda}{dt} - \lambda = 0$

31. Какая величина определяется выражением: $S_0 = \int \sum_i p_i dq_i$?
   A) Адиабатический инвариант
   B) Полный дифференциал действия
   C) Обобщённая энергия
   D) Фазовое пространство
   E) Укороченное действие
32. Чему равна производная от энергии системы по адиабатическому инварианту?
   A) Кинетической энергии
   B) Импульсу
   C) Циклической частоте
   D) Максимальной амплитуде
   E) Элементу фазового объёма
33. Выражение $\int d\Gamma = const$ называется теоремой:
   A) Лагранжа
   B) Лиувилля
   C) Лежандра
   D) Мопертюи
   E) Пуассона
34. В выражении $E = R - \frac{\partial R}{\partial \xi}$ R называется функцией:
   A) Рауса
   B) Римана
   C) Робертса
   D) Рикардо
   E) Рубенса
35. Какая величина определяется выражением: $2\pi\frac{\partial I}{\partial E}$
   A) Циклическая частота
   B) Полная энергия
   C) Адиабатический инвариант
   D) Период колебаний
   E) Укороченное действие
36. Какая величина определяется выражением: $\sum_i p_i dq_i$
   A) Момент импульса
   B) Укороченное действие
   C) Циклическая частота

D) Полная энергия
E) Адиабатический инвариант

37. Какая величина определяется выражением: $\frac{1}{2\pi}\oint pdq$

A) Адиабатический инвариант
B) Момент импульса
C) Циклическая частота
D) Полная энергия
E) Укороченное действие

38. Какая величина определяется выражением: $\frac{\partial E}{\partial I}$

A) Полная энергия
B) Циклическая частота
C) Адиабатический инвариант
D) Момент импульса
E) Укороченное действие

39. Выражение $\{f\{gh\}\}+\{g\{hf\}\}+\{h\{fg\}\}=0$ называется тождеством:

A) Пуассона
B) Якоби
C) Гамильтона
D) Лежандра
E) Мопертюи

40. Если f и g – интегралы движения, то выражение $\{fg\}=const$ называется теоремой:

A) Гамильтона
B) Лежандра
C) Мопертюи
D) Пуассона
E) Лиувилля

41. Что определяет вариационный принцип Мопертюи?

A) Энергию
B) Траекторию
C) Импульс
D) Период
E) Время

Заключение

В данном учебном пособии рассмотрены подробные решения более 70-ти задач по курсу «Теоретическая механика», что должно способствовать самостоятельной работе студентов над решением подобных задач, предлагаемых в пособии, а также усвоению методов, применяемых в теоретической физики для дальнейшего использования при изучения других дисциплин теоретического цикла и профессиональной деятельности.

Пособие может быть также использовано преподавателями на практических и лекционных занятий при рассмотрении конкретных задач.

Предлагаемые в пособии тестовые задания составлены в полном соответствии с учебником Механика, Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., что может быть использовано для текущей автоматизированной проверки усвоения теоретического материала курса или экзамена.

Список использованных источников

1 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.Теоретическая физика: Учеб.пособие. – В 10-ти т. Т. 1. Механика. 5-е изд., стереотип. – М.: Физматлит, 2012, 234 с.

2 Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М., Изд. Моск. Ун-та, 1978 г., 575 с.

3 Маркеев А.П., Теоретическая механика: Учебник для университетов. – Москва: ЧеРо, 1999, 572 с.