

П. А. Севостьянов

**КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ
В МЕХАНИКЕ
ВОЛОКНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Москва
2013

УДК 677.022.519.8

Севостьянов П.А. Компьютерные модели в механике волокнистых материалов: монография. – М.: «Тисо Принт», 2013. – 254 с.

Рассмотрены компьютерные модели, разработанные для решения задач механики волокнистых материалов. Описаны геометрические модели сечений пряжи и нитей различной структуры. Приведены результаты исследований роли трения между волокнами в материале. Особое внимание обращено на специфику поведения различных видов волокнистых материалов под действием нагрузок и деформаций, которые позволяют выделять их в особую категорию механических систем. Предложены моделирования тканых полотен при их деформации, истирании, разрыве.

Рецензенты:

Ефремов Г.И., д.т.н., проф., зав. кафедрой процессов и аппаратов химических и нефтеперерабатывающих производств Московского государственного открытого университета имени В. С. Черномырдина

Румянцев Ю.Д., к.т.н., проф., зав. кафедрой автоматики и промышленной электроники Московского государственного университета дизайна и технологии

ISBN 978-5-9904852-1-1

© Севостьянов П. А. 2013

© Дизайн. Обложка. ООО «Тисо Принт», 2013

Оглавление

<i>Предисловие</i>	3
Глава 1. Геометрические и динамические модели волокон, нитей и их ансамблей.....	5
1.1. Модели распределения волокон в поперечных сечениях пряжи ...	5
1.2. Оценка и критерии распределения волокон в поперечных сечениях одномерных волокнистых материалов	20
1.3. Модели динамики деформации и движения волокон и волоконных систем в полях сил трения.....	34
1.4. Модели пучка нитей.....	72
1.5. Модель растяжения и разрыва пряжи при полуцикловой деформации	99
1.6. Одномерное движение волокна в поле сил трения при циклических деформациях	112
1.7. Трибомеханическая статистическая модель волокна в одномерном волокнистом продукте	118
1.8. Статистическое усреднение линейных динамических моделей одномерной деформации	124
Глава 2. Модели двумерных волокнистых материалов	129
2.1. Моделирование волокнистого материала методами молекулярной динамики, механики деформируемых сплошных сред и статистической динамики	129
2.2. Статистическое моделирование критериев формы волокон в волокнистых материалах	131
2.3. Модель иглопрокалывания нетканого материала.....	140
2.4. Уравнения одномерного движения волокна.....	142

2.5. Модель уплотнения нетканого материала при иглопрокалывании	146
2.6. Динамика иглопрокалывания. Авторегрессионная модель	151
2.7. Модель разрыва образца ткани	156
2.8. Моделирование испытаний образцов тканей на истирание	163
2.9. Исследование динамики истирания и сравнение методик приборов ИТ-3М и Martindale	168
2.10. Экспериментальные исследования истирания тканей специального назначения на основе метода Martindale	171
2.11. Компьютерная модель истирания ткани	176
Глава 3. МКЭ - модели волокнистых материалов	188
3.2. Компьютерное МКЭ-моделирование взаимодействия нетканого материала с иглами при иглопрокалывании	195
3.3. Модель деформации элемента нити в ткани	204
3.4. Модель фиксации уточной нити в ткани после прибора	225
3.5. Модель сжатия с трением двух упруго-пластических нитей	226
3.6. Модель деформации образца ткани	234
3.7. Модель удлинения нити основы в образце ткани	238
Литература и информационные ресурсы	241

Предисловие

Волокнистые материалы – это особый класс материалов. Благодаря специфике структуры и строения их поведение под действием механических нагрузок не может быть соотнесено, как частный случай, с другими видами материалов. Огромное разнообразие способов переработки, структурное разнообразие, обширный диапазон натурального, искусственного и синтетического сырья для получения волокон, дешевизна производственных технологий – практически не оставляют областей человеческой деятельности, в которых бы не находили применение те или иные волокнистые материалы или изделия из них. Актуальность темы только возрастает. С каждым годом мы узнаем о все новых применениях волокнистых материалов, которые в «чистом» виде или в виде композитов заменяют металлы и пластики – привычные в быту и в производственной деятельности традиционные материалы.

Практически все волокнистые материалы получают, соединяя огромное количество коротких (штапельных) волокон или нитей. Формируемый материал существует как единое целое благодаря силам так называемого «сухого» трения и силам сцепления между волокнами. Этим волокнистые материалы и отличаются принципиальным образом от металлов, сплавов, пластиков, эластомеров, биологических тканей и проч. Взаимодействие волокон происходит на надмолекулярном уровне и подчиняется законам классической механики. Но методы молекулярной статистической механики и физики могут найти лишь весьма ограниченное применение при исследовании механических свойств волокнистых материалов. Огромное количество волокон, из которых состоит любой волокнистый материал, и значительные случайные вариации их характеристик делают необходимым сочетание законов классической механики с законами статистической механики и физики. Протяженность и природная извитость волокон не позволяют рассматривать их как своего рода «атомы» с малым числом степеней свободы и тем самым упростить решение прикладных задач. Все эти особенности привели к появлению науки о волокнистых материалах как отдельной области знаний.

Постоянно нарастающая мощность современных компьютеров, появление суперкомпьютеров и компьютерных кластеров позволяют использовать совершенно новые методы анализа подобных систем. Наиболее близкими к обсуждаемой области исследований можно считать относительно недавно появившиеся направления компьютерного моделирования: методы конечных элементов, граничных элементов, молекулярной динамики, мезомеханики, подвижных клеточных автоматов, теории обобщенных континуумов, теории перколяции и других современных направлений изучения сложных механических и физических систем.

В монографии собраны материалы, отражающие работу автора в области компьютерного и математического моделирования для решения не-

которых задач механики волокнистых материалов. Основное внимание уделено роли сил т.н. «сухого» трения и вероятностных свойств волокон в динамике деформирования волокнистых материалов; необратимым процессам при деформации и разрушении волокнистых материалов под действием внешних нагрузок.

Приведены оригинальные алгоритмы создания геометрических моделей для сечений пряжи и подобных волокнистых структур, имитации растяжения и разрыва пучков волокон, нитей и пряжи, растяжения и разрыва тканых полотен, взаимодействия нитей в полотнах.

Во всех разработанных и рассмотренных моделях учитывалась вероятностная природа свойств волокон; доказано ее принципиально важное значение. Это позволило выявить роль статистического разброса характеристик волокон и его влияние на геометрические и механические особенности волокнистого материала в динамике под действием нагрузки.

В монографии описано применение различных математических подходов к разработке моделей для решения поставленных задач. В их числе статистическое моделирование, статистическая имитация, дифференциальные и конечно-разностные уравнения, методы и аппарат геометрии, алгебры, векторного и тензорного исчисления, конечных элементов.

Особое внимание уделено относительно мало изученным, но практически важным методам моделирования нестационарных процессов деформации, изменения свойств, истирания, появления и нарастания разрывов в волокнистых материалах: разрыву пряжи, истиранию и разрыву ткани, гистерезису нитей при циклических нагрузках. Автором обращено внимание на принципиальные отличия механизма развития деформации и разрушения при истирании и разрыве в текстильных полотнах по сравнению с другими материалами.

Автор счел нецелесообразным включать непосредственно в текст ссылки на использованные работы и источники информации. В приведенной библиографии присутствуют работы всех авторов, чей труд, так или иначе, нашел отражение в изложенном материале, в нее также включены работы, представляющие наибольший интерес с позиций обсуждаемых тем. Ряд классических и общеизвестных фундаментальных работ в библиографии не упомянут, поскольку читатели, интересующиеся рассматриваемой тематикой, безусловно, с ними знакомы.

Автор надеется, что работа, изложенная в монографии, заинтересует всех, кого увлекают проблемы механики волокнистых материалов, а также аспирантов и научных работников в этих областях исследования.

Глава 1. Геометрические и динамические модели волокон, нитей и их ансамблей

1.1. Модели распределения волокон в поперечных сечениях пряжи

Структура поперечного сечения пряжи (ПСП) оказывает большое влияние на свойства пряжи. Поэтому ПСП изучали многие отечественные и зарубежные исследователи. Для прогнозирования свойств пряжи, зависящих от ПСП, необходимо располагать его компьютерной моделью.

Фотографии (рис.1.1) и зарисовки ПСП приведены во многих учебниках, статьях и монографиях.

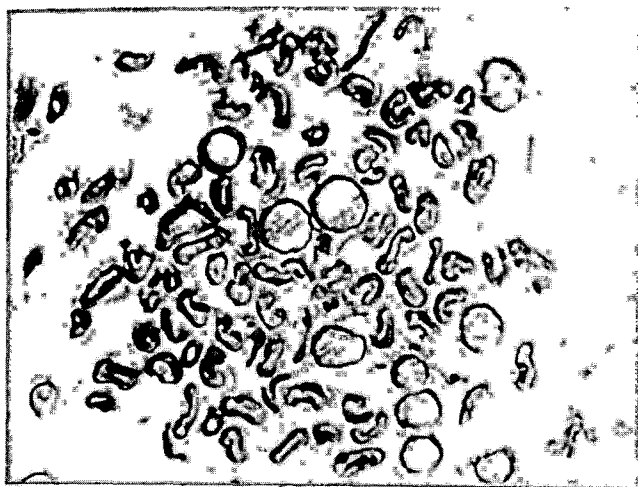


Рис.1.1 Пример лабораторной фотографии сечения пряжи

ПСП представляет собой множество объектов (сечений волокон и/или нитей), заполняющих область округлой формы без четко выраженной границы. В центральной части области сечения волокон расположены близко или даже касаются друг друга.

Заметим, что упругость волокон приводит к тому, что даже при большой крутке пряжи в центральной части сечения касаются друг друга лишь небольшое число волокон. Волокна на периферии сечения пряжи и вовсе могут находиться друг от друга на значительном расстоянии. По этой причине невозможно точно определить границы поперечного сечения пряжи.

Структура ПСП отличается от структуры сечения канатов, которые имеют высокую степень упорядоченности, регулярности в расположении отдельных нитей и максимально плотную упаковку этих нитей в сечении. Тем самым обеспечивается большая площадь касания, большое трение

между нитями и, как следствие, большая прочность канатов. Другая важная особенность ПСП состоит в том, что сечения волокон могут иметь различную, иногда весьма причудливую форму. Она зависит от их происхождения или способа изготовления.

Моделирование ПСП относится к классической задаче моделирования плотной упаковки, которая возникает во многих прикладных областях. Как правило, в этой задаче рассматривают упаковки элементов правильной формы (круги, шары, прямоугольники, выпуклые многогранники), что упрощает задачу. Разработано большое число алгоритмов построения геометрических моделей плотной упаковки. Каждый из них приспособлен для конкретной области применения. Ниже описаны алгоритмы, разработанные автором для получения геометрических моделей ПСП с учетом перечисленных особенностей структуры.

Первый из них основан на применении триангуляции Делоне в сочетании со случайными вариациями в положении вершин треугольников и их числа в зависимости от расстояния от центра формирования сечения. При этом сечение каждого волокна моделируется кругом случайного радиуса R . Алгоритм состоит из следующих шагов:

Алгоритм А1.1

1. Задание числа n волокон в сечении, закона распределения R , числа m кольцевых слоев расположения волокон в ПСП, среднего числа волокон mSr в слое.
2. Для $k = 1, \dots, m$ выполнить:
 - 2.1. Генерация случайных значений полярных координат $\{r(k); \alpha(k)\}$ вершин треугольников в k -м слое в соответствии со значением mSr для этого слоя.
 - 2.2. Занесение координат $\{r(k); \alpha(k)\}$ в массив вершин треугольников. Формирование на базе этого массива подмножества V вершин из $(k-1)$ -го и k -го слоев.
 - 2.3. Триангуляция Делоне для множества точек V , т.е. построение непересекающихся треугольников с наибольшими возможными углами при вершинах, заполняющих k -й слой.
 - 2.4. Построение вписанных кругов, имитирующих сечения волокон, для каждого из построенных треугольников слоя.

На рис.1.2а приведен пример работы алгоритма для пяти слоев при отсутствии случайных вариаций в положении волокон внутри слоя, как в радиальном, так и в азимутальном направлениях. В этом случае структура ПСП близка к идеальной упорядоченной структуре. Все треугольники и вписанные круги (на рисунке не показаны) одинаковы.

На рис.1.2б показана геометрическая модель ПСП, полученная с помощью приведенного алгоритма для пяти слоев при наличии случайных вариаций в положении вершин треугольников, а соответственно, в положении и радиусах вписанных кругов.

Из рисунков видны как достоинства, так и недостатки данного алгоритма. Сечения волокон располагаются не предельно плотно, как при плотной упаковке. Между сечениями имеются точки касания. Сечения волокон варьируют случайным образом, как по величине площади, так и по

расположению внутри ПСП. ПСП имеет форму, близкую к кругу без четко выраженной границы, т.е. реализуется большинство отмеченных выше особенностей ПСП.

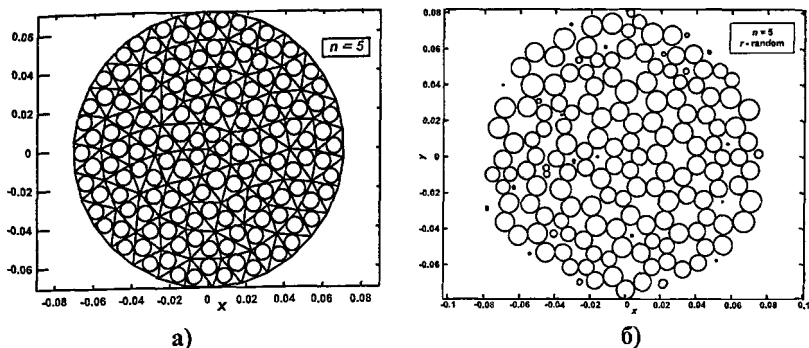


Рис.1.2 Модель по алгоритму A1.1 (процедура Matlab Triangle)

Однако в алгоритме A1.1 отсутствует прямой контроль числа волокон в ПСП и распределением их координат и площади. Они определяются координатами вершин и числом не пересекающихся треугольников в триангуляции Делоне.

Видны характерные локальные кольцеобразные формирования из сечений волокон с незаполненными центральными областями. Появляются сильно вытянутые треугольники, которые дают вписанные круги очень маленькой площади. Из-за несвязности триангуляции отдельных кольцевых слоев в модели некоторые из кругов – сечений волокон – пересекаются. Такие круги могут быть удалены путем включения в алгоритм A1.1 процедур проверки пересечений кругов после построения модели.

Ниже приведен текст процедуры Matlab Triangle, реализующей алгоритм A1.1

```
function Triangle;
Rp=1; Rv=0.01; ns = [6 12 18 24 30 36 42 48 54 60];
Vx=0; Vy=0; s=1; Vxs(1,1)=0; Vys(1,1)=0;
for s=1:5
nSr=ns(1,s); CVns=0.05;
n=round(normrnd(nSr,CVns*nSr)); % n=nSr;
r=unifrnd(Rv*sqrt(2)*s,1.7*Rv*s,n,1); % r=(Rv*sqrt(3)*s+2*Rv*s)/2;
fir=(-pi+pi/36*(s-1));2*pi/(n-1):(pi+pi/36*(s-1));
dfi=0; % dfi=unifrnd(-pi/72,pi/72,n,1);
fi=fir+dfi; [Vxs(s+1,1:n),Vys(s+1,1:n)] = pol2cart(fi,r);
DVx=[Vxs(s,:);Vxs]; DVy=[Vys(s,:);Vys]; T=deLaunay(DVx,DVy);
% h=triplot(T,DVx,DVy,'LineWidth',1.5); hold on, axis equal
[nT,d]=size(T);
for k=1:nT
```

```

A(1,1)=DVx(T(k,1)); A(1,2)=DVy(T(k,1));
B(1,1)=DVx(T(k,2)); B(1,2)=DVy(T(k,2));
C(1,1)=DVx(T(k,3)); C(1,2)=DVy(T(k,3));
VpisCircle(A,B,C);
end;
end;
function VpisCircle(A,B,C);
% A,B,C- векторы вершин треугольника ABC
a=norm(B-C); b=norm(C-A); c=norm(A-B); Lb=a/c; Lc=a/b;
Xa=A(1,1); Xb=B(1,1); Xc=C(1,1); Ya=A(1,2); Yb=B(1,2); Yc=C(1,2);
p=(a+b+c)/2; S=sqrt(p*(p-a)*(p-b)*(p-c)); r=S/p; % радиус вписанного круга
% Расчет координат центра вписанного в треугольник круга
Cx=(Xb+Lc*Xa)/(1+Lc); Cy=(Yb+Lc*Ya)/(1+Lc);
Vx=(Xc+Lb*Xa)/(1+Lb); Vy=(Yc+Lb*Ya)/(1+Lb);
K1=(Cy-Yc)/(Cx-Xc); K2=(Vy-Yb)/(Vx-Xb);
X0=(K1*Xc-K2*Xb+Yb-Yc)/(K1-K2); Y0=K1*(X0-Xc)+Yc;
%X=[Xa,Xb,Xc,Xa]; Y=[Ya,Yb,Yc,Ya]; plot(X,Y); % Рисование треугольника
axis equal
rectangle('Position',[X0-r,Y0-r,2*r,2*r],'Curvature',[1,1], 'LineWidth',1.5); %Рисова-
ние круга

```

Другой алгоритм *А1.2* моделирования ПСП основан на следующих соображениях. Поперечные сечения волокон, образующих пряжу, имеют, как уже отмечалось выше, неправильную, иногда весьма причудливую форму. Поэтому не приходится надеяться построить алгоритм, позволяющий получить изображение из сечений волокон, случайным образом расположенных и ориентированных в плоскости ПСП. Но для прикладных задач использования моделей ПСП обычно нет необходимости точно воспроизводить изображение этого ПСП. Можно, например, ограничиться границами области ПСП, которую «контролирует» соответствующее волокно.

При моделировании структур материалов, основанных на технологиях плотной упаковки элементов, широко используются методы триангуляции Делоне и многоугольников Вороного. Поэтому алгоритм *А1.2* и на его основе модель имитации для построения модели ПСП были разработаны с использованием этих методов.

Для получения модели ПСП такого типа область ПСП разделялась на выпуклые многоугольники неправильной случайной формы по методу Вороного. Применительно к построению модели ПСП сначала генерируют множество n точек - геометрических центров сечений волокон, распределенных согласно некоторому закону распределения вокруг центра ПСП. Затем для этого множества точек строят систему выпуклых многоугольников, стороны которых равноудалены от этих точек.

Процедура `Matlab DiagramVoronoy`, позволяющая получить модель поперечного сечения волокнистого продукта округлого сечения, например,

пряжи, в виде многоугольников Вороного с использованием метода триангуляции Делоне, приведена ниже

```
function [Vx,Vy,vx,vy,xc,yc] = DiagramVoronoy;
n=160; da=unifrnd(-pi/30,pi/30,1,n+1); a=0:pi/(n/2):2*pi; a=a+da;
r=1.09*ones(1,n+1); [x,y]=pol2cart(a,r);
plot(x,y,'g*'); axis equal, hold on % ореол
bc=unifrnd(0,2*pi,1,250); rc=1*sqrt(unifrnd(0,1,1,250)); [xc,yc]=pol2cart(bc,rc);
xv=[x,xc]; yv=[y,yc]; [vx,vy] = voronoi(xv,yv); plot(xc,yc,'k*'); hold on
n=length(vx); j=1; k=0;
while j<=n
L1=(vx(1,j))^2+(vy(1,j))^2; L2=(vx(2,j))^2+(vy(2,j))^2;
if L1<3 & L2<3
k=k+1; Vx(1,k)=vx(1,j); Vx(2,k)=vx(2,j); Vy(1,k)=vy(1,j); Vy(2,k)=vy(2,j);
end; j=j+1; end;
figure, plot(Vx,Vy,'k-', 'LineWidth',2, 'Color','black'); axis equal
```

Пример работы модели, построенной по этому алгоритму для значений: $R_p = 1$, $n = 161$, $R_r = 3$, $R_p = 3$, $R_o = 1,1$, приведен на рис.1.3 – 1.4. На рис.1.3б показана модель сечения ПСП, а на рис.1.4 - гистограмма распределения радиусов волокон в этом сечении.

В некоторых задачах, требующих моделирования ПСП, нет необходимости обрисовывать контур волокон. Достаточно указать границы ареала, занятого волокном в ПСП. В этих случаях могут быть использованы модели, подобные изображенным на рис.1.3б.

Для устранения незамкнутых многоугольников на границе области построения (рис.1.3а) в алгоритм моделирования ПСП добавлены следующие фрагменты. Во-первых, дополнительно к точкам, определяющим геометрические центры волокон в ПСП, генерируются точки по границе области ПСП на расстоянии R_o , незначительно превышающим радиус ПСП R_p . В программе это 1,09 от R_p . Количество этих точек должно быть достаточно большим, чтобы они создавали плотный «ореол» вокруг внутренних точек ПСП.

Затем строятся многоугольники Вороного для всех точек: внутренних и «ореола». После этого отрезки, лежащие за границей области формирования модели ПСП и порожденные точками «ореола», исключаются из модели. Анализ применения триангуляции Делоне для моделирования поперечных сечений нитей и пряжи показал ограниченную пригодность этих методов, а алгоритмы оказались недостаточно удобными для получения разных видов структуры ПСП. В качестве альтернативы был разработан алгоритм, основанный на методе статистической имитации. Этот метод нашел применение при решении аналогичных задач во многих областях науки. Сечения волокон, образующих ПСП, моделировались кругами.

Для заданного числа N волокон радиусы r и координаты центров (x_c, y_c) этих кругов генерировались с помощью генераторов случайных чисел в соответствии с выбранными для исследования сечений законами распреде-

ления и структурой ПСП. Очевидно, что при этом необходимо обеспечить условие отсутствия пересечений сечений волокон и нитей

$$D_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad \forall (i \neq j; i, j = 1, \dots, N) \quad (1.1)$$

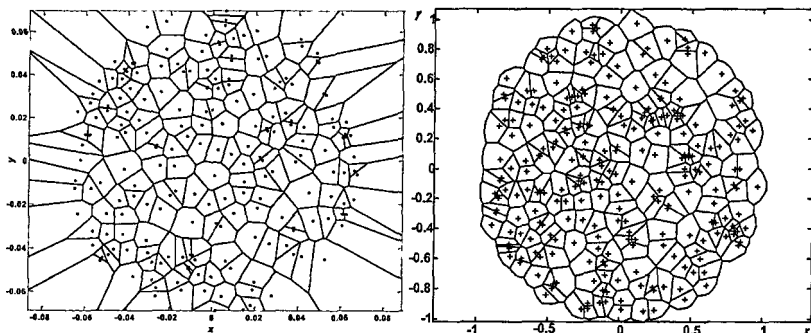


Рис.1.3. Модель ареалов волокон в ПСП с использованием метода Вороного, полученная с помощью алгоритма А1.2

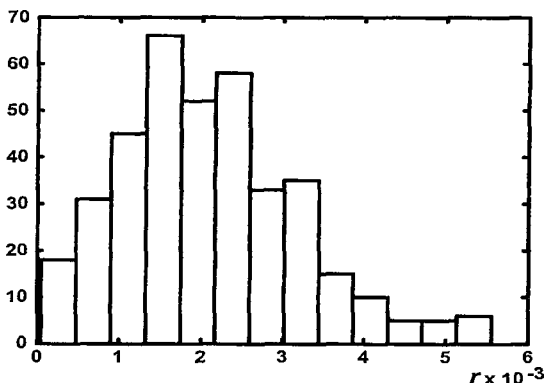


Рис.1.4. Гистограмма радиусов волокон с использованием метода Вороного и алгоритма А1.2

В простейшем варианте алгоритма использовался метод «проб и ошибку»: если вновь сгенерированное сечение волокна не удовлетворяло условию (1.1), то генерировалось новое пробное сечение.

В качестве альтернативы алгоритмам А1.1 и А1.2 рассмотрим простейший алгоритм А1.3 на основе метода Монте-Карло. Сечения волокон в виде кругов случайного радиуса и со случайным положением центров генерируются в пределах круга, задающего границы моделируемого сечения пряжи. При этом контролируется условие отсутствия взаимного пересечения сечений волокон. Генерация продолжается до тех пор, пока количество фактически сгенерированных волокон N_f не достигнет заданного числа

$Nvol$, или будет превышено максимальное число пробных генераций $Npmax$.

Очевидно, что такой алгоритм является наиболее простым и гибким, приспособленным для имитации сечений сложной структуры. Однако, с ростом числа волокон в сечении быстро увеличиваются затраты времени на моделирование. К сожалению, этот простейший алгоритм оказался неприемлемо медленным при числе волокон в сечении более 150. Поэтому была разработана его модификация, которая оказалась достаточно эффективной.

На рис.1.5 приведен пример работы алгоритма *AI.3* при следующих исходных данных. Условный радиус пряжи $Rpr = 0,1$ мм, средний радиус волокна $rSr = 0,01$ мм, коэффициент вариации радиуса волокон $CVr = 20\%$, $Npmax = 10^6$, $Nvol = 150$, $Nf = 144$. Хотя на рисунке наблюдается касание отдельных сечений волокон, фактически касаний не происходит (сказываются погрешности графического отображения).

В таблице 1.1 приведены затраты времени *Time* на моделирование одного сечения, значения Nf и число потребовавшихся пробных генераций $Npovt$ в зависимости от $Nvol$ при одинаковых исходных данных и условиях моделирования. Как следует из таблицы, уже для $Nvol = 150$ даже миллиона пробных генераций недостаточно, чтобы смоделировать заданное число $Nvol$ сечений.

На рис.1.6а,б,в приведены гистограммы – оценки распределений радиусов волокон, их радиальной и угловой координат. Гистограммы хорошо согласуются с выбранными законами распределения, которые обеспечивают равномерное распределение сечений волокон по площади ПСП.

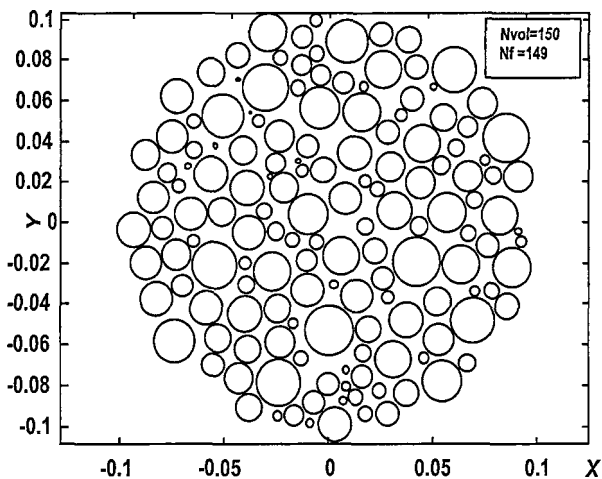
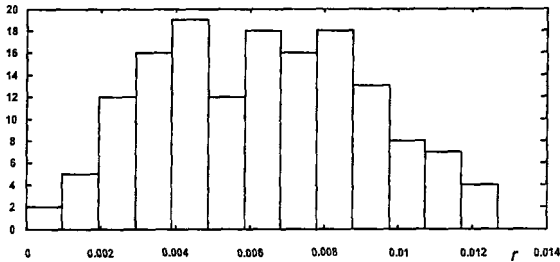


Рис.1.5 Модель по алгоритму *AI.3* (процедура *Ураковка3*)

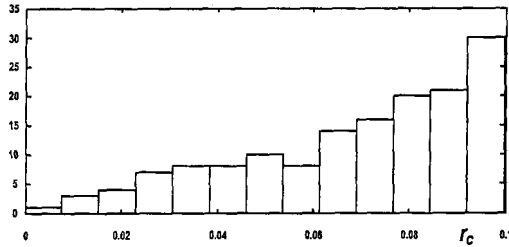
Таблица 1.1.

Зависимость времени моделирования от числа волокон в сечении
и числа моделируемых сечений

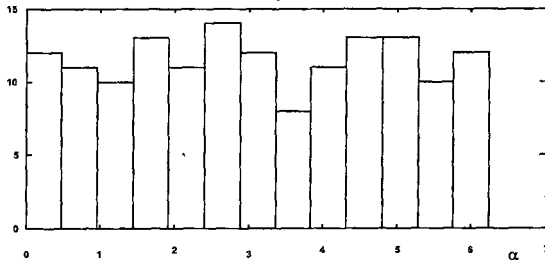
$Nvol$	10	50	100	150
Nf	10	50	100	144; 149
$Npovt$	12	232	47405	1000000
$Time$	1.025	0.477	10.883	268.780; 273.560



а)



б)



в)

Рис.1.6. Гистограммы радиусов волокон r , радиальной r_c и угловой α координат в модели ПСП на рис.1.5

Ниже приведена процедура Matlab `Упакровка3`, реализующая алгоритм А1.3:

function [P,X,r,Nf,povt] = Упакровка3;

```

% Простая генерация круглых сечений волокон со случайным распределением
% радиусов и положения с контролем и исключением пересечений
tic % момент начала работы программы
Rp=0.1; Nvol=150; rSr=0.01; CVr=0.2; Nmod=1000000;
P=zeros(Nvol,2); X=zeros(Nvol,2); r=zeros(Nvol,1);
r(1,1)=abs(normrnd(rSr,CVr*rSr));
P(1,1)=unifrnd(0,2*pi); P(1,2)=Rp*sqrt(rand);
[x,y]=pol2cart(P(1,1),P(1,2)); X(1,:)=x,y;
Nf=1; povt=1;
while povt<Nmod & Nf<Nvol
    povt=povt+1; r1=abs(normrnd(rSr,CVr*rSr));
    a1=unifrnd(0,2*pi); rc1=Rp*sqrt(rand);
    [x,y]=pol2cart(a1,rc1); X1=[x,y];
    for k=1:Nf Dist(k,1)=norm(X(k,:)-X1(1,:))-r(k,1)+r1; end;
    if Dist>=0 Nf=Nf+1; P(Nf,:)=a1,rc1; X(Nf,:)=X1; r(Nf,1)=r1; end;
end;
for k=1:Nf
    axis equal
    rectangle('Position',[X(k,1)-r(k,1),X(k,2)-r(k,1),2*r(k,1),2*r(k,1)], 'Curvature',[1,1]);
end;
T=toc % продолжительность работы программы

```

Более приемлемым по времени работы, по-видимому, является модифицированный алгоритм моделирования ПСП *А1.4*, включающий три этапа. На первом этапе генерируются радиусы и полярные координаты n кругов - сечений волокон, образующих ПСП, без учета их возможного перекрытия (рис.1.7). Для этого выполняется генерация круговых сечений волокон, т.е. переменных $\{r_i; (x_{ci}, y_{ci}), i = 1, \dots, N\}$ без контроля условия (1.1).

При этом распределения радиальной r_c и угловой α координат центров выбраны так, чтобы центры были распределены равномерно по площади ПСП, имеющей форму окружности радиуса $R_p = 1$. Радиусы сечений волокон R генерировались как модули нормальной случайной величины со средним $sRs = 0,1$ и коэффициентом вариации $CVr = 30\%$.

На втором этапе выполняется разнесение сечений волокон вдоль радиусов от центра ПСП до тех пор, пока для всех волокон не будет выполняться условие (1.1). При этом циклически выполнялись пропорциональное увеличение радиальных координат r_c и проверка отсутствия пересечений кругов - сечений волокон до исключения всех пересечений. В результате волокон, показанные на рис.1.7, в ПСП расположились, как показано на рис.1.8.

На третьем этапе производится обратное сжатие сечений волокон. Каждое сечение перемещалось до точки касания с волокном, расположенным ближе к центру ПСП. Затем координаты перемещаемого волокна получают случайные флуктуации в радиальном и тангенциальном направлениях в сочетании с дальнейшим перемещением к центру ПСП.

Этот процесс имитирует своего рода «утруску» волокон, уплотняющую сечения ближе к центру. При этом у каждого из сечений волокон ра-

диальная координата уменьшалась на случайную величину, равномерно распределенную в диапазоне $[0; r_{\text{Max}}]$, а угловая координата варьировалась на случайную величину, равномерно распределенную в диапазоне $[\alpha - \pi/6; \alpha + \pi/6]$. Такие флуктуации повторяют примерно 1000 раз для каждого волокна. Если в новом положении круг не пересекался с другими кругами, это положение фиксировалось как удачное. В противном случае круг возвращался в предыдущее положение.

В результате имитации «утруски» волокон к центру ПСП, повторенных N_{povt} раз, получаем ПСП в виде, представленном на рис. 1.8. Как видно из рисунка, степень уплотнения сечений волокон и их расположение в ПСП весьма правдоподобно напоминают фотоснимки и зарисовки реальных образцов ПСП для круглых в сечении волокон.

Ниже приведен текст процедуры Matlab **Upakovka0**, реализующей алгоритм **A1.4**

```
function [Dist,X,R,sch]=Upakovka0;
tic; Nvol=200; Rp=1; rSr=0.1; CVr=0.3; Npovt=1000; drmax=10*rSr;
R = abs(normrnd(rSr, CVr*rSr, Nvol, 1)); a = 2*pi*rand(Nvol, 1);
rc = Rp*sqrt(rand(Nvol, 1)); MatrPol = [rc,a]; MatrPolSort = sortrows(MatrPol, 1);
a = MatrPolSort(:,2); rc = MatrPolSort(:,1); [x,y] = pol2cart(a, rc); X = [x,y];
NormStart = norm(X)
for k = 1:Nvol
    rectangle('Position',[X(k,1) - R(k,1),X(k,2) - R(k,1), 2*R(k,1), 2*R(k,1)], 'Curvature',
        [1,1], 'LineWidth', 2);
end; axis equal
z=1; Dist = ones(Nvol, Nvol);
while z > 0
    for k = 1:Nvol for j = k+1:Nvol
        Dist(k,j) = norm(X(k,:) - X(j,:)) - (R(k,1) + R(j,1)); Dist(j,k) = Dist(k,j);
    end; end;
    if all(Dist > 0) z = -1; else X = 1.1*X; end;
end;
NormMiddle = norm(X); figure; sch = 0;
for k = 1:Nvol
    rectangle('Position', [X(k,1) - R(k,1),X(k,2) - R(k,1), 2*R(k,1), 2*R(k,1)], 'Curvature', [1,1], 'LineWidth', 2);
end; axis equal
Xopt = X; [a,rc] = cart2pol(X(:,1),X(:,2));
for povt = 1:Npovt for k = 1:Nvol
    dr = 0.05*rc(k,1)*rand; da = pi/3*(rand-0.5); rc(k,1) = rc(k,1) - dr;
    a(k,1) = a(k,1) + da; [x,y] = pol2cart(a(k,1), rc(k,1)); X(k,:) = [x,y];
    for j = 1:Nvol
        if j ~= k Dist(k,j) = norm(X(k,:) - Xopt(j,:)) - (R(k,1) + R(j,1)); end;
    end;
    if Dist(k,:) > 0 Xopt(k,:) = X(k,:); sch = sch + 1;
    else rc(k,1) = rc(k,1) + dr; a(k,1) = a(k,1) - da;
end; end;
X = Xopt; % NormEnd = norm(X)
```



```

figure % hold on;
for k = 1:Nvol
rectangle('Position', [X(k,1)-R(k,1), X(k,2) - R(k,1), 2*R(k,1), 2*R(k,1)], 'Curvature',[1,1], 'LineWidth', 2);
end; axis equal T = toc

```

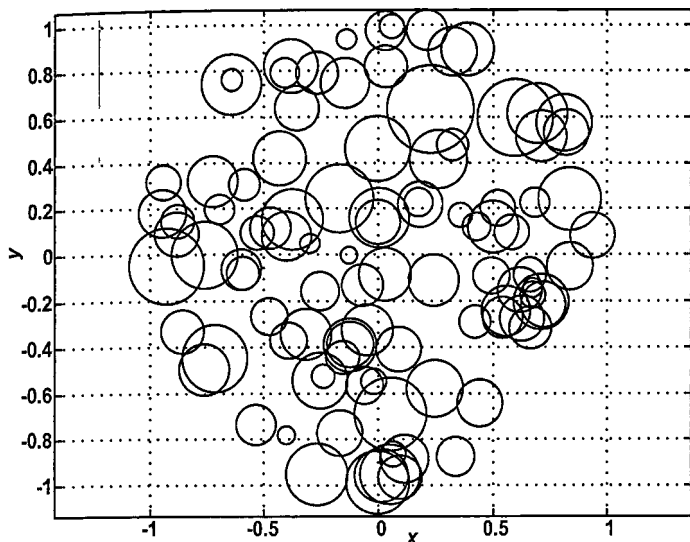


Рис.1.7 Модель ПСП после первого этапа работы алгоритма А1.4

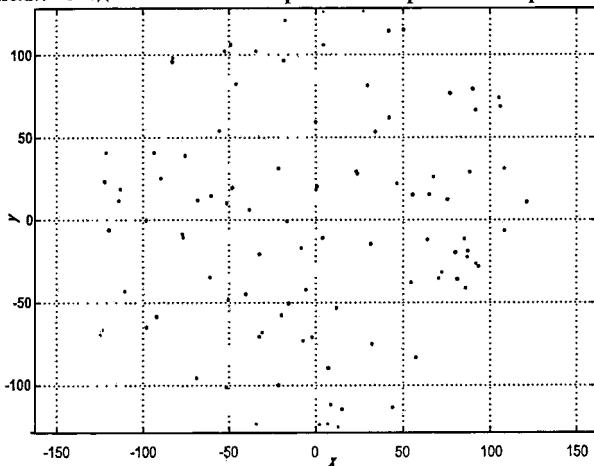


Рис.1.8 Рассеяние центров сечений волокон после второго этапа работы алгоритма А1.4

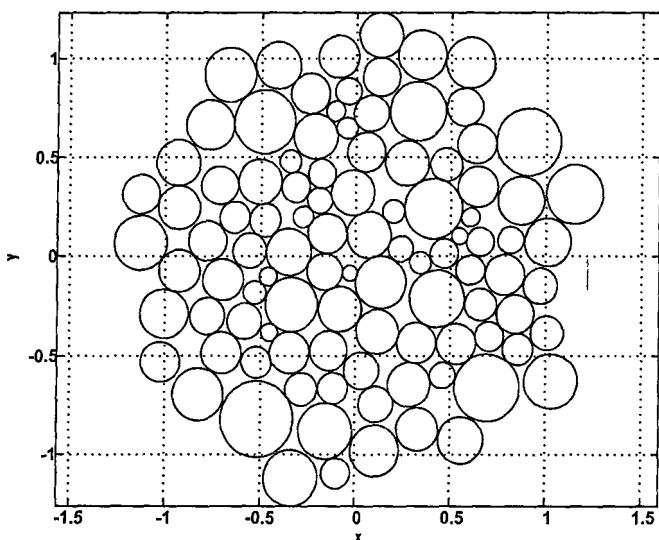


Рис.1.9 Модель ПСП после завершения работы алгоритма A1.4

В табл.1.2 приведены данные по затратам времени на моделирование одного ПСП в зависимости от числа волокон в сечении при одном и том числе повторных проб.

Легко проверить, что Time находится в квадратичной зависимости от Nvol. Оценка плотности заполнения ПСП сечениями волокон может быть построена на отношении суммарной площади сечений всех волокон к площади ПСП.

Таблица 1.2

Зависимость длительности работы алгоритма от числа моделируемых волокон в сечении

Nvol	20	50	100	150	200	250	300
Time, с	1,66	7,13	28,83	55,94	96,83	152,40	220,0

На рис.1.10 представлены результаты работы алгоритма после каждого из трех шагов при моделировании поперечного сечения комбинированной пряжи, образованной двумя типами волокон. Центральная часть ПСП заполнена нитями большей и одинаковой толщины. На периферии располагаются более тонкие волокна с большим разбросом по толщине. Исходные данные для первой группы волокон: $N_1 = 24$; радиус ПСП $Rp_1 = 0,2$; средний радиус волокна и коэффициент вариации $rSr_1 = 0,06$; $CVr_1 = 0,1\%$. Те же данные для второй группы волокон, образующих ПСП: $N_2 = 176$; $Rp_2 = 1,0$; $rSr_2 = 0,03$; $CVr_2 = 20,0\%$.

Полученная модель позволяет получать оценки для различных показателей, описывающих распределение волокон по сечению пряжи. Так, на рис.1.11а приведена гистограмма распределения расстояний между цен-

трами D_{min} наиболее близко расположенных друг к другу сечений волокон. Проверка по критерию χ^2 гипотезы о соответствии гистограммы экспоненциальному распределению не отвергается с уровнем значимости 5%.

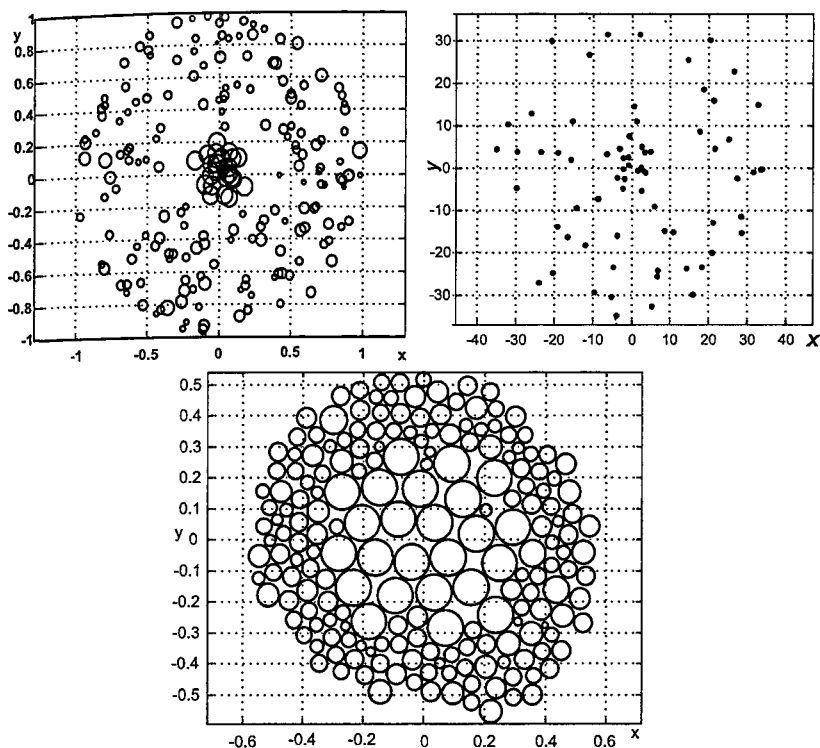


Рис.1.10 Модель сечения комбинированной пряжи

На рис.1.11б представлена гистограмма распределения расстояний r_c центров волокон от центра сечения. Сердцевина ПСП, образована первой группой волокон, имеющих практически одинаковые сечения и расположенных в центре ПСП практически регулярно. Сердцевина дает левую часть гистограммы с одинаковым числом попаданий в интервалы. Более тонкие волокна имеют распределение значений r_c , близкое к усеченному нормальному распределению.

На рис.1.11в изображена гистограмма распределения угловой координаты α (радиан) центров волокон ПСП. Эта гистограмма соответствует равномерному распределению, как и следовало ожидать непосредственно из вида ПСП (рис.1.10).

На рис.1.11г представлена гистограмма радиусов поперечных сечений волокон, образующих ПСП. Она указывает на наличие двух групп в

общем количестве волокон. Одна группа имеет практически одинаковые большие радиусы. У второй группы радиусы меньше и имеют распределение, близкое к нормальному распределению. Все это соответствует заданным условиям моделирования ПСП комбинированной пряжи.

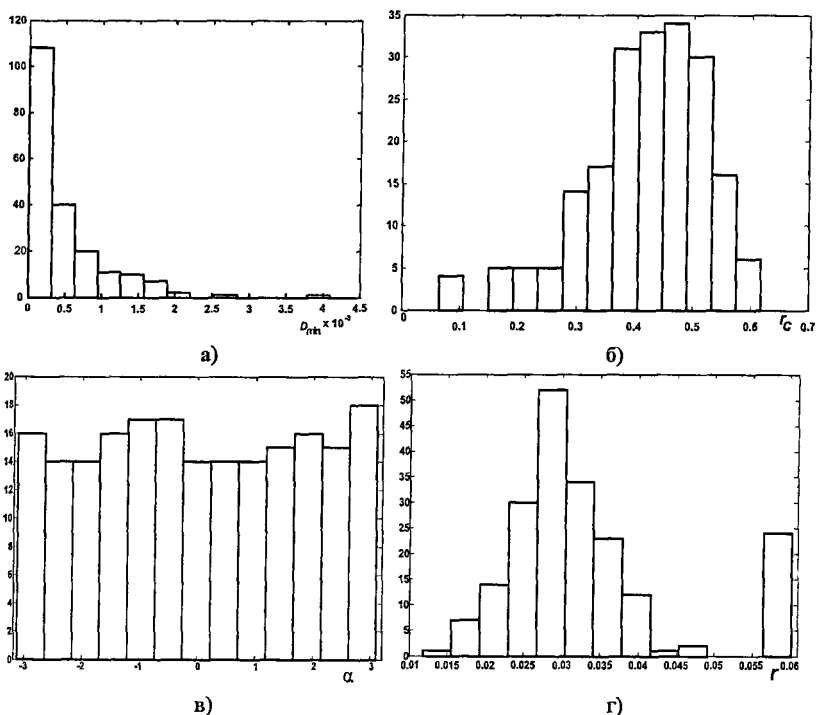


Рис.1.11 Гистограммы распределений характеристик сечения пряжи

Простые модификации базового алгоритма позволяют моделировать поперечные сечения комбинированной пряжи любого строения. На рис.1.12а приведен пример такой модели сечения комбинированной пряжи, в котором одна группа волокон занимает одну половину ПСП, а другая группа волокон – другую половину, при случайном характере распределения волокон в пределах ПСП. На рис.1.12б приведена модель ПСП, образованная тремя группами волокон, заполняющими секторы по одной трети окружности.

Вследствие значительной разницы между средними радиусами сечений волокон ($r_1 = 0.06$; $r_2 = 0.03$; $r_3 = 0.01$) при одинаковых малых коэффициентах вариации ($CVr_1 = CVr_2 = CVr_3 = 0.1\%$) происходит некоторое перераспределение волокон в азимутальном направлении, отличающееся от заданного (т.е. по 120° на каждую группу волокон).

На рис. 1.13а изображена модель ПСП, построенная из двух групп волокон, одна из которых образует крестообразный сердечник, а вторая играет роль заполнителя, случайным образом размещаясь в ПСП между волокнами первой группы.

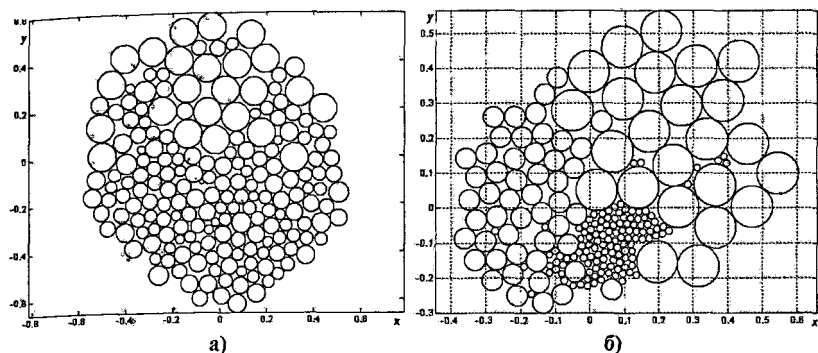


Рис.1.12 Модели сечений двух- и трехкомпонентной пряжи

На рис.1.13б приведена модель ПСП для комбинированной пряжи, центральная часть которой сформирована из семи регулярно расположенных одинаковых нитей круглого сечения (сердечник пряжи). Сердечник покрыт тонкими волокнами, расположенными вокруг центра сечения пряжи. Обратим внимание на эффект вытеснения волокон с большим поперечным сечением на периферию ПСП в процессе «утруски» на третьем шаге алгоритма моделирования, который наблюдается во всех рассмотренных структурах ПСП.

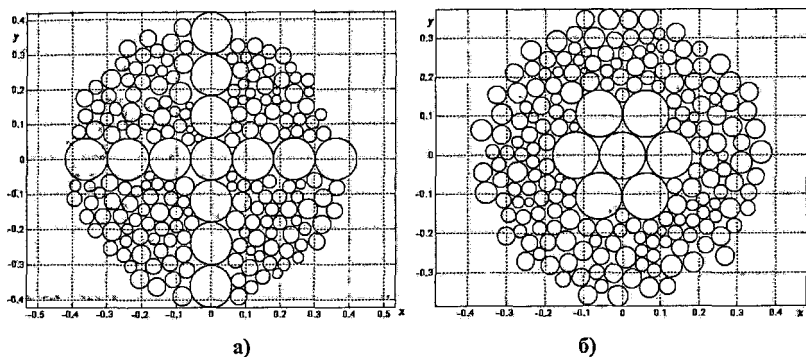


Рис.1.13 Модели сечений армированной пряжи

1.2. Оценка и критерии распределения волокон в поперечных сечениях одномерных волокнистых материалов

Исследование распределения волокон в поперечном сечении пряжи — классическая задача текстильного материаловедения. Она находится в тесной связи с задачей о миграции волокон в объеме пряжи. Практическое значение указанных задач велико, несомненно, поскольку от распределения волокон в поперечном сечении зависит большинство свойств и особенностей конкретной пряжи. Неравномерность распределения разнородных волокон в смеси становится причиной структурной неровноты продукта и отрицательно влияет на физико-механические свойства и внешний вид пряжи.

Основная трудность смешивания и равномерного распределения волокон в пряже заключается в неоднородности сырья по различным свойствам. Например, волокна могут иметь большую неравномерность по физико-механическим свойствам, способности к окраске и другим важнейшим показателям. В связи с тем, что в настоящее время производится достаточно большое количество видов пряжи из смесей волокон, возникает необходимость в исследовании методов оценки равномерности распределения и группировки разнородных волокон с целью определения оптимального критерия, наиболее адекватно отражающего потребности специалиста — проектировщика пряжи.

Эффективность перемешивания разнородных волокон в пряже проявляется в равномерности расположения волокон в каждом сечении пряжи и одинаковом расположении волокон разных компонентов в различных поперечных сечениях пряжи.

Смешивание лентами предопределяет “ручье” строение ровницы и пряжи. Величина “ручьев”, иными словами, количество волокон в группах, имеет большое значение, поскольку именно от этого зависит визуальная оценка продольного распределения компонентов в пряже и, кроме того, эффективность перемешивания их в поперечном сечении пряжи.

При разбиении крупных группировок волокон на мелкие (вплоть до отдельных волокон) в процессе прядения обеспечивается достаточное перемешивание разнородных волокон. Исследования группировок волокон по сечениям пряжи дают возможность оценки эффективности перемешивания в ней волокон разнородных компонентов. Величина группировок может служить отдельным критерием при оценке перемешивания волокон в пряже.

В настоящее время существует целый ряд методов оценки распределения разнородных волокон в пряже. В работе И.Г. Рашкована предложено условно разбить такие методы на четыре группы.

Первая группа — методы, направленные на получение количественной оценки распределения волокон в радиальном направлении поперечного сечения пряжи. Вторая группа — методы, которые дают количествен-

ную оценку секториального распределения волокон в поперечном сечении пряжи. Третья группа — методы, которые дают количественную оценку распределения смешиваемых волокон вдоль пряжи. Четвертая группа — методы оценки величины и числа групп волокон разнородных компонентов.

В первой группе методов наибольший интерес представляет метод Гамильтона, в котором различное расположение волокон в поперечном сечении пряжи оценивается индексом (коэффициентом) миграции (у автора — migration index). Индекс миграции отражает смещение компонентов пряжи в процентах радиально по данному сечению. Метод Гамильтона, несмотря на математическую обоснованность, имеет довольно серьезный недостаток: одна из рассматриваемых зон поперечного сечения пряжи оказывается фактически исключенной из рассмотрения. По этой причине приблизительно пятая часть волокон в сечении пряжи не принимается в расчет, что не может не сказаться на результате исследования при использовании метода Гамильтона.

Метод Киршнера позволяет лишь приблизительно оценить миграцию одного из компонентов пряжи (наименьшего). Этот метод нельзя считать эффективным для пряжи с малым числом волокон в поперечном сечении.

Метод Рудольфа предполагает обработку большого числа срезов и, как следствие, весьма трудоемок, несмотря на простоту математических расчетов. Данный метод с достаточной точностью характеризует радиальное распределение разнородных волокон по поперечным сечениям пряжи.

Метод, предложенный Н.И. Ратиани, предполагает разделение поперечного сечения пряжи на внутреннюю и внешнюю зоны линией, проходящей через нейтральный слой пряжи. Недостатком этого метода является трудоемкость расчетов.

Метод, разработанный А.Г. Севостьяновым, позволяет оценить неровноту радиального распределения разнородных волокон. Он использовался для оценки равномерности распределения разнородных волокон в хлопчатобумажной пряже, показав при этом хорошие результаты и удобен при исследовании многокомпонентных смесей.

Метод Коплана и Блоха оценивает расхождение фактического секториального распределения компонентов пряжи со случайным распределением.

Для того чтобы иметь возможность сравнивать различные критерии качества перемешивания волокон в поперечных сечениях пряжи, показатели распределения волокон в поперечных сечениях в равноценных условиях, необходимо создать инструментальные средства, позволяющие имитировать распределение волокон в поперечном сечении пряжи с учетом различий в строении пряжи и свойствах компонентов. Такие инструментальные средства должны также позволить изучить влияние различных сопут-

ствующих факторов на чувствительность, разрешающую способность и робастность рассматриваемых критериев и показателей.

В качестве такого инструментального средства могут быть использованы компьютерные модели поперечных сечений пряжи, реализованные в виде программы для ЭВМ. Для имитации поперечного сечения пряжи необходимо иметь возможность задавать распределение волокон в данном сечении для каждого из компонентов.

Каждое волокно в сечении характеризуют следующие показатели: 1) координаты центра волокна в декартовой, полярной или иной системе координат на плоскости; 2) размеры поперечного сечения волокна (например, эффективный радиус, т.е. радиус равновеликого по площади круга); 3) параметры формы. Например, при моделировании сечения волокна эллипсом — эксцентриситет этого эллипса.

Таким образом, в общем случае искомое распределение является многомерным. Например, если пользоваться декартовой системой координат, а сечение волокна моделировать эллипсом, то необходимо знать плотность вероятности $f(x, y, r, e)$, где x, y — декартовые координаты центра эллипса, r — радиус его наибольшей полуоси, а e — его эксцентриситет. При использовании полярных координат и круга в качестве модели сечения волокна необходимо знать плотность $f(R, \varphi, r)$, где R — расстояние центра волокна от условного центра сечения пряжи, φ — азимутальный угол, т.е. угловая координата центра волокна, r — радиус круга, моделирующего сечение волокна.

В дальнейшем рассматривается второй вариант распределения как более удобный и простой. Для упрощения моделирования будем считать, что случайные величины R, φ, r являются независимыми. Тогда трехмерное распределение распадается на произведение трех одномерных:

$$f(R, \varphi, r) = f_R(R) \cdot f_\varphi(\varphi) \cdot f_r(r).$$

При моделировании необходимо знать каждое из этих трех одномерных распределений. На данном этапе предположим, что радиус всех волокон каждого компонента одинаков, т.е. $r = r_i = \text{const}, i=1, \dots, n$, где n — число компонентов. Тогда остается определить распределение центров волокон по радиусу и по углу: $f_R(R)$ и $f_\varphi(\varphi)$ соответственно.

В случае идеального смешивания компонентов каждое из волокон в сечении имеет одинаковую вероятность оказаться в любой точке сечения. Поэтому распределение центров волокон в пределах поперечного сечения пряжи должно быть равномерным и не зависящим от номера компонента. Обозначим площадь некоторого участка поперечного сечения пряжи через s , тогда ds — элементарный дифференциально малый участок этой площади, $f(s)$ — плотность вероятности распределения центров волокон на площади поперечного сечения пряжи. Тогда произведение $dp(s) = f(s) \cdot ds$ есть

дифференциально малая вероятность попадания центра волокна на элементарный участок ds площади поперечного сечения пряжи.

Если обозначить площадь условного поперечного сечения пряжи через S , то должно выполняться условие нормировки:

$$\iint_{S_0} f(S) dS = 1$$

С учетом сказанного выше распределение $f(S)$ должно быть равномерным, т.е. $f(S) = S_0^{-1}$. Переходя к полярным координатам, можно записать известные соотношения $dS = r \cdot dr \cdot d\varphi$. Условие нормировки для плотности будет выглядеть следующим образом

$$\iint_{S_0} f_S(S) dS = \int_0^{r_n} \int_0^{2\pi} f_S(r, \varphi) \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi = \int f_r(r) dr \cdot \int f_\varphi(\varphi) d\varphi = 1,$$

где r_n — условный радиус пряжи. Отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} f_\varphi(\varphi) d\varphi = 1, \quad \int_0^{r_n} f_r(r) dr = 1.$$

Из этих условий нормировки для равномерных распределений получаем $f_\varphi(\varphi) = (2\pi)^{-1}$, $f_r(r) = 2rR_n^{-2}$.

Таким образом, для случая идеального перемешивания компонентов центр волокна имеет равномерное распределение по угловой координате и треугольное распределение по радиусу.

При моделировании сечения необходимо учитывать, что волокна имеют конечную толщину, и поэтому круги, которые их имитируют, не должны пересекаться. С учетом сказанного выше можно построить следующий алгоритм моделирования многокомпонентной пряжи: M — число компонентов; p_i — доля i -го компонента по числу волокон в сечении, R_n — радиус пряжи; r_i — радиус волокна i -го компонента в поперечном сечении; N — число волокон в сечении пряжи.

Алгоритм моделирования сечения многокомпонентной пряжи при идеальном перемешивании компонентов имеет следующий вид:

Алгоритм А1.5

1. Номер моделируемого волокна $K = 1$.
2. Определение номера компонента пряжи, к которому относится K -е волокно.
 - 2.1. Генерация ξ — равномерно распределенной случайной величины.
 - 2.2. $P = 0$.
 - 2.3. Для $i=1, \dots, M$ повторить пункты 2.3.1, 2.3.2.
 - 2.3.1 $p = p + p_i$.
 - 2.3.2 Если $\xi < p$, то $ik = i$, переход к п. 2.3.1.
 - 2.4 $i = ik$, $r = r_i$.
3. Генерация угла φ , равномерно распределенного на интервале $0, \dots, 2\pi$.
4. Генерация радиуса R в соответствии с треугольным законом распределения.

5. Проверка пересечения вновь сгенерированного волокна с параметрами R, φ с ранее сгенерированными волокнами из списка. Если вновь сгенерированное волокно пересекается хотя бы с одним из волокон из списка, то генерация повторяется (возврат к п. 2), иначе волокно включается в список волокон сечения;
6. $K = K + 1$. При $K \leq N$ - переход к п. 2, иначе моделирование завершено.

Поскольку целью является изучение критериев оценки равномерности распределения волокон в сечении, то необходимо моделировать сечение пряжи с возможностью управления неравномерностью распределения волокон компонентов в сечении пряжи.

Рассмотрим сначала такие модельные распределения по радиусу пряжи. В качестве модельного распределения выберем класс распределений, описываемых полиномами, имея в виду, что данный класс распределений достаточно прост и удобен как для аналитических исследований, так и для моделирования на ЭВМ. Ограничимся случаем двухкомпонентной пряжи. Предположим, что плотность вероятности имеет вид:

$$f(r) = ar(1 + cr^{n-1}).$$

Здесь a, c - постоянные коэффициенты, $n > 1$ - показатель степени. При $n = 1$ или $c = 0$ распределение соответствует случаю идеального перемешивания. Из условия нормировки найдем взаимосвязь между a и c :

$$\int_0^R f(r) dr = \frac{aR^2}{2} + \frac{cR^{n+1}}{n+1} = 1,$$

откуда

$$a = 2 \cdot \left(1 - \frac{cR^{n+1}}{n+1} \right) R^{-2}.$$

Пусть $p = p_1$, тогда $p_2 = 1 - p_1$ для двухкомпонентной пряжи. Отсюда следует, что при неравномерном распределении первого компонента распределение второго компонента также должно быть неравномерным, т.е. эти два распределения взаимосвязаны. С учетом сказанного можно записать условие равномерности смешанного распределения обоих компонентов, используя формулу полной вероятности:

$$p(a_1 r + c_1 r^n) + (1-p)(a_2 r + c_2 r^n) = \frac{2}{R^2} r,$$

Получим систему уравнений:

$$p a_1 + (1-p) a_2 = \frac{2}{R^2}; \quad p c_1 + (1-p) c_2 = 0.$$

Решение системы

$$a_2 = \left(\frac{2}{R^2} - p a_1 \right) \cdot \frac{1}{1-p}; \quad c_2 = -c_1 \frac{p}{1-p}.$$

С учетом сделанных преобразований и установленных взаимосвязей получаем, что

$$f_1(r) = 2 \left(1 - c_1 \frac{R^{n+1}}{n+1} \right) \cdot r (1 + c_1 r^{n-1}); \quad f_2(r) = 2 \left(1 - c_2 \frac{R^{n+1}}{n+1} \right), \quad (1.2)$$

где $c_2 = -\frac{p}{1-p} \cdot c_1$.

Учитывая, что плотность вероятности не может быть отрицательной, получаем ограничения для

$$1 - c_1 \frac{R^{n+1}}{n+1} > 0; \quad c_1 < \frac{n+1}{R^{n+1}}$$

Аналогично получим

$$c_2 < \frac{n+1}{R^{n+1}}$$

Из приведенных выкладок следует, что для случая двухкомпонентной пряжи можно построить класс распределения волокон по радиусу пряжи, отличающихся степенью неравномерности этого распределения при общем равномерном распределении их по радиусу независимо от компонента. Распределения эти имеют вид (1.2), причем степень неравномерности задается параметром - коэффициентом c_1 . Коэффициент c_2 однозначно вычисляется по формуле (1.2), причем коэффициенты c_1 и c_2 должны удовлетворять следующему условию:

$$\max(c_1, c_2) < (n+1)R^{-(n+1)}. \quad (1.3)$$

На основании полученных результатов можно построить следующий алгоритм генерации центра волокна

Алгоритм А1.6

1. Задаются фиксированные значения N и p (доли компонента).
2. Выбирается значение c_1 с учетом выполнения условий и вычисляется значение c_2 по формуле (1.2). Проверяется выполнение условия (1.3).
3. Генерируется номер моделируемого компонента аналогично алгоритму А1.5. В зависимости от номера компонента генерируется значение r по распределению либо $f_1(r)$, либо $f_2(r)$.

Принцип действия алгоритма таков: генерируются декартовы координаты центра поперечного сечения очередного волокна в плоскости поперечного сечения пряжи и радиус данного волокна с учетом его принадлежности к определенному компоненту.

Принадлежность данного волокна к конкретному компоненту разыгрывается как случайное событие, вероятность появления которого зависит от доли этого компонента в смеси и учитывает местоположение центра сечения волокна в поперечном сечении пряжи (например, для имитации сечения пряжи ручьистой структуры).

Далее проверяется возможность помещения сгенерированного сечения волокна среди уже созданных сечений волокон, т.е. отсутствие пересечения с этими сечениями.

В случае, если вновь сгенерированное поперечное сечение пересекается с уже созданными, то оно исключается из дальнейшего рассмотрения, и алгоритм повторяет попытку генерации нового сечения волокна. В противном случае характеристики сгенерированного сечения волокна (декартовы координаты центра, радиус, принадлежность к определенному компоненту) сохраняются в массиве сечений волокон, и данное сечение изображается на экране монитора. Алгоритм, реализованный по этому принципу, приведен ниже.

Алгоритм А1.7

1. Задание координат центра сечения пряжи x , y и радиуса сечения пряжи R , а также числа волокон в сечении N .

Для $k = 1, \dots, N$ выполнить:

2. Генерация координат центра сечения волокна x_k , y_k и его радиуса r_k , удовлетворяющих условию:

$$(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 < (r - r_k)^2.$$

Если $k > 1$, то для $i = 1, \dots, k - 1$ выполнить пп. 3 - 5:

3. Проверка условия: $(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 > (r_i + r_k)^2$. Расстояние между центрами волокон не меньше суммы радиусов данных волокон, т.е. окружности сечений волокон не накладываются друг на друга.

4. В случае выполнения условия {3}, окружность, координаты центра и радиус которой получены в пункте {2}, сечение волокна добавляется в сечение пряжи. Переход к пункту {3}.

5. Если условие {3} не выполнено, осуществляется переход к пункту {3} без добавления сечения волокна в модель сечения пряжи.

Упомянутые выше критерии и показатели распределения волокон в сечении пряжи и миграции волокон в пряже были предложены в 50 - 70-х годах. Одним из важных требований к ним являлась простота ручной обработки изображений сечений пряжи и вычисления этих показателей. Большинство из них основано на разделении сечения пряжи на области (кольца, секторы и т.п.), границы которых определялись весьма условно. При этом не исследовались статистические ошибки, совершаемые при оценке показателей за счет такого произвольного назначения границ областей.

Использование компьютерной техники позволяет по-новому подойти к проблеме оценки распределения компонентов. Анализ методов, применяемых для этих целей в задачах классификации и дискриминации объектов, в экономической математике при исследовании взаимосвязей и классификации объектов по множеству показателей, а также при анализе срезов геологических образцов пород позволил предложить новый показатель, существенным образом основанный на численных процедурах обработки данных.

Показатель основан на кластер-анализе данных о положении волокон в поперечном сечении пряжи. Предлагаемая процедура включает следующие шаги.

Алгоритм А1.8

1. Изображение сечения пряжи помещается в систему декартовых координат с произвольным положением центра и ориентацией осей.
2. Отмечают центры массы поперечных сечений волокон в сечении пряжи.
3. Определяют декартовы координаты x_{it} и y_{it} , $i = 1, \dots, n_t$ центров массы каждого из n_t волокон t -го компонента в сечении пряжи, $t = 1, \dots, k$, где k – число компонентов.
4. Вычисляют декартовы координаты центра массы сечений волокон каждого из компонентов в сечении пряжи по формулам

$$x_{ct} = \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} x_{it}, \quad y_{ct} = \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} y_{it}, \quad t = 1, \dots, k$$

5. Вычисляют декартовы координаты центра массы сечения пряжи. При этом в качестве массы волокна компонента используют среднюю линейную плотность волокна этого компонента g_t

$$x_c = \frac{\sum_{t=1}^k g_t x_{ct}}{\sum_{t=1}^k g_t}, \quad y_c = \frac{\sum_{t=1}^k g_t y_{ct}}{\sum_{t=1}^k g_t}$$

6. Переход к центрированным координатам волокон:

$$u_{it} = x_{it} - x_c; \quad v_{it} = y_{it} - y_c$$

7. Переход к полярным координатам волокон относительно центра сечения пряжи

$$r_{it} = \sqrt{u_{it}^2 + v_{it}^2}, \quad \varphi_{it} = \arctg \frac{v_{it}}{u_{it}}$$

8. Вычисление полярных координат центров масс компонентов

$$r_{ct} = \sqrt{(x_{ct} - x_c)^2 + (y_{ct} - y_c)^2}, \quad \varphi_{ct} = \arctg \frac{y_{ct} - y_c}{x_{ct} - x_c}$$

9. Проверка гипотезы о совпадении центров массы компонента и центра сечения пряжи $H_0: x_{ct} = x_c$, например, по критерию Стьюдента

10. Проверка гипотезы о совпадении распределений компонентов в радиальном и тангенциальном направлениях с предполагаемыми распределениями по критерию Колмогорова – Смирнова. В случае если гипотезы о тождественности распределений отвергаются, что свидетельствует о неоднородности распределения компонентов в сечении, можно продолжить анализ сечения и его структуры с точки зрения группировки волокон компонентов.

Наиболее перспективным для оценки неоднородности и особенностей распределения волокон является метод иерархического кластер - анализа. Этот анализ позволяет разделить множество волокон в сечении пряжи на близкие подмножества (кластеры). Исследуя содержание в кластерах компонентов, можно судить об их группировке в сечении пряжи.

В качестве показателя близости для волокон примерно одинаковых по размеру поперечных сечений может быть выбрано евклидово расстояние между центрами волокон:

$$R_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

Обычно в кластер - анализе при определении расстояния между кластерами для их объединения в дальнейшем в один кластер используют

принципы "ближайшего" или "наиболее удаленного" соседа. В обоих случаях вычисляются (в смысле принятой метрики) расстояния между всеми элементами одного и другого кластеров.

При использовании принципа "ближайшего" соседа в качестве расстояния между кластерами принимается расстояние между ближайшими элементами каждого из кластеров, а при использовании принципа "наиболее удаленного" соседа в качестве расстояния между кластерами принимается расстояние между наиболее удаленными элементами кластеров.

К сожалению, ни тот, ни другой принцип в нашем случае не применимы. Поэтому предлагается другой способ определения расстояния между кластерами, основанный на вычислении центра "массы" каждого из кластеров и объединения в один кластер тех из них, которые на данном этапе классификации оказываются наиболее близкими в этой метрике.

Опишем алгоритм построения последовательности кластеров, используя следующие обозначения: N - число волокон одного компонента в сечении волокнистого продукта; x_j, y_j, r_j - декартовы координаты центра и радиус поперечного сечения j -го волокна: $j = 1, \dots, n$; NR_k - число кластеров на k -м шаге классификации сечений волокон, $k = 1, \dots, n$; X_i, Y_i - декартовы координаты центра "массы" i -го кластера, $i = 1, \dots, NR_k$; R_{ij} - расстояние между центрами "массы" i -го и j -го кластеров, $i, j = 1, \dots, NR_k$.

Алгоритм 1.9

1. $k = 1, NR_k = N$. Число кластеров равно числу волокон и кластеры совпадают с отдельными волокнами.
2. $X_i = x_i, Y_i = y_i, i = 1, \dots, NR_k$. Центры кластеров совпадают с центрами волокон.
3. Вычисление расстояний между центрами "массы" кластеров:

$$R_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}, \quad i, j = 1, \dots, NR_k$$

4. Определение номеров im и jm двух наиболее близких друг другу кластеров, для которых R_{ij} минимально.
5. Сохранение значения найденного минимального расстояния между кластерами и числа кластеров NR_k .
6. Объединение кластеров с номерами im и jm в один кластер с порядковым номером im , если номер im меньше jm , или jm , если номер im больше jm , т.е. включение в кластер с меньшим номером элементов кластера с большим номером.
7. Вычисление координат центра "массы" вновь сформированного кластера.
8. Исключение кластера с большим номером из множества кластеров.
9. Уменьшение номеров кластеров, начиная со следующего после объединенного на единицу. Уменьшение общего числа кластеров: $NR_k = NR_k - 1$.
10. $k = k + 1$. Если $k > 1$ (количество кластеров больше одного), то переход к п.3.

Результатом работы данного алгоритма является последовательность значений минимальных расстояний между кластерами при различном их количестве, образуемом последовательно из множества исходных элементов.

Очевидно, что для множества элементов, в нашем случае - множества сечений волокон в поперечном сечении волокнистого продукта, состоящем

из нескольких компактных подмножеств, последовательность минимальных расстояний между формируемыми кластерами должна обладать следующими свойствами. На первых этапах работы алгоритма в каждый из кластеров будут входить элементы, принадлежащие одному и тому же компактному подмножеству. Поэтому минимальное расстояние между кластерами будет нарастать монотонно и достаточно медленно.

Этот будет продолжаться до тех пор, пока множество элементов не разделится на кластеры, равные компактным подмножествам исходного множества элементов. Когда это произойдет, минимальным будет уже расстояние между центрами "масс" ближайших компактных множеств, которое существенно больше расстояния между элементами внутри компактных подмножеств.

Поэтому в последовательности минимальных расстояний произойдет скачкообразное увеличение минимальных расстояний. Тем самым по числу кластеров на данном шаге алгоритма может быть обнаружено количество компактных множеств, их состав (т.е. входящие в него элементы) и открывается возможность автоматизированного разделения множества элементов на компактные подмножества с последующей оценкой всех представляющих интерес характеристик.

Для проверки эффективности работы предлагаемого алгоритма была разработана компьютерная модель, сущность которой можно пояснить на рис.1.14. Заштрихованные прямоугольники заполняются случайным образом расположенными точками (элементами) и образуют компактные подмножества множества точек. Число точек в каждом из подмножеств одинаково. Общее число точек равно N . Размеры прямоугольников по осям X и Y равны соответственно L_x и L_y . Расстояние от начала координат до ближайшего к нему угла прямоугольника по осям равно соответственно X и Y (далее принято, что $L_x = L_y$ и $X = Y$). При отрицательных значениях расстояний X и Y прямоугольные подмножества налагаются друг на друга. В этом случае компактные подмножества неразделимы и все множество элементов образует одно компактное подмножество. Для проверки работы алгоритма были получены последовательности расстояний между кластерами при различных значениях отношения $a = L_x / X$. Результаты моделирования приведены в табл.1.3 и отображены на графике (рис.1.15).

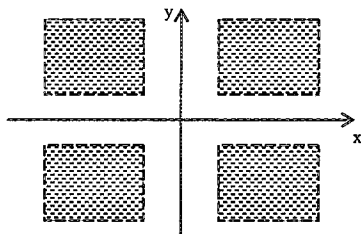


Рис. 1.14. Схема кластеризации

Таблица 1.3

NRk	a=4	a=2	a=1	a=0.5	a=0.2	a=0	a=-0.2	a=-0.5
40	0,0896	0,0896	0,0896	0,0896	0,0896	0,0896	0,0247	0,0104
39	0,0946	0,0946	0,0946	0,0946	0,0946	0,0946	0,0578	0,0293
38	0,1061	0,1061	0,1061	0,1061	0,1061	0,1061	0,0670	0,0307
37	0,1150	0,1150	0,1150	0,1150	0,1150	0,1150	0,0686	0,0328
36	0,1316	0,1316	0,1316	0,1316	0,1316	0,1231	0,0883	0,0416
35	0,1543	0,1543	0,1543	0,1543	0,1543	0,1316	0,0938	0,0481
34	0,1636	0,1636	0,1636	0,1636	0,1636	0,1543	0,0946	0,0524
33	0,1637	0,1637	0,1637	0,1637	0,1637	0,1637	0,1061	0,0664
32	0,1814	0,1814	0,1814	0,1814	0,1814	0,1782	0,1091	0,0672
31	0,1992	0,1992	0,1992	0,1992	0,1992	0,1814	0,1150	0,0761
30	0,2004	0,2004	0,2004	0,2004	0,2004	0,1992	0,1234	0,0832
29	0,2011	0,2011	0,2011	0,2011	0,2011	0,2004	0,1352	0,0974
28	0,2034	0,2034	0,2034	0,2034	0,2034	0,2011	0,1410	0,1091
27	0,2058	0,2058	0,2058	0,2058	0,2058	0,2034	0,1462	0,1151
26	0,2456	0,2456	0,2456	0,2456	0,2456	0,2058	0,1534	0,1164
25	0,2540	0,2540	0,2540	0,2540	0,2540	0,2456	0,1543	0,1229
24	0,2584	0,2584	0,2584	0,2584	0,2584	0,2491	0,1628	0,1272
23	0,2610	0,2610	0,2610	0,2610	0,2610	0,2540	0,1906	0,1275
22	0,2793	0,2793	0,2793	0,2793	0,2793	0,2584	0,2062	0,1316
21	0,2970	0,2970	0,2970	0,2970	0,2970	0,2669	0,2180	0,1357
20	0,3175	0,3175	0,3175	0,3175	0,3175	0,2853	0,2365	0,1369
19	0,3404	0,3404	0,3404	0,3404	0,3404	0,2858	0,2384	0,1471
18	0,3411	0,3411	0,3411	0,3411	0,3411	0,2961	0,2250	0,1557
17	0,3502	0,3502	0,3502	0,3502	0,3502	0,3087	0,2456	0,1586
16	0,3576	0,3576	0,3576	0,3576	0,3576	0,3289	0,2468	0,1806
15	0,3665	0,3665	0,3665	0,3665	0,3665	0,3426	0,2448	0,1824
14	0,4025	0,4025	0,4025	0,4025	0,4025	0,3500	0,2540	0,1834
13	0,4394	0,4394	0,4394	0,4394	0,4394	0,4002	0,2561	0,2400
12	0,4411	0,4411	0,4411	0,4411	0,4411	0,4329	0,2584	0,2542
11	0,4573	0,4573	0,4573	0,4573	0,4573	0,4389	0,3286	0,2574
10	0,5208	0,5208	0,5208	0,5208	0,5208	0,4741	0,3866	0,2647
9	0,5729	0,5729	0,5729	0,5729	0,5729	0,4947	0,4169	0,2667
8	0,6109	0,6109	0,6109	0,6109	0,6109	0,6222	0,4352	0,2711
7	0,6157	0,6157	0,6157	0,6157	0,6157	0,6321	0,4822	0,2722
6	0,6706	0,6706	0,6706	0,6706	0,6706	0,6654	0,5476	0,3230
5	0,7492	0,7492	0,7492	0,7492	0,7492	0,7094	0,6384	0,3514
4	8,9518	4,8789	2,8801	1,8817	1,2838	0,9229	0,7118	0,3576
3	9,0235	5,1792	3,1792	2,1793	1,5794	1,0582	0,7771	0,5666
2	9,0960	4,9775	2,9776	1,9777	1,3778	1,0861	0,8472	0,5414

Из результатов моделирования видно, что пока число кластеров не снижается до четырех, минимальные расстояния между кластерами остаются практически одинаковыми независимо от значений параметра a .

Когда же точки объединяются в четыре кластера в соответствии с компактными подмножествами, то расстояние между кластерами скачкообразно увеличивается. При том величина скачка зависит от параметра a : с его уменьшением минимальное расстояние также уменьшается. Для пересекающихся подмножеств, когда параметр a принимает отрицательные значения, скачкообразные изменения расстояния между кластерами отсут-

ствуют, что является признаком слияния компактных подмножеств в одно множество элементов.

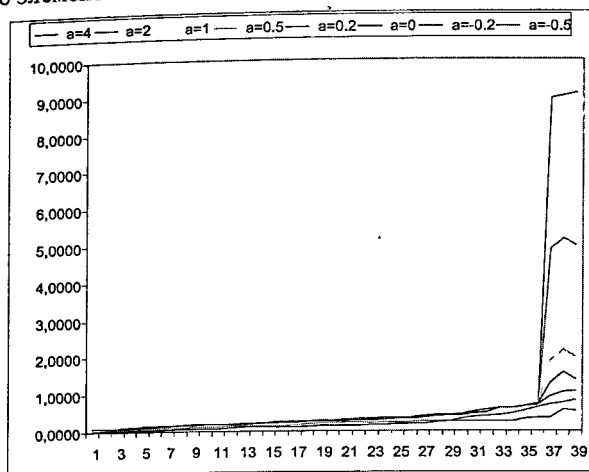


Рис. 1.15 Расстояния между кластерами

Ниже приведены алгоритм моделирования поперечных сечений многокомпонентной пряжи и критерий оценки распределения волокон в ПСП, предложенный в работе Ю.М. Винтера и И.С. Горячей.

В настоящее время разработано много показателей, оценивающих неравномерность распределения разнородных волокон в тангенциальном направлении сечения пряжи (ТНСП) и степень миграции. Выбор лучшего из них (то есть того, который, например, при заданном числе исследованных сечений обеспечивает максимальное различие в оценках смешанной пряжи, приготовленной по двум разным технологиям) чисто экспериментальными методами весьма трудоемок. Теоретически этот вопрос решен только для случая, когда компоненты распределены по сечению пряжи случайным образом. В данной работе решается задача выбора оптимального показателя оценки неравномерности расположения волокон в ТНСП

Для решения этой задачи необходимо моделировать поперечные сечения пряжи, образованной, например, двумя компонентами. При этом должна обеспечиваться возможность получения случайного числа волокон по компонентам, а значит, и в целом в сечении. Кроме того, модель сечения пряжи, имитируя случайное расположение центров волокон и их поперечные размеры, должна позволять варьировать степень неравномерности распределения волокон компонентов по сечению в тангенциальном направлении для того, чтобы иметь возможность сравнивать показатели неравномерности.

При моделировании положение центра волокна в сечении пряжи описывается полярными координатами ρ и φ . Неравномерность распреде-

ления в тангенциальном направлении понимается как неравномерность по углу φ , который меняется в пределах от $-\pi$ до π . При абсолютно случайном распределении волокон значения этого угла подчиняются равномерному закону.

Для имитации неравномерности в тангенциальном направлении предлагается использовать для каждого из компонентов распределение по углу с плотностью, определяемой формулой $f(\varphi) = a + b \cos \varphi$ при $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Найдем значения коэффициентов распределений для каждого из компонентов.

Из условия нормировки плотности распределения находим, что для обоих распределений коэффициент a равен $a = (2\pi)^{-1}$. Очевидно, что коэффициент b не может превышать величину a , т.е. $b \leq (2\pi)^{-1}$.

Учитывая, что сечения волокон компонентов имеют конечные размеры и радиус пряжи также конечен, приходим к выводу, что распределения волокон компонентов взаимосвязаны. Условие связи состоит в том, что распределение смеси этих волокон должно быть равномерным. Из этого условия вытекает, что коэффициенты b этих двух распределений связаны соотношением

$$b_2 = -b_1 \cdot \frac{P_{s1}}{1 - P_{s1}},$$

где P_{s1} - доля волокон первого компонента в данном сечении, определенная по соотношению площадей волокон компонентов:

$$P_{s1} = \frac{n_1 S_1}{n_1 S_1 + n_2 S_2},$$

где n_1, n_2 - числа волокон компонентов в данном сечении; S_1 и S_2 - средние площади поперечных сечений волокон компонентов.

Таким образом, получаем плотности распределений угла для центров волокон каждого из компонентов в виде:

$$f_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} + b_1 \cos \varphi; \quad f_2(\varphi) = \frac{1}{2\pi} - b_1 \frac{n_1 S_1}{n_2 S_2} \cos \varphi$$

Из того, что $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ неотрицательны, следует более точное ограничение для b_1 :

$$b_1 \leq \min \left(1, \frac{n_2 S_2}{n_1 S_1} \right) / 2\pi$$

Предлагаемые распределения удобны для моделирования различной степени тангенциальной неравномерности в расположении компонентов в поперечном сечении пряжи. Варьируя значения амплитуды b_1 в допустимых пределах, можно менять степень неравномерности от нуля (равномерное распределение обоих компонентов, т.е. абсолютно случайное) до максимальной степени, допускаемой выбранным типом распределения. Однако поскольку модельные распределения могут выбираться и другими, а ре-

альные распределения отличаются от модельных, то для варьирования степени неравномерности пользоваться коэффициентом b_1 , специфическим для рассматриваемого типа распределений, не совсем удобно.

По этой причине предлагается пользоваться в качестве показателя отклонения распределения от равномерного средним квадратом разности отклонения модельного распределения от равномерного:

$$Q_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} (f_1(\varphi) - \frac{1}{2\pi})^2 d\varphi; \quad Q_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} (f_2(\varphi) - \frac{1}{2\pi})^2 d\varphi.$$

Подставим в эти выражения формулы для выбранных модельных распределений и вычислим интегралы. Получим

$$Q_1 = \pi b_1^2; \quad Q_2 = \pi \left(b_1 \frac{n_1 S_1}{n_2 S_2} \right)^2$$

Пользуясь этими формулами, можно выбрать такой закон изменения значений коэффициента b_1 , при котором показатель Q_1 будет изменяться с постоянным шагом.

Это позволяет моделировать сечения пряжи, образованной двухкомпонентной смесью волокон с заданным составом смеси, при разных уровнях тангенциальной неравномерности и с помощью получаемых модельных сечений исследовать и сравнивать различные показатели этой неравномерности.

В качестве иллюстрации к описанным алгоритмам в работе упомянутых авторов приведен пример сечения двухкомпонентной пряжи, образованной смесью хлопка и ацетатного волокна (рис.1.16). Сечение пряжи получено с использованием следующих исходных данных: линейная плотность пряжи 25 текс (мг/м), средняя линейная плотность хлопка 0,15 мг/м, ацетатного волокна 0,33 мг/м, удельный вес волокна хлопка 1,5 мг/м³, ацетатного волокна 1,31 мг/м³. Доля хлопка в смеси по весу 0,5.

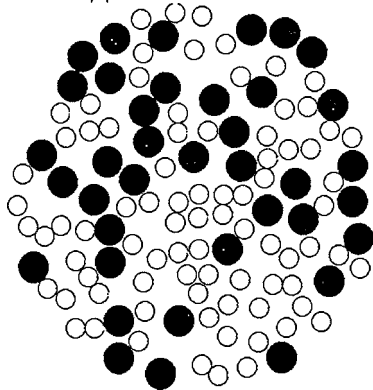


Рис.1.16. Модель поперечного сечения двухкомпонентной пряжи

1.3. Модели динамики деформации и движения волокон и волоконных систем в полях сил трения

Виды волокнистых материалов

Волокнистым материалом (ВМ) – это материал, сформированный из множества волокон, который может существовать как единое целое за счет взаимодействия этих волокон. Волокна могут быть любой природы, как натурального, так и искусственного происхождения. ВМ может состоять из волокон одной природы или из смеси волокон разной природы.

В прядильных производствах ВМ является главным объектом обработки, полуфабрикатом и конечным продуктом. Можно выделить следующие основные формы, в которых находится ВМ: кипа, клочок, настил, лента, ровница, пряжа. Эти формы отличаются по соотношению геометрических размеров и степени упорядоченности расположения волокон.

По соотношению геометрических размеров ВМ можно отнести к трехмерным, двумерным и одномерным. При этом любой продукт остается трехмерным, но протяженность ВМ по одной или двум координатам может быть существенно (на несколько порядков) больше или меньше, чем по остальным координатам.

По степени упорядоченности волокон можно выделить ВМ с полностью хаотичным расположением волокон, ВМ с частичным упорядочением, например, частично ориентированными и распрямленными волокнами, и полностью упорядоченными и ориентированными волокнами. Соответствующая классификация приведена в табл.1.4.

Возможна и более детальная классификация ВМ по тем же признакам. Например, к настилам можно отнести смесовой настил на транспортной ленте после смесовых машин или дозаторов, ВМ на поверхности конденсоров, холстик после трепальной машины, ватку-прочес между барабанами чесального аппарата и кардочесальных машин, настил из лент на входе лентосоединительных машин.

Таблица 1.4.
Основные типы продуктов из ВМ в прядильном производстве

Тип продукта	Состав	Соотношение размеров	Упорядоченность ВМ
Кипа	Однородный ВМ	Трехмерный	Хаотичный
Клочок	Однородный ВМ	Трехмерный	Хаотичный
Настил	Однородный ВМ или смесь	Двумерный	Хаотичный
Лента	Однородный ВМ или смесь	Одномерный	Частично ориентированные и распрямленные волокна
Ровница	Однородный ВМ или смесь	Одномерный	Ориентированные и распрямленные волокна
Пряжа	Однородный ВМ или смесь	Одномерный	Ориентированные, распрямленные и крученые волокна

К лентам можно отнести чесальную ленту после кардо- и гребнечесальных машин и ленту на выходе ленточных и лентосоединительных машин. Сученая ровница с чесальных аппаратов и крученая ровница с ровничных машин, вообще говоря, несколько отличаются друг от друга структурой ВМ.

Разнообразие структур пряжи в зависимости от природы ВМ, распределения его по поперечным сечениям, особенностям распределения крутки настолько велико, что требует отдельной классификации.

Свойства волокнистых материалов

Ниже рассматриваются лишь двумерные настилы с хаотичным расположением волокон. При этом рассматриваются элементарные объемы ВМ, в которых содержится достаточно большое число волокон, чтобы этот объем можно было рассматривать как сплошную среду, на поведении которой не сказываются свойства каждого отдельно взятого волокна. В этом приближении будем говорить о т.н. макроскопической теории деформации ВМ.

Предполагается, что у ВМ есть следующие основные свойства:

- **изотропность**: все свойства ВМ одинаковы вдоль оси, проведенной внутри него под любым углом;
- **однородность**: все свойства ВМ одинаковы в любом объеме любой части ВМ;
- **пористость**: большая часть его объема занята воздухом.
- **границы и граничные условия**: хотя у ВМ нет твердых границ, но волокна, как правило, настолько тесно взаимосвязаны между собой, что существует достаточно четко выраженный пограничный переход от области, где ВМ есть, к области, где его нет. Значительная разница в протяженности материала по разным координатам позволяет во многих случаях считать ВМ неограниченным по определенным направлениям и снизить размерность решаемой задачи исследования;
- **высокая упругость и эластичность**: ВМ допускает высокую (до 300% – 500%) степень сжатия при сохранении упругости и эластических свойств. Этим он существенно отличается от металлов и похож на резину и другие эластомеры. Это свойство не позволяет ограничиться приближением малых деформаций;
- **высокая степень объемного сжатия (за счет пористости)**: по этому признаку ВМ сильно отличается от резины и других эластомеров, у которых модуль объемного сжатия на 3 – 4 порядка больше модуля одноосного растяжения сжатия или модуля сдвига;
- **высокий модуль сдвига**: по сравнению с эластомерами и металлами ВМ имеет модуль сдвига, который существенно больше модулей одноосного растяжения - сжатия и модуля объемного сжатия. Свойства ВМ в широком диапазоне рабочих температур практически не претерпевают каче-

ственных изменений, в отличие от эластомеров, у которых есть температурные области затвердевания (стеклования) и превращения в вязкую жидкость. Свойства ВМ зависят от совместного влияния температурных и влажностных воздействий;

- **высокая пластичность**: при снятии воздействий на ВМ он обладает большой инерционностью в восстановлении своих свойств;
- **диссипативные и реологические свойства**: поведение ВМ зависит от предыстории воздействий на него. В частности, перенос результатов натурных испытаний образцов и моделирования на рабочие изделия должен производиться с учетом совпадения (или несовпадения) их предыстории. Действием инерционных сил при анализе деформирования ВМ практически всегда можно пренебречь. Это значит, что практически во всех задачах ВМ на любой стадии и при любом виде нагружения находится в статическом или квазистатическом состоянии.

Для обозначения видов поведения ВМ под действием механических нагрузок используют ряд терминов: упругость, эластичность, текучесть, вязкость, ползучесть, пластичность, релаксация, гистерезис, утомляемость, усталость, прочность, долговечность, выносливость, старение, деструкция, разрушение.

В зависимости от условий приложения механических нагрузок, при которых проявляется определенный вид поведения ВМ, соответствующий термин сопровождается словами «статический» или «динамический».

Особенности поведения ВМ под действием механических нагрузок зависят от огромного числа внешних факторов, среди которых: способ механического воздействия, время, влажность, температура, химические и радиационные воздействия, наполнители.

Поведение ВМ под действием механических нагрузок зависит не только от внешних факторов и природы волокон, используемых для получения ВМ, но и его структуры: расположения и взаимодействия волокон внутри ВМ, статистической природы волокон и их взаимодействия в ВМ. Механические нагрузки в сочетании с перечисленными внешними факторами меняют как свойства самих волокон, так и их взаимодействие в ВМ, т.е. его структуру.

При распространении результатов исследований поведения образцов ВМ под действием механических нагрузок на рабочий ВМ необходимо учитывать масштабный эффект и различия в предыстории воздействий на образец и рабочий ВМ. Поясним некоторые из приведенных здесь терминов.

Упругость, или упругая деформация – полностью обратимая (т.е. немедленно исчезающая после снятия силовой нагрузки) составляющая деформации, величина которой в любой момент времени зависит от нагрузки, приложенной в тот же момент времени.

Если эта зависимость линейная, то говорят о законе Гука для упругой деформации. Практически у всех материалов при достаточно малых нагрузках деформации упругие. При упругих деформациях не нарушается структура материала и не выделяется тепло. Кинетическая энергия растягивающего, сжимающего или сдвигающего усилия переходит в потенциальную энергию соответствующей упругой деформации, а при снятии усилия возвращается в кинетическую энергию восстановления прежнего размера или формы материала.

Эластичность, или эластическая деформация – полностью обратимая составляющая деформации, которая остается в материале после снятия силовой нагрузки и которая с течением времени уменьшается до нуля за счет накопленной в результате деформации потенциальной энергии. Свойство эластичности – это свойство инерционности материала в процессах деформации. При проявлении эластичности у материала после снятия нагрузки говорят о процессе **релаксации**, восстановлении исходного состояния материала.

Текучность (ползучесть) – свойство материала изменять величину деформации (как правило, увеличивать) во времени при неизменной величине нагрузки. Проявление текучности материала может быть связано с его эластическими свойствами, однако текучесть, как правило, ведет к необратимым деформационным изменениям материала. Энергия деформации при текучности расходуется на необратимые изменения структуры материала.

Вязкость – свойство материала сопротивляться изменениям нагрузки, причем величина сопротивления зависит непрерывно от величины изменения нагрузки. Это свойство присуще большинству реальных жидкостей. Если материал обладает свойством вязкости, то его рассматривают как жидкую субстанцию.

Пластичность, или пластическая деформация – полностью необратимая часть деформации, которая остается у материала после снятия нагрузки и исчезновения эластической части деформации. Практически весьма трудно отличить пластическую часть деформации от эластической с очень большим временем релаксации. Энергия деформации, которая приходится на ее пластическую часть, затрачивается на структурные изменения материала и выделения тепла. Этот вид деформации присущ практически всем материалам при достаточно больших нагрузках.

Гистерезис – зависимость взаимосвязи между нагрузкой и деформацией материала от знака нагрузки. Гистерезис свидетельствует о способности материала запоминать предыдущие свои состояния и сопротивляться нагрузке с учетом своей предыстории. Наличие гистерезиса у материала говорит о структурных изменениях в материале, частичных затратах энергии деформации на эти структурные изменения и выделение тепла.

Особенности поведения волокнистых материалов при деформации

Механические свойства ВМ при его деформации под действием механических нагрузок определяются двумя категориями факторов: свойствами волокон, образующих ВМ, и взаимодействием волокон в ВМ. Ниже рассматриваются материалы, относящиеся к нетканым ВМ, тканям с явно выраженным ворсом или ВМ в кипах. К ним же можно отнести волокнистый холстик, волокнистый настил и ватку – прочес.

Все эти виды ВМ следует отнести к категории деформируемых твердых тел. Поскольку размеры применяемых изделий из ВМ таковы, что даже в их малых объемах содержатся сотни тысяч или миллионы волокон, то к ВМ применимы методы, разработанные в механике деформируемых сплошных сред.

Основными характеристиками деформированного состояния в каждой точке такой среды являются два тензора: тензор напряжений $\{\sigma_{ik}\}$ и тензор деформаций $\{\varepsilon_{ik}\}$, $i, k = 1, 2, 3$ (см. гл.3). Компонент σ_{ik} тензора деформаций равен силе, действующей параллельно оси x_k на прямоугольную площадку единичной площади, перпендикулярную оси x_i (рис.1.17).

Заметим, что элементарный куб, ориентированный по осям координат и «вырезанный» из объема ВМ в окрестности некоторой точки $(x_1; x_2; x_3)$, изображен для наглядности: на самом деле все девять компонентов тензора сосредоточены в одной точке $(x_1; x_2; x_3)$.

Компоненты тензора деформаций представляют собой относительные удлинения ВМ в точке $(x_1; x_2; x_3)$, т.е. отношения изменения длины ΔL к ее первоначальному (до приложения нагрузки) значению L_0 : $\varepsilon = \Delta L / L_0$. В зависимости от направления длины L и направления деформации ΔL в соответствии с декартовыми координатами получаем девять компонентов тензора деформаций. Например, элемент ε_{ik} равен относительной деформации отрезка, направленного вдоль оси x_i , по направлению оси x_k .

Поскольку в каждой точке ВМ деформации и напряжения различны и меняются со временем, то оба тензора являются функциями координат и времени, а также других параметров ВМ, определяющих его свойства, например, температуры T , влажности φ , плотности ρ :

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3; t; T; \varphi; \rho); \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}(x_1, x_2, x_3; t; T; \varphi; \rho) \quad (1.4)$$

Тензоры напряжений и деформаций являются симметричными:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}.$$

Тензор деформаций может быть представлен в виде комбинации частных производных перемещения и точки $(x_1; x_2; x_3)$ в результате деформации ВМ в этой точке (рис.1.16).

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) \quad (1.5)$$

Отметим, что в теории деформируемых сплошных сред для описания

деформаций и построения тензоров напряжений и деформаций используют две системы координат: Эйлера и Лагранжа.

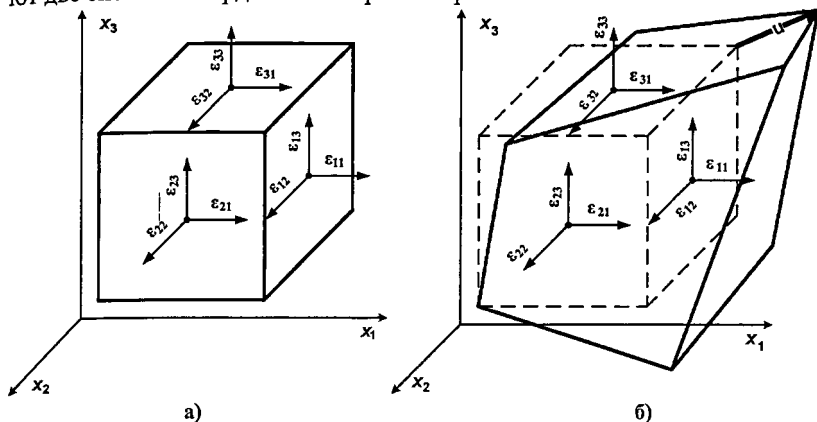


Рис.1.17 Геометрическая интерпретация тензора деформации

В первой системе координат (Эйлера), например, тензор деформаций в каждой точке системы координат задает значения деформации той материальной точки среды, которая в данный момент попала в эту координатную точку. Таким образом, в разные моменты времени тензор в точке с одними и теми же координатами описывает деформацию разных материальных точек сплошной среды.

В системе координат Лагранжа координаты «привязаны» к конкретной материальной точке сплошной среды. Поэтому, например, значения тензора напряжений в разные моменты времени в одной и той же точке лагранжевых координат описывают изменения напряженного состояния этой материальной точки среды. При этом вследствие деформации эта материальная точка может в разные моменты находиться в разных геометрических точках пространства, т.е. иметь разные эйлеровы координаты.

Показано, что при малых деформациях (но не перемещениях u) и линейных зависимостях между напряжениями и деформациями различием между этими двумя системами координат можно пренебречь. Однако при больших деформациях или при нелинейных зависимостях этими различиями между двумя способами описания пренебрегать нельзя. Хотя и существует взаимосвязь между эйлеровыми и лагранжевыми системами координат, позволяющая переходить от одного способа описания деформации сплошной среды к другому, все это создает дополнительные трудности при решении прикладных задач.

Перечислим некоторые характерные особенности поведения рассматриваемых видов ВМ при их деформации.

отсутствие выраженной ориентации и распрямленности волокон вдоль определенного направления. Извитость волокон, природная или

искусственно созданная, во много раз увеличивает упругость ВМ. В отличие от многих других материалов, ВМ обладает способностью сжиматься, уменьшая первоначальный объем и размеры в несколько раз и сохраняя при этом свойство упругости. Это свойство ВМ связано с извитостью волокон. Такая способность к большим деформациям сближает ВМ с классом полимеров, называемых эластомерами;

высокая разреженность волокон в ВМ. Это означает, что объем собственно волокон составляет малую долю от объема, занимаемого ВМ. Остальная часть объема заполнена воздухом. Если m - масса образца ВМ; V - занимаемый образцом объем; r_f - объемная плотность волокон, то объем, занимаемый собственно волокнами, равен $V_f = m/r_f$, что намного меньше V .

Большую часть объема ВМ занимает воздух. Это позволяет волокнам сохранять свою извитость, а ВМ проявить способность к большим сжатиям. Именно это обстоятельство определяет и теплофизические свойства, в частности, низкую теплопроводность, ВМ. При сжатии отношение V_f/V приближается к единице. Соответственно, сжатый или плотно спрессованный ВМ претерпевает структурные изменения, и поэтому его механические и теплофизические свойства могут кардинально измениться;

взаимодействие волокон происходит в отдельных точках при соприкосновении волокон внутри ВМ. Аналогичная картина наблюдается у эластомеров, только на более низком, молекулярном уровне. Роль волокон у эластомеров играют молекулы полимеров, которые сцеплены между собой в отдельных точках, расположенных редко по длине молекул.

Еще более близкой аналогией для ВМ являются вспененные эластомеры, у которых размеры пор, наполненных воздухом, таковы, что доля объема, приходящегося на воздух, близка к этой доле в ВМ.

Однако в отличие от эластомеров, у которых в точках сцепления полимерные волокна соединены прочными химическими связями, в ВМ волокна взаимодействуют в точках контакта лишь за счет сил кулоновского «сухого» трения и сцепления неровностей поверхностей волокон (чешуек и т.п.).

Поэтому при сжатии ВМ эти силы легко преодолеваются, точки контакта перемещаются вдоль волокон, а их число по мере сжатия быстро нарастает. Таким образом, хотя внешне структура ВМ похожа на структуру эластомера, поведение волокон в ВМ при сжатии принципиально отличается от поведения полимерных молекул в эластомерах.

Эти различия отражены на рис.1.18. Слева схематически показано поведение трех молекул эластомеров. Сами молекулы изображены сплошными линиями, а область их межмолекулярного взаимодействия - штриховыми.

В точках А, В, С молекулы образуют химическую связь. При малых деформациях (эпизод II) молекулы меняют форму по сравнению с исход-

ным состоянием (эпизод I), на что и уходит энергия деформации. При больших деформациях (эпизод III) области межмолекулярного взаимодействия отдельных молекул могут пересечься и в результате возникнуть новые химические связи между молекулами (точка E).

Таким образом, в эластомере происходят структурные изменения. Появление новых точек взаимодействия повышает сопротивление деформации, т.е. приводит к эффекту упрочнения. Дальнейший рост деформации (на рисунке не показан) может привести, наоборот, к разрушению связей и, соответственно, к новым структурным изменениям и разрушению материала.

Механизм поведения волокон в ВМ принципиально отличается от поведения полимерных молекул. Справа на рис.1.18 приведена геометрическая модель поведения волокон в ВМ при нагружении. Волокна взаимодействуют между собой, как и молекулы эластомера, в отдельных точках А, В, С (эпизод I).

Однако в отличие от прочной химической связи молекул, волокна связаны силами трения и поверхностного сцепления за счет неровностей их поверхности.

Поэтому уже при малых деформациях, происходят не только изменения формы волокон, их извитости, но и перемещения точек трения и сцепления между волокнами (эпизод II: точки А', В', С'). С ростом деформации точки сцепления между волокнами не только меняют свое положение на волокнах, но и увеличивается их число вдоль длины волокон (эпизод III).

Следует также учитывать, что если молекулы эластомеров при постоянной температуре являются практически абсолютно упругими объектами, и их изменения формы обратимы, то волокна сами образованы из комплексов полимерных молекул.

Поэтому деформации растяжения, сжатия, изгиба, кручения для отдельных волокон – это деформации полимерного материала и они могут быть необратимыми. Каждое волокно независимо от его взаимодействия с другими волокнами может рассматриваться как изделие из эластомерного материала, на которое воздействуют нагрузки со стороны других таких же волокон. При этом проявляются все известные свойства эластомеров: большие деформации, релаксационные и пластические свойства.

Таким образом, ВМ – это уже следующий масштабный уровень изделия по сравнению с изделиями из эластомеров (рис.1.19). Поэтому при одинаковых видах испытаний поведение ВМ отличается от эластомеров.

К числу таких отличий следует отнести:

способность ВМ заметно изменять объем уже при небольших нагрузках. Как известно, эластомеры при небольших модулях растяжения - сжатия и сдвига, практически не поддаются объемному сжатию, т.е. имеют очень большие модули объемного сжатия. В этом смысле к ВМ ближе

находятся вспененные эластомеры, у которых за счет воздушных пор низкое сопротивление объемному сжатию и, соответственно, низкий модуль этого объемного сжатия;

наличие у ВМ значительной доли пластической составляющей деформации по сравнению с эластомерами. Эта особенность ВМ связана с упомянутым выше взаимодействием волокон посредством сил «сухого» трения и сцепления (обобщенный закон Амонтона – Кулона), которые полностью необратимы и проявляют себя уже при небольших деформациях ВМ;

наличие у ВМ значительной доли эластической деформации. Она проявляется в эффектах ползучести, или текучести: при неизменной нагрузке деформация ВМ со временем нарастает. Та же особенность ВМ проявляется в эффекте релаксации: при снятии нагрузки ВМ восстанавливает свое состояние лишь по прошествии времени, причем не полностью: сохраняется пластическая доля деформации.

Такое поведение материалов (ползучесть и релаксация) связывают с эластическим видом деформации, которая считается полностью обратимой. Эластическую часть деформации любых материалов описывают характерными постоянными времени релаксации, которые могут лежать в широком диапазоне значений. Часть эластической деформации (с небольшими постоянными времени) можно легко выявить и оценить по результатам испытаний. Другую часть этого типа деформации (с большими постоянными времени релаксации) весьма сложно отделить от пластической деформации;

асимметрия поведения ВМ даже при одномерных механических нагрузках растяжения – сжатия и зависимость этого поведения от формы испытываемого образца. Например, весьма сложно поставить эксперимент, в котором трехмерный образец ВМ (кипа) подвергается одномерному растяжению. Впрочем, этот вид деформации для таких образцов ВМ вряд ли можно считать актуальным. Более важными для таких образцов являются разрушающие нагрузки при деформациях разрыва для отделения, например, клочков от кипы ВМ.

В то же время поведение трехмерного образца ВМ при деформации одноосного сжатия актуально (уплотнение кип и ВМ в бункерах) и относительно просто для исследования.

У плоских (настилы) или одномерных (ленточки, полоски) ВМ деформация сжатия в отличие от растяжения приводит к искривлению образца материала (потере устойчивости формы) уже при небольших нагрузках. Деформации сдвига и кручения ВМ обычно не исследуются, поскольку не представляют практического интереса.

Наибольший интерес представляет поведение ВМ при циклических деформациях, поскольку именно такой тип нагрузок на ВМ обычно встречается в процессе эксплуатации. Особенности строения ВМ как системы

взаимодействующих волокон определяет специфику поведения ВМ при циклических нагрузках.

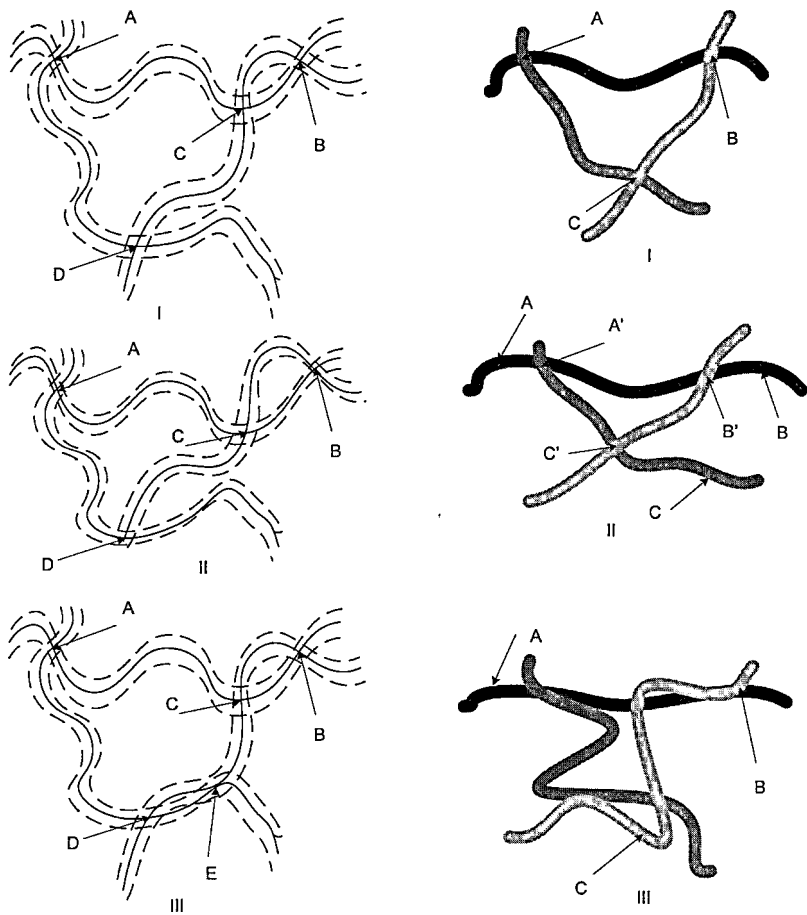


Рис.1.18. Особенности и различия взаимодействия между полимерных молекул и волокон

ВМ обладает ярко выраженными гистерезисными свойствами, т.е. его реакция на механическую нагрузку в данный момент зависит как от предыстории нагружения, так и от релаксационных свойств ВМ. Исследование этого класса свойств ВМ представляет наибольшие трудности, как с точки зрения теоретических подходов, так и в постановке экспериментов, обработке и интерпретации их результатов.

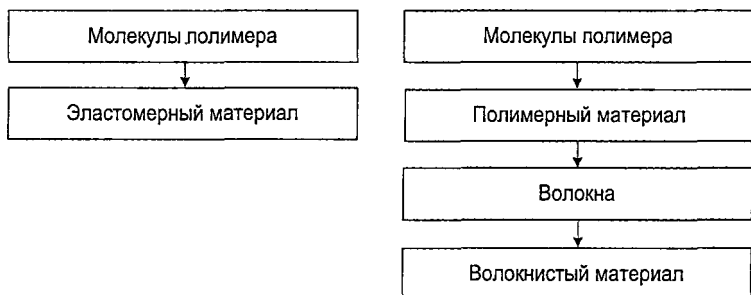


Рис.1.19. Уровни моделирования полимерных и волокнистых материалов

Характерное поведение ВМ при сжатии приведено на рис.1.20. Деформация сжатия ϵ линейно нарастает со временем t (участок 1). Затем в течение некоторого интервала времени величина дальнейшего сжатия не происходит (участок 2). В дальнейшем сжатие снова нарастает линейно во времени (участок 3). При этом сила сопротивления ВМ деформации сжатия сначала нарастает почти линейно (участок O-A).

Затем ВМ переходит (участок A-B) в состояние текучей деформации (участок B-C), а затем снова развивается напряжение силы сопротивления (участок C-D) за счет структурных изменений ВМ.

При прекращении нарастания деформации (участок 2) происходит релаксация напряжения (участок D-E), которая протекает не мгновенно, а постепенно, причем остается остаточное напряжение $\sigma_{ост}$, которое не успевает отрелаксировать за время «отдыха» (участок 2).

При следующем нарастании деформации напряжение в ВМ изменяется по той же схеме. Однако абсолютные значения напряжения силы сопротивления становятся меньше: ВМ «устает» сопротивляться деформации. Поэтому при тех же величинах и скоростях нарастания деформации величины напряжения меньше, чем при первом цикле нагружения. Объединение двух диаграмм $\epsilon = \epsilon(t)$ и $\sigma = \sigma(t)$ приведено на верхней диаграмме $\sigma(\epsilon)$ рис.1.20.

Отличительная особенность ВМ – это чувствительность к изменению температурно-влажностных условий эксплуатации его свойств и механических характеристик. Если изменения только температуры в рабочем диапазоне ее варьирования (от -40°C до $+50^{\circ}\text{C}$) практически не меняет свойств ВМ, то сочетание температурного воздействия с повышением влажности воздушной среды (от 55% до 98%) может кардинальным образом изменить механические свойства ВМ.

Как и любая другая физико-механическая система, ВМ в каждый момент времени находится в состоянии, при котором его свободная энергия минимальна. Гистерезисные и релаксационные особенности ВМ приводят к тому, что этот минимум достигается при ненулевых значениях деформации как отдельных волокон, так и всего ВМ в целом.

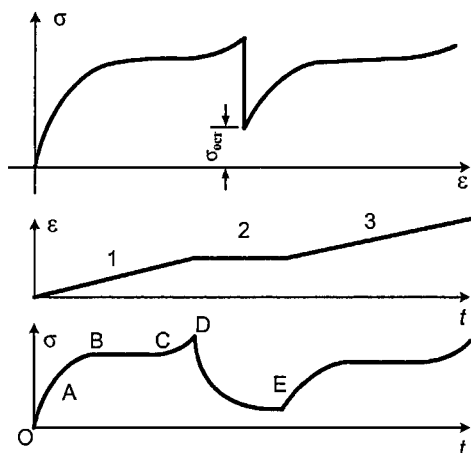


Рис.1.20. Динамика сжатия волокнистого материала

Температурно-влажностное воздействие на ВМ нарушает его энергетический баланс. Воздействие повышенной влажности (повышение температуры при этом способствует усилению воздействия) приводит к перераспределению внутренней тепловой и механической энергии в волокнах и снимает упругие напряжения, возникающие в них при деформации ВМ под действием внешних нагрузок.

Впитывая воду, волокна теряют упругость, т.е. существовавшие в них механические напряжения исчезают, а накопленная в волокнах механическая энергия деформации расходуется на поглощение влаги. Таким образом, при исследовании поведения образцов ВМ под действием механических нагрузок необходимо учитывать не только прошлые деформированные состояния образца, но и их температурно-влажностные условия. Перенос результатов исследований образцов на рабочие ВМ и прогнозирование поведения этих рабочих ВМ возможно лишь в условиях подобия истории состояний образцов ВМ и рабочих ВМ. Отсюда вытекает необходимость при исследованиях образцов воспроизводить условия, в которых будут эксплуатироваться рабочие ВМ.

В отличие от других материалов, эксплуатируемых в условиях механических нагрузок (металлы, полимеры), ВМ используется в *гораздо меньшем ассортименте форм*. Это, как правило, трехмерные объемные изделия простых геометрических форм: прямоугольные параллелепипеды, круговые цилиндры, эллипсоиды и т.п. Гораздо более широкое применение имеют плоские ВМ в форме широких и длинных полотен. Воздействующие на них механические нагрузки также представляют собой, как правило, простые одномерные растяжения – сжатия или всестороннее сжатие. Поэтому деформации кручения или сдвига либо отсутствуют, либо не-

значительны.

Одним из важнейших предположений, используемых в теориях деформации твердых тел, является условие сплошности деформируемой среды. Оно означает, что в процессе деформации независимо от способа нагружения отдельные слои материала деформируются таким образом, что между ними не возникает разрывов.

У ВМ это условие также соблюдается в пределах упругих деформаций. Когда деформации достигают больших значений, возможно нарушение условий сплошности без нарушения целостности ВМ. Это объясняется способом взаимодействия волокон внутри ВМ за счет сил трения и сцепления. Когда механические напряжения в ВМ превосходят предельные значения этих сил, действующие взаимосвязи между волокнами прекращаются, но взамен им возникают новые аналогичные связи между другими парами волокон или в других точках взаимодействия.

Поэтому, хотя условие сплошности среды может и не выполняться, материал не теряет целостного строения. Условие сплошности приводит к взаимосвязи между компонентами деформации и уменьшает число независимых компонентов. Нарушение этого условия увеличивает число независимых компонентов деформации. В то же время, простые виды нагружения, которым, в основном, подвергаются ВМ, приводят к тому, что некоторые виды деформации для этих материалов просто отсутствуют.

Линейные модели деформаций сплошных сред

Из всего известного многообразия математических моделей, разработанных для различных материалов: металлов, газов, жидкостей, аморфных сред, полимеров, эластомеров, композитов, - выделим эластомеры, которые, как следует из предыдущего изложения, наиболее близки по своим свойствам ВМ. Для этого класса сплошных сред разработан ряд теоретических и полуэмпирических моделей, с помощью которых описывается поведение этого класса материалов при механическом нагружении.

К сожалению, ни одна модель не в состоянии дать адекватное описание свойств материала для всего множества видов деформаций и нагрузок и во всем их диапазоне. Причины этого изложены выше: необходимо учитывать упругую, эластическую, пластическую составляющие деформации, ползучесть и гистерезис, а также предысторию деформации и эффекты накопления усталости в материале. Все эти особенности должны учитываться при сложных видах деформации в тензорной форме, которая необходима, чтобы учесть взаимосвязь между разными составляющими напряжения и деформации, и в широком диапазоне нагрузок и деформаций. Даже с применением компьютерных методов моделирования создать такого рода модель представляет значительные трудности. Поэтому используют частные модели, описывающие некоторые свойства исследуемого материала при специальных видах деформации.

Такие модели можно разделить на две категории. К первой можно отнести модели, которые описывают динамику деформации с учетом эластических, пластических и гистерезисных особенностей при одномерных деформациях растяжения - сжатия. Эти модели представляют собой математические соотношения между величинами нагрузки и деформации образца материала как функциями времени.

Соотношения имеют вид дифференциальных или интегральных уравнений. Простейшие из них имеют вид линейных уравнений и известны как модели Максвелла, Кельвина и Фойгта. Для наглядности их принято изображать с помощью механических аналогий, которые строят в виде системы пружин (идеальных упругих элементов) и демпферов (идеальных пластичных элементов).

Сочетание таких элементов позволяет с помощью небольшого числа неизвестных параметров, значения которых и определяют свойства конкретного материала, описать упругую, эластическую и пластическую составляющие деформации материала. Пример такой механической модели приведен на рис. 1.21.

Она составлена из четырех элементов. Параллельно соединенные пружина с коэффициентом упругости $Ku1$ и демпфер с коэффициентом демпфирования $Ke1$ обеспечивают моделирование эластической составляющей деформации. Последовательно «подключенные» элементы - пружина с коэффициентом упругости $Ku2$ и демпфер с коэффициентом демпфирования $Ke2$ моделируют упругую и пластическую составляющие деформации материала.

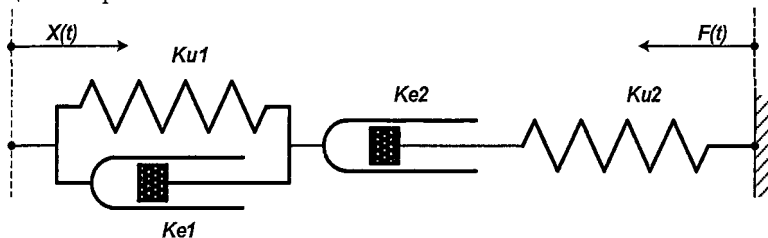


Рис.1.21. Механическая аналогия линейной 4-элементной динамической модели деформации

Материал подвергается одномерной деформации растяжения - сжатия вдоль оси x на величину $X(t)$ при силе сопротивления деформации $F(t)$. Уравнения динамики для этой модели имеют вид

$$X(t) = X1(t) + X2(t) + X3(t); \quad X1(t) = F_{u1}(t) / Ku1; \quad \frac{dX1(t)}{dt} = F_{e1}(t) / Ke1$$

$$F(t) = F_{u1}(t) + F_{e1}(t); \quad \frac{dX2(t)}{dt} = F(t) / Ke2; \quad X3(t) = F(t) / Ku2$$

Поскольку данная модель описывается линейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями с постоянными коэффициентами, то с ней удобнее работать, перейдя к изображениям функций по Лапласу. Запишем взаимосвязь между входом и выходом каждого элемента в изображениях по Лапласу.

Элемент «пружина»:

$$F(s) = KuX(s); \quad X(s) = \frac{1}{Ku} F(s)$$

Элемент «демпфер»:

$$F(s) = sKeX(s); \quad X(s) = \frac{1}{sKe} F(s)$$

Элементы «пружина || демпфер»:

$$F(s) = X(s)(Ku + sKe); \quad X(s) = \frac{1}{Ku + sKe} F(s)$$

Последовательно соединенные элементы «пружина → демпфер» в изображениях по Лапласу описываются соотношениями:

$$F(s) = X(s) \frac{sKuKe}{sKe + Ku}; \quad X(s) = F(s) \left(\frac{1}{Ku} + \frac{1}{sKe} \right)$$

Преобразуем выражения (* означает умножение)

$$F(s) = Fu1(s) + Fel(s) = Ku1 * X1(s) + s * Kel * X1(s) = X1(s) * (Ku1 + s * Kel)$$

$$X2(s) = F(s) / (s * Ke2); \quad X3(s) = F(s) / Ku2$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{Ku1 + s * Kel} + \frac{F(s)}{s * Ke2} + \frac{F(s)}{Ku2} = F(s) * \left(\frac{1}{Ku1 + s * Kel} + \frac{1}{s * Ke2} + \frac{1}{Ku2} \right)$$

Далее

$$F(s) * (s * Ke2 * Ku2 + s * Kel * Ku2 + Ku1 * Ku2 + s^2 * Kel * Ke2) = \\ = Ku2 * Ke2 * (Ku1 + s * Kel) * s * X(s)$$

Отсюда получаем взаимосвязь между изображениями функций деформации $X(s)$ и нагрузки $F(s)$. В форме дифференциального уравнения эта взаимосвязь имеет вид

$$KelKe2 \frac{d^2 F(t)}{dt^2} + (Ke2Ku2 + KelKu2 + Ku1Ke2) \frac{dF(t)}{dt} + Ku1Ku2 F(t) = \\ = Ku2KelKe2 \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + Ku2KelKe2 \frac{dX(t)}{dt}$$

Введем переменные состояния $y1(t) = F(t)$; $y2(t) = dF(t)/dt$ и получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned}
& Ke_1Ke_2 \frac{dy_2(t)}{dt} + (Ke_2Ku_2 + Ke_1Ku_2 + Ku_1Ke_2)y_2(t) + Ku_1Ku_2y_1(t) = \\
& = Ku_2Ke_1Ke_2 \frac{d^2X(t)}{dt^2} + Ku_2Ke_1Ke_2 \frac{dX(t)}{dt}; \quad \frac{dy_1(t)}{dt} - y_2(t) = 0
\end{aligned}$$

Задавая начальные условия и закон изменения деформации $X(t)$ во времени t , можно найти функцию $F(t)$, описывающую изменение силы сопротивления деформации во времени путем решения уравнений.

Как известно, решения однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами представляют собой сумму экспоненциальных функций

$$F(t) \sim \sum_{k=1}^N A_k \exp(-b_k t)$$

Декременты затухания экспонент b_k зависят от коэффициентов упругости пружин и коэффициентов демпфирования демпферов, включенных в модель, а коэффициенты A_k – еще и от начальных условий и функций в правых частях уравнений, т.е. от динамики деформирования материала.

Построенное на этих функциях решение неоднородных уравнений на качественном уровне правильно описывает деформацию материала с учетом упругой, эластической, пластической составляющих и эффекта гистерезиса.

Модели такого типа давно известны и хорошо изучены. Их недостаток заключается в том, что для удовлетворительного количественного совпадения с экспериментальными данными приходится строить модель из большого числа элементов, представленных на рис.1.21. Количество неизвестных параметров – коэффициентов упругости и демпфирования – при этом возрастает, а ошибки их оценивания по экспериментальным данным – настолько велики, что делают модели ненадежными при применении. Кроме того, такие модели не учитывают эффекты текучести материала и изменения его параметров во времени, связанные со структурными изменениями в самом материале в процессе деформации. Линейное свойство моделей предполагает, что при суммировании приложенных к ВМ нагрузок деформации также суммируются. Однако это свойство также выполняется у реальных материалов лишь при малых деформациях.

Делались попытки усовершенствовать подобные модели путем введения разного рода «фиксаторов», управляющих, например, сжатием пружин. При этом модель переставала быть линейной. Работать с ней становилось сложно, причем усложнение не компенсировало недостатков и не приводило к кардинальным улучшениям линейных моделей, а сама модификация выглядела искусственным приемом. Например, предложена модифицированная модель с фиксатором, препятствующим сокращению пружины после растяжения (рис.1.22)

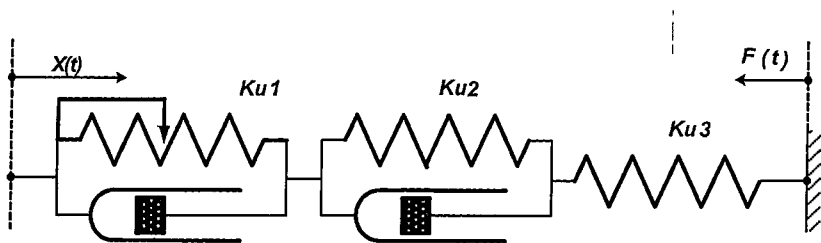


Рис.1.22. Модифицированная модель с фиксатором

Линейная динамическая модель сжатия волокнистой массы

В качестве примера применения линейных моделей динамики деформации при сжатии массы ВМ рассмотрим моделирование сжатия подушек из ВМ.

Сжатие ВМ под действием постоянной нагрузки можно смоделировать с помощью трех последовательно и параллельно соединенных динамических звеньев, отображающих основные составляющие деформации ВМ: упругую, эластическую и пластическую (рис.1.23).

На рисунке обозначены: $Ku1$ и $Ku2$ – коэффициенты упругости упругих элементов ("пружин"); $Ke1$ – коэффициент пропорциональности пластического элемента; $F(t)$ – действующая на ВМ внешняя силовая нагрузка; $X(t)$ – общая деформация модели под действием внешней нагрузки; $Xp(t)$ – пластическая часть деформации модели.

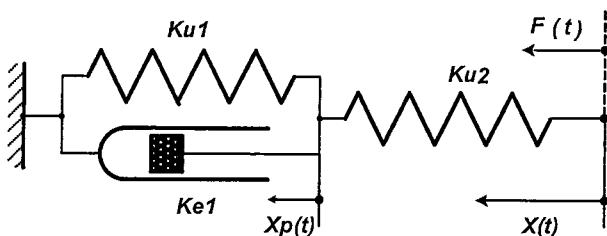


Рис.1.23. Трехзвенная линейная динамическая модель деформации

Динамические уравнения, описывающие поведение отдельных элементов и связывающие перечисленные выше переменные и параметры модели, имеют вид

$$Ku2(X(t) - Xp(t)) = F(t); \quad Ke1 \frac{dXp(t)}{dt} + Ku1 Xp(t) = F(t)$$

Исключая переменную $Xp(t)$, получим уравнение, связывающее общую деформацию $X(t)$ и внешнюю силу $F(t)$

$$Kel \frac{dX(t)}{dt} + Ku1X(t) = \left(1 + \frac{Ku1}{Ku2}\right)F(t) + \frac{Kel}{Ku2} \frac{dF(t)}{dt}$$

Введем обозначения

$$K = \frac{Ku1}{Ku2}; \quad T = \frac{Kel}{Ku1}; \quad P(t) = \frac{F(t)}{Ku1}$$

и перепишем дифференциальное уравнение в изображениях с переменной Лапласа s

$$(Ts + 1)X(s) = (1 + K + KTs)P(s)$$

где $X(s)$ и $P(s)$ – изображения по Лапласу функций $X(t)$ и $P(t)$.

В результате получим передаточную функцию модели преобразования $F(t) \rightarrow X(t)$ в виде

$$W_{pX}(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1 + K + KTs}{1 + Ts}$$

Рассмотрим реакцию модели на ступенчатое изменение функции $P(t)$. В этом случае изображение $P(s)$ равно A/s , и изображение $X(s)$ будет

$$X(s) = A \frac{1 + K}{s(1 + Ts)} + A \frac{KT}{1 + Ts}$$

что соответствует оригиналу

$$X(t) = A(1 + K - \exp(-\frac{t}{T})), \quad t \geq 0$$

На рис.1.24 представлен график развития деформации во времени при постоянной нагрузке в соответствии с полученным решением. Кривая на графике построена при $A = 1$; $K = 1$; $T = 0.1$.

Вертикальный участок кривой соответствует упругой деформации, которая возникает сразу при приложении нагрузки в момент $t = 0$ и равна $X_u = AK$. Далее в материале развивается пластическая деформация, которая добавляется к упругой деформации и образует полную деформацию, которая со временем стабилизируется на уровне, равном $X_f = A(1 + K)$.

Осуществим "привязку" построенной модели к имеющимся экспериментальным данным. Данные эти таковы: при испытании на сжатие волокнистая масса помещалась в цилиндр диаметром $D = 28,7$ см. Площадь поверхности основания цилиндра $S = \pi D^2/4 = 646,9$ см². Масса груза, создающего нагрузку на поверхность волокнистой массы в цилиндре, равна 2000 г = 2 кг. Масса загруженного в цилиндр волокна составляла $m = 60$ г.

По результатам испытаний для полиэфирного волокна (толщина 7 денье) с длиной резки 64 мм и смеси "пух + перо" (55% пуха и 45% пера) определены показатели составляющих деформации, которые приведены в табл.1.5.

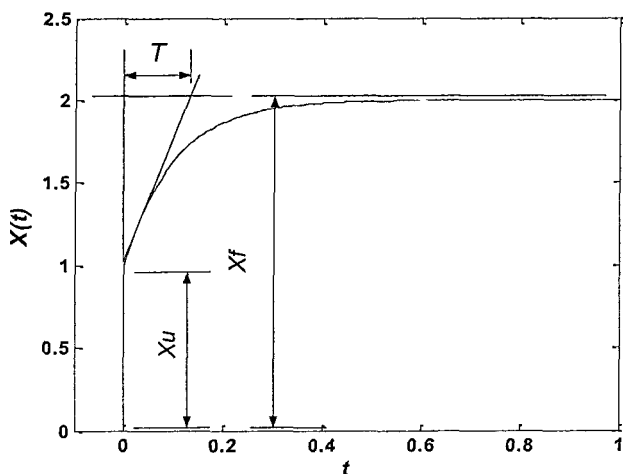


Рис.1.24. Динамика развития деформации

Зная вес груза и площадь основания цилиндра, определим величину удельной нагрузки – давления (напряжения), прикладываемую к единице площади волокнистой массы

$$P = \frac{G}{S} = \frac{2,000 \text{ кг}}{646,9 \text{ см}^2} = 0,0031 \text{ кг/см}^2$$

Таблица 1.5

Составляющие деформации по результатам натуральных экспериментов

Волокнистая масса	Показатель деформации		
	Составляющие	Абсолютная, %	Относительная, %
Волокно полиэфирное	Полная	74,9	100
	Упругая	58,0	67,8
	Эластическая	0,5	0,7
	Пластическая	23,6	31,5
Волокно 55% пух, 45% перо	Полная	80,1	100
	Упругая	41,6	51,9
	Эластическая	44,9	6,2
	Пластическая	33,6	41,9

Отношение полной деформации к упругой составляющей для полиэфирного волокна в соответствии с результатами натурального эксперимента равно

$$\frac{A(1+K)}{AK} = \frac{100\%}{67,8\%}$$

Отсюда найдем безразмерный коэффициент K

$$K = \frac{67,8}{100 - 67,8} = 2,10$$

Аналогично для смеси "пух – перо" получим

$$K = \frac{51,9}{100 - 51,9} = 1,08$$

Таким образом, значение этого безразмерного показателя, равного отношению коэффициентов упругости для модели (рис.1.23) $K = K_{ul}/K_{u2}$ различается для этих двух видов волокнистой массы практически в два раза: у смеси "пух – перо" упругие свойства в два раза выше, чем у волокнистой массы из полиэфирного волокна.

Для прямой оценки параметра T имеющихся результатов натурального эксперимента, к сожалению, не достаточно. Это видно хотя бы по тому, что параметр T имеет размерность времени, а среди результатов нет величин, содержащих в своей размерности время.

Наиболее прямой и надежный способ оценки T мог быть реализован, если бы в ходе натурального эксперимента величина сжатия (деформации) волокнистой массы регистрировалась не только в моменты приложения нагрузки и завершения деформации, но и в промежуточные моменты времени с фиксацией прошедшего интервала времени от начала приложения нагрузки до момента измерения. Это позволило бы построить кривую (рис.1.24) деформации "stress – strain" и оценить величину T , например, по касательной к кривой, как показано на рисунке.

Следует отметить, что и такая оценка была бы не слишком точна, поскольку при небольших вариациях в положении вершин оценочного треугольника длины его сторон, а следовательно, и оценка T , значительно меняют свою величину.

Поскольку такого рода экспериментальные данные отсутствуют, попытаемся получить оценку иным путем. Ранее были выполнены компьютерные эксперименты с имитационной моделью деформации, включавшей упругие элементы и элементы кулоновского трения с учетом статистического разброса значений параметров. Эти эксперименты показали: 1) результирующая кривая деформации "stress – strain" благодаря этому статистическому разбросу имеет вид, близкий к кривой на рис.1.20; 2) скорость нарастания деформации, зависящая в модели от параметра T , в имитационной модели зависит от сил нормального давления между волокнами.

Последний результат очевиден: чем больше силы нормального давления между волокнами, тем больше между ними силы трения. Следовательно, тем сильнее волокнистая масса сопротивляется деформации и тем медленнее протекают процессы нарастания и релаксации ее деформации.

При прочих равных условиях силы нормального давления между волокнами тем выше, чем сильнее сжата волокнистая масса, т.е. чем больше приложенная к ней нагрузка F . Эта нагрузка практически равномерно распределяется по всей массе волокнистого материала и приводит к уменьшению его объема. Поскольку в натурном эксперименте выполнена одномерная деформация (сжатие), то изменение объема волокнистого материала равно изменению высоты массы в цилиндре. Например, для полиэфирного

волокна это изменение составило 58,0% вследствие упругой деформации и 74,9% в результате полной деформации.

Введем обозначения: H_0 – начальная высота заполнения цилиндра волокнистой массой; H_u – высота волокнистой массы в цилиндре в результате упругой деформации непосредственно после приложения нагрузки; H_f – высота волокнистой массы в цилиндре в результате полной деформации после завершения релаксационных процессов.

Использование этих величин позволяет выразить через них относительные деформации волокнистого материала. Например, для полиэфирного волокна получим:

$$\frac{H_0 - H_u}{H_0} = 0,580; \quad \frac{H_0 - H_f}{H_0} = 0,749$$

Для смеси "пух – перо" аналогичные соотношения равны

$$\frac{H_0 - H_u}{H_0} = 0,416; \quad \frac{H_0 - H_f}{H_0} = 0,801$$

Зная хотя бы одну из перечисленных величин высоты для исследуемой волокнистой массы, можно найти остальные, решая приведенные уравнения.

Располагая величинами H_0 , H_u и H_f , а также массой испытуемого волокнистого материала, можно построить величину, имеющую размерность времени, которая пропорциональна значению T :

$$T_m = \sqrt{\frac{M(H_u - H_f)}{F}}$$

Здесь M – масса волокнистого материала.

При построении этой величины, имеющей размерность времени, использовалась разность высот H_u и H_f , поскольку именно эта разность в высоте возникает в процессе пластической деформации.

Постоянная T , входящая в модель (рис. 1.23), должна быть пропорциональна величине T_m , т.е. $T = CT_m$, где C – коэффициент пропорциональности, который зависит от типа волокна и не зависит или слабо зависит от способа приложения нагрузки и режима деформации. Оценить значение C можно, располагая хотя бы одной кривой (рис. 1.24).

Приведем пример расчета для гипотетических данных, которые могут быть легко воспроизведены по аналогии для других исходных данных. Пусть конечная высота волокнистой массы полиэфирного волокна в испытательном цилиндре оказалась равной $H_f = 0,5$ м. Тогда из приведенных уравнений найдем, что $H_0 = 2$ м и $H_u = 0,84$ м. При массе волокнистого материала M и нагрузке F , равных

$$M = 60 \text{ г}; \quad F = 2 \text{ кг} = 1,96 \cdot 10^5 \frac{\text{гсм}}{\text{сек}^2}$$

значение T_m равно

$$T_m = \sqrt{\frac{60(84-50)}{1,96 \cdot 10^5}} = 0,1 \text{ сек}$$

Процесс пластической деформации завершается через $(3 \div 10) T$. Поэтому, если параметр T – величина того же порядка, что и T_m , т.е. коэффициент $c \sim 1$, то этот процесс завершается через $0.3 - 1$ сек.

Получение оценок параметров K и T для модели (рис.1.23) позволяет прогнозировать поведение волокнистой массы не только при простых статических нагрузках, но и при динамических, в том числе циклических нагрузках. Например, если нагрузка на волокнистую массу имеет вид прямоугольных импульсов (рис.1.25) с продолжительностью $2T$ и периодом повторения $5T$, а параметры модели равны: $A = 0,25$; $K = 2$; $T = 0,3$, то изменение деформации этой массы под действием таких нагрузок будет иметь вид, приведенный на рис.1.26.

Недостаток модели (рис.1.23) в том, что она не учитывает необратимую накапливающуюся в волокнистой массе с течением времени деформацию. Если рассматривается деформация материала на отрезках времени, продолжительность которых соизмерима с характерным временем накопления необратимой информации, то необходимо дополнить модель элементами, учитывающими эти необратимые эффекты. Такого рода модель представлена на рис.1.26.

В этой модели эффект необратимости деформации обеспечивается пластическим элементом (демпфером) с коэффициентом демпфирования Ke_2 . Уравнения, описывающие данную модель и связывающие величины деформации отдельных элементов $X_1(t)$, $X_2(t)$ и общую деформацию волокнистой массы $X(t)$ с прикладываемой к массе нагрузкой $F(t)$, имеют вид:

$$Ku_2(X(t) - X_2(t)) = F(t); \quad Ke_2 \frac{d(X_2(t) - X_1(t))}{dt} = F(t)$$

$$Ku_1 X_1(t) + Ke_1 \frac{dX_1(t)}{dt} = F(t)$$

Преобразование уравнений по Лапласу и исключение изображений переменных $X_1(t)$ и $X_2(t)$ приводит к передаточной функции, связывающей деформацию и нагрузку и являющейся линейной динамической моделью деформации материала

$$W_{px}(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = K + \frac{1}{T_2 s} + \frac{1}{1 + T_1 s}$$

где $P = F/Ku_1$; $K = Ku_1/Ku_2$; $T_1 = Ke_1/Ku_1$; $T_2 = Ke_2/Ku_1$.

Натурный эксперимент, в котором порцию волокнистого материала, загруженную в испытательный цилиндр, нагружают постоянной нагрузкой, для модели соответствует случаю ступенчатого воздействия $P(t) = A \cdot 1(t)$, где $1(t)$ – единичная ступенчатая функция.

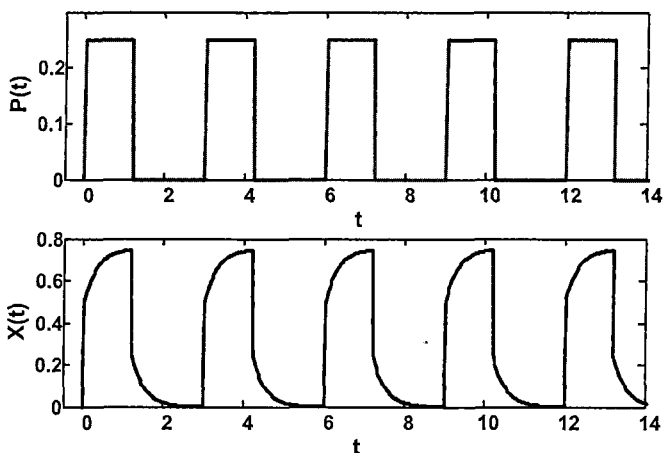


Рис.1.25. Импульсная нагрузка и реакция модели

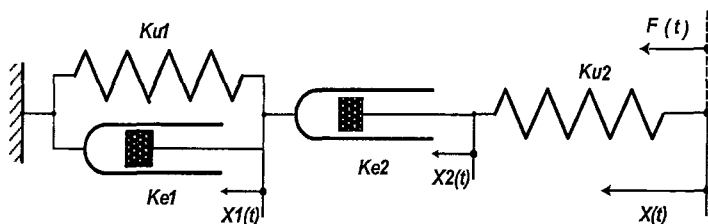


Рис.1.26. Модель с учетом пластической деформации

Реакция модели при таком воздействии представляет собой т.н. переходную функцию, которая будет равна

$$X(t) = A \cdot \left(K \cdot 1(t) + \frac{t}{T_2} + 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right)$$

Вид переходной функции зависит от значения постоянной времени необратимой деформации T_2 . Если величина этого параметра модели много больше величины T_1 , то графики переходной функции для двух рассмотренных моделей будут близки, а в ряде случаев и неотличимы.

При небольших значениях T_2 (одного порядка с T_1) переходная функция неограниченно возрастает, что не соответствует физическим реалиям. В этом случае необходим подбор другого варианта модели.

При циклических нагрузках наблюдается постепенное накопление остаточной необратимой деформации. На рис.1.27 приведена реакция $X(t)$ (нижний график) второй модели на периодически прикладываемую нагрузку (верхний график, $P(t)$). Видно, что модель имитирует циклическую деформацию, в том числе упругую составляющую (вертикальные участки кривой), эласто - пластическую обратимую составляющую (экспо-

ненциальные участки), которые повторяются в каждом цикле приложения нагрузки. Эти деформации происходят на фоне монотонно нарастающей необратимой деформации, которая проявляется в виде постепенного подъема кривой в сторону больших деформаций при неизменных значениях амплитуды циклических нагрузок.

Заметим, что в любом случае при оценке параметров эластической, пластической, необратимой информации типа старения материала натуральный эксперимент должен обязательно включать снятие кривых динамики развития деформации во времени, поскольку, располагая лишь начальными и конечными состояниями волокнистой массы, невозможно оценить постоянные времени, определяющие указанные виды деформации.

Влияние статистической природы взаимодействия волокон на деформацию волокнистого материала

Продукты из ВМ представляют собой ансамбли из большого числа хаотически расположенных или упорядоченных волокон. Примером первых являются полотна нетканого материала, вторых – пряжа.

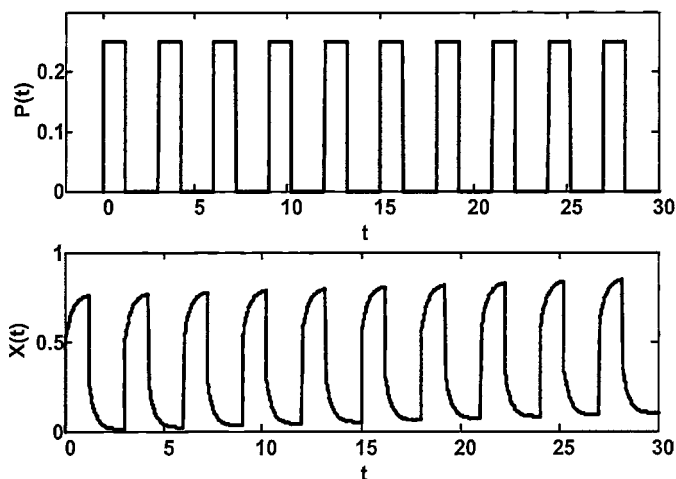


Рис.1.27. Реакция упруго - пластической модели на циклическую нагрузку

В большинстве случаев такие ВМ существуют как единое целое благодаря механическим силам трения и сцепления между волокнами. Эти силы возникают на участках контакта волокон. Они направлены по касательным к поверхности волокон. Величина сил сцепления и трения зависит как от состояния поверхности волокон на участках контакта и сил нормального давления, прижимающих волокна друг к другу. В свою очередь, силы давления обусловлены силами упругих деформаций растяжения и изгиба волокон, которые возникают в волокнах вследствие изменения их перво-

начальной формы, когда они входят в ВМ. Механическое воздействие на ВМ изменяет форму и взаимное положение волокон, что проявляется в сопротивлении волокнистой массы внешнему воздействию. Число участков контакта между волокнами в ВМ огромно, а параметры взаимодействия волокон: силы нормального давления и сцепления между волокнами, коэффициенты трения, – могут варьировать случайным образом в широком диапазоне.

Исследуем, каким образом локальные силы взаимодействия между волокнами на участках их контакта проявляют себя в интегральных силах сопротивления ВМ внешнему механическому воздействию. Для решения этой задачи использован метод статистического компьютерного моделирования. В соответствии с изложенными выше представлениями о механизме взаимодействия волокон в продукте будем моделировать взаимодействие волокон на отдельном участке контакта двухэлементной моделью (рис.1.28).

Для упругого элемента сила сжатия $F(t)$ и величина деформации $Xu(t)$ пропорциональны с коэффициентом упругости Ku (закон Гука)

$$F(t) = Ku * Xu(t) \quad (1.6)$$

Элемент «сухого» трения функционирует по следующему алгоритму: если сила сжатия или растяжения, действующая на элемент, не превосходит по абсолютной величине предельной силы трения μF_n , то элемент «работает» как абсолютно твердое тело, т.е. не деформируется (но может перемещаться в направлении действующей силы как целое).

Если же сила сжатия или растяжения, действующая на элемент, равна или превосходит по абсолютной величине предельную силу трения μF_n , то элемент сжимается или растягивается на величину приложенной деформации, причем величина этой деформации не ограничена: по существу, происходит скольжение с трением.

Заметим, что часто используемый в подобных моделях элемент с вязким трением – демпфер – в данной модели отсутствует.

Поскольку свойства волокон и их взаимодействие в ВМ имеют явно выраженную статистическую природу, то эта особенность ВМ учтена в модели благодаря использованию статистического подхода к моделированию ВМ.

Будем считать, что модель ВМ состоит из большого числа элементов, изображенных на рис.1.28. Их число достаточно велико, чтобы обеспечить статистически устойчивые результаты моделирования. Для каждого из элементов их параметры: коэффициенты упругости K , трения μ , силы нормального давления N , – являются случайными величинами, которые распределены по некоторому закону распределения.

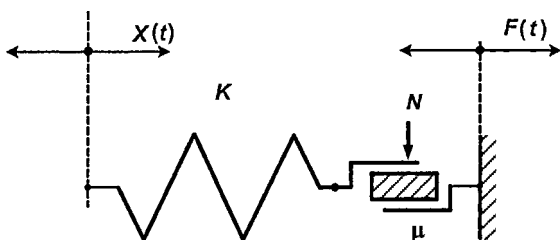


Рис.1.28. Нелинейная двухэлементная модель с "сухим" трением

В описываемой модели для них принят усеченный нормальный закон распределения с отсечением теоретически возможных при моделировании отрицательных значений

$$\begin{aligned} K &\sim \text{Norm}(K_s, CVK), \quad \mu \sim \text{Norm}(\mu_s, CV\mu), \\ N &\sim \text{Norm}(N_s, CVN); \quad K, \mu, N > 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь K_s, μ_s, N_s – средние значения, а $CVK, CV\mu, CVN$ – коэффициенты вариации параметров.

Модель имитирует деформацию ВМ в виде одномерного растяжения - сжатия образца как функцию времени $x(t)$ и имитирует динамику развития деформации в ВП при изменении прикладываемой нагрузки. Моделирование выполняется с постоянным шагом по переменной времени t . Для получения результатов, описывающих поведение образца ВМ, производится их статистическое усреднение по всем элементам.

Особенность ВМ как совокупности взаимодействующих волокон состоит в том, что с увеличением деформации в нем начинают развиваться структурные изменения (меняются число и положение участков взаимодействия отдельных волокон). Эти изменения проявляются в изменениях сил нормального давления и коэффициентов трения в точках взаимодействия волокон из-за изменения числа и площади участков контакта между волокнами.

Для учета этих эффектов в алгоритм модели введены два адаптивных сегмента. Первый из них осуществляет изменение (коррекцию) начальной величины среднего коэффициента трения $\mu_s r_0$ в зависимости от величины и знака деформации образца. В качестве корректирующей формулы принято следующее соотношение

$$\mu_s r(t) = \mu_s r_0 \left(1 - \left(\frac{x(t)}{\max |x(t)|} \right)^2 \right) \quad (1.8)$$

Здесь $x(t)$ – величина деформации образца на шаге t ; $\max |x(t)|$ – наибольшая по абсолютной величине деформация образца в моделируемом эксперименте.

Второй адаптивный сегмент алгоритма осуществляет коррекцию средней силы нормального давления $F_i Sr_0$ в зависимости от величины суммарной силы сопротивления деформации. Корректирующая формула имеет вид

$$F_i Sr(t) = F_i Sr_0 \left(1 - \left(\frac{F_{sum}(t)}{n F_{max}} \right)^{1/3} \right) \quad (1.9)$$

Здесь $F_{sum}(t)$ – суммарная сила сопротивления n элементов образца в момент t ; F_{max} – наибольшая средняя сила сопротивления элемента

$$F_{max} = \mu Sr \cdot F_i Sr_0 \quad (1.10)$$

При выборе корректирующих формул предполагалось, что с увеличением сжатия ($x(t) < 0$) коэффициент трения и сила нормального давления возрастают пропорционально изменению объема ВМ, т.е. кубу его линейного размера. При растяжении ($x(t) > 0$) сила нормального давления убывает. Это соответствует ситуации, когда ВМ становится менее плотным и прочным. Таким образом, вводимая согласно формулам (1.9) и (1.10) адаптация коэффициента трения и силы нормального давления не только от величины деформации и силы сопротивления, но и их знака позволяет учесть различное поведение ВМ при растяжении и сжатии.

Эта особенность ВМ приводит к необходимости исследовать отдельно эти два вида деформации. Очевидно, что при исключении корректирующей формулы (1.9) модель при растяжении и сжатии ведет себя симметрично. Модель построена с использованием теории подобия и размерностей таким образом, чтобы входящие в нее величины можно было задавать в безразмерном виде, что позволяет получать результаты в обобщенном виде.

На рис. 1.29 представлена динамика деформации в ВМ, полученная с использованием построенной модели. Величина сжатия образца сначала линейно нарастала, а затем была постоянной (кривая 1). Кривая 2 показывает среднюю силу сопротивления деформации $F_{sr}(t)$ ВМ. На участке 0-А она нарастает практически линейно и пропорционально величине сжатия. На участке А-В начинаются указанные выше структурные изменения в ВМ, поэтому нарастание $F_{sr}(t)$ замедляется. На участке В-С сжатие сильно уплотненного ВМ затрудняется, и $F_{sr}(t)$ начинает быстро нарастать. На участке С-Д величина сжатия остается постоянной, и в ВМ наступает релаксация в виде постепенного снижения силы сопротивления $F_{sr}(t)$.

Результаты усреднены по $n = 200$ элементам. Кривые 3 и 4 представляют 95%-ные доверительные пределы для $F_{sr}(t)$. С увеличением n эти кривые практически сливаются с $F_{sr}(t)$. Кривая 5 показывает изменение $F_{sr}(t)$ в случае отсутствия статистического разброса параметров (коэффициенты вариации в (2) равны нулю).

На рисунке видна роль статистического разброса параметров взаи-

действия волокон. Во-первых, нивелируется нелинейный закон «сухого» трения Кулона - Амонтона. Образец ВМ ведет себя так, как вел бы себя демпфер, у которого сила сопротивления деформации пропорциональна скорости ее изменения. Во-вторых, в несколько раз снижается абсолютная величина силы сопротивления деформации. В третьих, появляется эффект релаксации, отсутствующий при коэффициентах вариации, равных нулю.

На рис.1.30 приведены кривые, отображающие динамику изменения силы сопротивления деформации в образце ВМ при циклической деформации растяжения – сжатия. Деформация образца ВМ представляет собой линейно нарастающие и убывающие сжатия и растяжения, которые чередуются с периодами, когда деформация остается неизменной (кривая 1).

График силы $F_{sr}(t)$ (кривая 2) заметно отличается на участках сжатия и растяжения ВМ. Статистический разброс параметров элементов модели заметно сказывается как на амплитуде кривой $F_{sr}(t)$, так и на ее форме. Для сравнения приведен график $F_{sr}(t)$ (кривая 3) при нулевых коэффициентах вариации.

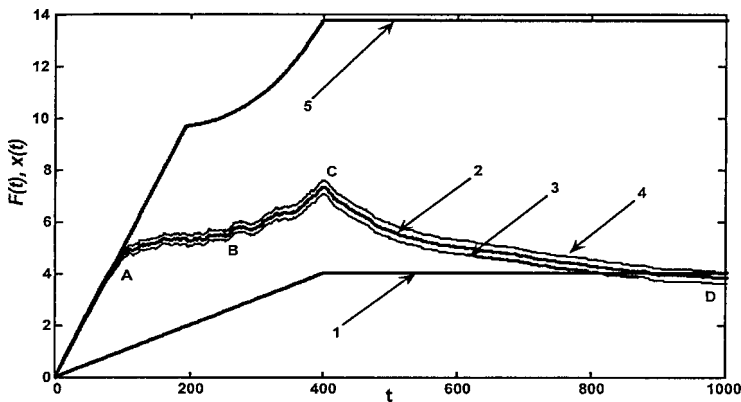


Рис.1.29. Динамика деформации с учетом "сухого" трения

По результатам моделирования можно сделать следующие выводы:

1. Разработанная компьютерная модель деформации растяжения – сжатия ВМ основана на реально действующих в ВМ силах упругости волокон и силах «сухого» трения между волокнами согласно обобщенному закону Кулона – Амонтона с учетом статистического разброса параметров этих сил. В модели учтены структурные изменения в ВМ при его сжатии и растяжении.
2. Построенный алгоритм моделирования позволил получить на модели эффекты ползучести и упрочнения по мере сжатия ВМ, а также несимметричное поведение ВМ при сжатии и растяжении.

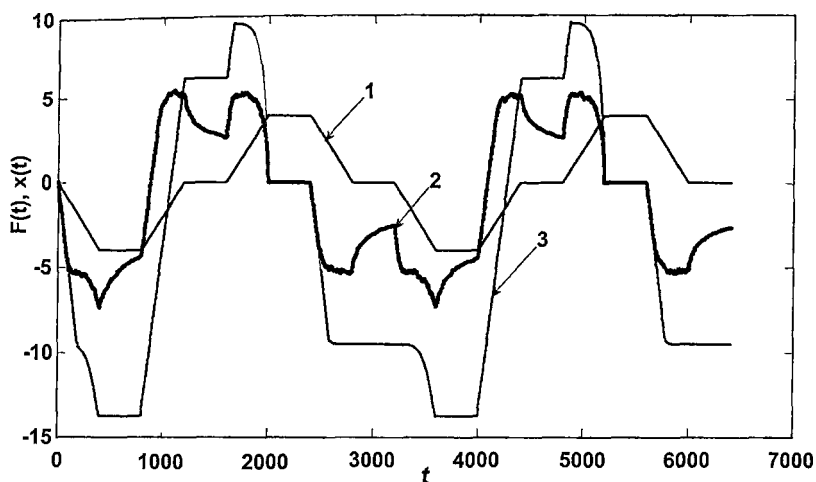


Рис.1.30. Динамика деформации модели с "сухим" трением при циклической деформации

3. Установлено, что статистический разброс параметров «сухого» трения нивелирует особенности динамики с этим видом сил. Интегральный эффект их действия в этом случае не отличим от динамики при наличии вязкого трения, что дает возможность моделировать ВМ с использованием более простых алгоритмов и моделей.

Приведем результаты моделирования при различных исходных данных и видах деформации, полученные в компьютерных экспериментах с моделью. В эксперименте 1 имитировалась линейно нарастающие деформации образца (растяжение $x(t) > 0$ и сжатие $x(t) < 0$) с последующей фиксацией величины деформации (кривые 1.1 – растяжение и 1.2 – сжатие, на рис.1.31). Число шагов имитации динамики развития деформации $MR = 800$. На рисунке для наглядности приведены первые 250 шагов. Число моделируемых элементов равно $n = 100$.

В 1-м опыте эксперимента заданы значения параметров, приведенные в табл.1.6. Нулевая величина для коэффициентов вариации упругости, трения и силы нормального давления CV_{qu} , CV_{μ} , CV_N означает, что у моделируемых элементов, из которых составлен образец ВМ, нет статистического разброса характеристик, т.е. они все одинаковы.

Таблица 1.6

Параметр	Среднее	Козф. вариации
Кэффициент упругости qu	0.05	0%
Кэффициент трения μ	0.3	0%
Начальное значение силы нормального давления N	1	0%

В этом опыте были также исключены операторы коррекции коэффициента трения и силы нормального давления.

На рис.1.31а приведена динамика изменения средней величины смещения элементов трения $x\epsilon Sr$ (кривые 2.1 и 2.2) и средней величины упругой деформации упругих элементов моделируемого образца $x\mu Sr$ (кривая 3.1 и 3.2), а на рис.1.31б кривая динамики развития средней силы сопротивления деформации $Fsr(t)$ (кривые 2.1 и 2.2). Для наглядности приведены также $x(t)$ (кривые 1.1 и 1.2).

Кривые на рисунках показывают, что в отсутствие статистического разброса между элементами и коррекции параметров трения образец ВМ ведет себя как один элемент. Поведение образца симметрично как при деформации растяжения, так и при деформации сжатия.

Во 2-м опыте эксперимента в отличие от 1-го опыта коэффициент трения зависел от величины деформации, а сила нормального давления между волокнами – от общей силы сопротивления деформации. Опыт проводился по-прежнему при отсутствии статистического разброса между элементами. На рис.1.32а приведены полученные в этом опыте при моделировании деформаций сжатия и растяжения кривые $x(t)$ (кривые 1.1 и 1.2), $x\epsilon Sr(t)$ (кривые 2.1 и 2.2) и $x\mu Sr(t)$ (кривые 3.1 и 3.2).

На рис.1.32б приведена полученная в опыте зависимость $Fsr(t)$ от t (кривые 2.1 и 2.2), а также для удобства анализа - $x(t)$ (кривые 1.1 и 1.2). Число моделируемых шагов развития деформации показано до $NR = 250$.

Сравнение полученных кривых показывает, что включение в модель корректирующих соотношений (1.8) и (1.9) изменяет характер деформации. Нарушается симметрия растягивающей и сжимающей деформаций. При неизменной величине деформации растяжения упругая часть деформации постепенно исчезает, а вместе с ней – и сила сопротивления деформации.

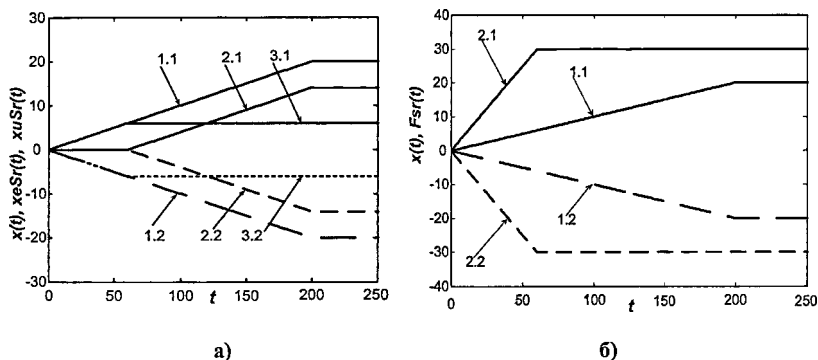


Рис.1.31. Динамика деформации (условия опыта 1)

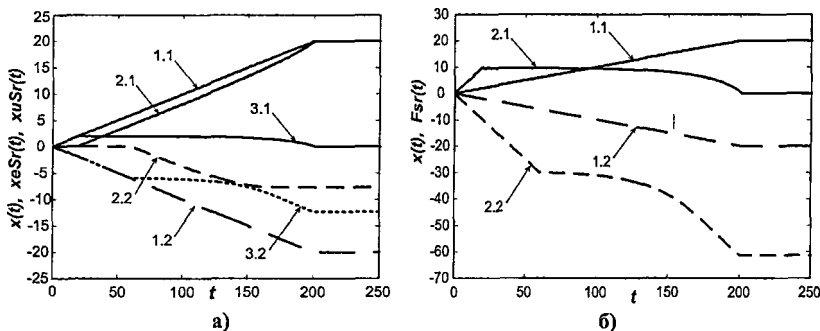


Рис.1.32. Динамика деформации (условия опыта 2)

Наоборот, при деформации сжатия после участка упругой деформации появляется участок «плато» с медленно нарастающей по абсолютной величине силой сопротивления, которая затем начинает нарастать все с большей скоростью.

После участка «плато», которое возникает из-за достижения силой сопротивления значения максимальной силы трения покоя, появляется участок нарастания силы сопротивления, который моделирует эффект «упрочнения» ВМ из-за его уплотнения при больших деформациях. На этапе, когда деформация перестает нарастать, все составляющие деформации также стабилизируются на определенных достигнутых уровнях, определяемых величиной упругих сил при новых значениях наибольшей силы трения покоя

В 3-м опыте в условиях 2-го опыта был «включен» статистический разброс параметров отдельных элементов, для чего были заданы ненулевые значения коэффициентов вариации: $CVqu = 0,25$, $CVtu = 0,25$, $CvN = 0,25$. Значительные выбранные величины коэффициентов вариации позволяют, с одной стороны, более четко выявить влияние статистического разброса значений параметров, а, с другой стороны, оставляют маловероятной возможность искажения нормальных законов распределения параметров. Как в 1-м и 2-м опытах, рассмотрены деформации растяжения и сжатия.

Полученные в 3-м опыте кривые, отображающие динамику развития составляющих деформации, приведены на рис.1.33а: $x(t)$, кривые 1.1 и 1.2, $xSr(t)$, кривые 2.1 и 2.2, и $xSr(t)$, кривые 3.1 и 3.2.

На рис.1.33б приведены кривые, показывающие динамику изменения силы сопротивления деформации $Fsr(t)$ при растяжении (кривая 2.1) и при сжатии (кривая 2.2). Показана абсолютная величина силы без различия в знаке при растяжении и сжатии. На этом же рисунке приведены верхняя и нижняя 95% - ные доверительные границы для $Fsr(t)$, отображающие точность оценки, а также для наглядности отображена динамика нарастания деформации растяжения или сжатия (кривая 1).

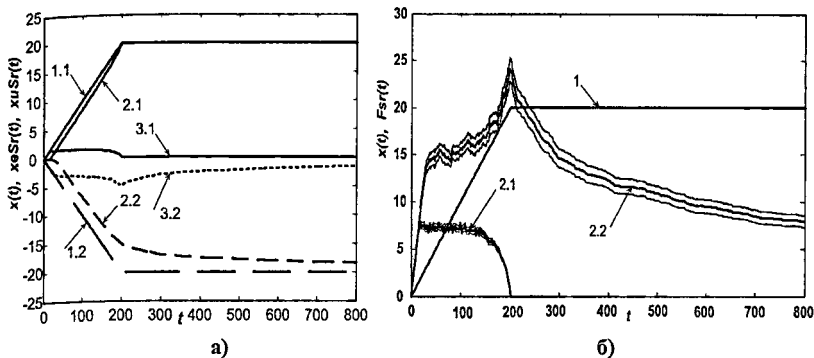


Рис.1.33. Динамика деформации (условия опыта 2)

Анализ кривых позволяет сделать ряд существенных выводов:

1. Статистический разброс параметров упругости и трения элементов образца ВМ приводит к сглаживанию зависимости силы сопротивления от деформации. Кривая напоминает зависимость, которая наблюдается при вязко - упругой деформации и при включении вязкого демпфера в модели.
2. Снижается абсолютное значение силы сопротивления образца деформации по сравнению с результатами 2-го опыта при отсутствии статистического разброса параметров.
3. На этапе «отдыха», когда деформация перестает нарастать, наблюдается эффект релаксации, т.е. уменьшения силы сопротивления деформации, который не наблюдался в результатах 2-го опыта.

В эксперименте 2 с помощью построенной модели имитировалась деформация образца ВМ под действием циклической нагрузки. Длительность деформации составила 3200 шагов. Кривая изменения деформации образца относительно исходного ненагруженного состояния показана на рис.1.34, кривая 1. Кривая представляет собой чередование участков с линейно нарастающей деформацией, участков постоянного значения деформации («отдыха» образца) и участков с линейно убывающей и меняющей знак (с растяжения на сжатие образца) деформацией. На рисунке приведены два периода циклической деформации.

В 1-м опыте эксперимента 2 исключены статистический разброс параметров и коррекция трения с учетом деформации аналогично тому, как это делалось в эксперименте 1. На рис.1.34 приведены кривые, отображающие в этих условиях динамику деформации моделируемого образца. Кривая 2 (рис.1.34а) показывает изменение составляющей смещения $x_{eSr}(t)$, а кривая 3 – зависимость упругой составляющей деформации $x_{iSr}(t)$. На рис.1.34б кривая 2 отображает изменение силы сопротивления деформации $F_{sr}(t)$. Для наглядности и удобства синхронизации на этом же рисунке приведен график $x(t)$, кривая 1.

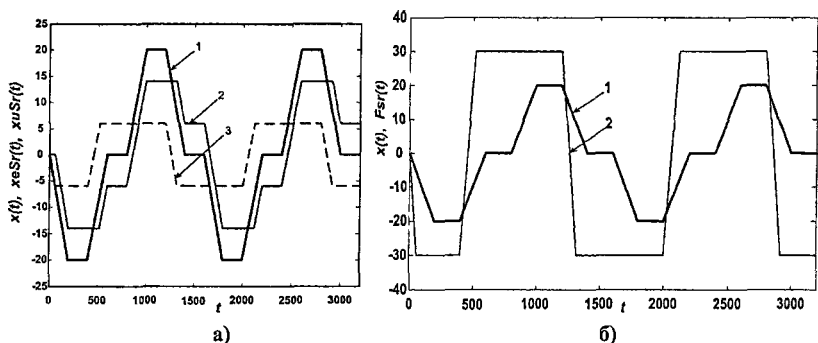


Рис.1.34. Динамика деформации при циклических нагрузках (условия эксперимента 2, опыт 1)

Из приведенных графиков видно, что все элементы образца деформируются синхронно, как один элемент. При этом, пока сила сопротивления деформации по абсолютной величине не превосходит максимальной силы трения покоя, происходит упругая деформация относительно того положения, в которое элемент сместился на предыдущем этапе деформации. Когда же сила сопротивления деформации достигает значения максимальной силы трения покоя, то она перестает нарастать, и начинается смещение элемента относительно того положения, в котором он подвергался упругой деформации. Возникает эффект гистерезиса, который наглядно представлен на рис.1.35а. На нем изображена взаимосвязь деформации $x(t)$ и силы сопротивления $F_{sr}(t)$.

Во 2-м опыте эксперимента 2 в модели «включена» коррекция сил трения в зависимости от величины деформации. Результаты представлены на рис.1.36а (кривая 3 показывает изменение упругой составляющей деформации $x_{uSr}(t)$, а кривая 2 – зависимость $x_{eSr}(t)$) и на рис.1.36б (кривая 1 – $x(t)$, кривая 2 – $F_{sr}(t)$). Из приведенных кривых видно, что при циклической нагрузке не только проявляются уже отмеченные выше особенности поведения образца, связанные с коррекцией трения. Меняется также и характер циклических изменений упругой и пластической составляющих деформации, а также силы сопротивления деформации, что особенно наглядно видно на графике кривой гистерезиса, рис.1.35б. Несколько «экзотический» вид петли гистерезиса связан с «экзотичностью» моделируемой ситуации: наличие адаптации параметров к величине деформации при отсутствии статистического разброса параметров.

В 3-м опыте эксперимента 2 добавлен статистический разброс параметров элементов образца аналогично 3-му опыту эксперимента 1. Результаты моделирования представлены в виде кривой гистерезиса на рис.1.37. Как видно из графика, включение статистического разброса в свойства элементов приводит к «размытию» четкой точки «переключения» дефор-

мации с линейного упругого этапа на пластический. Уменьшается абсолютное значение силы сопротивления на всех этапах циклической нагрузки. Характер кривой $F_{sr}(t)$ также несколько изменяется по сравнению со случаем отсутствия статистического разброса.

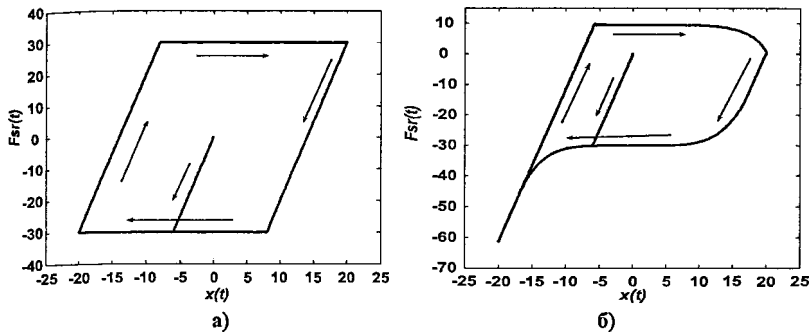


Рис.1.35. Эффект гистерезиса деформации

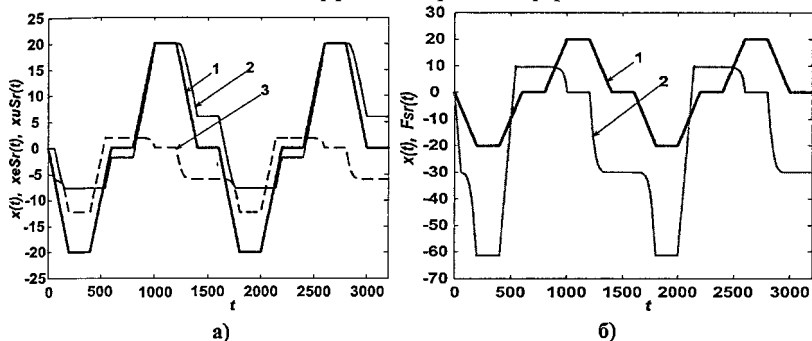


Рис.1.36. Различия в деформации при растяжении и сжатии

Из сравнения результатов экспериментов с моделью можно сделать вывод, что плавный переход кривой «деформация – напряжение силы сопротивления» от участка упругой деформации к участку текучести может происходить и быть объяснен не обязательно за счет сил вязкого трения, как это делается в моделях Максвелла – Кельвина – Фойгта и других аналогичных моделях.

Такой же характер кривой возникает при наличии сухого кулоновского трения в сочетании со случайным разбросом свойств отдельных элементов деформируемой среды.

Эта интерпретация и подход к моделированию ВМ можно считать более приемлемым, поскольку в ВМ отсутствуют физические основы вязкого трения, а статистическая модель с кулоновским трением более точно

отвечает существующим физическим представлениям о поведении ВМ при деформации.

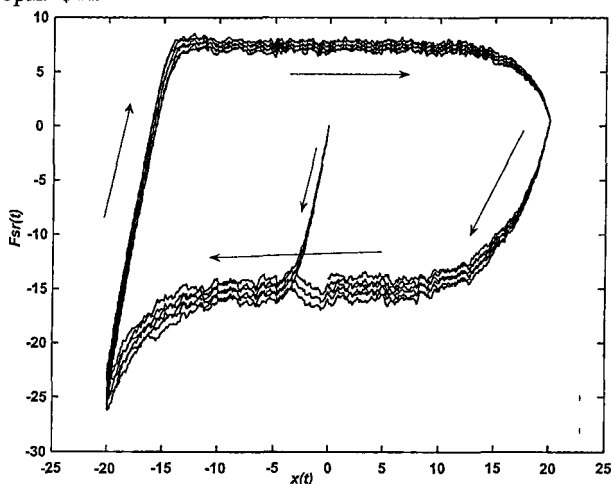


Рис.1.37. Гистерезисные явления в деформации при случайных вариациях параметров модели

Рассмотрим теперь, как сказываются на динамике деформации средние значения параметров модели $quSr$, μSr , Nsr и их коэффициенты вариации. Из описания модели видно, что значимую роль на динамику деформации должны оказывать не отдельно средние значения, а их безразмерная комбинация в сочетании с максимальной величиной прикладываемой деформации, т.е.

$$B = \frac{quSr \cdot X_{max}}{\mu Sr \cdot Nsr}$$

Поэтому достаточно одну из величин, входящих в безразмерный комплекс B , оставляя остальные величины неизменными. В качестве такой варьируемой величины выберем $quSr$. В предыдущих экспериментах величина B оставалась неизменной и равной

$$B = \frac{0,05 \cdot 20}{0,3 \cdot 1} = 3,3333$$

Диапазон варьирования $quSr$ выберем в пределах от 0,01 до 0,5 со значениями: 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,4 (эксперимент 2, опыт 4). Соответствующие значения безразмерного параметра B при этом будут равны: 0,3333; 0,6666; 1,3333; 3,3333; 6,6666; 13,3333; 26,6666.

Деформация образца в этом эксперименте совпадала с условиями эксперимента 2, т.е. представляла собой циклическую кривую с чередующимися линейно нарастающими (растяжение) и линейно убывающими

(сжатие) участками, разделенными участками выстоя (отдыха). Все участки имели одинаковую длину по 200 отсчетов (шагов). Значения других параметров были оставлены неизменными: $dy = 0,1$; $\mu Sr = 0,3$; $Nsr = 1$; $CVq = 25\%$; $CV\mu = 25\%$; $CVN = 25\%$. Длительность моделируемой деформации $T = 3200$ отсчетов, т.е. два периода циклической нагрузки. Для отображения результатов были использованы те же характеристики, что и в предыдущих экспериментах: $x(t)$, $x_e Sr(t)$, $x_u Sr(t)$, $Fsr(t)$, $F_{min}(t)$, $F_{max}(t)$, $Fsr(x)$.

Для наглядности на рис.1.38 приведены семейство гистерезисных кривых и временные диаграммы, которые описывают квазциклические деформации ВМ при разных значениях параметра $quSr$.

Ниже приведена процедура Matlab **ElastFrict1**, реализующая рассмотренную модель

Алгоритм А1.10

```
function [x,F,Fsr,Fplus,Fminus,x_eSr,x_uSr] = ElastFrict1;
% n - число рассматриваемых элементов ВМ
% MR - число шагов нарастания деформации
1. n=100; M=100; r=16; MR=r*M; dy=0.1;
% Генерация случайных значений qu, mu и N
% Коэффициент упругости qu: средний quSr, коэф.вар. Cvqu
2. quSr0 = 0.1; Cvqu = 0.3; Squ = Cvqu*quSr0;
3. qu = abs(normrnd(quSr0, Squ, n, 1));
% Коэффициент трения mu: средний muSr, коэф.вар. Cvmu
4. muSr0 = 0.3; Cvmu = 0.3; Smu = Cvmu*muSr0;
5. mu = abs(normrnd(muSr0, Smu, n, 1));
% Сила нормального давления в точках трения волокон N
% в начальный момент времени: средняя NSr0, коэф.вар. Cvn
6. NSr0 = 1; Cvn = 0.3; SN = Cvn*NSr0;
7. N = abs(normrnd(NSr0, SN, n, 1));
% Циклическая деформация (с выстоями)
8. d = dy*ones(1, M); x1 = cumsum(d); x2 = x1(1, M)*ones(1, M);
9. x3 = x1(1, M) - x1; x4 = zeros(1, M);
10. xp = [x1, x2, x3, x4]; x = [xp, -xp, xp, -xp];
%% Монотонно нарастающая деформация с выстоем
% d=dy*ones(1,M); x1=cumsum(d); x2=x1(1,M)*ones(1,3*M);
% x=[x1,x2]'; MR=4*M;
% Объявление массивов для результатов
11. x_e = zeros(MR, n); x_u = zeros(MR, n); dx = zeros(MR, 1);
    F = zeros(MR, n); SumF = zeros(MR, 1); Gp = ones(MR, 1);
    SumF = zeros(MR, 1); maxF = muSr0*NSr0;
% Основной цикл имитации динамики деформации во времени
12. for t = 2:MR
% Вычисление вектора - массива для всех элементов ВМ максимальной силы
    трения покоя
13. if t > 2    Gp(t,1) = 1 - (SumF(t-1, 1) / maxF)^(1./3.);    end;
14. S = 0; Pmax = mu.*N;
% Цикл перебора всех элементов ВМ на шаге t деформации
```

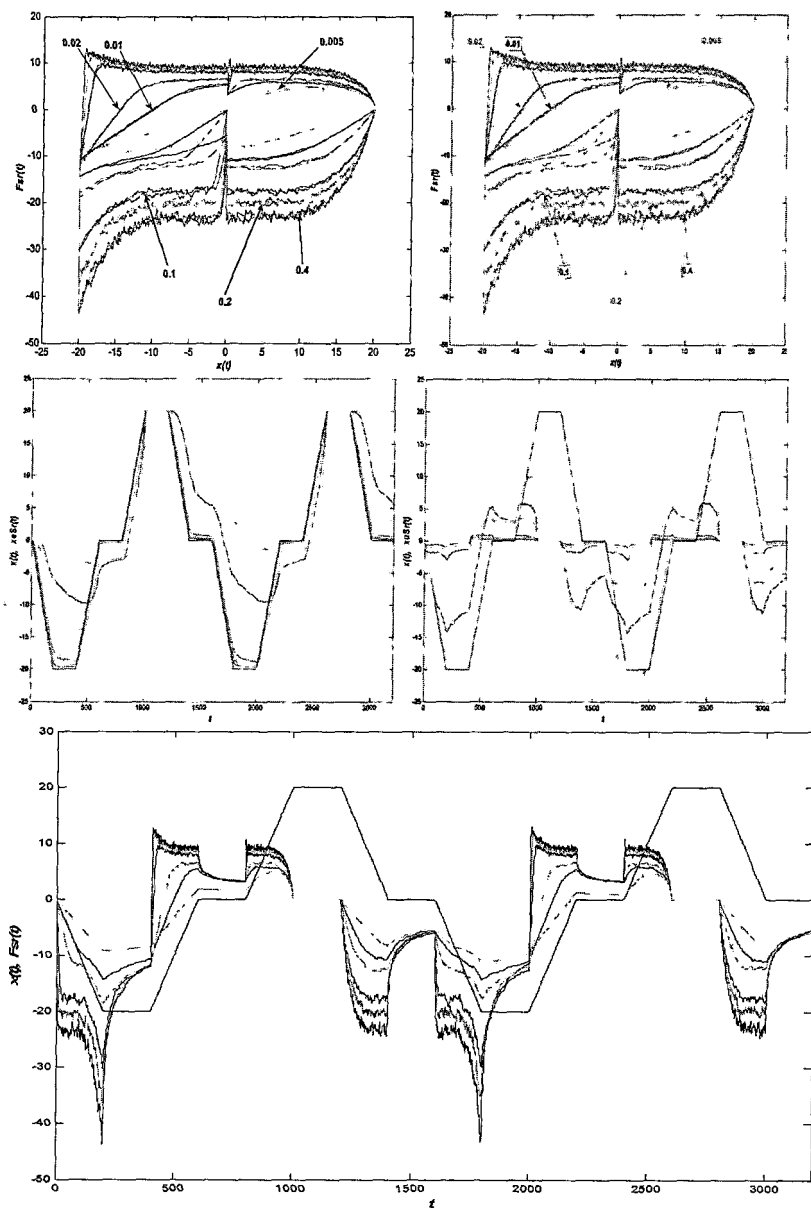


Рис.1.38 Гистерезис и динамика циклических деформаций при разных уровнях вариации параметров "сухого" трения (эксперимент 2, опыт 4)


```

15.   for k = 1:n
% Исключение смещения элемента как целого на предыдущем шаге
16.     dz = x(t, 1) - xe(t-1, k);
% Проверка условия превышения максимальной силы трения покоя
17.     if abs(dz) <= Pmax(k,1) / qu(k,1)
% Деформация упругого элемента. Элемент трения не деформируется и не
% перемещается
18.       xu(t, k) = dz;  xe(t, k) = xe(t-1, k);
19.       F(t, k) = qu(k, 1) * xu(t, k);
20.     else
% Расчет приращений смещения de элемента трения и деформации du упру-
% гого элемента
21.       de = (abs(dz) - Pmax(k, 1) / qu(k, 1)) * sign(dz);
22.       du = Pmax(k, 1) / qu(k, 1) * sign(dz);
% Деформация упругого элемента и элемента трения
23.       xu(t,k) = du;  xe(t, k) = xe(t-1, k) + de;
24.       F(t, k) = Pmax(k, 1) * sign(dz);
25.     end;
% Завершение цикла перебора элементов
26.   end;
% Изменение текущего среднего значения коэффициента трения на шаге t с
% учетом деформации
27.     W = (x(t, 1) / abs(x(M, 1)))^3;
28.     .muSr = muSr0 * (1 - W);
% Коррекция среднеквадратического отклонения коэффициента трения
29.     Smu = Cvmu * muSr;
% Генерация новых случайных значений коэффициента трения
% для элементов BM
30.     mu = abs(normrnd(muSr, Smu, n, 1));
% Изменение текущего среднего значения силы нормального давления на
% шаге t с учетом деформации
31.     SumF(t, 1) = S / n;
32.     NSr = NSr0 * Gp(t, 1);
% Коррекция среднеквадратического отклонения силы нормального давления
% на шаге t с учетом деформации
33.     SN = CvN * NSr;
% Генерация новых случайных значений силы нормального давления
% для элементов BM
34.     N = abs(normrnd(NSr, SN, n, 1));
% Завершение основного цикла имитации деформации
35.   end;
% Расчет статистических оценок средней силы сопротивления
36.   F' = 100 * F;  Fsr = mean(F);
% Расчет среднеквадратического отклонения
37.   Fsig = std(F);
% Расчет 95-процентных доверительных пределов
% для средней силы сопротивления
38.   Fplus = Fsr + 1.96 * Fsig / sqrt(n);  Fminus = Fsr - 1.96 * Fsig / sqrt(n);

```

% Расчет статистических оценок среднего смещения элементов трения x_{eSr} и деформации упругих элементов x_{uSr}
 $x_{eSr} = \text{mean}(x_{e'})$; $x_{uSr} = \text{mean}(x_{u'})$;

1.4. Модели пучка нитей

Одинаковые нити с разбросом по разрывной нагрузке

Плотность волокон в единице объема пряжи весьма велика: она выше, чем плотность волокон в единице объема спрессованной кипы. Можно было бы считать, что тело пряжи ведет себя как сплошная деформируемая среда с подходящим образом заданными прочностными свойствами. Однако такой подход не позволяет связать прочностные свойства волокон и этой эквивалентной сплошной среды. Кроме того, затруднен учет влияния вероятностных факторов. А существенная роль этих факторов давно обнаружена исследователями и хорошо демонстрируется примером разрыва пучка параллельных волокон (рис.1.39).

Предположим, что пучок образован десятью одинаковыми параллельными волокнами, отличающимися только величиной разрывной нагрузки. Растяжение S , приложенное к пучку, нарастает во времени и одинаково для всех волокон. Сила сопротивления этому растяжению у каждого волокна одна и та же и пропорциональна величине растяжения $p = k \cdot S$. Внешняя нагрузка, вызываемая растяжением, равномерно распределяется между волокнами пучка. Когда приходящаяся на волокно внешняя нагрузка превышает его разрывную нагрузку, волокно разрывается, и с этого момента внешняя нагрузка распределяется между оставшимися неразрывными волокнами.

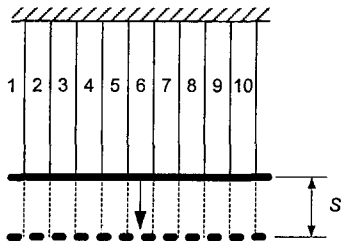


Рис.1.39. Модель удлинения пучка нитей

Значения разрывной нагрузки отдельных волокон пучка для двух сравниваемых вариантов приведены в табл.1.7. Видно, что в обоих вариантах средняя прочность волокон в пучке одинакова и равна 5,5, а коэффициент вариации отличается более чем в пять раз.

Для рассматриваемого примера динамика деформации пучка имитируется алгоритмом, реализованным в виде процедуры Matlab `Puchok`.

Алгоритм A1.11

```
function [s,nb,Ps] = Puchok; %  
% P=[5 5 5 5 5 6 6 6 6 6]; %Разрывная нагрузка волокон, вариант 1
```

```

Pr=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]; %Разрывная нагрузка волокон, вариант 2
k=1; %Кoeffициент упругости волокон
n=length(Pr); %Длина массива
NumB=zeros(n,1); %Массив номеров разорвавшихся волокон
nb=zeros(n,1); %Число разорвавшихся волокон при удлинении пучка на S
Ps=zeros(101,1); %Суммарная сила сопротивления пучка удлинению S
for S=0:100 %Цикл нарастания удлинения S пучка
    p=S*k; %Сила сопротивления каждого волокна удлинению S
    for m=1:n %Цикл просмотра пучка и обнаружения неразорвавшихся волокон
        if NumB(m,1)==0 %Проверка, что m-е волокно ранее не разорвалось
            if p<Pr(1,m) %Проверка, что m-е волокно еще не разрывается
                Ps(S+1,1)=Ps(S+1,1)+p; %Накапливание суммарн. сопротивления
            else
                NumB(m,1)=1; % m-е волокно разрывается при удлинении S пучка
            end; end; end;
        nb(d+1,1)=sum(NumB); %Число разорвавшихся волокон при удлинении S
    end;
end;
s=0:S; %Массив удлинений

```

Таблица 1.7

Примеры разброса в величине разрывной нагрузки волокон пучка

№ волокна	Разрывная нагрузка										Средн.	Коеф. вар.,%
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Вар. 1.	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	5,5	9,58
Вар. 2.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5,5	55,05

Графики зависимостей суммарной силы сопротивления P_s пучка растяжению S и числа разорвавшихся волокон nb для 1-го и 2-го вариантов распределения разрывной нагрузки приведены на рис.1.40.

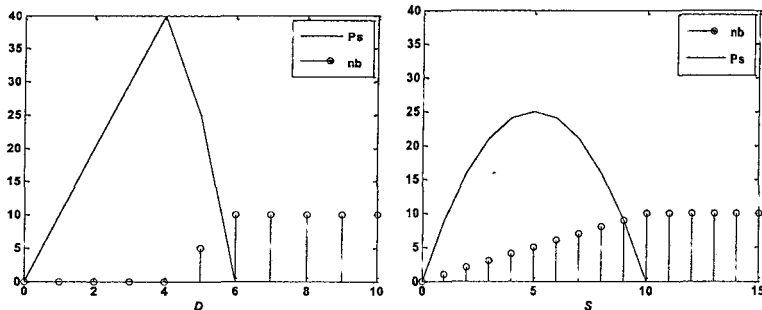
Во втором варианте наибольшая суммарная сила сопротивления растяжению значительно меньше, чем в первом, а удлинение пучка до разрыва всех волокон - больше. Следовательно, больший разброс по прочности волокон приводит к снижению суммарной прочности пучка волокон, несмотря на одинаковую среднюю прочность волокон в пучке (средняя разрывная нагрузка равна 5,5).

Этот результат подтверждает тезис о важности учета в моделях деформации пряжи и, в общем виде, волокнистого продукта вероятностных свойств образующих его волокон и вероятностной природы и особенностей структуры продукта.

Рассмотренная модель может быть описана аналитически. Пусть N – число волокон в пучке, k – коэффициент упругости и $f(p)$ – распределение разрывной нагрузки этих волокон. При удлинении пучка S нагрузка на каждое неразорвавшееся волокно составит kS . Число разорвавшихся волокон пучка равно

$$n_b = N \int_0^{kS} f(p) dp = NF_p(kS) \quad (1.11)$$

где $F_p(x)$ – функция распределения разрывной нагрузки волокон.



Вариант 1
Вариант 2
Рис.1.40. Сопротивление пучка нитей удлинению

Тогда зависимость силы сопротивления пучка волокон от его растяжения имеет вид

$$P_s(S) = (N - n_b(S))kS = NkS(1 - F_p(kS)) \quad (1.12)$$

Например, при равномерном распределении разрывной нагрузки волокон в пучке от p_{min} до p_{max} функция (1.12) равна

$$P_s(S) = \begin{cases} NkS, & S < p_{min}/k \\ NkS \frac{p_{max} - kS}{p_{max} - p_{min}}, & p_{min}/k < S < p_{max}/k \end{cases} \quad (1.13)$$

Применим эту формулу к рассмотренному выше в примере второму варианту. В этом случае $p_{min} = 0$, $p_{max} = 10$ и $k = 1$. Формула (1.13) приводит к зависимости

$$P_s(S) = 10S - S^2 \quad (1.14)$$

Ее график совпадает с графиком, изображенным на рис.1.40 для этого варианта.

Величину растяжения S_{max} , при котором сила сопротивления пучка растяжению наибольшая, найдем из уравнения

$$\left. \frac{dP_s(S)}{dS} \right|_{S=S_{max}} = Nk(1 - F_p(kS_{max})) - Nk^2 f(kS_{max}) = 0 \quad (1.15)$$

Решив это уравнение и подставив найденное значение S_{max} в (1.12), получим максимальную силу сопротивления $P_{max} = P_s(S_{max})$, развиваемую пучком волокон при его растяжении. Например, для (1.14) $S_{max} = 5$, а $P_{max} = 25$. Заметим, что результаты компьютерной имитации динамики растяжения пучка волокон в соответствии с приведенным алгоритмом А1.11 и аналитического расчета совпадают.

Найденное значение P_{max} позволяет оценить широко используемую на практике величину коэффициента использования прочности волокон $\eta_{max} = P_{max} / (Np_{sr})$, где p_{sr} — средняя прочность волокон.

Модель пучка волокон или нитей (поскольку конечная длина волокон в модели не учитывается) является простейшей для волокнистого продукта. В ней не учитываются конечная длина волокон, их протяженность и расположение вдоль оси продукта и в его поперечных сечениях, кручение волокон вокруг этой оси, взаимодействие между волокнами вследствие сил сцепления и трения, динамика изменения волокнистой структуры продукта в процессе приложения нагрузки, вероятностный разброс свойств волокон и структурных характеристик продукта. Список может быть продолжен.

Упругие негукоевские нити. Зависимости между удлинением и натяжением нити и включение их в модель пучка

Обобщим рассмотренную выше модель пучка нитей. У большинства натуральных и химических нитей зависимость между натяжением и удлинением $p = \varphi(S)$ отличается от линейной зависимости, соответствующей закону Гука (рис.1.41). Это т.н. S-S – кривые зависимости «Stress – Strain». Удлинение нити указано в относительных величинах, %, а сила сопротивления – в Г/денье. Зависимость $p = \varphi(S)$ можно аппроксимировать полиномом

$$p = kS + \sum_{j=2}^m a_j S^j \quad (1.16)$$

В этой формуле первое слагаемое соответствует закону Гука, а второе учитывает нелинейный характер зависимости $p = \varphi(S)$. Подбирая порядок полинома m и коэффициенты a_j , можно достаточно точно аппроксимировать законы упругой деформации для большинства натуральных и химических волокон и нитей.

На рис.1.42 приведены примеры такой аппроксимации для S-S – кривой волокна орлон полиномами 3-го, 4-го и 6-го порядков. Значение R^2 показывает долю дисперсии зависимой переменной, «объясненной» построенной аппроксимирующей функцией.

Поскольку далее рассматривается компьютерная модель пучка нитей, реализуемая в виде алгоритма для ЭВМ, то зависимость $p = \varphi(S)$ можно аппроксимировать и с помощью сплайнов. Такую аппроксимацию легко выполнить на компьютере и затем использовать при моделировании.

На рис.1.43 представлен пример такой аппроксимации для волокна орлон: точки p показывают аппроксимируемые значения, ps – кривая аппроксимации сплайном, p_3 , p_4 и p_6 – соответственно, кривые аппроксимации полиномами 3-го, 4-го и 6-го порядков.

Видно, что сплайны дают в целом лучшее приближение к исходным данным, чем полиномиальная аппроксимация, хотя на участке быстрого изменения кривизны графика аппроксимация сплайном 3-го порядка приводит к искажениям. Форма S-S – кривой одинакова для всех волокон одного типа, но предельные значения разрывного удлинения S_{\max} и разрывной нагрузки p_{\max} у множества нитей варьируют случайным образом.

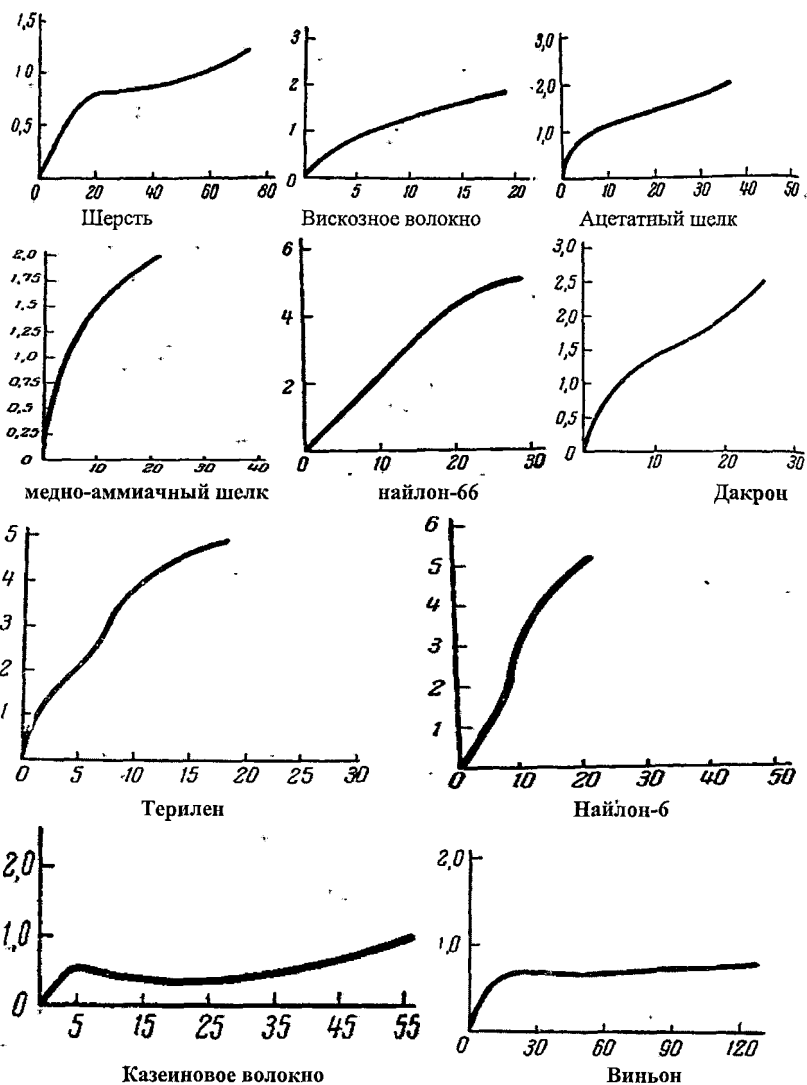


Рис.1.41. Зависимость между натяжением и удлинением для некоторых распространенных видов волокон

Поэтому S-S – кривые индивидуальны для каждой нити пучка. Для описания S-S – кривой нитей, обладающих указанными свойствами, целесообразно представить зависимость (1.16) в кодированных переменных p_c и S_c так, чтобы она соответствовала конкретному типу нитей, но кодиро-

ванные переменные принимали значения в стандартном диапазоне, например, $[0; 1]$.

Обозначим такую зависимость как $p_c = \varphi_c(S_c)$. Тогда с учетом реального диапазона изменения p и S от нуля до p_{\max} и S_{\max} зависимость для конкретного волокна можно выразить через функцию $\varphi(S_c)$

$$p = \varphi(s) = p_{\max} \varphi_c \left(\frac{S}{S_{\max}} \right) \quad (1.17)$$

В простейшем случае значения p_{\max} и S_{\max} для конкретной нити независимы. Они могут быть смоделированы как значения случайных величин с известными законами распределения. Например, это могут быть нормальные распределения со средними Mp_{\max} и MS_{\max} и коэффициентами вариации CVp_{\max} и CVS_{\max} .

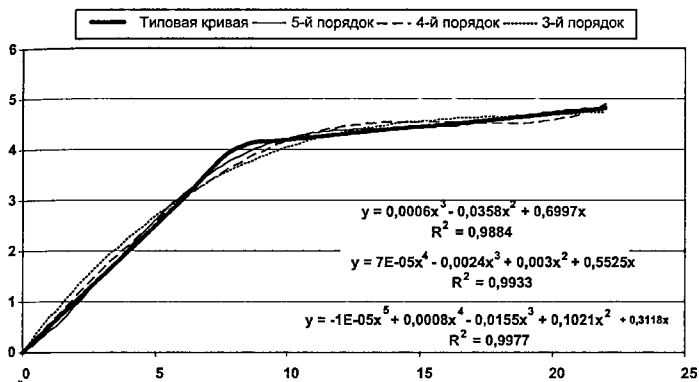


Рис.1.42. Регрессионная МНК – аппроксимация зависимостей "напряжение – удлинение" для волокна Орлон

Если есть экспериментальные данные об испытаниях на прочность нитей, из которых можно найти корреляцию или даже совместное распределение p_{\max} и S_{\max} , то моделирование их значений можно выполнить в соответствии с этим распределением, оценку которого можно получить, обработав экспериментальные данные.

Представляет интерес выяснить влияние отмеченных выше случайных вариаций S_{\max} и p_{\max} , а также отклонений зависимости (1.16) от линейного закона Гука на S-S – кривые пучка нитей. Для этого достаточно отредактировать алгоритм А1.11 моделирования, представив его следующим образом.

Алгоритм А1.12

function [S,nb,Eta,Pmax,Smax] = Puchok2;

n = 200; %Число нитей в пучке

T = 100; ds = 0.1; S = 0:ds:ds*(T-1); %Массив удлинений

Prsr = 5; CvPr = 0.2; %Средняя разрывная нагрузка нитей и коэфф. вариации

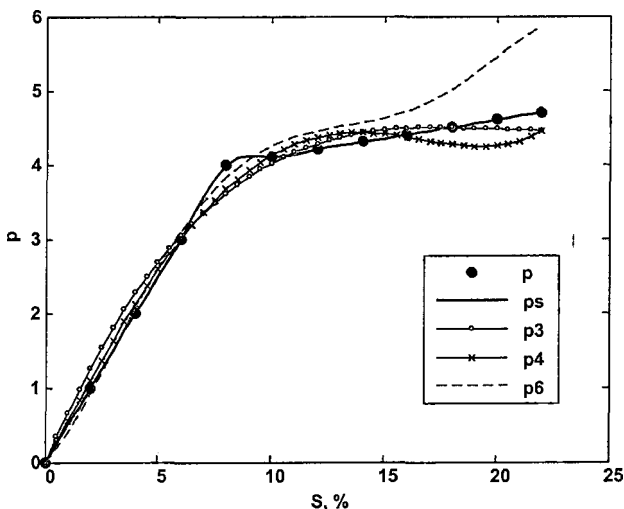


Рис.1.43. Полиномиальная и сплайн – аппроксимация зависимостей "натяжение – удлинение" для волокна Орлон

```

SmaxSr = 4; CvSmax=0.25; % Средн.разрыв.удлинение нитей и коэфф.вар.,(%)
Prmax = normrnd(Prsr, CvPr * Prsr, n, 1); %Разрывная нагрузка нитей
Smax = normrnd(SmaxSr, CvSmax*SmaxSr,n,1); %Разрывное удлинение нитей
NumB = zeros(n, 1); %Массив номеров разорвавшихся нитей
nb = zeros(T, 1); %Число разорвавшихся нитей при удлинении пучка на S
Ps=zeros(T,1); %Суммарная сила сопротивления пучка удлинению S
for t=1:T %Цикл нарастания удлинения S пучка
    for m=1:n %Цикл просмотра пучка и обнаружения неразорвавшихся волокон
        if NumB(m,1)==0 %Проверка, что m-е волокно ранее не разорвалось
            if S(1,t)<Smax(m,1) %Проверка, что m-е волокно еще не разрывается
                %Сила сопротивления m-го волокна удлинению S
                p=StoP(S(1,t),Smax(m,1),Prmax(m,1));
                Ps(t,1)=Ps(t,1)+p; %Накапливание суммарного сопротивления
            else
                NumB(m,1)=1; %m-е волокно разрывается при удлинении d пучка
            end; end; end;
        nb(t,1)=sum(NumB); %Число разорвавшихся волокон при удлинении d
    end;
    Eta = Ps / (n*Prsr); %Кoeffициент использования прочности одной нити
    ab = nb / n;
    Функция величины натяжения нити от ее удлинения
    function p = StoP(S, Smax, pMasMax);
    Smax = [0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22]; %Удлинения тип. нити,(%)
    pMas = [0 1 2 3 4 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.7 4.8]; %Натяжения нити, Г
    SmaxCod = Smax / 22; pMasCod = pMas / 4.8; %Переход к кодиров. значениям
    Scod = S / SmaxMax; %Кодирование текущего значения удлинения
    pCod = spline(SmaxCod,pMasCod,Scod); %Сплайн-аппроксимация натяжения

```


$p = p_{\text{Cod}} * p_{\text{MasMax}}$; %Возврат к не кодированным значениям натяжения

В алгоритме *AI.12* моделирования пучка нитей сохраняются все основные логические пункты алгоритма *AI.11*. Добавлены генераторы масивов случайных значений разрывного натяжения и удлинения нитей (стр.4 – 7). Для вычисления натяжения каждой нити при удлинении S использовано обращение к функции **StoP**.

Эта функция аппроксимирует сплайнами типовую для данного вида нитей зависимость между натяжением и удлинением $p_c = \varphi_c(S_c)$. Затем она вычисляет натяжение конкретной нити для заданного удлинения с использованием процедуры кодирования (1.17). Для сравнения результатов моделирования вместо абсолютных значений натяжения P_s пучка удобно использовать показатель

$$\eta(S) = \frac{P_s(S)}{N p_{sr}} \quad (1.18)$$

т.е. относительное удельное натяжение η нити η при относительном удлинении S . Максимальное значение этого показателя равно коэффициенту использования прочности нитей в прочности пучка.

Вместо абсолютной величины числа разорвавшихся нитей удобно рассматривать относительную величину - долю разорвавшихся нитей от их первоначального числа a_b (стр.26 алгоритма *AI.12*)

$$a_b = \frac{n_b}{N} \quad (1.19)$$

На рис.1.44 кривые 1 показывают результаты работы модели при исходных данных, указанных в тексте алгоритма *AI.12*. Кривые 2 отображают результаты работы алгоритма *AI.12* при $CvSmax$, равном нулю. В этом случае кривая зависимости $\eta(S)$ в точности повторяет S-S – кривую нитей (рис.1.42 и рис.1.43, переменная p). Нити разрываются одновременно, достигнув разрывного удлинения $SmaxSr$, равной 4%.

Разброс значений разрывного натяжения нитей с коэффициентом вариации $CvPr$, равным 20%, практически не влияет на вид кривой. Последнее обстоятельство является проявлением закона больших чисел для большого числа ($n = 200$) нитей в пучке. Действительно, если число волокон n в пучке уменьшить до 10, то каждый новый прогон модели будет давать кривую зависимости $\eta(S)$, отличающуюся от остальных. Однако все эти кривые совпадают с точностью до масштабного множителя. На рис.1.45 приведены кривая 2 для $n = 200$ и кривые 3 – 7 по пяти независимым прогонам модели при $n = 10$, которые подтверждают сделанный вывод.

Разброс значений разрывного удлинения нитей, наоборот, существенно влияет на вид зависимости $\eta(S)$. На рис.1.46а показана зависимость $\eta(S)$ при разных значениях коэффициента вариации $CvSmax$: 0%, 5%, 10% и 25%. Увеличение разброса в значениях разрывного удлинения у

нитей пучка растягивает кривую $\eta(S)$ по оси абсцисс, одновременно снижая коэффициент использования прочности нитей η_{max} .

Разрыв нитей происходит не одновременно, а при разных значениях удлинения пучка, превращая из одиночного события в процесс постепенного разрушения, растянутый во времени. Подобная картина наблюдается для всех однородных видов нитей независимо от особенностей их S-S-кривых (рис.1.41).

Представленные результаты получены на модели пучка, состоящего из большого ($n = 200$) числа нитей. Если число нитей в пучке мало, например, $n = 10$, то в результатах моделирования будет проявляться случайный разброс значений p_{max} и S_{max} . На рис.1.47а представлено семейство зависимостей $\eta(S)$, полученных при $CvPr = 0\%$ и $CvSmax = 25\%$ на разных реализациях случайных значений p_{max} и S_{max} . На рис.1.47б представлены результаты, моделирования, отличающиеся лишь тем, что они получены при $CvPr = 20\%$.

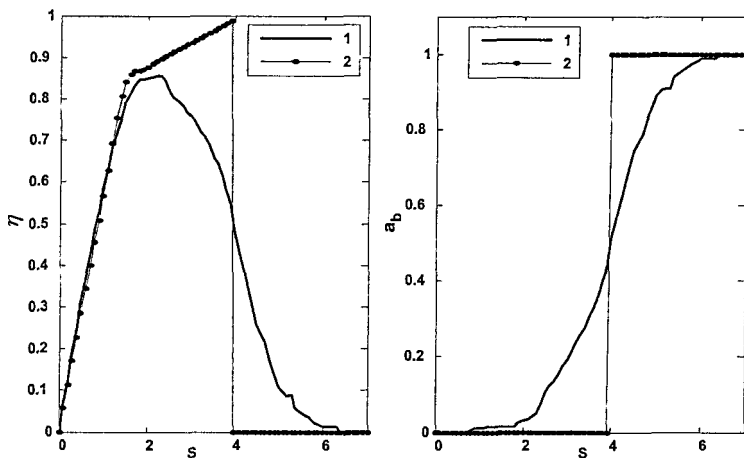


Рис.1.44. Сопротивление удлинению при полуцикловом испытании

Увеличение разброса разрывной нагрузки нитей отразилось на большем различии в зависимостях при сохранении общего их вида. Сравнивая зависимости на рис.1.46а и рис.1.47, можно видеть, что уменьшение числа нитей в пучке приводит к появлению характерных скачкообразных участков, которые связаны с обрывом конкретных нитей. При большом числе нитей в пучке эти участки сглаживаются, т.к. количество «ступенек» возрастает, а их относительная высота уменьшается, и они становятся практически незаметными на графике. Чтобы подтвердить сказанное, на рис.1.47в приведены графики зависимости $\eta(S)$, полученные при фиксированных значениях $CvPr = 20\%$ и $CvSmax = 25\%$ и разных значениях $n = 10$;

20; 50; 100; 200. Кривые получены на разных реализациях значений случайных величин p_{max} и S_{max} .

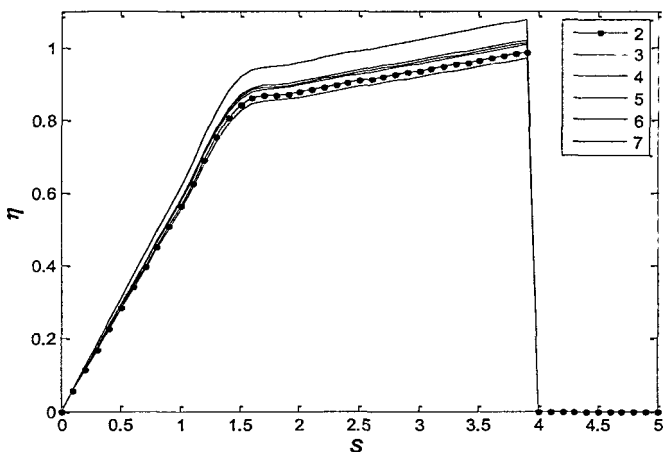


Рис.1.45. Влияние числа нитей в пучке на кривую деформации

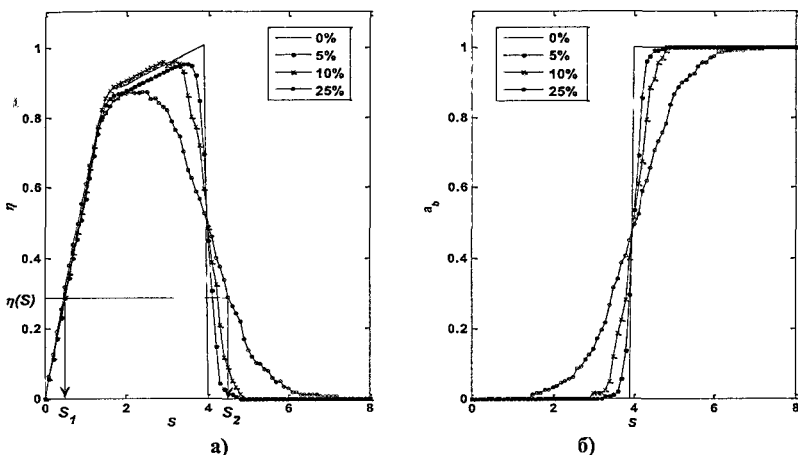


Рис.1.46. Влияние числа нитей в пучке на сопротивление растяжению

Вероятностный разброс значений p_{max} и S_{max} приводит к разбросу значений коэффициента использования прочности нитей в пучке η_{max} и соответствующего удлинения пучка, которое обозначим через S_m . Эти величины определяются по формулам

$$\eta_{max} = \max_{S>0} \eta(S); \quad S_m = \arg \max_{S>0} \eta(S) \quad (1.20)$$

На рис.1.47г приведены диаграммы рассеяния значений ($S_m; \eta_{max}$), полученные по 50 повторным прогонам модели при $n = 10$ и $n = 200$. С увеличением числа нитей в пучке разброс значений η_{max} существенно уменьшается. Разброс значений удлинения, при котором наблюдается наибольшее значение η_{max} , практически не зависит от числа нитей в пучке. Доля выборочных значений η_{max} , приходящихся на определенное значение S_m , остается практически одинаковым независимо от n .

В рассмотренных моделях предполагалось, что деформация нитей в пучке – только упругая. Зависимость между натяжением и удлинением нитей описывается линейным законом Гука или нелинейной S-S – кривой. При этом масса деформируемого пучка настолько мала, что силами инерции можно пренебречь.

Отсутствие эластической и пластической частей деформации у нитей позволяет считать, что в пучках из таких нитей деформация носит статический характер: при растяжении пучка в нем мгновенно развивается соответствующее натяжение (с учетом возможного разрыва части нитей). При приложении к пучку растягивающей нагрузки пучок мгновенно приобретает соответствующее этой нагрузке удлинение. Поэтому в моделирующих алгоритмах постепенное нарастание удлинения, например, строки 11 – 24 в А1.12, введено лишь для удобства моделирования. Получаемая при этих условиях зависимость η (S) не зависит от способа приложения реальной нагрузки.

Если известна величина удлинения пучка S , то по этой зависимости можно найти значение η , и из формулы (1.18) вычислить соответствующее натяжение P_s . Наоборот, если известна приложенная к пучку нагрузка P_s , то после пересчета ее по формуле (1.18) в эквивалентное значение η можно найти соответствующие значения удлинения. Таких значений может быть:

- два S_1 и S_2 (см. рис.1.46а), если прикладываемая нагрузка не превышает прочности пучка;
- одно, если нагрузка в точности равна прочности пучка;
- ни одного, если нагрузка превосходит прочность пучка, и все его нити рвутся под действием этой нагрузки.

Рассмотрим методику вычисления значений S , если известна величина нагрузки P_s или соответствующая ей величина η . Для нитей, подчиняющихся закону Гука

$$p = kS \quad (1.21)$$

получим линейное уравнение

$$P_s = p(n - n_b) = kS(n - n_b) \quad (1.22)$$

Тогда

$$S = \frac{P_s}{k(n - n_b)} \quad (1.23)$$

Если нити подчиняются закону Гука, но имеют разные коэффициенты упругости k_1, \dots, k_n , уравнение (1.22) и его решение (1.23) имеют вид

$$Ps = S \sum_{j \in J_{nb}} k_j; \quad S = \frac{Ps}{\sum_{j \in J_{nb}} k_j} \quad (1.24)$$

Здесь J_{nb} – множество номеров нитей, которые еще не разорвались, когда растягивающая нагрузка достигла величины Ps . Поскольку число разорвавшихся нитей может быть разным при одном и том же значении η (рис. 8а), то и решений (1.23) или (1.24) может не одно, а больше.

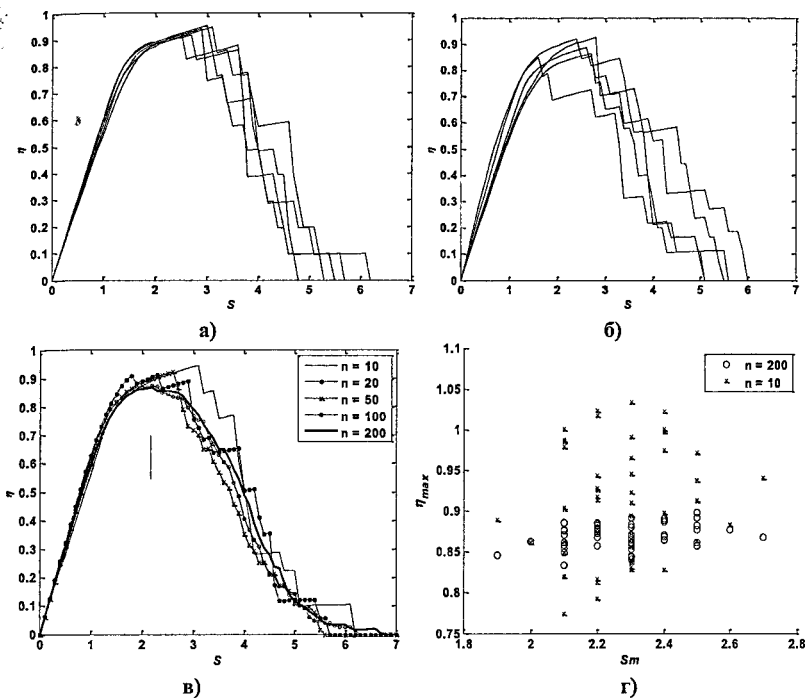


Рис.1.47. Динамика и статистика удлинения пучка с малым числом нитей

Если нити не подчиняются закону Гука, необходимо использовать зависимость (1.16). В этом случае уравнение (1.22) приобретает вид

$$Ps = \sum_{j \in J_{nb}} \varphi_j(S) = \Phi(S) \quad (1.25)$$

Его решения

$$S = \Phi^{-1}(Ps) \quad (1.26)$$

можно найти лишь численно.

После определения величины деформации растяжения S можно вычислить нагрузку, растягивающую каждую нить, для каждого из трех рассмотренных выше законов деформации нитей по одной из формул

$$p = kS, \text{ или } p_j = k_j S, \text{ или } p_j = \varphi_j(S) \quad (1.27)$$

Если натяжение нити, рассчитанное по одной из формул (1.27), превышает разрывную нагрузку нити p_{\max} , то эта нить разрывается и исключается из дальнейшего рассмотрения при расчете суммарного натяжения пучка. При этом число нитей, оставшихся в пучке и сопротивляющихся нагрузке, уменьшается. Поэтому приложенная к пучку нагрузка распределяется между оставшимися нитями. Изменяется функция (1.25), а значит, и удлинение этих нитей (1.26).

Вследствие этого задачу вычисления значений S приходится решать итерациями:

- 1) увеличение значения S на dS , начиная с нулевого;
- 2) вычисление для каждого значения S соответствующей суммарной силы натяжения пучка с учетом нитей, которые разрываются до или при удлинении S ;
- 3) если натяжение пучка меньше приложенной нагрузки, вернуться к пп.1 и 2.

Замечание. Рассматриваемые модели динамики процесса растяжения пучка нитей являются дискретными. Квантованию с постоянным шагом в моделирующих алгоритмах подвергается величина растяжения S или растягивающей нагрузки Ps . Известно, что такой подход к моделированию систем, у которых состояния меняются не только непрерывно (постепенное нарастание деформации), но и дискретно (обрывы нитей), может привести к заметным погрешностям в оценках моментов таких дискретных событий и скачков в значениях параметров системы при этих событиях.

Для рассматриваемой системы – пучка нитей – эти ошибки, очевидно, не столь существенны, когда шаг приращения квантованной величины – S или Ps – достаточно мал, а распределение любого параметра нити, например, модуля упругости, является плавным и не допускает значительных выбросов.

Другой подход при построении алгоритма моделирования заключается в следующем. Располагая значениями S_{\max} для каждой конкретной нити пучка, можно построить из них последовательность $S_{\max}(1) < S_{\max}(2) < \dots < S_{\max}(n)$. Затем в пределах от некоторого $S_{\max}(j)$ до следующего $S_{\max}(j+1)$ наращивать значения S равномерно с постоянным шагом

$$ds(j) = \frac{S_{\max}(j+1) - S_{\max}(j)}{T_j}, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (1.28)$$

где T_j – число шагов равномерного квантования в указанных пределах.

Приведем фрагмент процедуры Matlab `Udlinenie`, реализующей этот алгоритм формирования дискретных значений удлинения S пучка.

Алгоритм А1.13

```
function [S,Smax,Smax0,Prmax] = Udlinenie;
n=10; %Число нитей в пучке
T=3; %Число значений удлинения на каждом интервале (Smax(j) ; Smax(j+1))
% Среднее разрывное удлинение нитей, (%) и коэффициент вариации
SmaxSr=4; CvSmax=0.25;
%Генерация значений разрывного удлинения для n нитей
Smax0=normrnd(SmaxSr,CvSmax*SmaxSr,n,1);
%Сортировка Smax0 по возрастанию и добавление стартового значения S=0
Smax = [0; sort(Smax0)];
%Средняя разрывная нагрузка нитей, (Г) и коэффициент вариации
Prsr=5; CvPr=0.2;
% Генерация значений разрывной нагрузки n нитей
Prmax=normrnd(Prsr,CvPr*Prsr,n,1);
ds=(Smax(2,1))/T; %Шаг квантования S на интервале (0 ; Smax(1))
S=cumsum(ds*ones(T,1)); % Значения удлинения S на этом интервале
%Цикл накопления дискретных значений S по участкам (Smax(j) ; Smax(j+1))
for j = 2:n
%Шаг квантования S на интервале (Smax(j) ; Smax(j+1))
ds = (Smax(j+1,1)-Smax(j,1))/T;
Tj = length(S); %Число накопленных значений массива S
%Значения удлинения S на интервале (Smax(j) ; Smax(j+1))
Sj = S(Tj,1) + cumsum(ds*ones(T,1));
S = [S; Sj]; %Накопление массива значений удлинения пучка нитей
end;
S = [0; S];
```

Работу этого фрагмента иллюстрируют табл.1.8 со значениями мас-сивов и рис.1.48.

Таблица 1.8

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_{max0}	2,7827	3,9588	2,8717	2,6507	3,7389	4,9535	4,1286	4,6565	2,8322	3,5394
S_{max}	2,6507	2,7827	2,8322	2,8717	3,5394	3,7389	3,9588	4,1286	4,6565	4,9535
Pr_{max}	4,7376	3,7868	3,6806	5,9312	5,0112	4,3549	5,8057	5,2316	4,0102	6,3396

Из рис.1.48а видно, что весь диапазон нарастания удлинения S разделен на интервалы неодинаковой величины в соответствии с разрывными удлинениями нитей. Каждый из интервалов, в свою очередь, разделен на $T = 3$ отрезка ds одинаковой длины, как это требуется для совмещения в модели непрерывных и дискретных этапов развития деформации в пучке.

На рис.1.48б приведена для наглядности диаграмма рассеяния значений S_{max} и Pr_{max} , показывающая, что в моделируемом пучке у нитей нет взаимосвязи между этими величинами.

У реальных нитей и волокон есть корреляция между разрывным удлинением S_{max} и разрывной нагрузкой Pr_{max} , хотя и с не очень большим коэффициентом корреляции, порядка $r = 0,6 - 0,8$, а одномерные рас-

пределения этих характеристик отличаются от нормального распределения. При моделировании это свойство нитей легко учесть различными способами.

Простейший способ состоит в использовании метода обратной функции для генерации коррелированных значений S_{max} и P_{max} . Сначала генерируется значение двумерного нормально распределенного случайного вектора Z с коэффициентом корреляции r между компонентами. Затем, используя интегральную (т.н. кумулятивную) функцию двумерного нормального распределения, преобразуют значения Z в двумерный вектор U , имеющий равномерное распределение с коэффициентом корреляции r . На третьем этапе, используя обратную интегральную функцию выбранного одномерного распределения величин S_{max} и P_{max} , находят их значения в виде двумерного вектора X .

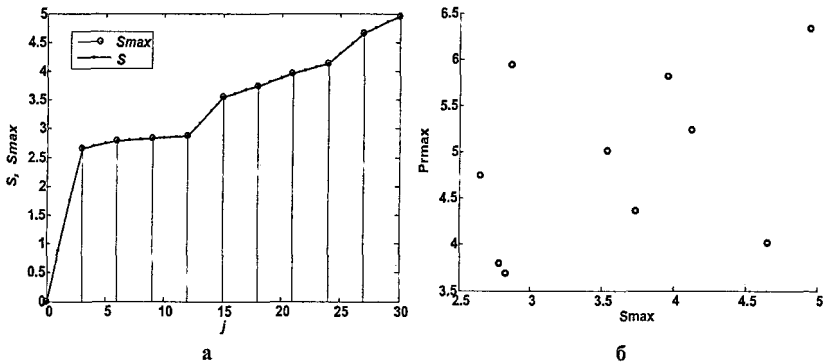


Рис.1.48. Пример работы алгоритма А.1.13

Приведем пример процедуры Matlab `GenPrmaxSmax`, реализующей описанную процедуру. В ней в качестве распределений $Distr(P_{max})$ и $Distr(S_{max})$ выбраны гамма – распределения со средними значениями $S_{max}Sr$ и $P_{max}Sr$ и коэффициентами вариации CVS_{max} и CVP_{max} . Учитывая связь между параметрами a и b гамма – распределения и его средним M и дисперсией D

$$Mz = ab; \quad Dz = ab^2 \quad (1.29)$$

выразим эти параметры через среднее значение Mz и коэффициент вариации CVz

$$b = CVz^2 Mz; \quad a = \frac{Mz}{b} \quad (1.30)$$

Алгоритм А.1.14

```
function [Smax,Pmax]= GenPrmaxSmax;
SmaxSr=5;   %(Гс)      PmaxSr=5.5;   %(%)
CvSmax=0.30;   CvPmax=0.20; %(%)   r=0.7;
bs=(CvSmax^2)*SmaxSr;   as=SmaxSr/bs;
```



```

bp=(CvPrmax^2)*PrmaxSr;      ap=PrmaxSr/bp;
n=200; Smax=zeros(n,1);      Prmax=zeros(n,1);
Z=mvnrnd([0 0],[1 r; r 1],n); U=normcdf(Z);
X=[gaminv(U(:,1),as,bs) gaminv(U(:,2) ap bp)];
Smax=X(:,1); Prmax=X(:,2);

```

В этой функции строки 1 – 5 задают конкретные значения средних, коэффициентов вариации и корреляции для *Smax* и *Prmax*. Строки 6 – 7 преобразуют их в параметры гамма - распределений. В строке 9 происходит генерация *n* значений двумерного нормального вектора *Z* с нулевым средним и нормированной корреляционной матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Этот вектор преобразуется в равномерно распределенный вектор *U* как результат обращения к кумулятивной функции распределения нормального закона *normcdf*. Затем этот вектор преобразуется в вектор *X* с компонентами, имеющими гамма – распределение. Компоненты этого вектора задаются как величины *Smax* и *Prmax*.

На рис.1.49 приведены диаграмма рассеяния и гистограммы распределения 200 значений *Smax* и *Prmax*, полученных с помощью этой функции. Оценка коэффициента корреляции для этих значений равна $r^* = 0,78$, что для смоделированного объема выборки может считаться вполне приемлемой точностью для моделирования со значением $r = 0,7$.

Представляет интерес оценить, в какой степени наличие корреляции между *Smax* и *Prmax* у нитей пучка отразится на виде ее S-S – кривой. С этой целью с помощью алгоритма *A1.12* были получены три S-S – кривые, отличающиеся только отсутствием ($r = 0$) или наличием положительной ($r = 0,7$) или отрицательной ($r = - 0,7$) корреляции. В строках 6, 7 алгоритма вместо исходного текста было включено обращение к функции *GenPrmaxSmax*. Параметры моделирования равны: *SmaxSr* = 4%, *CvSmax* = 25%, *PrmaxSr* = 5%, *CvPrmax* = 20%.

Результаты изображены на рис.1.50. Из рисунка следует, что отсутствие или наличие корреляции обоих знаков между разрывным удлинением и разрывной нагрузкой приводит к различиям в пределах статистического разброса результатов, т.е. практически не отражается на S-S – кривых.

Выясним теперь, влияет ли отличие закона упругой деформации нитей от линейного закона Гука на форму S-S – кривой, или статистический разброс свойств нитей нивелирует эти отличия. В последнем случае имелась бы возможность игнорировать особенности деформации отдельных нитей и ограничиться более простой линейной моделью на основе закона Гука.

Для проверки такой возможности можно использовать алгоритм *A1.12*, в котором вместо функции *StoP* использовать линейную аппроксимацию

мацию с той же разрывной нагрузкой и удлинением, что и у нити с нелинейным законом упругой деформации. Для этого величину силы сопротивления нити p будем вычислять по формуле

$$p = S Prmax / Smax, \quad (1.32)$$

которая в виде $p = Prmax(m,1) * S(1,t) / Smax(m,1)$ заменяет в алгоритме строку 16.

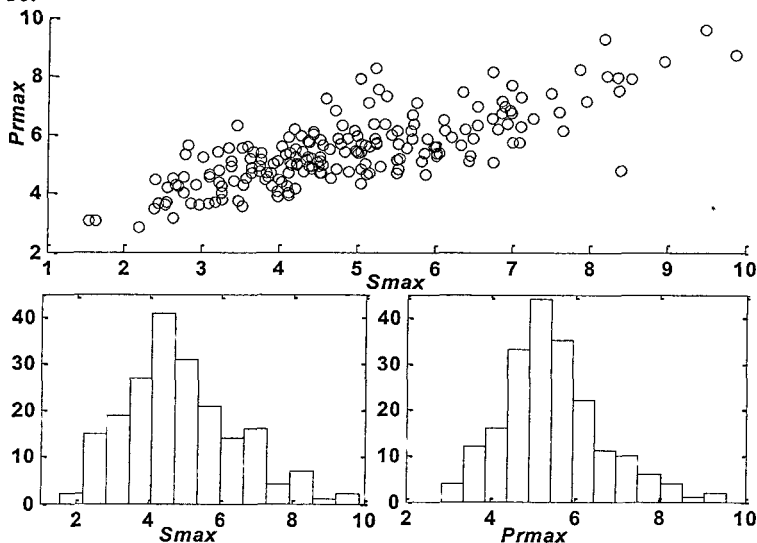


Рис.1.49. Рассеяние и распределение характеристик пучка при разрыве

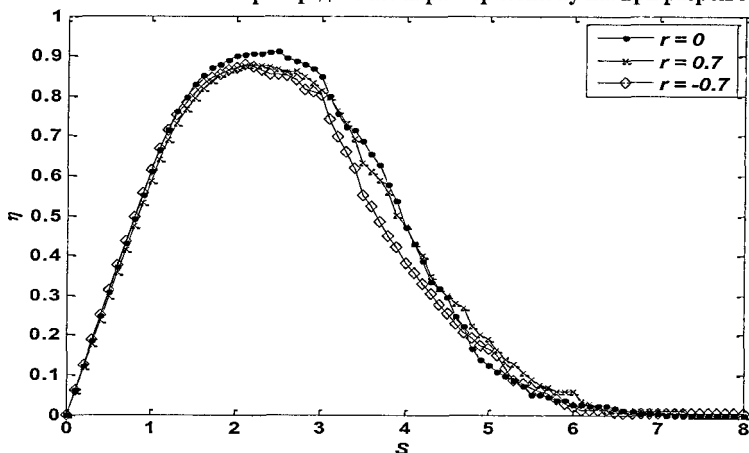


Рис.1.50. Влияние корреляции между характеристиками нитей на удлинение и разрыв пучка

На рис.1.51 приведены графики S-S – кривых, полученных для этих двух вариантов алгоритма: с нелинейной функцией деформации StoP и линейной аппроксимацией (1.32).

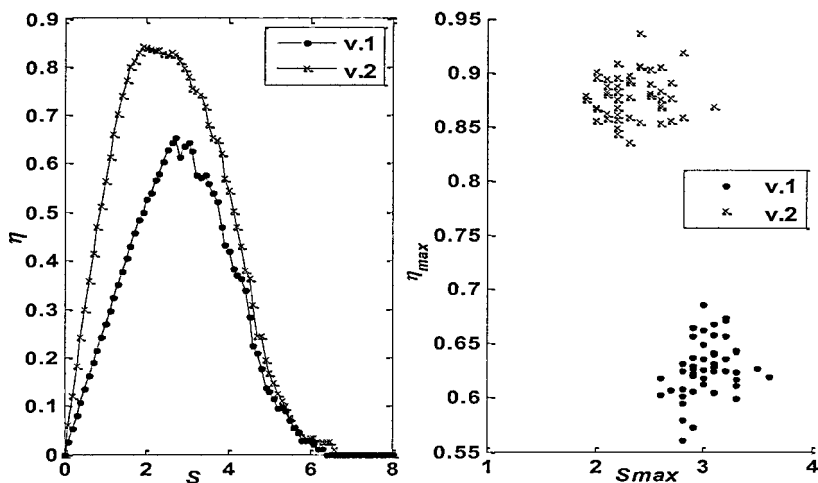


Рис.1.51. Результаты работы алгоритма A.1.14

Из рисунка видно, что закон деформации (рис.3 – 5) нитей существенно сказывается на S-S – кривой деформации пучка. Наблюдается различие не только в экстремальных значениях (Pr_{max} и S_{max}), но и в форме кривой. Таким образом, при моделировании удлинения пучка нитей чрезвычайно важно правильно задать закон деформации отдельных нитей как по форме кривой деформации, так и по значениям статистического разброса значений.

Модели неупругих нитей

Выше рассмотрена деформация удлинения (растяжения) пучка, образованного параллельными независимыми друг от друга нитями. Предполагалось, что эти нити являются абсолютно упругими. Это означает, что их удлинение и натяжение связаны между собой взаимно однозначной и, следовательно, монотонной зависимостью. Удлинение нити возникает практически мгновенно в соответствии с действующим натяжением. При увеличении или уменьшении натяжения удлинение нити изменяется в соответствии с присущей этой нити зависимостью. Деформация нити не имеет свойства инерции, когда изменение длины продолжается, хотя действующее натяжение не меняется во времени. Деформация нити считается полностью обратимой, т.е. при снятии нагрузки нить немедленно возвращается к исходному нерастянутому состоянию.

Реальные нити, из какого бы материала они не были изготовлены, не отвечают таким условиям. Поэтому реакцию реальных нитей на растяжение принято разделять на упругую, эластическую и пластическую составляющие. Упругая составляющая была только что описана и может быть формально представлена зависимостью

$$p(t) = \varphi(S_y(t)) \quad (1.33)$$

или

$$S_y(t) = \varphi^{-1}(p(t)) \quad (1.34)$$

Зависимость (1.33) должна быть монотонной (обычно монотонно убывающей), причем в ней значения удлинения $S_y(t)$ и натяжения $p(t)$ соответствуют одному и тому же моменту времени. Именно такие свойства функции (1.33) обеспечивают выполнение свойств нити, которые были описаны выше.

Эластическая составляющая растяжения нити, как и упругая, также считается полностью обратимой. В отличие от последней, которая является безынерционной, эластическая деформация развивается во времени. Это означает, что при удлинении нити ее натяжение меняется во времени с некоторым запаздыванием. Иными словами, натяжение нити в момент t зависит не только от ее удлинения в тот же момент, но и от предыстории, т.е. от удлинения в предыдущие, начиная с момента начала деформации, моменты времени.

Поэтому в общем виде взаимосвязь между эластической частью натяжения и удлинения можно представить в виде интегрального соотношения

$$S_e(t) = \int_{-\infty}^t \Psi(p(u), u, t) du \quad (1.35)$$

Здесь $\Psi(p, t, u)$ – т.н. весовая функция интегрального преобразования (1.35). Эта функция определяет вклад в момент t в результирующее эластическое удлинение нити $S_e(t)$ натяжения $p(u)$, которое было у нити в некоторый предыдущий момент u .

Пластическая составляющая деформации – это остаточная деформация, которую имеет нить, когда приложенная нагрузка и обратимые деформации полностью сняты. Формально остаточную деформацию можно определить предельным условием

$$S_p = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} S(p(t), t) \quad (1.36)$$

Отметим, что практически невозможно отличить необратимую пластическую составляющую деформации от обратимой эластической составляющей, но с большим временем релаксации. Поэтому формула (1.36) не конструктивна.

При разработке моделей деформации нити задача упрощается, если в выражении (1.35) использовать такую весовую функцию, которая бы делала преобразование $p(t) \rightarrow S_e(t)$ линейным

$$S_e(t) = \int_{-\infty}^t \Psi(t, u) p(u) du \quad (1.37)$$

Дальнейшее упрощение обычно заключается в предположении стационарности свойств нити. Это значит, что ядро $\Psi(t, u)$ зависит только длины интервала времени $(t - u)$, а не от каждой из переменных t и u в отдельности

$$S_e(t) = \int_{-\infty}^t h(t - u) p(u) du \quad (1.38)$$

Приведем размерности величин. Удлинение $S_e(t)$ имеет размерность длины [L]. Натяжение $p(t)$ имеет размерность силы $[MLT^{-2}]$. Переменные t и u имеют размерность времени [T]. Весовая функция $\Psi(t)$ имеет размерность $[M^{-1}T]$.

Зависимость (1.38) позволяет использовать для описания деформации нити аппарат линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и передаточных функций. Данный подход настолько привлекателен, что его часто используют для моделирования деформации реальной нити, синтезируя более сложную динамическую модель методом композиции некоторых базовых элементов. Для наглядности такой подход сопровождают т.н. механическими аналогиями в виде параллельно и/или последовательно соединяемых механических элементов — пружин и демпферов. Путь механической аналогии полезен тем, что позволяет включить в рассмотрение и некоторые нелинейные элементы и учитывать тем самым некоторые специфические особенности деформации нити.

Однако линейные модели не позволяют учесть весьма важные особенности. Во-первых, это т.н. масштабный фактор. Линейная зависимость (1.37) предполагает, что относительная деформация нити не зависит от ее длины: образцы нити длиной 1 см и длиной 100 м имеют одинаковые разрывные нагрузки и удлинения. На самом деле, действует масштабный фактор: поскольку разрыв происходит по наиболее слабому участку нити, у более длинных образцов нити вероятность таких слабых участков выше, чем у коротких. Поэтому средняя разрывная нагрузка более длинных образцов ниже. Линейные модели это обстоятельство не учитывают.

Во-вторых, это усталостные эффекты. Зависимость (1.38) не учитывает изменения свойств нити со временем в результате деформации. Согласно этой зависимости нить, только подвергнутая нагрузке, и нить, которую до данного испытания уже подвергали деформации и тем самым изменили ее механические характеристики, должны вести себя одинаково. В реальных нитях каждое новое приложение нагрузки приводит к изменению

ям механических свойств. При новой нагрузке нить ведет себя уже иначе, чем первоначально.

Попытки уйти от линейных моделей (1.37) или (1.38) приводят к необходимости подбирать вид нелинейного ядра $h(p(u), u)$. Этот подход имеет определенные достоинства. Достаточно найти из натурального эксперимента минимальное число оцениваемых параметров ядра и в то же время получить более реалистичную модель деформации нити. Однако выбор подходящего ядра зачастую приводит к полному эмпиризму в моделировании.

Линейные модели неупругих нитей

Рассмотрим пучок, образованный неупругими нитями. При натяжении пучка нити удлиняются независимо друг от друга. Считаем, что эластическое и пластическое удлинение нити описывается соотношением (1.38), и весовая функция нитей $\Psi(u)$ известна. Представим (1.38) через относительное удлинение $\varepsilon_{ep}(t)$ и натяжение $\sigma(t)$

$$\varepsilon_{ep}(t) = K_1 \int_0^t \Psi(t-u) \sigma(u) du \quad (1.39)$$

где

$$\varepsilon_{ep}(t) = \frac{S_{ep}(t)}{L_0}; \quad \sigma(t) = \frac{p(t)}{F_0}; \quad K_1 = \frac{F_0}{L_0} \quad (1.40)$$

Здесь L_0 и F_0 – первоначальная (до деформации) длина и площадь поперечного сечения нити. Заметим, что здесь, как и ранее, деформация нити считается одномерной, т.е. уменьшением площади ее поперечного сечения при удлинении пренебрегаем. Коэффициент K_1 имеет размерность длины.

Относительное удлинение $\varepsilon_{ep}(t)$ включает в себя как эластическую, так и пластическую составляющие деформации, что отражено в индексе. Общее удлинение в линейной модели складывается из $\varepsilon_{ep}(t)$ и упругой составляющей. Если упругая составляющая удлинения подчиняется закону Гука с модулем E , то общее относительное удлинение $\varepsilon(t)$ можно представить в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma(t) + K_1 \int_0^t \Psi(t-u) \sigma(u) du \quad (1.41)$$

Величина $\varepsilon(t)$ безразмерна. Размерность модуля упругости E совпадает с размерностью относительного натяжения $\sigma(t)$. Весовую функцию удобно выбирать так, чтобы она имело размерность, обратную размерности времени. Тогда ее произведение на дифференциал du будет безразмерной величиной. Представим (1.41), как

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma(t) + \frac{1}{K} \int_0^t h_{ps}(t-u) \sigma(u) du \quad (1.42)$$

Здесь коэффициент K имеет ту же размерность, что и модуль упругости E , а весовая функция $h_{ps}(t)$ – размерность $[T^{-1}]$. Зная относительные удлинение и натяжение нити, можно вычислить абсолютные удлинение и натяжение по формулам (1.40).

В зависимости (1.42) удобно перейти к изображениям по Лапласу:

$$\varepsilon'(s) = \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) \exp(-st) dt; \quad \sigma'(s) = \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_0^{\infty} \sigma(t) \exp(-st) dt \quad (1.43)$$

$$H_{ps}(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{\infty} h_{ps}(t) \exp(-st) dt \quad (1.44)$$

Согласно теореме о свертке получим

$$\varepsilon'(s) = \sigma'(s) \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{K} H_{ps}(s) \right) = \sigma'(s) W_{ps}(s) \quad (1.45)$$

Простое алгебраическое преобразование позволяет выразить натяжение через удлинение

$$\sigma'(s) = \varepsilon'(s) W_{sp}(s) = \varepsilon'(s) \frac{EK}{K + EH_{ps}(s)} \quad (1.46)$$

Простейшей аналитической моделью, описывающей эластическую деформацию, является соотношение

$$T \frac{d\varepsilon_e(t)}{dt} + \varepsilon_e(t) = \frac{1}{K} \sigma(t) \quad (1.47)$$

Ей соответствует передаточная функция $W_{ps}(s)$

$$W_{ps}(s) = \frac{\varepsilon'(s)}{\sigma'(s)} = \frac{1}{K} \frac{1}{1 + Ts} \quad (1.48)$$

и изображение весовой функции

$$H_{ps}(s) = \frac{1}{1 + Ts} \quad (1.49)$$

с оригиналом

$$h_{ps}(t) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) = a \exp(-at) \quad (1.50)$$

Параметр $a = T^{-1}$ определяет скорость нарастания удлинения нити при приложении нагрузки и скорость релаксации (уменьшения удлинения) при снятии нагрузки.

Как уже отмечалось, к сожалению, эта модель не является адекватной наблюдаемым свойствам нитей: упругая составляющая существенно

отличается от линейного закона Гука, а эластические свойства не укладываются в простую зависимость (1.39). Поэтому, хотя на качественном уровне она правдоподобно описывает поведение отдельной нити, но для количественных оценок она в большинстве случаев не пригодна.

Более популярными являются линейные модели, построенные в виде цепочки моделей (1.49). В качестве экспериментальных данных чаще всего получают кривые, отображающие нарастание удлинения нити во времени под действием постоянной нагрузки. Эти кривые чаще всего имеют вид, представленный на рис.1.52. В течение часа волокна находились под действием постоянной растягивающей нагрузки, которая затем была снята, и начался процесс релаксации растяжения.

Аналогичная кривая для первого этапа получена на модели из двух моделей (1.49) с передаточной функцией

$$W_{ps}(s) = \frac{\varepsilon'(s)}{\sigma'(s)} = \frac{1}{E} + \frac{1}{K_1} \frac{1}{1+T_1s} + \frac{1}{K_2} \frac{1}{1+T_2s} \quad (1.51)$$

при значениях $E = 1/8$; $K_1 = 1/6$; $T_1 = 1$; $K_2 = 1$; $T_2 = 100$.

Согласно (1.51), суммарная деформация нити складывается из упругой составляющей с коэффициентом упругости E , и эластической составляющей, моделируемой двумя последовательно соединенными блоками (1.49) с коэффициентами K_1 ; T_1 ; K_2 ; T_2 . Функция, описывающая изменение удлинения под действием постоянной нагрузки $\sigma = 1$, легко определяется аналитически методами операционного исчисления, и имеет вид

$$\varepsilon(t) = 8 + 6(1 - \exp(-t)) + \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{100}\right)\right), \quad t > 0 \quad (1.52)$$

График этой функции приведен на рис.1.53. Рассматривая эти данные как результат натурального эксперимента, найдем оценки параметров K_1 ; T_1 ; K_2 ; T_2 . Для этого воспользуемся нелинейным методом наименьших квадратов и функцией `lsqcurvefit` системы Matlab. Для этого построим соответствующие M-функции

```
function F = myfun(x,t)
F=x(1)+x(2)*(1-exp(-x(3)*t))+x(4)*(1-exp(-x(5)*t));
function [t,y,x,y1,rn] = optimiz;
t=0:100;
y=8+6*(1-exp(-t))+1*(1-exp(-0.01*t));
x0=[1,1,1,1,1];
[x,rn]=lsqcurvefit('myfun',x0,t,y)
y1=x(1)+x(2)*(1-exp(-x(3)*t))+x(4)*(1-exp(-x(5)*t));
```

В этих функциях x – массив оцениваемых параметров; t – массив значений аргумента (времени): $t = 0, 1, \dots, 100$; y – массив значений функции (1.52); x_0 – начальная точка поиска для вектора оцениваемых параметров.

Найденные оценки равны: $x(1) = 8,0623$; $x(2) = 4,2247$; $x(3) = 1,4491$; $x(4) = 2,1217$; $x(5) = 0,3004$.

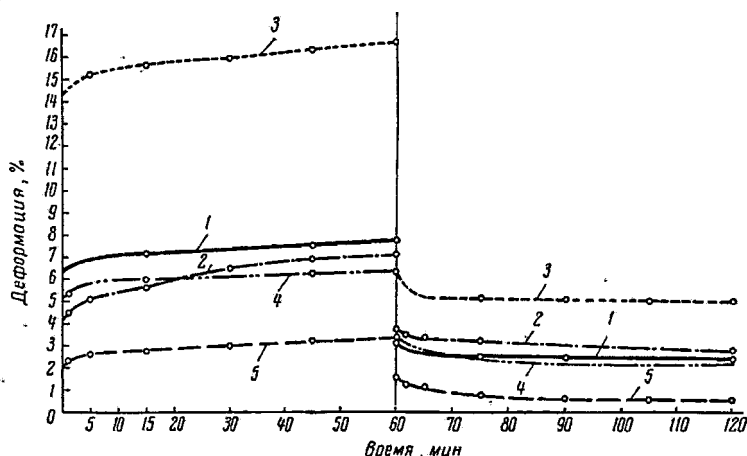


Рис.1.52. 1 — тонкая шерсть, 64к; 2 — вискозные волокна, 435 мтекс (№2300); 3 — капроновое волокно 344 мтекс (№2900); 4 — лавсановое волокно 357 мтекс (№2800); 5 — нитроновое волокно 333 мтекс (№3000)

Как видно, все оценки, кроме первой, довольно далеки от истинных значений. Однако график оценочной кривой $y_1(t)$ (см. рис.1.53) удовлетворительно аппроксимирует функцию $y(t)$. Остаточная сумма квадратов m равна 2,198.

Заметим, что непосредственно из экспериментальных данных (рис.1.52) довольно точно можно найти оценку параметра $x(1)$. В нашем модельном случае $x(1)$ равно 8. Это сокращает длительность поиска. Кроме того, важно удачно задать начальные условия поиска, т.е. вектор x_0 . Если принять, что $x_0 = [1, 1, 1, 0]$, то при этих новых начальных значениях получим новые оценки параметров с остаточной суммой квадратов m , равной 2,3054 и значениями параметров $x = [3,8165, 1,6999, 2,5874, 0,3561]$.

Соответствующая им функция имеет вид

$$y_2 = 8 + 3,8165(1 - \exp(-1,7t)) + 2,5874(1 - \exp(-0,3561t)) \quad (1.53)$$

Ее график приведен на рис.1.53 и показывает согласие с экспериментальными данными $y(t)$, как и первоначальная кривая $y_1(t)$.

Таким образом, хотя формально кривую деформации нити можно аппроксимировать достаточно удовлетворительно, точность оценки параметров аппроксимирующей функции, даже если ее структура совпадает с модельной кривой, может оказаться низкой, а оценки — далеки от истинных значений.

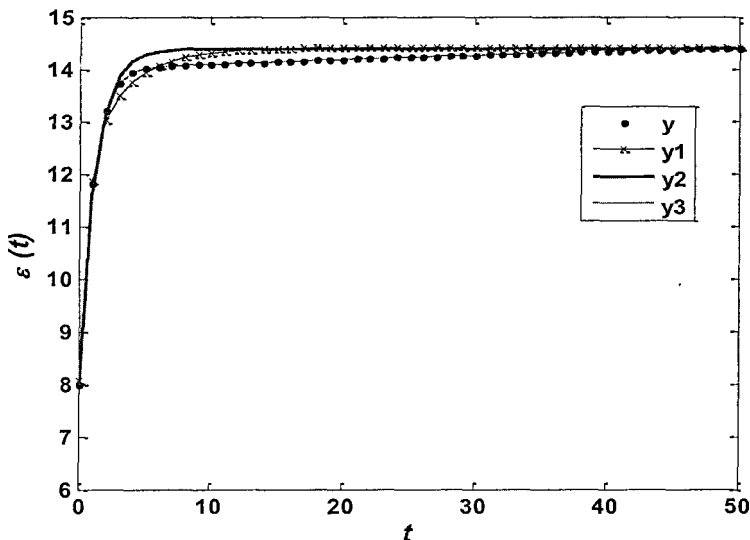


Рис.1.53. Аппроксимация кривой удлинения

Роль правильного выбора начальной точки поиска в нелинейном методе наименьших квадратов весьма велика. Например, если вернуться к пяти неизвестным параметрам $x = [x(1), \dots, x(5)]$ и задать в качестве начальной точки $x_0 = [10, 5, 1, 1, 0]$, то оценки параметров равны $x = [8,0332; 5,9592; 0,9990; 0,9418; 0,0112]$ при m , равном 0,0018 и весьма близки к точным модельным значениям: $[8; 6; 1; 1; 0,01]$. Соответствующая аппроксимирующая кривая y_3 приведена на рис.1.53. Она практически совпадает с точками модельных экспериментальных данных. Результаты оценивания приведены в табл.1.9 и обозначены как var.1.

Экспериментальные данные часто имеют вид кривых, представленных на рис.1.52. В них присутствуют как этап удлинения под действием приложенной постоянной нагрузки, так и этап релаксации после снятия нагрузки. Предполагая, что на обоих этапах нить описывается одной и той же моделью (1.51), можно воспользоваться этими данными, надеясь получить более точные оценки за счет большего объема данных.

Для выбранных модельных данных в соответствии с моделью (1.51) первый этап удлинения нити описывается функцией (1.52). Для второго этапа удлинения нити с помощью операционного исчисления также можно найти функцию, описывающую уменьшение удлинения нити (релаксацию) после снятия нагрузки в момент $t_a = 50$. Объединяя эти две функции, получим модельную зависимость удлинения нити на обоих этапах: при нагрузке и после ее снятия:

$$\varepsilon(t) = 8 + 6(1 - \exp(-t)) + \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{100}\right)\right), \quad 0 < t \leq t_a \quad (1.54)$$

$$\varepsilon(t) = 6 \exp(-(t - t_a)) + \exp\left(-\frac{t - t_a}{100}\right), \quad t \geq t_a$$

Заметим, что при $t = t_a$ функция имеет разрыв на величину упругой деформации $\varepsilon_a = 8$. На рис.1.54 график функции (1.54) обозначен точками как y (var.2) в отличие от функции (1.52), которая обозначена на этом же графике крестиками как y (var.1).

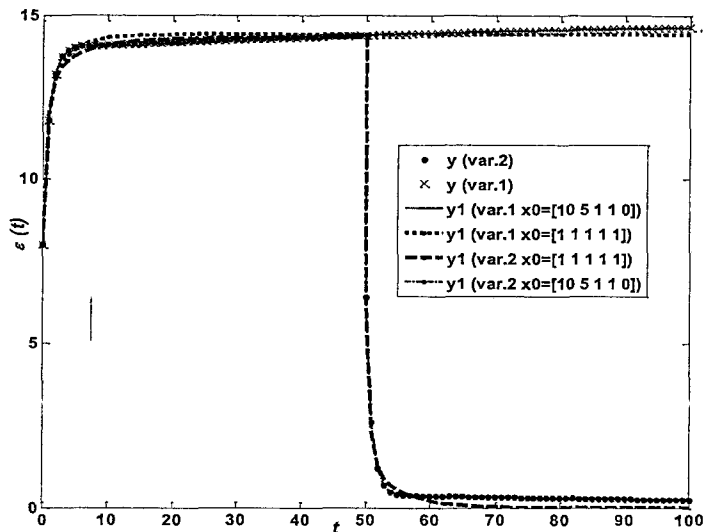


Рис.1.54. Кривая «нагрузка – отдых» и ее аппроксимация

Оценка параметров модельной функции (1.54) нелинейным методом наименьших квадратов выполнена с использованием М-функций в системе

Matlab:

```
function F = myfun2(x,t)
ta=50; t1=0:ta; t2=ta:100;
f1=x(1); f2=x(2)*(1-exp(-x(3)*ta)); f3=x(4)*(1-exp(-x(5)*ta));
F1=f1+x(2)*(1-exp(-x(3)*t1))+x(4)*(1-exp(-x(5)*t1));
F2=f2*exp(-x(3)*(t2-ta))+f3*exp(-x(5)*(t2-ta));
F=[F1, F2];
function [t, y, x, y1, rn] = optimiz2;
ta=50; t1=0:ta; t2=ta:100; t=[t1,t2];
f1=6*(1-exp(-ta)); f2=(1-exp(-0.01*ta));
fy1=8+6*(1-exp(-t1))+ (1-exp(-0.01*t1));
fy2=f1*exp(-(t2-ta))+f2*exp(-0.01*(t2-ta));
y=[fy1, fy2]; x0=[10,5,1,1,0];
```

```
[x, rn]=lsqcurvefit('myfun2', x0, t, y)
y1=myfun2(x, t);
```

Оценки параметров аппроксимирующих функций (variant 1)

$$\varepsilon(t) = x(1) + x(2)(1 - \exp(-x(3)t)) + x(4)(1 - \exp(-x(5)t)), \quad 0 < t \quad (1.55)$$

и (variant 2)

$$\varepsilon(t) = x(1) + x(2)(1 - \exp(-x(3)t)) + x(4)(1 - \exp(-x(5)t)), \quad 0 < t \leq t_a \quad (1.56)$$

$$\varepsilon(t) = x(2)\exp(-x(3)(t - t_a)) + x(4)\exp(-x(5)(t - t_a)), \quad t_a \leq t$$

приведены в табл.1.9. Оценки вычислялись для двух векторов x_0 начальных значений оцениваемых параметров.

Таблица 1.9

$\varepsilon(t)$	x_0	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	rn
Модель	---	8	6	1	1	0.01	0
var.1	[1,1,1,1,1]	8,0623	4,2247	1,4491	2,1217	0,3004	2,1984
	[10,5,1,1,0]	8,0332	5,9592	0,9990	0,9418	0,0112	0,0018
var.2	[1,1,1,1,1]	8,0508	4,8085	1,4237	1,4511	0,1896	3,6283
	[10,5,1,1,0]	8,0235	5,9722	1,0006	0,9626	0,0107	0,0016

Сравнение полученных оценок еще раз подтверждает вывод, что точность оценивания зависит столько от объема данных, сколько от удачного подбора вектора x_0 начальных значений. Это связано, по-видимому, с тем, что критерий оптимальности метода наименьших квадратов не является выпуклой функцией. В результате поиск оптимальных значений параметров «застревает» в одном из локальных минимумов критерия, удаленном от точного решения. Отметим, что при правильном выборе структуры моделируемой функции нелинейный метод наименьших квадратов даже для разрывных функций привел к высокому качеству аппроксимации.

На рис.1.54 приведены результаты аппроксимации, которые обозначены через y_1 для двух вариантов аппроксимации (var.1 и var.2) и двух векторов x_0 начальных значений. Графики модельных функций (1.52), (1.54) и их аппроксимаций (1.55) и (1.56) иллюстрируют и подтверждают сделанные выводы.

Другой пример применения процедуры `optimiz2` для аппроксимации экспериментальных данных моделью (1.54) приведена на рис.1.55, из которого непосредственно видно хорошее согласие между экспериментальными и модельными данными по всему отрезку времени наблюдения.

Необратимая пластическая составляющая деформации нити практически неотличима от эластической составляющей с очень большими временами релаксации. В рассмотренном модельном примере специально были выбраны два слагаемых с сильно отличающимися временами релаксации. Первое слагаемое характеризовалось временем релаксации $T_1 = 1$, а второе - $T_2 = 100$. Такая особенность эластической деформации с большим

временем релаксации позволяет исключить из модели элементы, имитирующие только пластическую составляющую и тем самым упростить модель, построив ее из математически более однородных элементов.

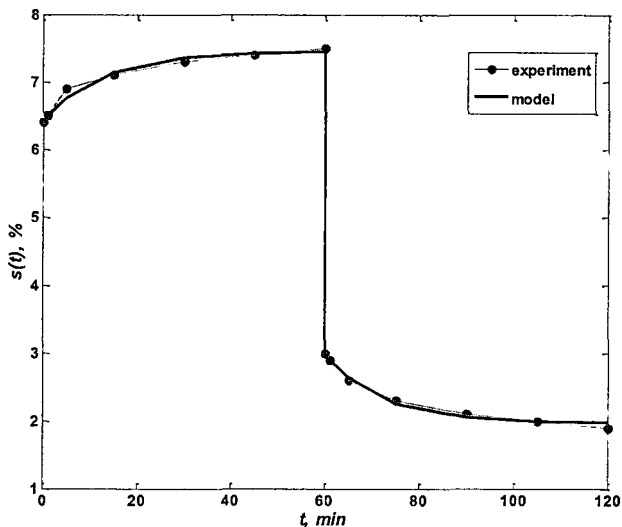


Рис.1.55. Аппроксимация кривой "нагрузка - отдых"

Таким образом, хотя линейные динамические модели удлинения нитей не учитывают эффектов старения и разрушения под действием растягивающих нагрузок, но для определенного класса деформаций вполне адекватно описывают наблюдаемые данные и могут быть использованы в том же диапазоне деформаций при моделировании пучков нитей.

1.5. Модель растяжения и разрыва пряжи при полуцикловой деформации

Задача исследования взаимосвязи прочностных свойств пряжи и образующих ее волокон является классической задачей текстильной технологии и материаловедения и нашла частичное решение в работах Е. Брашлера, А.Н. Соловьева, В.А. Усенко, А.Н. Ванчикова, П.П. Трыкова, А.Г. Севостьянова. Эти результаты достаточны для практических оценок в производственных условиях фабричных лабораторий. Однако они не раскрывают механизма взаимодействия волокон в пряже и динамики изменения этого взаимодействия при деформации, например, при растяжении пряжи. Делались попытки связать прочностные характеристики волокон с прочностью пряжи через геометрию расположения волокон в теле пряжи и их взаимодействие между собой. Был получен набор математических соотношений, позволивших описать отдельные составляющие такого взаимодействия.

Дальнейшее развитие этого направления исследования столкнулось с проблемой учета вероятностной природы свойств волокон и изменения взаимодействия волокон в процессе механического нагружения, деформации и разрыва пряжи, т.е. статистической динамики этого процесса. Эта проблема была решена в работах автора. Была создана оригинальная динамическая имитационная модель процесса развития деформации в образце пряжи вплоть до ее разрыва. По существу, имитировалось т.н. полуцикловое испытание образца пряжи, растягиваемого с постоянной скоростью в разрывной машине.

Алгоритм моделирования и некоторые эксперименты с моделью детально описаны ниже. С его помощью можно имитировать полуцикловые испытания пряжи любой структуры и состава смеси из хлопкового и химических волокон длиной до 60 - 70 мм. Свойства волокон компонентов, из которых состоит пряжа, задаются законами распределения длины L , тонины S , разрывной нагрузки P_{max} , разрывного удлинения d_{max} , кручения вокруг оси пряжи K , расстояния от оси пряжи r , продольной координаты x волокна. Для распределения каждого из перечисленных показателей задаются минимальные и максимальные значения Min , Max этих показателей, среднее M и коэффициент вариации Cv . Кроме того, задаются коэффициенты трения волокна по волокну μ , сцепления волокон q , поперечного сжатия ν , упругости E .

Задаются также основные параметры моделируемой пряжи: линейная плотность T_{np} и коэффициент вариации неровноты по линейной плотности Cv_{np} , средняя крутка K_{np} и коэффициент вариации по крутке Cv_{np} , а также указываются особенности распределения компонентов в поперечном сечении пряжи, зависящие от способа ее выработки. Возможно моделирование пряжи с поперечными сечениями сложной структуры, в том числе армированной пряжи и пряжи из нескольких стренг с ручьистой структурой. Это проявляется в группировке компонентов по разным секторам поперечного сечения.

Модель растяжения и разрыва пряжи имитирует процесс однократно быстрого удлинения пряжи с постоянной скоростью удлинения вплоть до разрыва и описывает поведение волокон в некотором сечении в этом процессе. Моделируемый способ удлинения позволяет пренебречь реологическими эффектами, т.е. учитывать только упругую составляющую деформации волокон, которую будем описывать зависимостью:

$$\varepsilon = \psi_j(\sigma) \quad (1.57)$$

Здесь ε - относительная деформация удлинения волокна j -го типа в распрямленном состоянии при относительной нагрузке σ , сН на 1 мм^2 поперечного сечения волокна.

Без увеличения сложности модели зависимость (1.57) может быть задана специфичной для каждого волокна в сечении пряжи. Однако, как пра-

вило, исследователь не располагает таким объемом информации. Поэтому в дальнейшем ограничимся заданием прочности P_σ и разрывного удлинения ε_σ для каждого волокна, а функцию (1.57) будем считать одинаковой для всех волокон одного типа. При таких условиях вычисление фактического удлинения волокна с поперечным сечением S при силе растяжения P , и меньшей P_σ , определится по формуле:

$$\varepsilon = \varepsilon_\sigma \frac{\psi_j(p \frac{\sigma_{max}}{P_\sigma})}{\psi_j(\sigma_{max})} \quad (1.58)$$

Здесь σ_{max} – максимальная средняя относительная разрывная нагрузка для j -го типа волокон; $\psi_j(\sigma_{max})$ – максимальное среднее относительное удлинение для j -го типа волокон.

Формула (1.58) представляет масштабное преобразование усредненной зависимости (1.58) в зависимость для конкретного волокна j -го типа с заданными P_σ и ε_σ .

В моделях Е. Брашлера, П.П. Трыкова и др. принимается, что волокна в пряже расположены по винтовым линиям с постоянной круткой K (кручений/м), а оси винтовых линий совпадают между собой и с осью пряжи. Мы примем это же упрощающее предположение, но в отличие от указанных моделей будем считать, что значение K для каждого волокна есть случайная величина. Последнее позволяет в известной мере учесть эффект «миграции» волокон и специфику структуры пряжи новых способов прядения, а также возможные различия в степени кручения (кручение волокна для краткости будем называть винтообразное расположение волокна вокруг оси пряжи вследствие ее кручения) отдельных волокон в сечении пряжи.

Трение между волокнами будем рассчитывать по обобщенному закону Ньютона:

$$F_i = F_{oi} + \mu_i F_{ni} \quad (1.59)$$

Здесь F_{oi} – сила сцепления, вызванная взаимодействием неровностей поверхности волокон при их плотном прилегании, μ_i – коэффициент трения, F_{ni} – сила нормального давления. Все эти силы отнесены к единице длины i -го волокна.

Усилие, действующее на волокно в пряже, складывается из силы сцепления и силы трения, обусловленной давлением соседних волокон, причем обе эти силы вычисляются с учетом кривизны волокна в пряже, что приводит к повышению суммарной силы взаимодействия волокна с соседними волокнами. Это усилие можно определить по формуле:

$$F_{\pi} = (F_{0i} + \mu_i F_{ni}) \frac{\rho_i}{\mu_i} (e^{\mu_i \theta_i} - 1) \quad (1.60)$$

где ρ_i – радиус кручения волокна, θ_i – угол охвата внутри лежащих волокон пряжи рассматриваемым волокном. Они могут быть определены по формулам

$$\rho_i = R_i \left(1 + \frac{1}{(2\pi R_i K_i)^2} \right), \quad \theta_i = \frac{l_i}{\rho_i} \quad (1.61)$$

где l_i – длина i -го волокна, R_i – расстояние от оси пряжи до волокна.

Величина нормального давления оценивается по формуле

$$F_{ni} = 2 \cdot 10^3 E_i \frac{\gamma_{np}}{\gamma_i} (2\pi R_i K_i)^2 \left(1 - \frac{R_i}{R_{np}} \right)^2 \sqrt{\frac{4S_i}{\pi}} \quad (1.62)$$

Здесь E_i – модуль упругого растяжения волокна, γ_{np} и γ_i – объемные плотности пряжи и волокна, S_i – поперечное сечение волокна. Значение γ_{np} можно найти по формуле:

$$\gamma_{np} = \frac{1}{\pi N_{np} R_{np}^2} \quad (1.63)$$

где R_{np} – радиус пряжи, а N_{np} – номер пряжи. $N_{np} = 1000/T$, T – текс пряжи.

Полное относительное удлинение волокна при растяжении пряжи с учетом деформации из-за кручения можно представить в виде:

$$\varepsilon_i = (1 + \varepsilon_{i1})(1 + \varepsilon_{i2}) - 1 \quad (1.64)$$

где ε_i – относительное удлинение волокна без учета кручения. Оно связано с относительным удлинением пряжи ε_h формулой [51]:

$$\varepsilon_{i1} = \sqrt{(\varepsilon_h + 1)^2 + (1 - \nu \varepsilon_h)^2 \frac{(2\pi R_i K_i)^2}{1 + (2\pi R_i K_i)^2}} - 1 \quad (1.65)$$

в которой ν – коэффициент поперечного сжатия пряжи при ее удлинении (аналог коэффициента Пуассона в теории упругости).

Относительное удлинение волокна из-за кручения ε_{i2} может быть найдено по величине укрутки. При формировании пряжи вследствие закручивания волокон вокруг оси пряжи последняя получает укрутку, т.е. сокращает свою длину. Волокна в зависимости от их удаленности от оси пряжи либо растягиваются, либо проскальзывают. Поэтому в уже сформированной пряже часть волокон имеет некоторое предварительное растяжение. Относительную величину этого растяжения ε_{i2} , обусловленного кручением пряжи, и условие его существования у волокна можно записать в виде условия:

$$\varepsilon_{i2} = d_i, \text{ при } d_i > 0 \text{ и } \varepsilon_{i2} = 0, \text{ при } d_i \leq 0 \quad (1.66)$$

где

$$d_i = \frac{u_{np}}{\cos \beta_i} - 1 \quad (1.67)$$

u_{np} — коэффициент усадки пряжи при ее формировании, а угол кручения β_i определяется из равенства:

$$\operatorname{tg} \beta_i = 2\pi R_i K_i \quad (1.68)$$

Различные известные формулы для усадки пряжи u_{np} в большинстве своем содержат неизвестные или полученные эмпирически и верные лишь для определенных типов волокон параметры. При построении модели была использована простая приближенная формула

$$u_{np} = \frac{2 \cos \beta_{np}}{1 + \cos \beta_{np}} \quad (1.69)$$

где угол β_{np} определяется из равенства:

$$\operatorname{tg} \beta_{np} = 2\pi R_{np} K \quad (1.70)$$

В приведенных выше формулах используется величина радиуса пряжи R_{np} , которая является условной величиной, особенно для пряжи с рыхлой структурой. К тому же пряжа не всегда имеет круглое сечение [130]. Радиус пряжи необходим в дальнейшем рассмотрении как характеристика, удаленности волокон от оси пряжи. Воспользуемся простой формулой, дающей приемлемую оценку

$$R_{np} = \frac{0,5C}{\sqrt{1000/T_{np}}} \left(\frac{4685}{1055 + \alpha_M^2 \sqrt{1000/T_{np}}} + 1 \right) \quad (1.71)$$

где α_M — метрический коэффициент крутки, C — безразмерный коэффициент.

Приведенная совокупность формул, полученных в теории кручения и растяжения пряжи, использована в ИСМ для оценки деформации и сил, действующих на любое рассматриваемое волокно со стороны других волокон.

Объектом имитации является некоторое поперечное сечение пряжи со всеми волокнами, пересекающими это сечение перед началом растяжения. Пряжи. Выполняя программу имитации, ЭВМ воспроизводит те физико-механические процессы и геометрические изменения, которые происходят с волокнами при растяжении пряжи, в виде преобразования различных физико-механических и геометрических характеристик волокон и пряжи. Процесс имитации продолжается до тех пор, пока в сечении останется хотя

бы одно волокно (в процессе растяжения число волокон убывает). Предполагается, что рассматриваемое сечение и есть то, по которому происходит разрыв пряжи.

Динамика деформации пряжи в некотором сечении вплоть до разрыва пряжи по этому сечению может быть представлена следующим образом.

При небольших абсолютных удлинениях образца пряжи деформация более или менее равномерно распределяется по всем сечениям пряжи. В некотором рассматриваемом сечении все или почти все волокна растягиваются, не смещаясь друг относительно друга. Так продолжается, пока сила трения покоя, действующая на волокно, не достигнет максимального значения (разного для разных волокон, в зависимости от их расположения в сечении пряжи и физико - механических характеристик волокна). Начиная с этого момента, волокно начинает скользить относительно соседних волокон и рассматриваемого сечения, причем может в конце концов покинуть сечение. При этом число волокон в сечении будет меняться, что ведет к изменению сил трения между волокнами в этом сечении.

Возможен и другой вариант эволюции волокна: если сила, действующая на волокно, меньше максимальной силы трения покоя и скольжение волокна еще не началось, но больше прочности волокна, то оно рвется и в дальнейшем перестает влиять на прочность пряжи в рассматриваемом сечении.

Сила сопротивления растяжению возникающая в пряже, представляет собой сумму сил сопротивления всех волокон в сечении, не разорвавшихся и не покинувших сечение к рассматриваемому моменту времени. Эта сила с увеличением растяжения сначала растет, а затем начинает падать, когда число разорвавшихся и покинувших сечение волокон, а также число скользящих волокон становится достаточно большим.

Момент, когда сила сопротивления начинает убывать, определяет предел прочности пряжи и начало ее разрыва. Начиная с этого момента, картина деформации качественно меняется: если раньше деформация пряжи распределялась по всем сечениям пряжи, то теперь она локализуется в окрестности данного «слабого» сечения. Это, в свою очередь, вызывает значительное увеличение смещения скользящих волокон и деформацию растягивающихся и еще не скользящих и не разорвавшихся волокон. В результате число разрывающихся волокон и покинувших сечение волокон резко возрастает, пряжа утоняется в данном сечении, силы трения и сопротивления уменьшаются, что способствует скольжению волокон и уменьшению силы сопротивления. Таким образом, возникает лавинообразный процесс разрушения образца пряжи в данном сечении, что, по существу, и означает разрыв пряжи в рассматриваемом сечении.

В соответствии с этими представлениями имитация растяжения и разрыва пряжи состоит из последовательности этапов с нарастающей величиной растяжения пряжи (на t - этапе абсолютное удлинение пряжи составит

$\Delta = t\delta$, где δ - приращение удлинения). На каждом этапе для каждого волокна, пересекающего рассматриваемое сечение пряжи, выполняются следующие операции: определяется деформация волокна; оцениваются величины упругой силы F_f , развивающейся в волокне, и силы трения F_T волокна о соседние волокна; эти силы сравниваются между собой и с прочностью волокна P_s ; на основании сравнения определяется судьба волокна на данном этапе растяжения пряжи: оно может растягиваться без смещения всего волокна в целом относительно сечения («растяжение волокна»); скользить, т.е. смещаться относительно сечения (с частичным растяжением); и, наконец, разорваться. Условие растяжения: $F_f < F_T$ и $F_f < P_s$. Условие скольжения: $F_T < F_f$ и $F_T < P_s$. Условие разрыва: $P_s < F_f$ и $P_s < F_T$.

После определения судьбы рассматриваемого волокна вычисляется его вклад в силу сопротивления пряжи растяжению для данного сечения: $\Delta P = \min(P_s, F_f, F_T)$ и производится преобразование значений параметров волокна: длины l , удлинения ε , смещения x относительно сечения, расстояния от оси R , крутки K .

Если обнаруживается, что волокно скользит, то необходимо проверить, не вышло ли оно из рассматриваемого сечения. При $|x| > l/2$ волокно покинуло сечение и исключается из дальнейшего рассмотрения как не участвующее в создании прочности пряжи в данном сечении (x – координата середины волокна относительно сечения, измеренная вдоль оси пряжи).

Разорвавшееся волокно также исключается из дальнейшего рассмотрения.

После выполнения указанных операций со всеми волокнами вычисляется сила сопротивления пряжи растяжению по формуле:

$$P = \sum_{i=1}^n \min(P_{si}, F_{fi}, F_{Ti})$$

где n – число оставшихся к началу данного этапа волокон в сечении.

Затем выполняется коррекция значений коэффициентов трения μ , поперечного сжатия ν и силы сцепления F_0 . Поскольку часть волокон могла покинуть сечение или разорваться, то число оставшихся волокон в сечении уменьшается, площадь контактов между ними уменьшается, что и ведет к уменьшению эффективных значений указанных величин.

Значение силы P сравнивается с ее значением на предыдущем этапе. Если обнаруживается ее убывание, то согласно развитым ранее представлениям это свидетельствует о начале разрыва пряжи в данном сечении. При этом вся деформация локализуется в окрестности данного сечения длиной l_{max} , и в дальнейшем величина относительного удлинения равна для рассматриваемого сечения на каждом этапе не δ/H , а δ/l_{max} , где H – длина исследуемого образца пряжи. Тем самым скорость деформации суще-

ственно нарастает, и происходит имитация разрыва пряжи.

Приведем используемые в алгоритме обозначения:

N – число волокон в рассматриваемом поперечном сечении пряжи.

l_i^0, l_i – начальная и текущая длина i -го волокна, мм.

K_i^0, K_i – начальная и текущая величина кручения i -го волокна, кр/м.

R_i^0, R_i – начальное и текущее значения расстояния i -го волокна от оси пряжи, мм.

S_i^0, S_i – начальная и текущая площади поперечного сечения i -го волокна, мм².

X_i^0, X_i – начальное и текущее расстояния от середины i -го волокна до рассматриваемого сечения, измеренное вдоль оси пряжи.

P_{oi} – прочность i -го волокна, гс.

F_0^0, F_0 – начальное и текущее значения силы сцепления волокна на единицу длины волокна, сН/мм.

μ^0, μ – начальное и текущее значения коэффициента трения волокон.

ν^0, ν – начальное и текущее значения коэффициента поперечного сжатия пряжи при ее растяжении.

H – длина испытываемого образца пряжи, мм.

Δ – абсолютная величина удлинения пряжи, мм.

T – номер этапа растяжения, $t = 0, 1, 2, \dots$

P – сила сопротивления пряжи растяжению на t -м этапе, сН.

P^- – сила сопротивления пряжи растяжению на $t-1$ -м этапе, сН.

P^+ – сила сопротивления пряжи растяжению на $t-2$ -м этапе, сН.

δ – приращение абсолютной величины удлинения пряжи на t -м этапе, мм.

n_e – число разорвавшихся волокон из числа волокон, пересекающих рассматриваемое сечение, к концу t -го этапа.

n_f – число растягивающихся волокон на t -м этапе.

n_s – число скользящих на t -м этапе.

n_d – число волокон, ушедших из рассматриваемого сечения к концу t -го этапа.

$F_{\text{пр}}, F_{\text{тр}}$ – сила упругости и сила трения, действующие на i -е волокно, сН.

ε_H – относительное удлинение пряжи вдоль оси пряжи к концу t -го этапа.

ε_i – относительное удлинение i -го волокна к концу t -го этапа растяжения.

l_{max} – протяженность участка пряжи в окрестности рассматриваемого сечения, на котором локализуется разрыв пряжи, мм.

n_d – число скользящих и не покидающих рассматриваемое сечение волокон на t -м этапе.

Алгоритм имитации растяжения и разрыва пряжи

Алгоритм А1.15

1. Вычисление основных параметров пряжи: радиуса R_{np} (формула (1.71)); крутки

$K = \alpha_T / \sqrt{T_{np}}$; среднего числа волокон в сечении $\bar{n} = T_{np} / T_b$, где T_b – текс вол-

локна; усадки пряжи (формула (1.69)).

2. Генерация n .
3. Для $i = 1, \dots, n$: генерация $l_i^0, P_{ei}, S_i^0, R_i^0, X_i^0, K_i^0$ – начальных значений параметров i -го волокна.
4. Для $i = 1, \dots, n$: $l_i = l_i^0, S_i = S_i^0, R_i = R_i^0, X_i = X_i^0, K_i = K_i^0$ – присвоение текущим значениям параметров волокон их начальных значений.
5. $F_0 = F_0^0, \mu = \mu^0, \nu = \nu^0$ – присвоение текущим значениям удельной силы сцепления, коэффициента трения и коэффициента поперечного сжатия их начальных значений.
6. Для $i = 1, \dots, n$ вычисляется ε_{i2} для каждого i -го волокна по правилу (1.66).
7. $P^* = 0; P^* = 0; n_e = 0; n_e = 0; \Delta = 0$ – присвоение начальных значений силе сопротивления пряди растяжению, счетчикам числа разорвавшихся m ушедших из сечения волокон, величине абсолютного удлинения пряди; $t = 0$.
8. Начало имитации этапа растяжения пряди на величину δ .
 - 8.1. $P = 0; n_f = 0; \Delta = \Delta + \delta; \varepsilon_h = \Delta/H; t = t + 1; c = (n - n_e - n_e)/n$.
 - 8.2. Контроль момента начала разрыва: при $P < P^*$ выполнить $\mu = c\mu^0; F_0 = cF_0^0; \nu = c\nu^0; \varepsilon_h = \Delta(n_d + n_j)/(Hn_d + l_{max}n_j)$ – коррекция коэффициентов трения, поперечного сжатия, силы сцепления и относительной деформации пряди в окрестности рассматриваемого сечения (длиной l_{max}) при условии начала разрыва.
 - 8.3. Для $i = 1, \dots, n$ выполнить пп.8.4 – 8.16.
 - 8.4. Проверка отсутствия номера i в списке номеров волокон, ушедших из рассматриваемого сечения или разорвавшихся на предыдущих этапах растяжения. При обнаружении номера i в списке – переход к п.8.16.
 - 8.5. $Y = l_i/2 - |x_i|$ – вычисление возможной длины скольжения i -го волокна.
 - 8.6. Проверка выхода i -го волокна из сечения: при $Y \leq 0$ – номер i включается в список номеров волокон, покинувших сечение. Переход к п.8.14.3
 - 8.7. При $P < P^*$: $Y = cY$ – коррекция длины скольжения (длины участка действия сил сопротивления скольжению) при начале разрыва.
 - 8.8. Вычисление $\rho_i, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_i$ по формулам (1.61), (1.65) и (1.64).
 - 8.9. Вычисление $F_f = S_i \varphi^{-1}(\varepsilon_i)$, где $\varphi^{-1}(\varepsilon_i)$ – функция, обратная функции (1.57).
 - 8.10. $F_f = F_f - S_i^0 \varphi^{-1}(\varepsilon_i)$ при $\varepsilon_{i2} > 0$ – коррекция силы F_f с учетом начального удлинения i -го волокна при кручении пряди.
 - 8.11. Вычисление F_{T1} по формулам (1.60) и (1.62) с учетом формулы (1.61).
 - 8.12. Определение характера деформации i -го волокна. При $F_f < F_{T1}$ и $F_f < P_{ei}$ – “растяжение”. Переход к п.8.13. При $F_{T1} < F_f$ и $F_{T1} < P_{ei}$ – “скольжение”. Переход к п.8.14. При $P_{ei} < F_f$ и $P_{ei} < F_{T1}$ – “разрыв”. Переход к п.8.15.
 - 8.13. “Растяжение” i -го волокна: $l_i = l_i^0(1+\varepsilon_i); X_i = X_i^0(1+\varepsilon_i); R_i = R_i^0(1-\nu\varepsilon_i); K_i = K_i^0/(1+\varepsilon_i); n_f = n_f + 1; P = P + F_f$. Переход к п.8.16.
 - 8.14. “Скольжение” i -го волокна:
 - 8.14.1. При $P < P^*$: $X_i = X_i + \delta \cdot \text{sign}(X_i)$; при $P \geq P^*$: $X_i = X_i^0(1+\varepsilon_i); R_i = R_i^0(1-\nu\varepsilon_i)$
 - 8.14.2. Проверка выхода i -го волокна из сечения: $\varepsilon = \varphi(F_{T1}/S_i)$ – растяжение волокна под действием силы сопротивления скольжению F_{T1} ; $l_i = l_i^0(1+\varepsilon)$ – удлинение волокна до начала скольжения. При $|X_i| > X_i/2$ волокно можно считать вышедшим из рассматриваемого сечения (расстояние от середины волокна до сечения превысило половину длины волокна) и его номер i включается в список волокон, покинувших сечение. В противном случае i -с волокно остается в сечении. Тогда: $n_d = n_d + 1; K_i = K_i^0/(1+\varepsilon_i)$.
 - 8.14.3. $n_s = n_s + 1; n_e = n_e + n_s - n_d; P = P + F_{T1}$. Переход к п.8.16.
 - 8.15. “Разрыв” i -го волокна: $n_e = n_e + 1; P = P + P_{ei}$. Номер волокна включается в список номеров разорвавшихся волокон.
 - 8.16. При $i < n$ переход к п.8.4.

- 8.17. «Запоминание» силы сопротивления пряжи растяжению на t -м этапе: $P^+ = P^-$; $P^- = P$. «Запоминание» представляющих интерес значений показателей на t -м этапе.
- 8.18. При $n_e + n_g < n$ – переход к п.8, иначе – останов.

В п.8.2 выполнение условия $P^- < P^+$ означает, что сила сопротивления растяжению пряжи на предыдущем этапе была больше, чем на данном этапе, т.е. сопротивление пряжи растяжению в данном сечении начинает уменьшаться, что свидетельствует о начале разрыва пряжи в этом сечении. При этом, как уже отмечалось, происходит локализация всей абсолютной деформации пряжи δ в окрестности данного сечения. В качестве длины этой окрестности l_{max} принята удвоенная средняя длина волокна: $l_{max} = 2\bar{l}$. Указанная локализация деформации учитывается формулой коррекции ϵ_n в п.8.2.

Начало разрыва сопровождается также существенным уменьшением площади контакта между волокнами, что ведет к уменьшению эффективных значений коэффициентов трения, силы сцепления и коэффициента поперечного сжатия пряжи. Точная величина уменьшения этих параметров неизвестна, но можно предположить, что она тем больше, чем меньше волокон осталось в сечении. В соответствии с этим предположением и построен корректировочный множитель s .

В п.8.14.2 при проверке выхода волокна из сечения вычисляется длина волокна l_n , до которой оно удлиняется под действием силы сопротивления скольжению, действующей на рассматриваемое волокно со стороны окружающих волокон вследствие трения и сцепления между ними.

При имитации растяжения и разрыва пряжи из смеси двух типов разнородных волокон (например, хлопка и вискозных волокон) алгоритм имитационной модели модифицируется.

В п.1 определяется среднее число волокон в сечении для каждого из компонентов смеси пропорционально их долям β_1 и β_2 (по числу волокон):

$$n_1 = \beta_1 \bar{n} \quad (1.72)$$

$$n_2 = \beta_2 \bar{n} \quad (1.73)$$

Здесь $\beta_1 + \beta_2 = 1$, \bar{n} – среднее число волокон в сечении. Значение \bar{n} определяется по формуле $\bar{n} = T_{np}/T_{см}$, где $T_{см} = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$ – среднее значение толщины волокон смеси, в текст, составленной из волокон 1-го компонента с толщиной T_1 и из волокон 2-го компонента с толщиной T_2 , а T_{np} – толщина пряжи, α_1, α_2 – доли компонентов (по массе).

В п.2 производится генерация значений n_1 и n_2 – числа волокон в сечении для каждого из компонентов. В п.3 начальные значения параметров i -го волокна генерируются в соответствии с законом распределения и его числовыми характеристиками, соответствующими тому компоненту, которому принадлежит i -е волокно. Предполагается, что, например, все воло-

на с номерами от $i = 1$ до $i = n_1$ принадлежат 1-му компоненту, а с номерами от $i = 1 + n_1$ до $i = n_1 + n_2 = n$ принадлежат 2-му компоненту.

В п.5 значения F_0^0 и μ^0 определяются в соответствии с их значениями F_1^0 ; F_2^0 и μ_1^0 , μ_2^0 для каждого из компонентов. Поскольку волокна разных компонентов при условии их хорошего перемешивания распределены в сечении равномерно, то любое из волокон в сечении будет взаимодействовать с другими волокнами, среди которых число волокон 1-го компонента в среднем пропорционально числу n_1 в сечении, а число волокон 2-го компонента в среднем пропорционально числу n_2 . Поэтому в качестве F_0^0 и μ^0 выбираются их средневзвешенные значения:

$$F_0^0 = (n_1 F_1^0 + n_2 F_2^0) / n \quad (1.74)$$

$$\mu_0^0 = (n_1 \mu_1^0 + n_2 \mu_2^0) / n \quad (1.75)$$

При исследовании влияния эффективности перемешивания на прочностные свойства пряжи правило определения F_0^0 и μ^0 будет отличаться от (1.74) и (1.75).

В п.8.1 при вычислении корректирующего коэффициента c и в п.8.2 при коррекции значений μ и F_0 необходимо учитывать отдельно изменение числа волокон различных групп (растягивающихся, скользящих, разорвавшихся, ушедших) для каждого из компонентов. Поэтому в пп.7 и 8.1 вводятся счетчики n_{f1} , n_{f2} , n_{b1} , n_{b2} , n_{s1} , n_{s2} , n_{e1} , n_{e2} по каждой группе волокон и по каждому компоненту.

В пп.8.9, 8.10 и 8.14.2 используются функции $\varphi(\sigma)$ и $\varphi^{-1}(\epsilon)$, специфичные для того компонента, к которому принадлежит i -е волокно.

Кроме того, во всех пунктах алгоритма, где происходит изменение значений счетчиков и накопление различных представляющих интерес показателей – результатов моделирования, эти операции выполняются отдельно по каждому из компонентов. Тем самым оказывается возможным накапливать информацию о поведении каждого из компонентов и его роли при растяжении и разрыве пряжи.

В зависимости от особенностей генерации параметров волокон в п.3, оказывается возможным исследовать пряжу различной структуры. Рассмотрим два наиболее распространенных вида пряжи: кольцевого и пневмомеханического способов прядения.

1. Пряжа кольцевого способа прядения (КСП). Учитывая однородность строения этого вида пряжи, можно считать, что параметры любого волокна в сечении имеют распределения, не зависящие от его расположения в этом сечении. Для такой пряжи значения l_i^0 , P_{oi} , S_i^0 , K_i^0 генерируются независимыми от R_i^0 и X_i^0 , и законы распределения этих параметров одинаковы для всех волокон сечения. Для пряжи КСП сказанное выполняется с учетом различий по компонентам, описанным выше.

2. **Пряжа пневмомеханического способа прядения.** Пряжа этого типа, как известно, обладает рядом структурных особенностей: повышенная неоднородность волокон по крутке; зависимость средней крутки волокон и ее вариации от удаленности волокон от оси пряжи; высокая степень миграции волокон; отличие формы поперечного сечения от круга; наличие обвивочных волокон, практически не участвующих в создании прочности пряжи.

В определенной степени указанные особенности могут быть учтены в модели: при генерации K_i^0 среднее значение \bar{K} и коэффициент вариации Sk для закона распределения K_i^0 задаются в зависимости от уже сгенерированного значения R_i^0 – расстояния i -го волокна от оси пряжи. При $R_i^0 > K_{об}R_{пр}$ (зона обвивочных волокон) значения \bar{K} близки к нулю, а Sk существенно больше, чем у волокон «стержня» пряжи. Роль обвивочных волокон в прочностных свойствах пряжи учитывается путем существенного снижения значений F_0^0 и μ^0 для обвивочных волокон, т.е. при $R_i^0 > K_{об}R_{пр}$.

Для ускорения исследований и автоматизации работы с моделью был разработан автоматизированный моделирующий комплекс (АМК), структура которого представлена на рис.1.56. Назначение его блоков понятно из их названия.

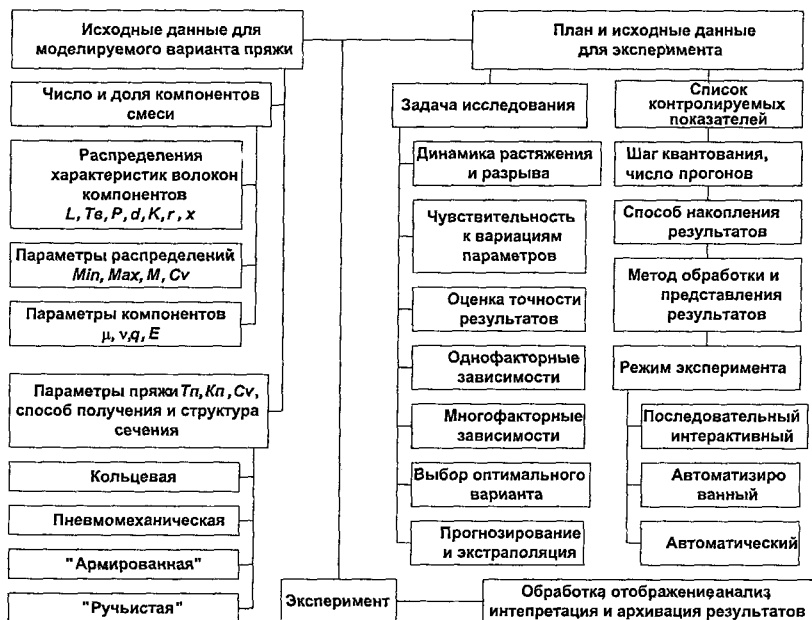


Рис.1.56. Структура автоматизированного моделирующего комплекса для моделирования испытаний пряжи различной структуры

Пример работы модели иллюстрирует рис.1.57. Приведена диаграмма развития процесса растяжения пряжи вплоть до разрыва. Показано из-

менение силы сопротивления пряжи растяжению P , ее составляющие P_e , P_s , P_b , зависящие соответственно от растягивающихся, скользящих и разрывающихся волокон, числа волокон: K_e – растягивающихся, K_s – скользящих, K_b – разорвавшихся, K_o – оставшихся в сечении. Очевидно, что только компьютерное имитационное моделирование, воспроизводящее процесс растяжения и разрыва, позволяет получать подобную информацию.

АМК позволяет проводить различные компьютерные эксперименты с моделью и тем самым исследовать влияние различных факторов на динамику растяжения и разрыва пряжи. В качестве примера приведем результаты сравнительных испытаний на модели пряжи кольцевого способа прядения из хлопковых и вискозных волокон и их смеси. Основные показатели для волокон и пряжи, использованные при моделировании, указаны в табл.1.10.

Как видно из таблицы, основное различие между волокнами, учтенное при моделировании, заключается в коэффициентах вариации по длине, тонине, разрывной нагрузке, средней разрывной нагрузке, модуле упругости. Моделировались растяжение и разрыв пряжи из 100% хлопка (вар.1), из 100% вискозного волокна (вар.3) и смеси 50% хлопка и 50% вискозных волокон (вар.2). Для каждого варианта выполнено по 50 повторных прогонов модели, что позволило оценить относительную среднеквадратическую ошибку результатов S_v . Динамика растяжения для вариантов 1,2 и 3 представлена на рис.2а,б,в. В табл.1.11 приведены усредненные по повторным прогонам оценки величин относительной разрывной нагрузки и относительного удлинения и коэффициенты вариации этих оценок.

Таблица 1.10

Показатель	Хлопок	Вискозное волокно
Средняя штапельная длина, мм	28,5	38,5
Коэффициент вариации длины, %	20,0	1,0
Средняя тонина волокна, мм ²	0,00011	0,00011
Коэффициент вариации тонины, %	30,0	5,0
Средняя абсолютная разрывная нагрузка волокна, сН	5,7	3,8
Коэффициент вариации средней разрывной нагрузки, %	26,0	12,0
Среднее разрывное удлинение волокна, %	5,5	8,5
Коэффициент вариации разрывного удлинения волокна, %	25,0	15,0
Модуль упругости,	500	200
Коэффициент трения	0,28	0,24
Коэффициент сцепкости волокон	0,01	0,002
Линейная плотность пряжи, текс	15,4	
Коэффициент вариации линейной плотности пряжи, %	18%	
Зажимная длина отрезка, мм	500	

Как видно из таблицы, основное различие между волокнами, учтенное при моделировании, заключается в коэффициентах вариации по длине, тонине, разрывной нагрузке, средней разрывной нагрузке, модуле упруго-

сти. Моделировались растяжение и разрыв пряжи из 100% хлопка (вар.1), из 100% вискозного волокна (вар.3) и смеси 50% хлопка и 50% вискозных волокон (вар.2). Для каждого варианта выполнено по 50 повторных прогонов модели, что позволило оценить относительную среднеквадратическую ошибку результатов S_v . Динамика растяжения для вариантов 1,2 и 3 представлена на рис.1.57а,б,в. В табл.1.11 приведены усредненные по повторным прогонам оценки величин относительной разрывной нагрузки и относительного удлинения и коэффициенты вариации этих оценок.

Таблица 1.11

Показатель	100% хлопка	50% хлопка + + 50% виск.	100% виск. вол-на
(Pmax) Ср.разр.нагр., сН	181,2	128,3	79,2
S_v Pmax, %	17,5	20,1	26,0
(Emax) Ср.отн.разр. удл., %	4,36	4,54	4,87
S_v Emax, %	16,3	18,2	22,7

Результаты моделирования показывают, что заложенные в модель различия свойств волокон незначительно сказываются на динамике растяжения и разрыва, но заметно проявляют себя в значениях средних разрывных нагрузках и удлинениях.

1.6. Одномерное движение волокна в поле сил трения при циклических деформациях

Рассматривается распрямленное волокно, находящееся в окружении других волокон в одномерном волокнистом продукте типа ленты, ровницы, нити, пряжи. Волокно взаимодействует с окружающими его аналогичными волокнами посредством сил трения.

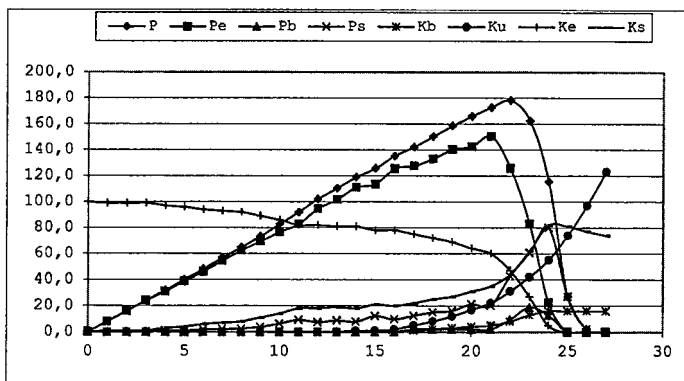
Один конец отрезка продукта (образца) зафиксирован в неподвижном зажиме. Другой конец находится в подвижном зажиме и перемещается по заданному закону.

Для описания движения волокна разделим его на отдельные участки. Число участков обозначим через Nx . Протяженность участка будет равна $dl = L / Nx$, где L - протяженность волокна вдоль оси образца продукта.

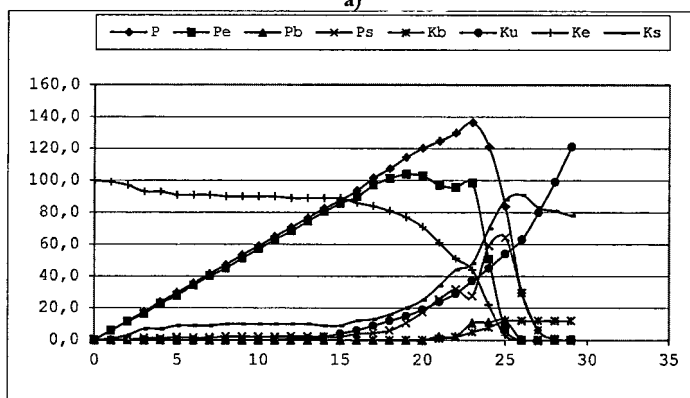
Рассмотрим движение волокна в течение времени Tm . Для численного моделирования разделим этот интервал времени на Nt дискрет продолжительностью $dt = Tm / Nt$, и введем дискретную переменную $t = 0, 1, 2, \dots, Nt$ для задания моментов времени $0 \leq t \cdot dt \leq Tm$.

Положение волокна на оси образца будем определять Nx точками с координатами $l(x) = x \cdot dl$, $x = 1, 2, \dots, Nx$. Смещения этих точек относительно их начального положения в момент времени t обозначим через $u(x, t)$. Для участка волокна x запишем уравнение движения в виде

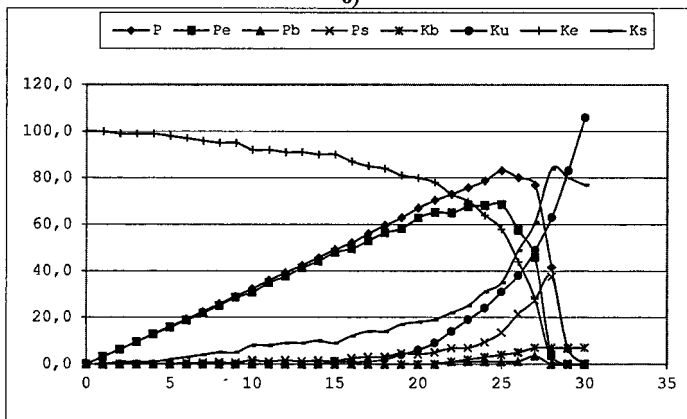
$$rdl \frac{dv(x,t)}{dt} = Fe(x,t) + Ff(x,t) \quad (1.76)$$



а)



б)



в)

Рис.1.57. а),б),в) Пример работы модели имитации растяжения и разрыва пряжи

Здесь r – линейная плотность волокна на участке x , $v(x,t)$ – скорость участка вдоль оси образца в момент t , Fe и Ff – соответственно силы упругого взаимодействия рассматриваемого участка волокна с соседними участками того же волокна и взаимодействия участка с окружающими его волокнами. Сила Fe равна

$$Fe(x,t) = -k(x-1,x)(u(x,t) - u(x-1,t)) - k(x,x+1)(u(x,t) - u(x+1,t)) \quad (1.77)$$

В этом выражении предполагается, что сила упругости пропорциональна смещению $u(x,t)$ участков волокна относительно друг друга, направлена в сторону, противоположную смещению рассматриваемого участка x , а коэффициент пропорциональности k – разный для разных пар взаимодействующих участков. В простейшем случае его можно считать одинаковым для всех участков волокна. Он связан с модулем упругости E материала волокна (модулем Юнга) формулой

$$k = ES/dl \quad (1.78)$$

где S – площадь поперечного сечения волокна.

Сила трения участка волокна о соседние волокна Ff является нелинейной функцией ряда факторов. К ним относятся: сила нормального давления Ns , действующая между боковыми поверхностями волокон; коэффициент трения, зависящий от скорости смещения участка волокна $v(x,t)$ относительно окружающих его волокон; направление суммарной упругой силы, действующей на участок волокна. Одна из распространенных формул, выражающих эту зависимость, имеет вид

$$Ff(x,t) = \begin{cases} -Fe(x,t), & \text{если } |Fe(x,t)| < \mu Ns(x,t) \\ -\mu \cdot Ns(x,t) \frac{\text{sign}(Fe(x,t))}{1 + \frac{v(x,t)}{V(x,t)}}, & \text{если } |Fe(x,t)| > \mu \cdot Ns(x,t) \end{cases} \quad (1.79)$$

Здесь μ – коэффициент трения скольжения поверхностей волокон, V – скорость движения волокон в образце в окрестности сечения x рассматриваемого волокна в момент t .

Переход к конечным разностям с использованием метода Эйлера для решения системы дифференциальных уравнений (1.76), включая соотношения (1.77) и (1.79), приводит к системе рекуррентных соотношений

$$a(x,t+1) = a(x,t) + \frac{dt}{rdl} (Fe(x,t) + Ff(x,t)) \quad (1.80)$$

$$v(x,t+1) = v(x,t) + a(x,t)dt \quad (1.81)$$

$$u(x+1,t) = u(x,t) + v(x,t)dt + a(x,t)(dt)^2/2 \quad (1.82)$$

$$Fe(x,t) = -k(u(x,t) - u(x-1,t)) - k(u(x,t) - u(x+1,t)) \quad (1.83)$$

Уравнения (1.79) - (1.83) решались совместно для $x = 1, \dots, Nx$ и $t = 1, \dots, Nt$. В качестве начальных условий было принято, что в момент вре-

мени $t = 0$ смещения всех участков волокна равны нулю: $u(x,0) = 0$.

В качестве граничного условия было принято, что первый участок волокна $x = 1$ под действием подвижного зажима принудительно перемещается, причем эти перемещения складываются из монотонного поступательного движения с постоянной скоростью и гармонических колебаний малой амплитуды

$$u(1,t) = A_p \frac{tdt}{T_m} + A_s \sin\left(\frac{2\pi t dt}{T_s}\right), \quad t = 0, \dots, Nt \quad (1.84)$$

Поскольку граничное условие задавалось для $x = 1$, а остальные x положительные, то растяжения волокна и образца амплитуды A_p и A_s имели отрицательные знаки.

При решении системы (1.79) - (1.83) использованы следующие значения параметров: $Nx = 50$; $Nt = 20000$; $dt = 0.002$; $L = 50$; $k = 100$; $\mu = 0.27$; $r = 1$; $Ns = 5$; $Ts = Tm/30$; $A_p = -10$; $A_s = -1$. Абсолютные смещения участков волокна вычислялись по формуле

$$l(x,t) = l(x,0) + u(x,t) \quad (1.85)$$

На рис.1.58 показаны траектории движения (координаты вдоль оси продукта $l(x,t)$) некоторых участков волокна (номера показанных участков: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46).

Очевидно, что на характер решения существенное влияние оказывает величина наибольшей силы трения покоя Ns . При увеличении ее значения до $Ns = 100$ характер смещения участков волокна существенно меняется (рис.1.59).

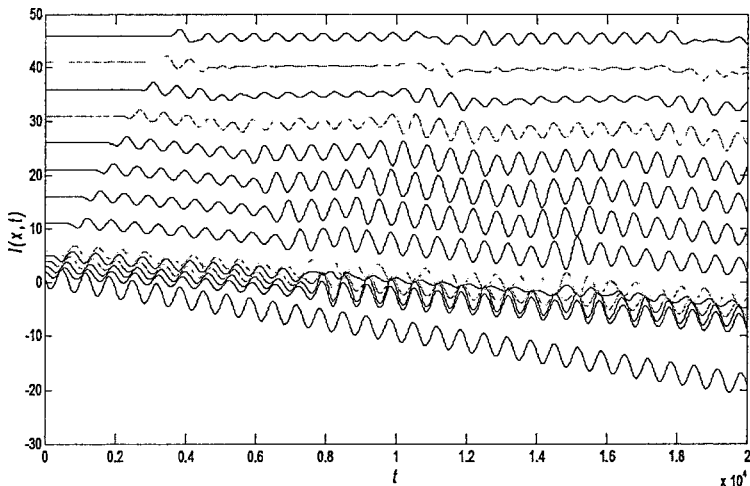


Рис.1.58. $Ns = 5$

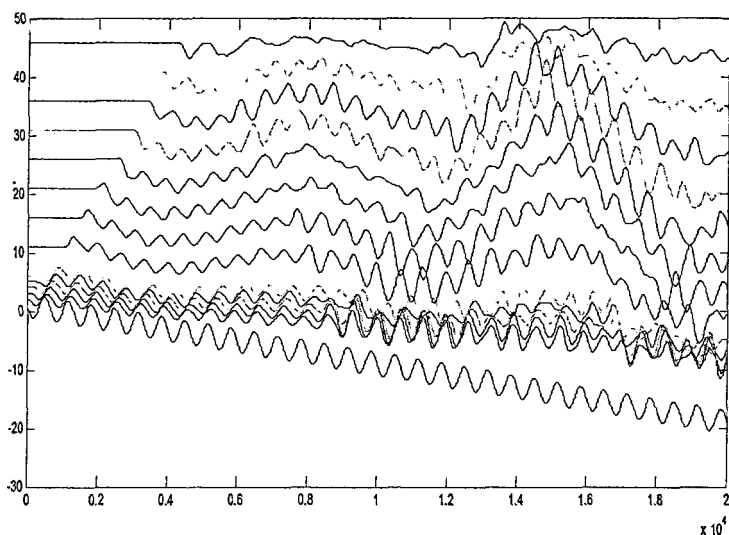


Рис.1.59. $N_s = 50$

На рис.1.58–1.65 наглядно видно, как с возрастанием силы трения покоя N_s возрастает хаотичность и неоднородность движения отдельных участков волокна в среде с «сухим» трением. Интересно отметить, что аналогичными уравнениями пользуются в теории геологических пластов для моделирования и прогнозирования землетрясений и цунами.

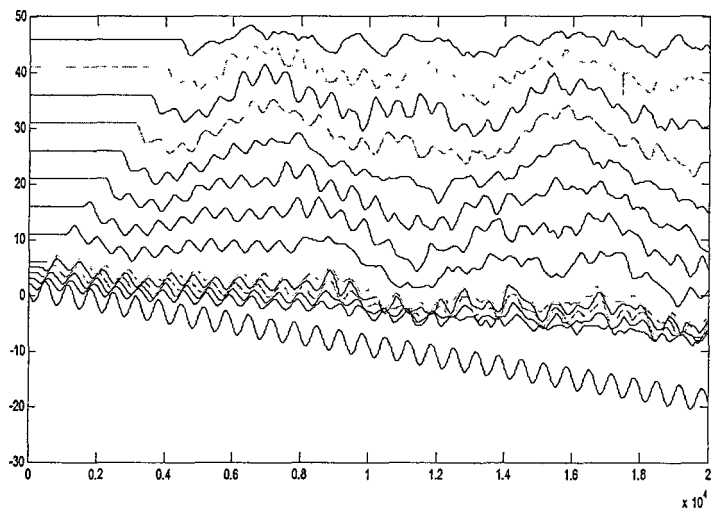


Рис.1.60. $N_s = 70$

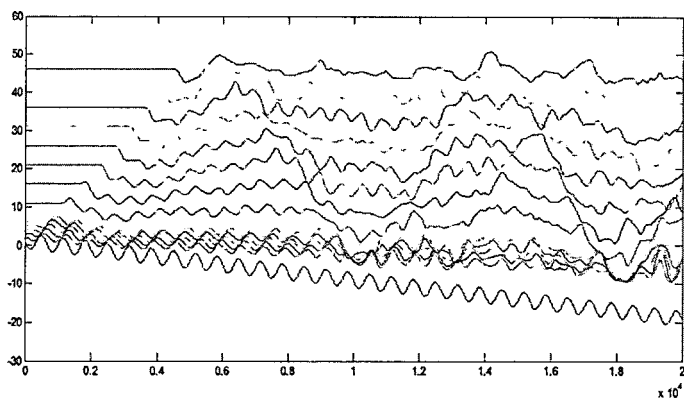


Рис.1.61. $N_s = 80$

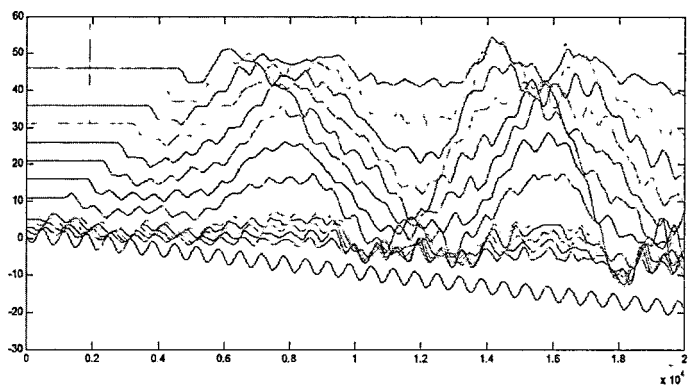


Рис.1.62. $N_s = 90$

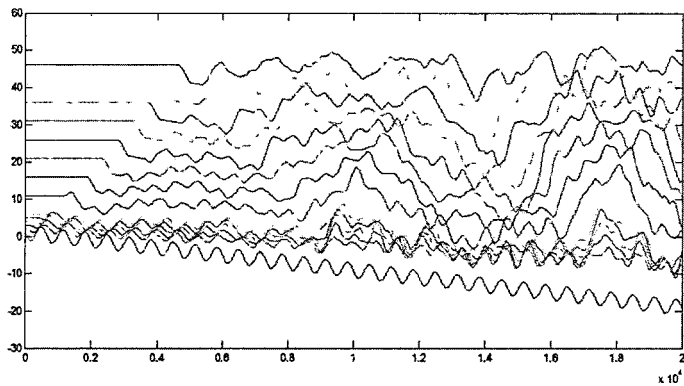


Рис.1.63. $N_s = 100$

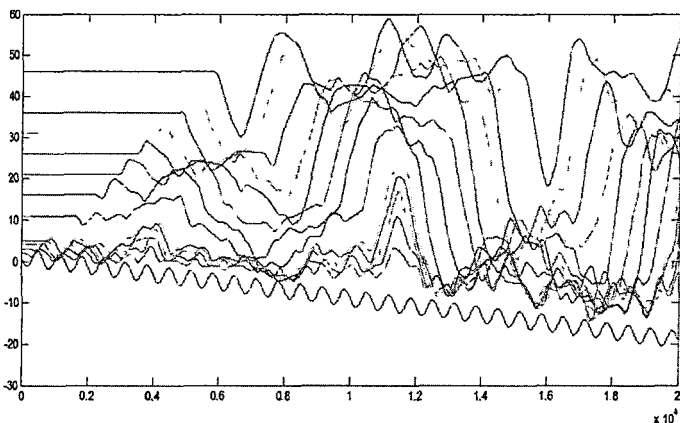


Рис.1.64. $N_s = 200$

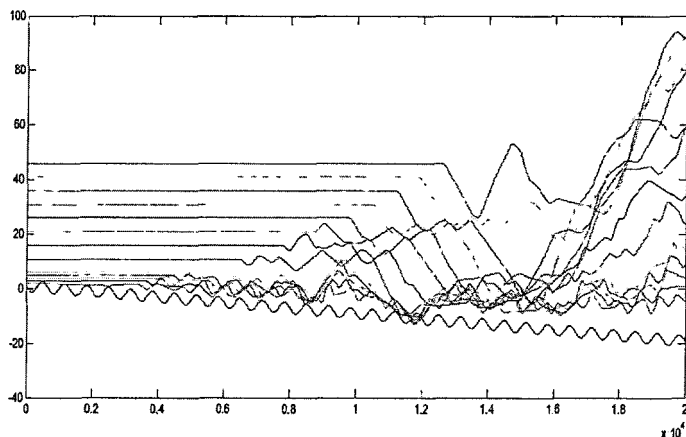


Рис.1.65. $N_s = 500$

1.7. Трибомеханическая статистическая модель волокна в одномерном волокнистом продукте

Поведение волокна в одномерном продукте (ленте, ровнице, пряже) при механических деформациях продукта существенно для многих научных и прикладных задач. Принципиально важная особенность, выделяющая эту задачу в особый класс среди многих задач механики, состоит в том, что волокно в продукте взаимодействует с окружающей его массой других волокон только посредством сил "сухого" трения, причем это взаимодействие носит статистический характер ввиду значительного случайного разброса всех параметров волокна и взаимодействия. Описываемая здесь модель является результатом и продолжением цикла работ в области

трибомеханики волокон. Здесь предложена модель поведения волокна в одномерном продукте под действием продольных деформаций.

Приведем основные допущения, принятые в модели. Все перемещения и деформации происходят вдоль оси X продукта. Рассматриваемое волокно извито. Поэтому его протяженность L_p по оси X меньше его длины L . Волокно взаимодействует с окружающими его волокнами не по всей своей длине, а на случайном числе K участков, которые имеют случайное положение и протяженность $L_k, k=1, \dots, K$ относительно концов волокна. Напряженность поля сил нормального давления, действующих на участках взаимодействия, и коэффициент трения являются случайными величинами с заданными средними N_{sr}, μ_{sr} и коэффициентами вариации CV_N, CV_μ . Силы трения описываются законом Амонтона - Кулона. Сила трения направлена в сторону, противоположную смещению участка волокна относительно окружающей его на данном участке массы волокон. Считаем, что волокно находится в образце продукта длиной L_0 , зажатого в неподвижный (А) и подвижный (В) зажимы, с помощью которых образцу придается продольная растягивающая деформация (рис.1.66). Часть окружающей массы движется в сторону подвижного зажима, другая часть – в сторону неподвижного зажима относительно рассматриваемого волокна. Волокно реагирует на действие приложенных к нему сил трения либо перемещением, либо деформацией растяжения – сжатия вдоль оси X , величина которой определяется на участках волокна небольшой протяженности законом Гука с модулем упругости E при случайном поперечном сечении волокна S .

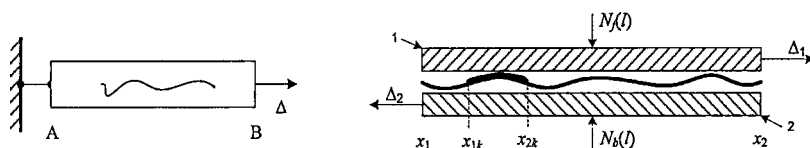


Рис.1.66. Модель движения и удлинения волокна в поле сил "сухого" трения

Алгоритм, моделирующий движение и растяжение волокна, включает следующие этапы.

Алгоритм А.1.15

1. Генерация значений случайных величин $L, L_p, K, L_k, N_k, \mu_k, S_k$, координат концов x_1 и x_2 проекции волокна на X , координат концов участков трения x_{1k} и $x_{2k}, k=1, \dots, K$.
2. Генерация поля сил нормального давления на участки волокна, расчет максимальной силы трения на участке взаимодействия волокна с окружающими волокнами.
3. Задание перемещения подвижного зажима Δ , растягивающего образец, и пересчет его величины на начальные координаты волокна x_1 и x_2 .
4. Вычисление величины и направления продольной деформации участков по всей протяженности волокна или их перемещения вдоль оси X с учетом возможного проскальзывания, если силы упругости на участке достигают значения максимальной силы трения.

5. Расчет и накопление в массивах основных характеристик поведения волокна по его протяженности: относительной деформации $\epsilon(x)$, смещения $u(x)$, участков скольжения и растяжения.

Работа алгоритма проверена для одиночного волокна при следующих значениях параметров: $L_{psr} = 30$ мм, $K_{max} = 10$, $N_{sr} = 8 \cdot 10^{-2}$ Н·мм⁻¹, $\mu_{sr} = 0,27$, $\Delta = 3$ мм, $L_0 = 500$ мм, $E = 80000$ Н·мм². Законы распределения используемых случайных величин неизвестны. Поэтому они были выбраны из общих вероятностных представлений и законом (центральной предельной теоремы, закона больших чисел, схемы независимых испытаний и т.п.): для K – биномиальное распределение, для L_p , N и μ – нормальное распределение. Значения коэффициентов вариации принимались в диапазоне от 0,05 до 0,25.

На рис.1.67 приведены графики силы нормального давления $N(x)$, деформации $\epsilon(x)$ и смещения $u(x)$ по участкам трения волокна с окружающей волокнистой массой, полученные при условии, что все случайные величины, кроме участков трения, заменены их средними значениями.

При "включении" случайных величин (коэффициенты вариации случайных величин приняты равными 20%), те же характеристики, сохраняя найденную тенденцию изменения, включают в себя случайные вариации (рис.1.68).

Для получения статистически устойчивых результатов было выполнено $M = 1000$ -кратное повторение прогонов модели. Значения характеристик накапливались в массивах, которые затем были подвергнуты статистической обработке. Разброс величин смещения $u(x)$ отдельных точек волокна относительно своего исходного положения оказался настолько незначительным, что 95%-й доверительный интервал для этих смещений на графике практически совпал со средними значениями $u(x)$.

Построенная модель позволила разработать алгоритм моделирования реакции волокна во взаимодействии с окружающей его волокнистой массой одномерного продукта на циклические повторяющиеся удлинения. Тем самым была реализована модель поведения образца в испытательном приборе при циклических испытаниях.

Эта модель имитирует нагрузку, прикладываемую к образцу в результате перемещений подвижного зажима. Нагрузка заключается в циклическом повторении линейно нарастающих удлинений на величину Δ с последующим выстоем в течение фиксированного интервала времени. Циклические нагрузки повторяются, пока не произойдет разрушение образца вследствие прекращения взаимодействия образующих его волокон.

На рис.1.69 приведен график нарастания удлинения $\Delta(t)$ образца во времени, моделируемый в разработанном алгоритме. Это удлинение складывается из обратимой упруго - эластической составляющей $\Delta_u(t)$ и необратимой пластической составляющей $\Delta_p(t)$. Первая из этих составляющих с ростом продолжительности циклических нагрузок убывает, а вторая нарастает.

тает. На нижнем графике приведен в увеличенном масштабе фрагмент этих кривых для первых 10% всего времени испытаний. По оси абсцисс на графиках выводится время в долях от общего времени испытания до разрушения образца. По оси ординат – абсолютное удлинение образца в долях от максимального удлинения, достигаемого при разрушении образца. На рис.1.70 показана динамика изменения силы сопротивления образца циклическим удлинениям.

Сила сопротивления $F_{sr}(t)$ оценивалась как средняя по $M = 1000$ прогонам модели и была отнесена к одному волокну. Повторные прогоны модели позволили вычислить также 95%-е верхний $F_{max}(t)$ и нижний $F_{min}(t)$ пределы оценки среднего. На нижнем графике приведен в увеличенном масштабе фрагмент этих кривых для первых 10% всего времени испытаний. По оси абсцисс, как и на рис.1.69, отложено время в относительных единицах.

Предложенные компьютерные модели имитации поведения волокна в одномерном продукте при его удлинении учитывают нелинейный характер сил сухого трения и статистическую природу свойств волокна. Полученные статистически устойчивые оценки показателей описывают деформацию волокна и его взаимодействие с окружающей волокнистой массой. Модели позволили осуществить имитацию динамики удлинения образца продукта при циклически нарастающих удлинениях вплоть до разрушения образца, т.е. эффект усталостной прочности волокнистого продукта.

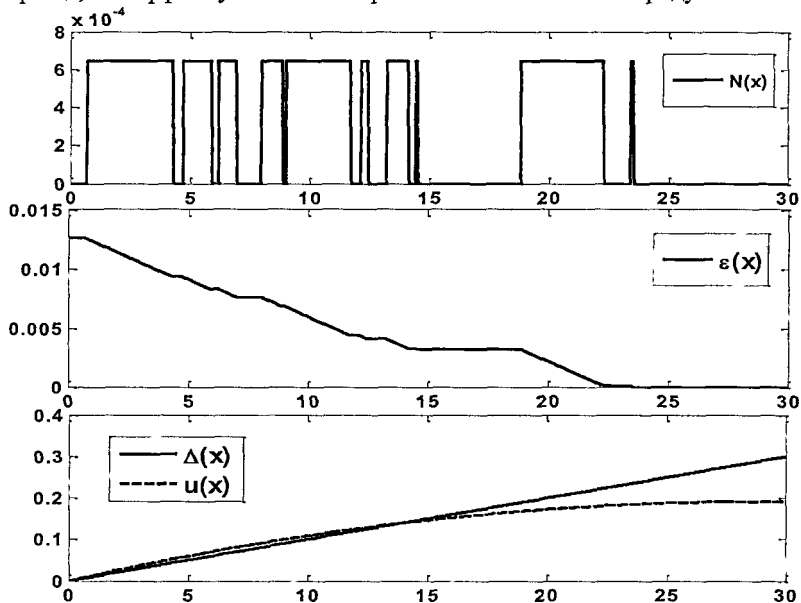


Рис.1.67. Распределение полей сил трения по длине волокна

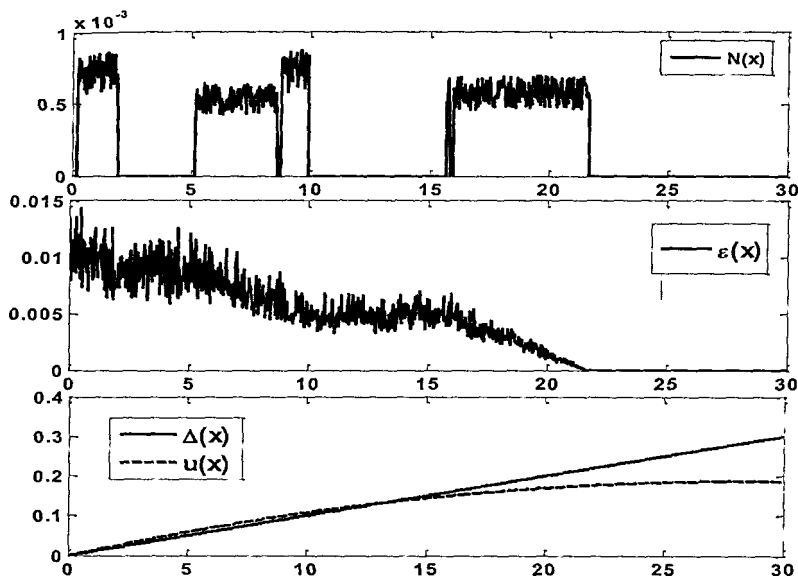


Рис.1.68. Натяжение, деформация и перемещение элементов волокна

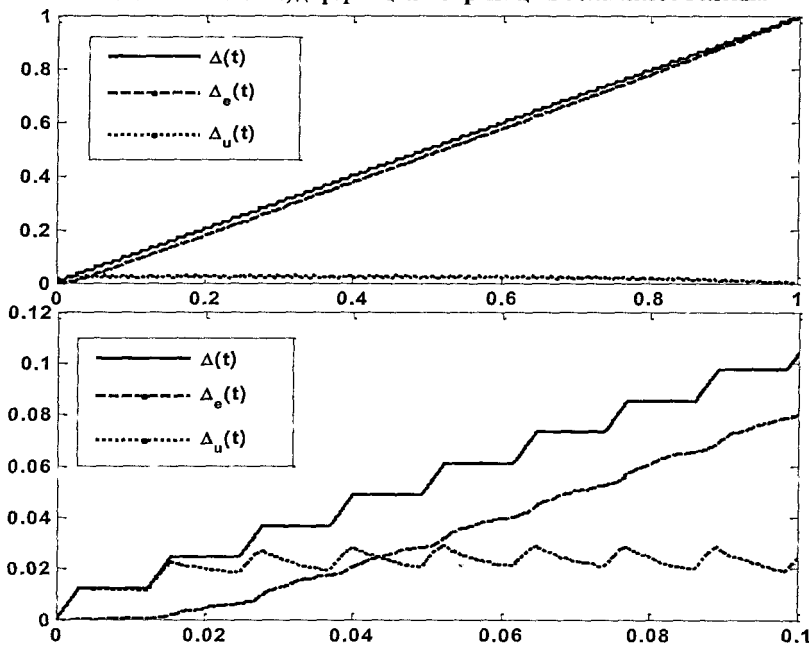


Рис.1.69 Циклические нагрузки на волокно

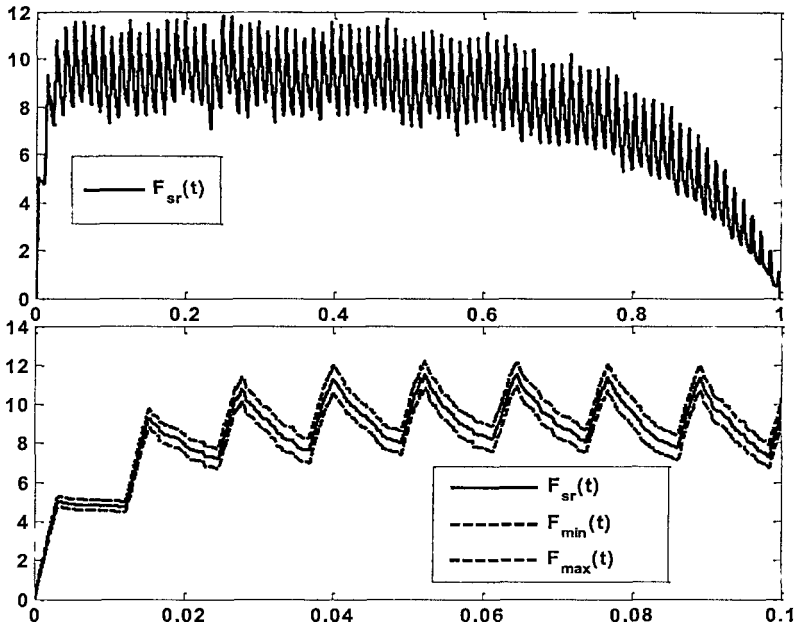


Рис.1.70. Динамика поведения волокна в поле сил трения

Ниже приведена процедура Matlab **VoloknoTrenie15**, реализующая рассмотренную в данном разделе модель.

Алгоритм A1.16

```
function [F, Epsilon, Pc, Sigma, Umas, Usr, Usig, Uc, x] = VoloknoTrenie;
% модель продольных деформаций волокон в "теле" образца,
% под действием сил трения от перемещения подвижного зажима
Lp=30; muSr=0.27; Nfcsr=0.08;
Esr=80000; Ssr=0.0003; %основные параметры волокна
Kmax=10; K=Kmax; K=binornd(Kmax,0.5); % Число участков
dx=Lp/1000; D=5*Lp/500; Nc=1000; Umas=zeros(1001,Nc);
for cycl=1:Nc
z=unifrnd(0,Lp,2*K,1); z=sort(z); % координаты границ
x1=z(1:2:end); x2=z(2:2:end); % участков контактов
x=0:dx:Lp; Lx=length(x); Pc=zeros(Lx,1); U=zeros(Lx,1);
E=unifrnd(0.8*Esr,1.2*Esr,Lx,1); % модуль упругости по сечениям
% E=Esr*ones(Lx,1);
S=unifrnd(0.8*Ssr,1.2*Ssr,Lx,1); % площадь поперечных сечений
% S=Ssr*ones(Lx,1);
mu=unifrnd(0.8*muSr,1.2*muSr,Lx,1); % коэффициент трения по сечениям
% mu=muSr*ones(Lx,1);
Nfc=unifrnd(0.8*Nfcsr,1.2*Nfcsr,K,1); % плотность сил трения по участкам
контакта
```

```

% Nfc=Nfcsr*ones(K,1);
dUc=ones(Lx,1); Ucs=cumsum(dUc); Uc=D/Ucs(end,1)*Ucs; %поле смещений
Epsilon=zeros(Lx,1);
for k=1:K % расчет знаков сил взаимодействия с полем сил трения
    SNfc=0;
    for z1=x1(k,1):dx:x2(k,1); % Nfcz=z1*(z1-Lp/2); %параболическое поле сил трения
        Nfcz=z1; %линейно нарастающее поле сил трения
        SNfc=SNfc+Nfcz;
    end;
    Zn(k,1)=sign(SNfc); % знаки поля сил трения
end;
for k=1:K % построение распределения сил трения
    for i=1:Lx % волокна с полем сил трения других волокон
        if (x1(K-k+1,1)<=x(1,i)) && (x2(K-k+1,1)>=x(1,i))
            Pc(Lx-i+1,1)=mu(i,1)*Nfc(k,1)*Zn(k,1)*dx; %сила трения на элементе dx
        end; % на участках контакта
    end;
end;
Sigma=zeros(Lx,1); F=zeros(Lx,1);
dL=zeros(Lx-1,1); dL0=dx*ones(Lx-1,1); % L=sum(dL0);
for i=1:Lx-1 % максимальная и виртуальная сила и деформация в сечении x
    Fmax=F(Lx-i+1,1)+Pc(Lx-i,1); dEpsilonMax=Fmax/(E(Lx-i,1)*S(Lx-i,1));
    dEpsilonVirt=(Uc(Lx-i+1,1)-Uc(Lx-i,1))/dx;
    Fvirt=F(Lx-i+1,1)+dEpsilonVirt*E(Lx-i,1)*S(Lx-i,1);
    if abs(Fvirt)<abs(Fmax) % условие растяжения элемента волокна (сечения) x
        Epsilon(Lx-i,1)=Fvirt/(E(Lx-i,1)*S(Lx-i,1));
        dL(Lx-i,1)=dL0(Lx-1,1)+Epsilon(Lx-i,1)*dx;
        Sigma(Lx-i,1)=Epsilon(Lx-i,1)*E(Lx-i,1); F(Lx-i,1)=Fvirt;
    else % условие максимального растяжения элемента волокна (сечения) x
        Epsilon(Lx-i,1)=Fmax/(E(Lx-i,1)*S(Lx-i,1));
        dL(Lx-i,1)=dL0(Lx-1,1)+Epsilon(Lx-i,1)*dx;
        Sigma(Lx-i,1)=Epsilon(Lx-i,1)*E(Lx-i,1); F(Lx-i,1)=Fmax;
    end;
end;
U=cumsum([0;dL-dL0]); Umas(:,cycl)=U;
end; % завершение цикла
Usr=mean(Umas'); Usig=std(Umas');

```

1.8. Статистическое усреднение линейных динамических моделей одномерной деформации

В обсуждаемой теме есть и другой аспект. Даже если для конкретного вида нити или волокна построена достаточно адекватная модель динамики деформации, не ясно, как параметры этой модели можно перенести на модель пучка таких нитей или пряжу, построенную из них или из волокон конечной длины, т.е. штапельных волокон. В силу заметного статисти-

ческого разброса показателей физико-механических свойств у отдельных нитей или волокон в пучке или пряже можно ожидать, что ряд особенностей деформации нитей (волокон), образующих волокнистую структуру, нивелируется. В то же время могут проявиться себя новые факторы, связанные с взаимодействием между волокнами или нитями структуры.

В качестве объекта исследования выбрана линейная модель в виде отношения двух полиномов

$$H(s, m, n) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} = \frac{B(s, m)}{A(s, n)} \quad (1.86)$$

Считаем, что случайным вариациям подвержены коэффициенты полиномов. Поскольку эти вариации связаны с различиями между отдельными нитями или волокнами, то допустимо считать вариации независимыми случайными величинами.

Рассмотрим вариации коэффициентов b_k полинома $B(s, m)$ при отсутствии вариаций коэффициентов полинома $A(s, n)$. В этом случае вариация функции $H(s, m, n)$ прямо пропорциональна вариациям отдельных коэффициентов полинома $B(s, m)$

$$\delta H(s, m, n) = A^{-1}(s, n) \sum_{k=0}^m \delta b_k s^k \quad (1.87)$$

Отсюда следует, что среднее значение функции $H(s, m, n)$ определяется только средними значениями bsr_k коэффициентов $b_k = bsr_k + \delta b_k$

$$Hsr(s, m, n) = A^{-1}(s, n) \sum_{k=0}^m bsr_k s^k \quad (1.88)$$

Дисперсия функции $H(s, m, n)$ прямо пропорциональна дисперсиям коэффициентов

$$DH(s, m, n) = |A(s, n)|^{-2} \sum_{k=0}^m s^k D b_k \quad (1.89)$$

Для случайных вариаций коэффициентов a_j полинома $A(s, n)$ в знаменателе функции $H(s, m, n)$ аналитические выражения более громоздки. Они могут быть получены с использованием известных формул дифференцирования дробно-линейных выражений, но в силу своей громоздкости даже для полиномов невысокого порядка вряд ли пригодны для практического использования.

Более практичным и наглядным способом оценки роли случайных вариаций коэффициентов на характеристики линейной динамической модели может быть статистическое моделирование методом Монте-Карло. Для этих целей была построена соответствующая функция – процедура.

В качестве основных характеристик динамики выбраны амплитудно-частотная характеристика $A(f)$ и реакция модели на практически важный

вид воздействия в виде т.н. проинтегрированного потока прямоугольных импульсов $u(t, \tau, T)$

$$A(f) = |H(s, m, n)|_{s=2\pi if}, \quad 0 \leq f \leq f_{\max} \quad (1.90)$$

$$u(t, \tau, T) = \int_{\theta=0}^t \sum_{l=0}^{\infty} u_0(\theta - lT, \tau) d\theta, \quad u_0(t, \tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau \\ 0, & \tau \leq t \end{cases} \quad (1.91)$$

Ниже приведен текст функции – процедуры, в которой использован метод статистических испытаний для оценки влияния статистических вариаций коэффициентов полином в линейной динамической модели ($\varepsilon \rightarrow \sigma$) на амплитудно-частотную характеристику модели и реакцию модели на проинтегрированный импульсный поток.

```
function [f, Ampsum, t, y] = AmpFreqHarakteristics;
%Статистический разброс АЧХ и переходной функции на импульсный поток
%для линейной системы с случайным разбросом коэффициентов полиномов
ПФ. Параметры потока прямоугольных импульсов
tau = 5; Tmod = 50; dt = 0.05;
% Параметры и массивы для частотной характеристики
N = 1000; fmax = 20; df = 0.01; f = 0:df:fmax; w = 2*pi*f;
Amp = zeros(1, length(f)); Ampsum = zeros(N, length(f));
% Средние значения и коэффициенты вариации коэффициентов полиномов
Bsr = [1 20 4]; Asr = [1 0.1 1]; aCv = 0.1; bCv = 0.1;
% Генерация линейно нарастающей (импульсно)деформации u(t)
[x0, t] = gensig('square', tau, Tmod, dt); u = 1 - x0; u = cumsum(u);
% Массив для реакции модели на деформацию
Ysum = zeros(N, length(t));
% Начало главного цикла N статистических испытаний
for povt = 1:N
    B = normrnd(Bsr, bCv*Bsr); A = normrnd(Asr, aCv*Asr);
    H = tf(B, A);
    Aph = freqresp(H, f); AFH = abs(Aph); % частотная характеристика
    Amp(1, :) = AFH(1, 1, :); Ampsum(povt, :) = Amp(1, :);
    y = lsim(H, u, t); Ysum(povt, :) = y(:, 1); % имитация реакции
end
% Расчет характеристик для средних значений коэффициентов
AmpSr = mean(Ampsum); AmpSig = std(Ampsum);
%plot(f, AmpSr, f, AmpSr.*(1+3*AmpSig), f, AmpSr.*(1-3*AmpSig)), hold on;
loglog(f, AmpSr, f, AmpSr + 3*AmpSig / sqrt(N), f, AmpSr - 3*AmpSig / sqrt(N)),
hold on;
H = tf(Bsr, Asr); Aph = freqresp(H, f); AFH = abs(Aph); Amp(1, :) = AFH(1, 1, :);
loglog(f, Amp); Ysr = mean(Ysum); YSig = std(Ysum);
figure, plot(t, Ysr, t, Ysr + 3*YSig / sqrt(N), t, Ysr - 3*YSig / sqrt(N)), hold on
y = lsim(H, u, t); plot(t, u, t, y)
```

В процедуре осуществляется вывод на графики следующих результатов:

1. Амплитудно-частотная характеристика, полученная для средних значений коэффициентов полиномов модели *Amp*.

2. Амплитудно-частотная характеристика $AmpSr$, усредненная по таким же характеристикам, вычисленным для повторных статистических испытаний.
3. 95% доверительные интервалы $Amp(+)$ и $Amp(-)$ для этой усредненной оценки $AmpSr$ амплитудно-частотной характеристики.
4. Реакция модели на проинтегрированный поток прямоугольных импульсов, полученная для средних значений коэффициентов полиномов модели Ysr .
5. Реакция модели на проинтегрированный поток прямоугольных импульсов, усредненная по таким же характеристикам, вычисленным для повторных статистических испытаний.
6. 95% доверительные интервалы $Y(+)$ и $Y(-)$ для этой усредненной оценки Ysr реакции модели на проинтегрированный поток прямоугольных импульсов.
7. Входное воздействие на модель (проинтегрированный поток прямоугольных импульсов) $u(t)$ в течение времени моделирования T_{mod} (рис. 1.73).

Соответствующие графики приведены на рис.1.71. На рис.1.72 показаны те же характеристики, но найденные при коэффициентах вариации коэффициентов полиномов, увеличенных с 10% до 30%.

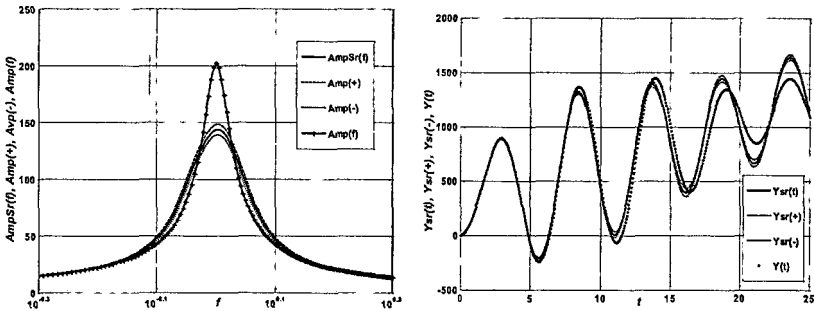


Рис.1.71. Влияние статистических вариаций на частотные свойства динамической системы

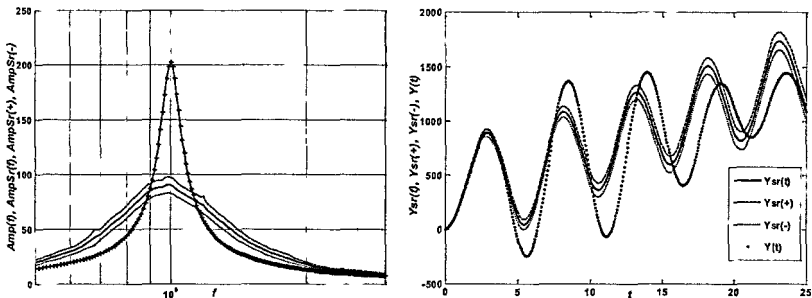


Рис.1.72 $aCv = bCv = 0.3$

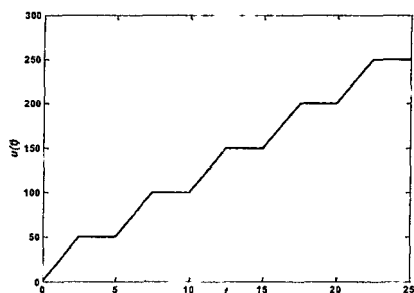


Рис.1.73. Динамика воздействия нагрузки на систему

С процедурой были проведены исследования, позволившие установить влияние не только величины вариаций коэффициентов полиномов, но и соотношения средних значений этих коэффициентов. По результатам этих исследований можно достаточно надежно сделать вывод, что статистический разброс параметров динамических моделей заметно искажает частотные характеристики. Происходит расширение «пиков» и уменьшение их максимальных значений. Кроме того, происходит накопление фазового запаздывания в реакции на периодические и квазипериодические воздействия. Таким образом, замена статистически варьируемых параметров модели на их усредненные значения может привести к искажению результатов и скрыть особенности динамического поведения моделируемых ВМ.

Глава 2. Модели двумерных волокнистых материалов

2.1. Моделирование волокнистого материала методами молекулярной динамики, механики деформируемых сплошных сред и статистической динамики

Сущность метода молекулярной динамики состоит в следующем. Модель представляет собой алгоритм и реализующую его компьютерную программу. Алгоритм рассчитывает движение ансамбля элементов – «молекул» - в соответствии с законами механики и с учетом их взаимодействия. Для этого записывают дифференциальные уравнения динамики ансамбля.

Уравнения получают из выражения для полной энергии ансамбля. Эта энергия складывается из трех составляющих. Первая – кинетическая энергия движения элемента для всех его степеней свободы. Вторая – потенциальная энергия элемента как эффект краевых условий и взаимодействия элемента с внешними полями. Третья – потенциальная энергия взаимодействия элементов.

Для упрощения задачи обычно ограничиваются попарными взаимодействиями элементов. Не возбраняется использовать эмпирические или полуэмпирические представления этого взаимодействия. В уравнения могут быть включены также элементы, учитывающие любые составляющие и эффекты, специфичные для конкретной задачи.

Уравнения записывают в форме, наиболее удобной для их решения и интерпретации результатов. Решение выполняется с использованием подходящих численных математических методов. Они должны быть, с одной стороны, достаточно быстрыми, с другой – устойчивыми и точными. Задача сводится к численному решению системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. В случае успешного решения характеристики ансамбля находят как интегральные показатели, усредняя результаты решения по элементам ансамбля. Результаты, полученные по относительно малому числу элементов, в случае из статистической устойчивости распространяются на всю изучаемую среду.

Например, нетканый материал образован хаотическим ансамблем волокон. Поэтому применение к нему метода молекулярной динамики представляется оправданным и перспективным. Элементами в этом случае являются волокна. Однако возникает ряд специфических проблем. Волокна обладают несравнимо большим числом степеней свободы, чем молекулы. Их взаимодействие явно не сводится к попарным взаимодействиям. Относительно малый импульс, т.е. произведение массы волокна на скорость его движения, делает задачу квазистатической. Поэтому прямое применение метода молекулярной динамики вряд ли возможно. Требуется адаптация идеи метода молекулярной динамики к указанной специфике.

При моделировании поведения ансамблей волокон явно или неявно сталкиваются с теми же проблемами. Их преодолевают двумя путями. Первый состоит в моделировании реального волокна элементом с малым числом степеней свободы. Это могут быть одна или несколько: от двух до пяти, - характерных точек волокна, объединенных связями, или, например, винтообразные отрезки. В последнем случае изменения сводятся к изменению параметров винтовой линии.

Другой путь состоит в отказе от рассмотрения отдельных волокон как элементов ВМ и использовании методов механики деформируемых сплошных сред. Важное преимущество такого подхода в том, что для описания ВМ достаточно получить из экспериментов несколько параметров: модули упругости и вязкости, долю остаточной деформации и т.п., - чтобы получить прогноз поведения ВМ. Однако, к сожалению, во многих задачах, волокнистая природа материала не может быть исключена из рассмотрения. Именно дискретное строение ВМ, образованного отдельными волокнами, определяет, например, его взаимодействие с рабочими органами технологического оборудования, или разрыв образов материала под действием нагрузки. Наконец, в большинстве таких взаимодействий существенно проявляется вероятностная природа многих свойств волокон, которую сложно учесть в методе механики деформируемых сплошных сред.

Достоинства обоих методов: молекулярной динамики и механики деформируемых сплошных сред, - могут быть использованы, если их объединить на основе идеи т.н. «самосогласованного поля», предложенного для квантовых задач Хартри и Фоком. Суть метода самосогласованного поля в том, чтобы вместо ансамбля сильно взаимодействующих элементов рассматривать только один элемент, заменив влияние остальных усредненным полемым воздействием. Это воздействие вводится в задачу так, чтобы решение для отдельного элемента не противоречило, «согласовывалось» с заданным полем.

Назовем такое сочетание методов молекулярной динамики, механики деформируемых сплошных сред и самосогласованного поля методом статистической динамики волокнистых систем. Методика данного подхода состоит в следующем.

На первом этапе в каждой конкретной задаче по моделированию ВМ необходимо подобрать подходящую модель отдельного волокна. Фазовые переменные волокна выбирают так, чтобы его модель содержала минимальное необходимое число степеней свободы.

На втором этапе выбирается модель среды, т.е. ВМ, - в которой находится моделируемый ансамбль волокон.

На третьем этапе строятся уравнения, описывающие через фазовые переменные волокна его поведение в ВМ для решаемой задачи. Решение уравнений с привлечением численных методов повторяется для всех воло-

кон ансамбля. Вероятностная природа свойств волокон учитывается в решении методами статистического моделирования.

На четвертом этапе результаты усредняются по ансамблю и сравниваются на «согласованность» с выбранной моделью ВМ. При существенных расхождениях производят коррекцию свойств ВМ, и решение повторяют до согласования.

Важным достоинством описанного подхода является исключение необходимости учета взаимодействия между волокнами с заменой его усредненным влиянием ВМ. Недостатком – необходимость «согласования» свойств ВМ и получаемого решения, и как следствие, итерационный характер процедуры.

Отметим еще одну особенность статистической динамики волокнистых систем. Поведение волокон в моделируемом взаимодействии ВМ и рабочих органов во многих задачах не отражается на свойствах ВМ. Эти свойства лишь определяют среду и условия такого взаимодействия. Поэтому результат взаимодействия не имеет существенного обратного влияния на свойства ВМ. В этом случае вопрос «самосогласованности» решения перестает быть актуальным.

В соответствии со сказанным уравнение движения волокна в фазовых переменных можно представить как

$$\frac{d\mathbf{p}_k(l_k, t)}{dt} = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k(l_k, t), \mathbf{p}_k(l_k, t), t) + \mathbf{U}_k(\mathbf{x}_k(l_k, t), \mathbf{p}_k(l_k, t), t)$$

Здесь обозначены:

- $\mathbf{p}_k(l_k, t)$ – вектор импульса фазовых координат $\mathbf{x}_k(l_k, t)$ k -го волокна в момент t ;
- l_k – параметры волокна, возможно, имеющие случайные значения;
- $\mathbf{F}_k(l_k, t)$ – сила, возникающая в волокне вследствие его деформации и перемещения;
- $\mathbf{U}_k(t)$ – внешняя сила, действующая на волокно, как суммарный результат его взаимодействия с окружающими его ВМ.

2.2. Статистическое моделирование критериев формы волокон в волокнистых материалах

Форма волокон в волокнистом материале является важнейшим фактором, определяющим его свойства. Все процессы прядильного производства и производства нетканых материалов можно рассматривать как последовательность изменений формы волокон, числа межволоконных контактов, взаимного расположения волокон в материале. Форма волокон в любом волокнистом материале, даже таком высокоорганизованном, как пряжа, варьирует в широких пределах и случайным образом. Для ее оценки используют либо отдельные характерные особенности: наличие и длину крючков, извитость, величину миграции по сечениям продукта, показатели

крутки, - либо искусственные характеристики, например, параметры эллипса с фокусами в концах волокна.

Очевидно, что получение оценки формы волокна по реальным образцам волокон или их изображениям является весьма трудоемкой работой даже при ее автоматизации. Компьютерное моделирование волокнистых материалов в ряде задач требует имитации формы волокна и оценки изменений этой формы при определенных воздействиях на материал. Поэтому проблема выбора критериев формы волокна в таких задачах также актуальна. В отличие от реальных волокон, при моделировании форма волокна имитируется компьютером по выбранному алгоритму и координаты точек волокна известны. Остается лишь выбрать подходящий критерий, достаточно наглядный, физически осмысленный и не требующий больших затрат времени на вычисление. Ниже обсуждаются предлагаемые критерии и дается оценка их чувствительности к изменениям формы волокна и статистической устойчивости, а также критерии взаимного расположения двух волокон.

Распряmlенность и извитость волокон

Волокна в теле волокнистых продуктов имеют в большинстве случаев форму, отличную от прямолинейных отрезков или других строго детерминированных отрезков кривых. Это наблюдается даже для таких хорошо организованных продуктов, какими являются лента или пряжа из химических волокон. Форма практически всех натуральных волокон содержит случайные вариации, а зачастую бывает весьма причудливой.

В некоторых материалах, таких, как НМ, случайную форму волокон не только стараются сохранить, но усилить. Такая форма волокон придает материалу свойства теплозащиты, воздухо- и влагопроницаемости, механические свойства, которые и требуются от этого материала. Во многих случаях изначально практически распряmlенные химические волокна, получаемые из расплава в виде непрерывных нитей последующим штапельованием, подвергают специальной дополнительной обработке – текстуриванию – для придания формы, схожей с натуральными волокнами.

С другой стороны, производство пряжи из натуральных волокон можно рассматривать как последовательность технологических процессов, в которых первоначально хаотично ориентированные и извитые волокна распряmlаются и ориентируются вдоль оси продукта. Поэтому показатели распряmlенности и ориентированности волокон служат показателями эффективности процесса.

Показатели должны отвечать ряду противоречивых требований: 1) число показателей должно быть небольшим; 2) оценка показателей должна быть не слишком трудоемкой; 3) показатели должны учитывать основные особенности формы волокна. Рассмотрим некоторые подходы к оценке ориентированности и извитости волокон.

Геометрический подход

Волокно в трехмерных декартовых координатах – пространственная кривая, которая в параметрической форме задается вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad 0 \leq t \leq L \quad (2.92)$$

или его проекциями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (2.93)$$

где L – длина волокна. Функции (2.93) – непрерывные и гладкие, т.е. дифференцируемые. Практически это означает, что у кривой (2.92) нет разрывов и точек излома. Функции (2.93) задают замкнутое связное множество точек $\{t\}$ в трехмерном пространстве.

Длина любого участка от t_1 до t_2 волокна вычисляется интегрированием функций (2.93)

$$L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (2.94)$$

В случае волокна на плоскости

$$L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (2.95)$$

В частности,

$$L = L(0, L) \quad (2.96)$$

Поместим множество $\{t\}$ в выпуклую оболочку V . Как известно, выпуклым называется множество, которое включает в себя все точки прямых отрезков, соединяющих любые две точки этого множества. Выпуклой оболочкой V некоторого множества $\{t\}$ называется выпуклое множество минимального объема (минимальное множество), содержащее это множество.

Протяженность волокна l_{max} в пространстве можно определить как расстояние между наиболее удаленными точками оболочки V :

$$l_{max} = \max_{\mathbf{r}(1), \mathbf{r}(2) \in V} |\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}(2)| \quad (2.97)$$

Пара точек $\mathbf{r}^*(1)$ и $\mathbf{r}^*(2)$, определяющих протяженность волокна, задают вектор \mathbf{r}_f , характеризующий направление ориентации (ориентированность) волокна в пространстве

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}^*(1) - \mathbf{r}^*(2), \quad \text{где } [\mathbf{r}^*(1); \mathbf{r}^*(2)] = \arg \max_{\mathbf{r}(1), \mathbf{r}(2) \in V} |\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}(2)| \quad (2.98)$$

Использование понятия выпуклой оболочки с позиций теоретической оценки различных интегральных особенностей формы волокна представляется достаточно продуктивным. Действительно, кроме величины наибольшей протяженности волокна, можно найти его протяженность в направлениях, ортогональных по отношению к вектору \mathbf{r}_f . Для этого построим плоскость $S(t_0)$, ортогональную вектору \mathbf{r}_f . Ее точки определяются вектором \mathbf{a} , который удовлетворяет равенству нулю скалярного произведения:

$$\langle \mathbf{a} - \mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}_f \rangle = 0 \quad (2.99)$$

где t_0 – координата точки по длине волокна, через которую проходит ортогональная плоскость $S(t_0)$.

Множество точек $V_s(t_0)$, являющихся пересечением плоскости $S(t_0)$ и выпуклой оболочки V , также является выпуклым. Аналогично формуле (2.97) найдем в нем расстояние l_{1max} и координаты наиболее удаленных точек $\mathbf{a}_s^*(1)$ и $\mathbf{a}_s^*(2)$

$$l_{1max} = \max_{0 \leq t_0 \leq L} \left(\max_{\mathbf{a}(1), \mathbf{a}(2) \in V_s(t_0)} |\mathbf{a}(1) - \mathbf{a}(2)| \right) \quad (2.100)$$

$$[\mathbf{a}_s^*(1); \mathbf{a}_s^*(2); t^*] = \arg \max_{0 \leq t_0 \leq L} \left(\max_{\mathbf{a}(1), \mathbf{a}(2) \in V_s(t_0)} |\mathbf{a}(1) - \mathbf{a}(2)| \right)$$

Вектор \mathbf{r}_{1f}

$$\mathbf{r}_{1f} = \mathbf{a}_s^*(1) - \mathbf{a}_s^*(2), \quad (2.101)$$

лежащий в плоскости $S(t^*)$, ортогонален вектору $S(t^*)$, основной ориентации волокна в пространстве, и определяет его основную ориентацию в плоскости, ортогональной вектору основной ориентации.

Дополняя пару ортогональных векторов \mathbf{r}_f и \mathbf{r}_{1f} третьим ортогональным вектором \mathbf{r}_{2f} , также лежащим в плоскости $S(t^*)$, получим систему ортогональных координат в пространстве, которые ориентированы вдоль главных направлений протяженности волокна.

Иными словами, протяженность волокна в трех взаимно перпендикулярных направлениях определяется размерами габаритами выпуклой оболочки, «натянутой» на волокно. При этом сначала выделяется направление наибольшей протяженности этой оболочки, затем наибольшей протяженности в перпендикулярной плоскости, а затем – в третьем ортогональном направлении.

Если волокно располагается на плоскости, то описанные построения ограничиваются двумя измерениями и проиллюстрированы рис.2.1а. На нем кривая, проходящая через точки a, b, \dots, k – волокно на плоскости $(x;y)$. Замкнутая линия, составленная из участков волокна и прямых отрезков $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$ – граница выпуклой оболочки, «натянутой» на волокно.

В волокнистом материале каждое отдельное волокно ориентировано относительно основных координат материала, вообще говоря, произвольным образом. Так, в пряже волокно имеет преимущественно винтообразную форму, хотя отличия от некоторой идеальной формы могут быть весьма значительными.

В ленте волокна сильно вытянуты преимущественно вдоль оси продукта, но могут иметь т.н. передние и/или задние «крючки» - сильно изогнутые концы. В НМ волокна имеют изогнутую форму без специально выделенных направлений ориентации. Если описывать волокно тройкой ортогональных векторов $\{r_f; r_{1f}; r_{2f}\}$, определяющих «собственную» систему координат волокна, то эта системы будет повернута относительно «естественных» координат материала на некоторые произвольные случайные углы.

При обработке ВМ изменяется положение волокна, т.е. ориентация и положение начала его собственной системы координат относительно координат ВМ, и протяженность волокна.

Критерии формы должны учитывать как степень отклонения разных участков волокна от его геометрического центра, так и направление этих отклонений. Поэтому естественной, на наш взгляд, характеристикой может быть тензор J , который в механике называется тензором моментов инерции, а в многомерной статистике – ковариационной матрицей. Если $r(k)$, $k = 1, \dots, n$ – радиусы - векторы n реперных точек волокна, то элементы J вычисляются по формулам

$$J_{rc} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (r_r(k) - rc_r)(r_c(k) - rc_c); \quad \text{где } rc_r = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_r(k), \quad r, c = 1, 2, 3 \quad (2.102)$$







Здесь индексы r, c нумеруют декартовы координаты, а вектор $rc = (rc_r)$ является геометрическим центром волокна. Тензор $J = \|J_{rc}\|$ - симметричная, положительно определенная матрица.

Квадратичная форма на его основе соответствует эллипсоиду. Собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ этой матрицы - действительные неотрицательные числа, определяющие величины главных полуосей эллипсоида, т.е. его протяженность вдоль его этих осей. Поэтому в качестве показателей формы волокна предлагается использовать эти числа, а также инварианты на их основе. Разумеется, такие показатели не учитывают различные детали формы волокна, но некоторые основные характеристики, такие, как протяженность вдоль осей координат, округлость формы, наличие крючков, и др. – влияют на их величину. По существу, это характеристики соответствуют числовым показателям рассеяния и корреляции для трехмерных распределений в математической статистике.

В табл.2.1 приведены некоторые регулярные формы волокна (прямая, окружность, полуокружность, «крючки», синусоида, винтовая линия) и значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ при длине волокна $L=1$ и $n = 101$. Как следует из таб-

лицы, собственные числа тензора \mathbf{J} меняются в широких пределах и чувствительны к различиям в форме волокна, причем не зависят от начала отсчета и угла поворота системы координат.

Таблица 2.1

№№	Форма	Вид	λ_1	λ_2	λ_3
1	Отрезок, L		0,085	0	0
2	Один «крючок», $L/4$		0,050	0	0
3	Два «крючка», по $L/8$		0,060	0	0
4, 5	Окружность и полуокружность		0,0125 0,0512	0,0125 0,001	0 0
6	Синусоида, ампл.= $L/10$, период = 0.4		0,042	0,004	0
7	Винтовая линия, $R=L/30$, $h=L/2$		0,0725	0,0005	0,0005

В качестве дополнительной характеристики степени закрученности (спиральной формы) волокна предлагается использовать распределение угла изгиба линии волокна относительно соседнего его участка.

В качестве оценки этого угла можно взять угол между приращениями $d\mathbf{r}(k)$ радиусов - векторов $\mathbf{r}(k)$ реперных точек волокна. Эти углы можно вычислить, используя их векторное произведение

$$\alpha(k) = \arcsin \frac{d\mathbf{r}(k-1) \times d\mathbf{r}(k)}{|d\mathbf{r}(k-1)| |d\mathbf{r}(k)|}, \quad d\mathbf{r}(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{r}(k-1); \quad k = 2, \dots, n \quad (2.103)$$

Однако знака направления $d\mathbf{r}(k)$ относительно $d\mathbf{r}(k-1)$ формула (2.103) не показывает. Например, угол $\alpha = \pi/4$ может получиться по этой формуле при повороте $d\mathbf{r}(k)$ относительно $d\mathbf{r}(k-1)$ как по часовой, так и против часовой стрелки.

Для определения знака угла задаем некоторый постоянно направленный вектор \mathbf{r} , например, ориентированный вдоль оси Z : $\mathbf{r} = (0 \ 0 \ 1)$, и вычислим смешанное произведение трех векторов $(\mathbf{r}; d\mathbf{r}(k); d\mathbf{r}(k-1))$. Как известно, его численное значение равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, а знак зависит от того, какую тройку векторов: правую или левую, - они образуют. Поскольку $\mathbf{r} = \text{const}$, то этот знак определяется направлением поворота $d\mathbf{r}(k)$ относительно $d\mathbf{r}(k-1)$. В итоге получаем формулу для угла поворота

$$\alpha(k) = \arcsin \frac{|d\mathbf{r}(k-1) \times d\mathbf{r}(k)|}{|d\mathbf{r}(k-1)| |d\mathbf{r}(k)|} \text{sign}(\mathbf{r}; d\mathbf{r}(k); d\mathbf{r}(k-1)) \quad (2.104)$$

Заметим, что мерой извитости волокна может служить такая известная из дифференциальной геометрии характеристика, как кривизна. Однако она требует для своей оценки вычисления вторых производных радиуса – вектора линии волокна и так же не учитывает знака направления изгиба. На рис.2.1б приведены графики, показывающие изменение угла α для «регулярных» волокон из табл.2.1 (№№ 3 – 7).

Видно, что у окружности, полуокружности и винтовой линии угол искривления волокна, как и следовало ожидать, постоянен. У волокна с крючками угол искривления волокна равен нулю, причем изменение направления волокна в крючках на противоположное (на 180°) не проявляется в показателе. При синусоидальной форме угол искривления волокна меняется как по величине, так и по знаку периодически вдоль длины волокна.

При моделировании случайного расположения и формы волокна собственные значения тензора \mathbf{J} различны для разных волокон. Оценив их распределения, можно дать оценку всего множества волокон в целом.

При оценке взаимного расположения пары волокон, заданных векторами- радиусами своих реперных точек $\mathbf{r}_1(j)$, $j = 1, \dots, n_1$ и $\mathbf{r}_2(k)$, $k = 1, \dots, n_2$, очевидно, наиболее полная информация содержится в прямоугольной матрице \mathbf{D} расстояний между любыми двумя реперными точками обоих волокон

$$d_{jk} = \sqrt{\sum_{c=1}^3 (r_c(j) - r_c(k))^2}, \quad \mathbf{D} = \|d_{jk}\|, \quad j = 1, \dots, n_1; \quad k = 1, \dots, n_2 \quad (2.105)$$

Для получения интегральной информации о расстояниях между точками волокон предлагается использовать распределение значений d_{jk} и его числовые характеристики.

Значения $\min(d_{jk})$ и $\max(d_{jk})$ дают информацию о величинах наибольшего сближения и удаления точек волокон. Среднее и медианное значения говорят о средней удаленности волокон, а среднее квадратическое или среднее абсолютное отклонения дают обобщенную оценку расхождения между точками волокон. Число нулевых расстояний или расстояний, меньших некоторого заданного положительного минимума $\varepsilon > 0$ говорит о числе точек соприкосновения между волокнами.

В некоторых простых случаях, например, двух параллельных или пересекающихся полностью распрямленных волокон, распределения могут быть найдены аналитически, но в любом случае они могут быть достаточно просто оценены численно.

На рис.2.2а приведен пример двух хаотично ориентированных волокон Fiber 1 и Fiber 2. Их форма смоделирована 51 реперной точкой у каждого волокна. На рис.2.2б приведена гистограмма распределения расстояний для этих двух волокон, оцененные по реперным точкам у каждого волокна, т.е. матрица \mathbf{D} содержала 2500 значений, по которым и строилась

оценки распределения. По этому распределению легко найти числовые оценки, например, медианное значение $Me(d) = 2,89$, которая может служить числовой оценкой среднего расстояния между волокнами.

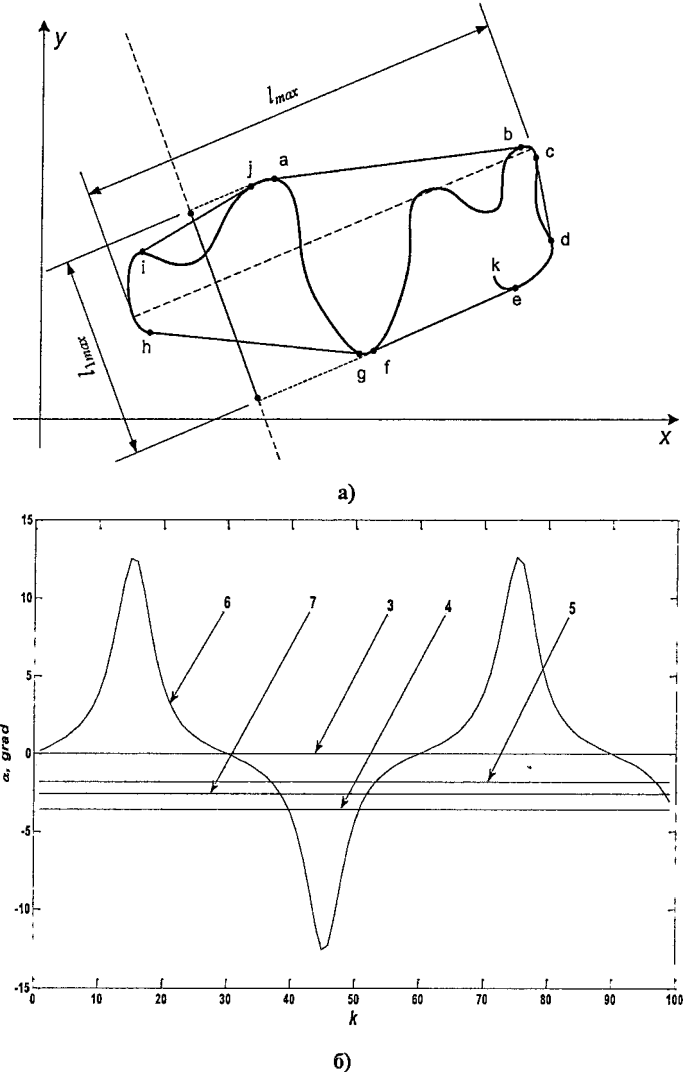


Рис.2.1. Извитость и искривление волокна

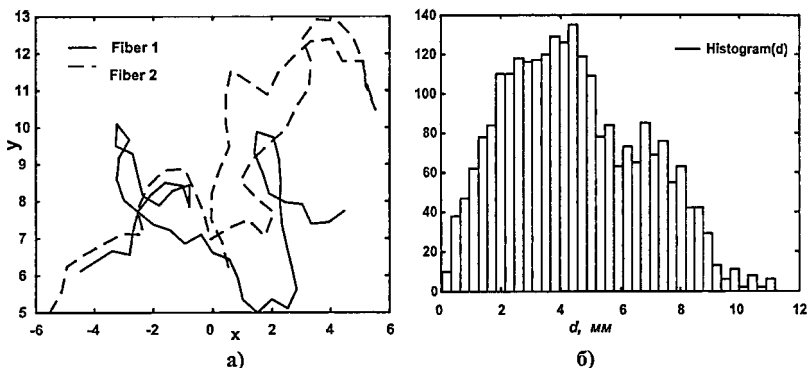


Рис.2.2. Расстояние между волокнами

Ниже приведена процедура Matlab *CriterionIzvitosti*, с помощью которой были смоделированы волокна и вычислена матрица расстояний для этих волокон.

```
function [ae,Mr,xr,yr,ae2,Mr2,xr2,yr2,D,Dalfa] = CriterionIzvitosti;
nr = 50; Lsr = 30; %Число реперных точек и длина волокна
AlfaSr = 2*pi/nr; %Средний угол поворота элемента волокна
SigAlfa = pi/3; %СКО угла изгиба волокна
dlr = Lsr/nr; %Длина волокна между реперными точками
Dalfa = normrnd(AlfaSr, SigAlfa, nr+1, 1); %Генерация углов между элементами
Alfa = cumsum(Dalfa);
dxr = dlr*cos(Alfa); dyr = dlr*sin(Alfa); %Проекции элементов на оси
xr = cumsum(dxr); yr = cumsum(dy); % координаты реперных точек
%Граничные координаты волокна
Xrmin = min(xr); xrmax = max(xr); yrmin = min(yr); yrmax = max(yr);
xr = xr-0.5*(xrmin-xrmax); yr = yr-yrmin+5; %Смещение осей координат
rr = [xr, yr]; rrt = rr'; %Радиусы-векторы реперных точек
dl = zeros(nr, 1); %Массив длин элементов между реперными точками; его
расчет
for k = 2:nr+1
    dl(k-1,1) = sqrt((rr(k,:)-rr(k-1,:))*(rr(:,k)-rr(:,k-1)));
end;
L = sum(dl); % Длина волокна как сумма длин элементов
Mr = MomentInerciy(rr, 2);
ae = eig(Mr);
% xrmin = min(xr); xrmax = max(xr); %Координаты границ волокна по оси X
% dx = (xrmax-xrmin)/(10*nr); %Шаг по оси X для сплайна
% x = xrmin+dx:xrmax; y=interp1(xr,yr,x,'cubic'); %Координаты точек сплайна
nr2 = 50; Lsr2 = 35; %Число реперных точек и длина волокна
AlfaSr2 = 2*pi/nr2; %Средний угол поворота элемента волокна
SigAlfa2 = pi/3; %СКО угла изгиба волокна
dlr2 = Lsr2/nr2; %Длина волокна между реперными точками
Dalfa2 = normrnd(AlfaSr2, SigAlfa2, nr2+1, 1); %Генерация углов между элемен-
тами
```

```

Alfa2 = cumsum(Dalfa2);
dxr2 = dlr2*cos(Alfa2); dyr2=dlr2*sin(Alfa2); %Проекции элементов на оси
xr2 = cumsum(dxr2); yr2 = cumsum(dyr2); %Координаты реперных точек
%Граничные координаты волокна
xrmin2 = min(xr2); xrmax2 = max(xr2); yrmin2 = min(yr2); yrmax2 = max(yr2);
xr2 = xr2-0.5*(xrmin2+xrmax2); yr2 = yr2-yrmin2+5; %Смещение осей координат
rr2 = [xr2,yr2]; rrt2 = rr2'; %Радиусы-векторы реперных точек
dl2 = zeros(nr2, 1); %Массив длин элементов между реперными точками; его
расчет
for k = 2:nr2+1
    dl2(k-1,1) = sqrt((rr2(k,:)-rr2(k-1,:))*(rr2(:,k)-rr2(:,k-1)));
end;
L2 = sum(dl2); %Длина волокна как сумма длин элементов
Mr2 = MomentInerciy(rr2, 2);
ae2 = eig(Mr2);
% Матрица расстояний между реперными точками волокон 1 и 2
R = zeros(nr, nr2);
for k = 1:nr
    for j = 1:nr2
        R(k,j) = sqrt((xr(k,1)-xr2(j,1))^2+(yr(k,1)-yr2(j,1))^2);
    end;
end;
D = R(:);

function J = MomentInerciy(r, N);
xr = r(:,1); n = length(xr);
% геом.центр волокна
m = zeros(N,1);
for i = 1:N for k = 1:n m(i,1)=m(i,1)+r(k,i); end;
m(i,1)=m(i,1)/n;
end;
%Моменты инерции (3-мерные)
J = zeros(N,N);
for i = 1:N for j = 1:N for k = 1:n
J(i,j)=J(i,j)+(r(k,i)-m(i,1))*(r(k,j)-m(j,1));
end; J(i,j)=J(i,j)/n; end; end;

```

2.3. Модель иглопрокалывания нетканого материала

Под действием иглы участки волокон, попадающие в зону ее действия, перемещаются в направлении движения иглы. Происходит уплотнение НМ в этой зоне. В крайнем положении иглы локальное уплотнение достигает наибольшего значения. При обратном ходе иглы волокна перемещаются в направлении своего исходного положения. Однако вследствие взаимодействия с окружающими волокнами и собственных необратимых деформаций полного восстановления положения волокон не происходит. Целью моделирования и является оценка этого остаточного эффекта, который, собственно, и является результатом процесса иглопрокалывания НМ.

Рассмотрим простейшую модель. Толщина иглы в сотни раз меньше длины волокна. Поэтому считаем, что взаимодействие волокна с иглой происходит в точке. Обозначим: x_0 и $x(t)$ - координаты этой точки до и после взаимодействия, H – толщина НМ. Тогда уравнение движения захваченного иглой участка волокна имеет вид

$$\frac{d(mv(t))}{dt} = -K(x(t) - x_0) - K_m(x(t) - x_c) + (q + \mu N_m)l \operatorname{sign}(v(t)),$$

где $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Здесь: m и l – масса и длина движущегося участка волокна; $v(t)$ – скорость движения; K – коэффициент жесткости упругой деформации волокна; K_m – коэффициент жесткости упругого воздействия НМ на волокно; x_c – координата стационарного положения участка волокна после завершения движения; q – удельный коэффициент сцепления волокна с НМ; μ – коэффициент трения Кулона – Амонтона; N_m – удельное нормальное давление НМ на волокно.

Функция знака sign введена для учета направления силы трения относительно направления скорости перемещения участка волокна. Производная в левой части дифференциального уравнения равна сумме двух слагаемых

$$\frac{d(mv(t))}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt} + v(t) \frac{dm(t)}{dt}$$

Первое слагаемое представляет собой силу инерции, связанную с наличием массы у рассматриваемого участка волокна и ускорением этой массы. Поскольку оба входящих в это слагаемое сомножителя малы, им можно пренебречь. Величина m связана с длиной l движущегося участка волокна

$$m(t) = \rho l(t)$$

где ρ - линейная плотность материала волокна. Длина l пропорциональна координате $x(t)$.

Допустим, что $l(t) = x(t) - x_0$. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$\rho \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 = -(K + K_m)x(t) + (q + \mu N_m)(x(t) - x_0) \operatorname{sign} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) + Kx_0 + K_mx_c$$

В такой форме в уравнение входят параметры, зависящие от свойств волокна: ρ , K , q и μ , - и параметры, зависящие от свойств НМ: K_m , N_m и x_c .

Сила нормального давления N_m зависит от положения от координаты $x(t)$. В конце прямого хода иглы в области ее воздействия локальная плотность НМ наивысшая. Поэтому сила давления также наибольшая. После

ухода иглы из области ее действия волокна пытаются восстановить свое исходное положение. При этом уменьшается и локальная плотность НМ. Как следует из наблюдений, движение волокон является монотонным, без изменения знака скорости.

С учетом сказанного из дифференциального уравнения функцию sign можно исключить

$$\rho \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 = -(K + K_m)x(t) + (q + \mu N_m(x(t)))(x(t) - x_0) + Kx_0 + K_mx_c$$

Найдем стационарное решение уравнения при $x(t) = x_s = \text{const}$ и производной, равной нулю

$$x_s = \frac{(K - F_s)x_0 + K_mx_c}{K + K_m - F_s}, \quad \text{где } F_s = q + \mu N_m(x_s)$$

Из формулы следует, что при постоянных значениях прочих параметров между начальным x_0 и конечным x_s положениями участка захваченного иглой волокна существует линейная зависимость. Для волокон, расположенных в верхних слоях НМ, x_0 равно нулю и

$$x_s = \frac{K_m}{K + K_m - F_s} x_c$$

Для волокон, расположенных в нижних слоях НМ, $x_0 = H$. Если $x_c = aH$, то

$$x_s = \frac{K + K_ma - F_s}{K + K_m - F_s} H, \quad 0 < a < 1$$

т.е. $x_s \leq H$. Если принять, что $x_c = H$, т.е. $a = 1$, то при $x_0 = H$ величина $x_s = H$.

Таким образом, полученная формула на качественном уровне правильно описывает изменения в положении участков волокон после взаимодействия с иглой: волокна из верхнего слоя опускаются ниже исходного положения, волокна нижних слоев остаются в этих слоях.

Коэффициент локального уплотнения Z как отношение конечной толщины НМ в месте воздействия иглы к исходной толщине равен

$$Z = \frac{x_s|_{x_0=0}}{H|_{x_c=H}} = \frac{K_m}{K + K_m - F_s}$$

2.4. Уравнения одномерного движения волокна

При захвате волокна иглой возможны два варианта их взаимодействия. При **первом варианте** игла действует в точке захвата на волокно с силой F , которую приближенно можно считать неизменной в течение времени взаимодействия. Тогда длительность взаимодействия и его динамика

определяются балансом сил, действующих на волокно. Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{dp}{dt} = \sum F$$

где импульс p равен

$$p = mv = \rho l \frac{dl}{dt}$$

и l – протяженность движущегося участка волокна вдоль направления движения, ρ – линейная плотность волокна вдоль направления движения.

Сумма сил

$$\sum F = F - Kl - Ql \operatorname{sign} \left(\frac{dl(t)}{dt} \right)$$

Здесь F – внешняя сила, изменяющая форму и движущая волокно; K – коэффициент упругости волокна; Q – удельная (на единицу протяженности волокна) обобщенная сила трения Кулона – Амонтона; l – протяженность движущегося или меняющего форму участка волокна.

Подстановка приведенных выражений в формулу закона Ньютона приводит к уравнению

$$\rho \left(l \frac{d^2 l(t)}{dt^2} + \left(\frac{dl(t)}{dt} \right)^2 \right) = F - Kl - Ql \operatorname{sign} \left(\frac{dl(t)}{dt} \right)$$

Ускорением как малой величиной пренебрегаем:

$$\rho \left(\frac{dl(t)}{dt} \right)^2 = F - Kl - Ql \operatorname{sign} \left(\frac{dl(t)}{dt} \right)$$

Преобразуем полученное выражение к виду

$$\frac{dl(t)}{dt} = \sqrt{\frac{F - l \left(K + Q \operatorname{sign} \left(\frac{dl(t)}{dt} \right) \right)}{\rho}}$$

Интеграл уравнения можно легко найти методом разделения переменных. Предположим, что удлинение волокна одного знака: $l(t) \geq 0$. Тогда после разделения переменных получим

$$\sqrt{\rho} \frac{dl}{\sqrt{F - l(K + Q)}} = dt$$

Интегрируя при условиях $l(0) = 0$ и $l(t) = L$, получим

$$2 \frac{\rho}{K + Q} \left(\sqrt{\frac{F}{\rho}} - \sqrt{\frac{F}{\rho} - \frac{K + Q}{\rho} L} \right) = t$$

Отсюда после преобразований найдем, как нарастает протяженность волокна со временем t , если оно удлиняется под действием постоянной силы F и в поле сил трения в НМ

$$L = \frac{F}{K+Q} - \frac{1}{K+Q} \left(\sqrt{F} - \frac{K+Q}{2\sqrt{\rho}} t \right)^2$$

Найденная зависимость является параболической. При $t = 0$ удлинение L равно нулю. Значение L достигает наибольшего значения при

$$t^* = \frac{2\sqrt{\rho F}}{K+Q}$$

В соответствии с решением это наибольшее значение равно

$$L^* = \frac{F}{K+Q}$$

На рис.2.3а приведена зависимость удлинения L от времени t при значениях $F = 1$; $K = 1$; $Q = 1$; $\rho = 1$ для значений t от нуля до $t^* = 1$.

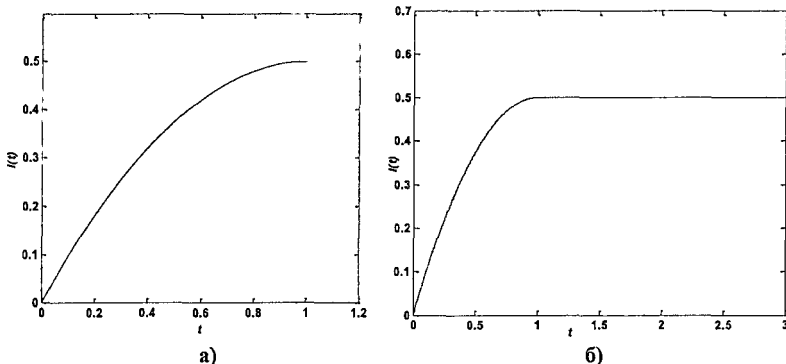


Рис.2.3. Зависимость удлинения волокна от времени взаимодействия с иглой

В момент t^* приращение удлинения $dl(t^*)$, как это следует из уравнения, равно нулю. Функция sign становится равной нулю. Физически это означает, что сила трения в момент t^* не имеет определенного направления. Если внешняя сила F продолжает действовать на волокно, то она уравновешивается силой упругости и силой трения, которые действуют в противоположном направлении. При $t = t^*$ внешняя сила F становится равной сумме упругой силы и силы трения, и дальнейший рост удлинения волокна прекращается.

Ниже приведена функция Matlab, в которой производится численное интегрирование рассмотренного дифференциального уравнения методом Эйлера

```
function [t,l]=DgUdlinVolokna;
K=1; Q=1; F=1; ro=1; dt=0.001; N=3001; l=zeros(N,1); Ft=0;
for n=2:N
```

```

Ft=-Q*sign(F - K*I(n - 1, 1));
dl(n, 1) = dt*sqrt(abs(F - I(n - 1, 1)*(K - Ft))) / sqrt(ro);
I(n, 1) = I(n - 1, 1) + dl(n, 1);
end;
t = 0:dt:(N - 1)*dt;

```

В ней для задания переключения знака силы трения Ft используется момент достижения равенства сил. На рис.2.3б приведен график нарастания во времени удлинения волокна при действии на него внешней силы F .

Результат интегрирования на участке t от нуля до t^* совпадает с результатом, полученным аналитически, а также с результатами структурного математического моделирования дифференциального уравнения в системе Simulink (рис.2.4а). Структурная схема приведена на рис.2.4б. В отличие от функции **DgUdlinVолокна** в структурной модели интегрирование выполняется с переменным шагом интегрирования методом **Domand-Prince**. Видно, что после достижения наибольшего удлинения дальнейшее увеличение протяженности волокна прекращается.

Если приложенная к волокну сила недостаточна, чтобы полностью распрямить волокно, то максимальное удлинение будет меньше длины волокна, и оно останется частично распрямленным. В противном случае произойдет полное распрямление волокна, которое допускает его форма, а затем под действием силы волокно будет перемещаться, пока будет действовать сила.

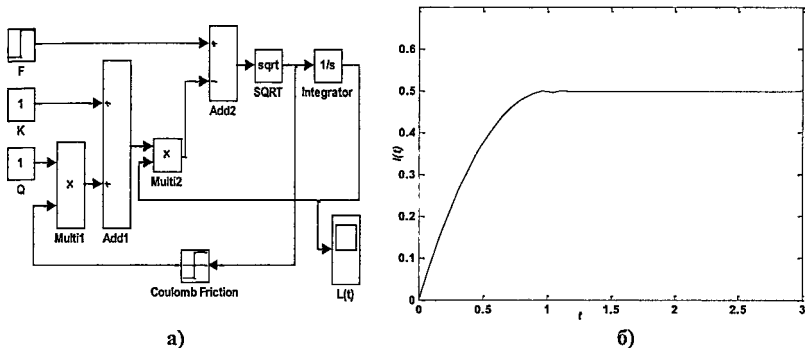


Рис.2.4. Структурная модель удлинения волокна при взаимодействии с иглой

При втором варианте взаимодействия иглы с волокном оно изменяет свои форму и положение принудительно в результате захвата иглой. Сила сопротивления этим изменениям складывается из упругой составляющей, равной $Kl(t)$, и силы трения, равной $Ql(t)$

$$\sum F = -(K + Q)l(t)$$

Наибольшее значение этой суммы достигается, когда протяженность волокна вдоль направления движения иглы становится максимально возможной, равной, например, длине распрямленного волокна L . Если пере-

мещение иглы с волокном y_0 превышает эту величину, то волокно перемещается как целое без увеличения своей длины, на величину $\Delta = y_0 - L$. Дифференциальное уравнение может быть записано и решено в конечных разностях

$$l(t + \Delta t) = l(t) + \frac{\Delta t}{\rho} \sqrt{F - l(t)(K + Q \operatorname{sign}(\Delta l(t)))}, \quad \Delta l(t) = l(t + \Delta t) - l(t)$$

Здесь $l(t)$ – величина удлинения протяженности волокна.

2.5. Модель уплотнения нетканого материала при иглопрокалывании

При погружении в нетканый материал (НМ) игла захватывает волокна, находящиеся в области ее движения, и протягивает их сквозь НМ в направлении своего движения, как при прямом, так и при возвратном движении. Из-за трения и сцепления волокна с соседними волокнами величина его перемещения тем меньше, чем дальше участок волокна от иглы, а направление перемещения также различно для разных участков волокна.

В объеме НМ волокна расположены хаотично. Они не распрямлены и у них нет преимущественной ориентации. При погружении в НМ игла своими зубцами захватывает волокна, расположенные непосредственно под ней и перемещает в нижние слои НМ. Концы этих волокон за счет цепкости и сил трения могут удерживаться другими волокнами, с которыми они взаимодействуют. Если эти удерживающие силы недостаточны, то концы волокна могут переместиться в новое положение.

На рис.2.5 изображена схема, положенная в основу модели. Кривая *ВАС* изображает волокно в толще НМ. Точка *А* – точка захвата волокна иглой, которая перемещается вверх – вниз и охватывает заштрихованную область. На рис.2.5а изображен случай, когда концы волокна удерживаются силами взаимодействия с другими волокнами, и их положение не изменяется. На рис.2.5б изображен случай, когда силы взаимодействия недостаточно велики, и концы волокна перемещаются в новое положение.

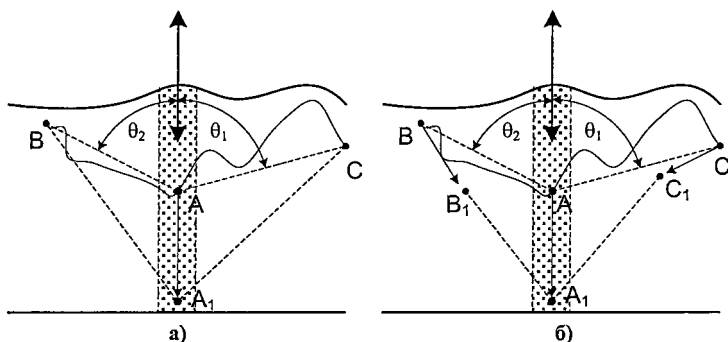


Рис.2.5 Модель взаимодействия иглы с волокнами НМ

Описываемая ниже модель представляет собой компьютерный алгоритм. Она основана на методе построения моделей молекулярной динамики. Алгоритм строится на многократном воспроизведении процесса захвата произвольно расположенного в объеме НМ волокна и перемещения его по объему в новое положение. Накопление статистических данных об изменении массы волокон в результате этого процесса позволяет оценить характеристики процесса.

Предлагается следующая геометрическая модель изменения формы волокна в результате его взаимодействия с иглой. Обозначим через $\mathbf{r}(k)$, $k = 0, \dots, N$ радиусы – векторы реперных точек волокна, имеющего внутри НМ произвольную форму и положение, N – число точек, причем $\mathbf{r}(0)$ и $\mathbf{r}(N)$ – векторы концов волокна. В промежутках между реперными точками элемент волокна аппроксимируется отрезком, вектор которого равен $d\mathbf{r}(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{r}(k-1)$, $k = 1, \dots, N$.

При достаточно больших значениях $N \sim 100$ аппроксимация является вполне удовлетворительной. При известной длине волокна L длина элементов принимается одинаковой $dr = L/N$.

Поскольку форма и положение волокна в НМ имеют случайную форму, векторы $d\mathbf{r}(k)$ и $\mathbf{r}(k)$ являются случайными. Для их моделирования использован следующий алгоритм: углы θ и φ локальной полярной системы координат для каждого элемента k генерируются как равномерно распределенные случайные величины $\theta \sim \text{Un}(-\pi/2; \pi/2)$; $\varphi \sim \text{Un}(0; 2\pi)$. Декартовы координаты векторов $d\mathbf{r}(k)$ вычисляются по формулам

$$dx(k) = dr \cos \theta \cos \varphi; \quad dy(k) = dr \cos \theta \sin \varphi; \quad dz(k) = dr \sin \theta \quad (2.106)$$

Задавая координаты одного конца $\mathbf{r}(0)$ волокна случайным образом в пределах моделируемого объема НМ, получаем все векторы $\mathbf{r}(k) = \mathbf{r}(k-1) + d\mathbf{r}(k)$. Сплайн по реперным точкам $\mathbf{r}(k)$ дает гладкую форму волокна, но длина волокна при сплайновой аппроксимации отличается от начальной длины L . Такая аппроксимация дает лишь наглядное представление о результатах моделирования волокна.

Предположим, что игла перемещается вдоль оси z при $x = 0$ и $y = 0$. При радиусе R захвата волокон иглой область ее непосредственного действия является круговым цилиндром C в начале координат (x, y) вдоль оси z радиуса R и высотой H , равной величине перемещения иглы. Найдем номер j реперной точки, ближайшей к игле

$$j = \arg \min_k |\mathbf{r}(k)|, \quad \forall \mathbf{r}(k) \in C \quad (2.107)$$

Вектору $\mathbf{r}(j)$ найденной реперной точки присваивается новое значение, соответствующее перемещению иглы и конечному положению точки захвата: $\mathbf{r}^n(j) = (0; 0; 0)$. Далее производится вычисление новых координат векторов остальных реперных точек по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} = \mathbf{r}(k) - \mathbf{r}^n(k-1); \quad \mathbf{r}^n(k) = \mathbf{r}^n(k-1) + d l \frac{\mathbf{f}}{|\mathbf{f}|}, \quad k = j+1, \dots, N \\
 \mathbf{f} = \mathbf{r}(k-1) - \mathbf{r}^n(k); \quad \mathbf{r}^n(k-1) = \mathbf{r}^n(k) + d l \frac{\mathbf{f}}{|\mathbf{f}|}, \quad k = j, j-1, \dots, 1
 \end{aligned}
 \tag{2.108}$$

Здесь вектор \mathbf{f} задает направление, в котором перемещается реперная точка. Это направление определяется исходным положением этой точки $\mathbf{r}(k)$ и новым положением уже сместившейся соседней точки $\mathbf{r}^n(k-1)$ при $k > j$ или $\mathbf{r}^n(k)$ для точки $\mathbf{r}(k-1)$ при $k < j$. На рис.2.6 приведен пример результатов такого моделирования.

Как известно, цель иглопрокалывания – упрочнение НМ за счет увеличения его плотности и взаимодействия между волокнами. Это достигается за счет изменения положения, размеров и формы той области, которую занимает волокно до и после иглопрокалывания, увеличения плотности волокнистой массы в пределах этой области и увеличения числа точек касания между волокнами, имеющими общую область расположения.

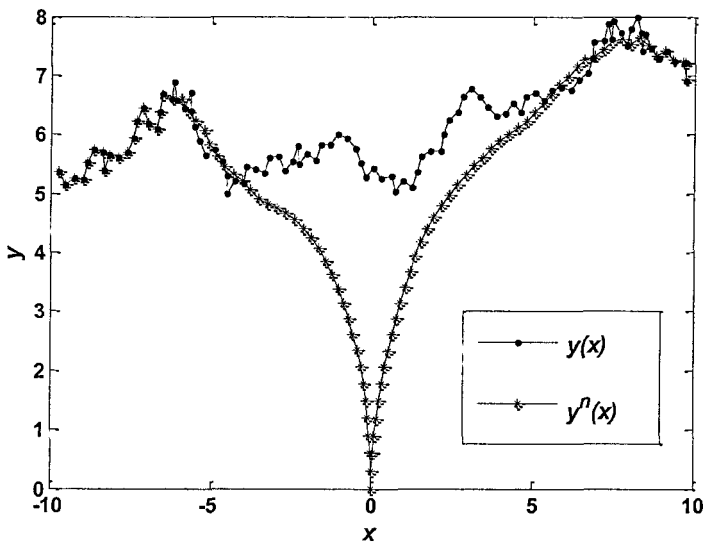


Рис.2.6, $L = 30$ мм, $N = 100$

Оценка таких изменений в точной постановке – сложная задача геометрии и топологии. Очевидно, что искомая характеристика должна быть комплексной, включая характеристики положения и размеров области волокна и степени ее заполнения волокном. Кроме того, характеристика должна быть достаточно наглядной и простой для вычислений.

Развивая подход, предложенный В.И. Будниковым, используем следующие характеристики. Положение волокна оценим с помощью геомет-

рического центра r_c , его реперных точек, а форму – распределением элементов симметричной матрицы расстояний между реперными точками волокна $R = \|r(j) - r(k)\|$ и его числовыми показателями: средним, медианой, среднеквадратическим отклонением и т.п.

Обозначим через $r(k,1)$ и $r(k,2)$, $k = 0, \dots, N$ - координаты реперных точек 1-го и 2-го волокна и $D(1;2) = \|d_{jk} = |r(j,1) - r(k,2)|\|$ - матрицу евклидовых расстояний между реперными точками двух волокон. Поскольку при иглопрокалывании изменяются координаты всех точек волокон, для оценки взаимодействия между волокнами имеет смысл использовать детерминант $D(1;2)$, включающий все элементы матрицы. Однако, при большом числе реперных точек N расчет такого детерминанта – длительная операция, сопровождающаяся накоплением погрешностей вычислений даже на компьютере.

Поэтому предлагается построить оценку распределения элементов $D(1;2)$ в виде гистограммы. В этом случае в качестве мер геометрической близости двух волокон можно использовать простые числовые показатели распределений, и отслеживать их изменения в процессе иглопрокалывания.

Оценивание характеристик выполнялось методом статистического моделирования: моделировались описанным выше методом два волокна, затем имитировалось движение иглы и вызванное им изменение формы волокон, после чего оценивались перечисленные характеристики положения, формы каждого волокна и их близости до и после действия иглы.

Эти этапы повторялись M раз для получения статистически надежных оценок. Пример получаемых результатов приведен на рис.2.7.

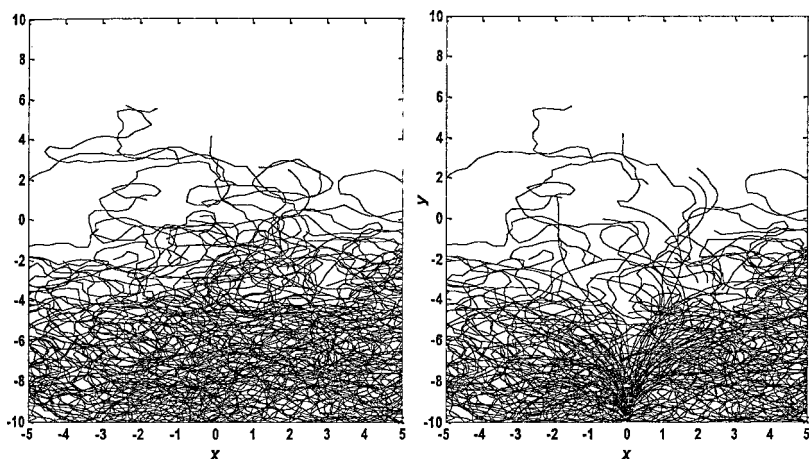


Рис.2.7 Геометрическая модель участка НМ до и после действия иглы. По осям координат расстояния в миллиметрах, средняя длина волокон 30 мм.

Ниже приведена процедура Matlab **Volokno**, с помощью которой получены рис.2.7 и статистические оценки для медианы – усредненной по *M* прогонам модели плотности моделируемого НМ

```

function [xr, yr, rr, xrnew, yrnew] = Volokno;
% Модель захвата и продвижения волокна иглой в НМ с сохранением длины
r=1.52; %линейная плотность волокна, г/см
M=100; %число повторных прогонов
nr=101; Lsr=30; %Число реперных точек и длина волокна
AlfaSr=0; %Средний угол поворота элемента волокна
SigAlfa=pi/5; %СКО угла изгиба волокна
xsc=0; ysc=-Lsr/3; %Координаты нижнего положения конца иглы
rc=[xsc, ysc]; %Вектор конца иглы в нижнем положении
dlr=Lsr/nr; %Длина волокна между реперными точками
for povt = 1:M
    Dalfa = normrnd(AlfaSr,SigAlfa,nr,1); %Генерация углов между элементами
    Alfa = cumsum(Dalfa); dxr = dlr*cos(Alfa);
    dyr = dlr*sin(Alfa); %Проекции элементов на оси
    xrcf = unifrnd(-Lsr/8,Lsr/8); yrcf = unifrnd(0,5);
    xr = xrcf + cumsum(dxr);
    yr = yrcf + cumsum(dyr); % координаты реперных точек
    %Граничные координаты волокна
    yrmin=min(yr); yrmax=max(yr);
    yr=yr-yrmin-10; %Смещение осей координат
    rr=[xr,yr]; rrt=rr'; %Радиусы-векторы реперных точек
    subplot(2,1,1); plot(xr,yr); hold on;
    dl=zeros(nr,1); % расчет массива длин эл-тов между реперными точками
    for k = 2:nr
        dl(k,1) = sqrt((rr(k,:)-rr(k-1,:))*(rr(:,k)-rr(:,k-1))));
    end;
    L=sum(dl); % Длина волокна как сумма длин элементов
    xrmin=min(xr); xrmax=max(xr); %Координаты границ волокна по оси X
    dx = (xrmax-xrmin)/(10*nr); %Шаг по оси X для сплайна
    for k = 1:nr-1
        xc(k,1)=(xr(k,1)+xr(k+1,1))/2; m(k,1)=r*dlr/abs(dxr(k,1));
    end;
    [xcs,ind]=sort(xc); ms=m(ind,1); g(povt,:,:)=[xcs,ms]; xa=abs(xr-xsc);
    [xrminm,kmin]=min(xa); %Номер репера, ближайшего по X к игле
    rrnew=rr; %Задание конечных радиусов-векторов реперных точек
    if xrmin < 0 & xrmax > 0
        rrnew(kmin,:) = rc; %Захват ближайшей реперной точки иглой
        %Расчет перемещений реперных точек с сохранением длин элементов
        for k=kmin+1:nr
            f=rr(k,:)-rrnew(k-1,:); mf=sqrt(f*f); rrnew(k,:)=rrnew(k-1,:)+dl(k,1)/mf*f;
        end;
        for k=kmin:(-1):2
            f=rr(k-1,:)-rrnew(k,:); mf=sqrt(f*f); rrnew(k-1,:)=rrnew(k,:)+dl(k,1)/mf*f;
        end;
    end;
    xrnew = rrnew(:,1); yrnew = rrnew(:,2); %Реперы в конечном положении

```



```

subplot(2,1,2); plot(xmnew,ymnew); hold on;
rtnew = rnew'; dlnew = zeros(nr,1); %Длины эл-тов в конечном положении
for k=2:nr
    dlnew(k,1)=sqrt((rnew(k,:)-rnew(k-1,:))*(rtnew(:,k)-rtnew(:,k-1)));
end;
for k=1:nr-1
    xcnew(k,1) = (xmnew(k,1)+xmnew(k+1,1))/2;
    dxrnew(k,1) = xmnew(k+1,1)-xmnew(k,1);    mnew(k,1) = r*dlr/abs(dxrnew(k,1));
end;
[xcsnew,ind]=sort(xcnew); msnew=mnew(ind,1); new(povt,:,:)=[xcsnew,msnew];
Lnew=sum(dlnew); %Длина волокна как сумма длин элементов между реперами
plot(xmnew,ymnew);
%Построение сплайна по конечному положению реперных точек
xrminnew=min(xmnew); xrmaxnew=max(xmnew);
dxrnew=(xrmaxnew-xrminnew)/(5*nr);
end;
for k=1:nr-1
    xsred(k) = mean(g(:,k,1));    gsred(k) = mean(g(:,k,2));
    xsrednew(k) = mean(gnew(:,k,1));    gsrednew(k) = mean(gnew(:,k,2));
end;
for k=1:nr-1    if gsred(1,k) <=100    gcsred(k) = gsred(1,k); end; end;
hold off; figure; plot(xsred,gsred); figure; hist(gcsred,17); hold on
for k=1:nr-1
    if gsrednew(1,k) <=100    gcsrednew(k)=gsrednew(1,k); end;
end;
hist(gcsrednew,17); Med = median(gcsred), MedNew = median(gcsrednew)

```

Таблица 2.2

Зависимость медианы плотности волокон от глубины погружения иглы

<i>L</i> , мм	0	-3	-6	-10	-15	-30
MeG до	5,57	6,59	7,16	5,97	6,15	5,99
MeG после	7,38	7,53	7,39	7,02	11,93	26,14

Из данных табл.2.2 видно, как с увеличением глубины проникновения иглы в НМ нарастает в среднем (по медиане) плотность волокон.

2.6. Динамика иглопрокалывания. Авторегрессионная модель

Рассмотрим другую модель взаимодействия иглы с НМ. В этой модели будем основываться на следующих рассуждениях и предположениях. Плотность НМ g на некотором локальном участке после воздействия иглы зависит от начальной плотности материала, упругости волокон и сил взаимодействия между волокнами.

Эти силы, с одной стороны, обеспечивают сцепление волокон между собой и, тем самым, прочность и плотность НМ. С другой стороны, силы упругости отталкивают элементы волокон друг от друга, обеспечивая пористость НМ, и не позволяют плотности НМ достичь предельной плотности, равной плотности материала волокон. Действие этих сил взаимодей-

ствия между волокнами можно уподобить действию большого числа элементарных пружин с произвольным направлением силы.

В связи с изложенным, плотность ВМ после k -го воздействия иглы на локальный участок можно представить в виде

$$g(k+1) = g(k) - Af(k) + B(g_{\max} - g(k))Q(k) \quad (2.109)$$

Здесь: $g(k)$ и $g(k+1)$ – объемная плотность НМ до и после k -го воздействия иглы на рассматриваемый участок; $f(k)$ – силы упругого взаимодействия между волокнами НМ; g_{\max} – максимальная плотность НМ, равная плотности материала волокон; $Q(k)$ – сила воздействия иглы при k -м прокалывании участка; A и B – коэффициенты пропорциональности. Считаем, что функция $Q(k)$ – это последовательность импульсов постоянной амплитуды.

Если в качестве $f(k)$ рассматривать удельную силу, приходящуюся на единицу объема НМ, то размерность коэффициента A равна

$$[A] = \frac{[g]}{[f]} = \frac{г \cdot см^{-3}}{г \cdot см \cdot с^{-2} см^{-3}} = \frac{с^2}{см} \quad (2.110)$$

т.е. имеет размерность, обратную размерности ускорения. Коэффициент B безразмерен.

От воздействия иглы зависит не только плотность НМ, но и силы взаимодействия между волокнами, поскольку действие иглы изменяет структуру НМ. Силы взаимодействия будут тем больше, чем плотнее НМ. Однако приращение этих сил для сильно уплотненного материала значительно меньше, чем для неплотного НМ.

Предположим, что величина этих сил пропорциональна плотности и силе воздействия иглы. Тогда приближенно изменение удельной силы взаимодействия между волокнами до и после k -го воздействия иглы можно записать в виде

$$f(k+1) = Cf(k) + D(g_{\max} - g(k))Q(k) \quad (2.111)$$

Здесь C и D – коэффициенты пропорциональности. Коэффициент C не имеет размерности, положительный и меньше единицы. Он отражает важное свойство НМ – его способность терять упругие свойства волокон во времени, т.е. это коэффициент демпфирования упругости НМ. Коэффициент D имеет размерность, обратную размерности коэффициента B в уравнении (2.109), т.е. размерность ускорения.

Покажем, что построенные уравнения на качественной уровне правильно отражают известные особенности динамики повторных воздействий иглы на участок НМ. Текст процедуры Matlab `Autoregr1` приведен ниже.

```
function [g,f,Q,t] = Autoregr1;
A = 0.1; B = 0.7; gMax = 1; C = 0.95; D = 0.3;
Nmod = 50; g = 0.5*ones(Nmod, 1); f = 0*ones(Nmod, 1);
Qp = [0; 1; 0; 0; 0]; m = length(Qp); mQ = Qp;
```

```

for t = 1:Nmod/m-m; Q = [Qp; Q]; end;
Q = [Q; zeros(2*Nmod/m, 1)];
for k = 2:Nmod-1
    g(k+1, 1) = g(k, 1) - A*f(k, 1) + B*(gMax-g(k, 1))*Q(k, 1);
    f(k+1, 1) = C*f(k, 1) + D*(gMax-g(k, 1))*Q(k, 1);
end;
t=0:Nmod-1;

```

Графики изменений плотности и сил взаимодействия волокон в зависимости от номера иглопрокалывания приведены на рис.2.8. Они показывают, что по мере увеличения числа прокалываний НМ иглой его плотность нарастает, хотя и с релаксацией, т.е. некоторым восстановлением. То же самое происходит и с силами взаимодействия.

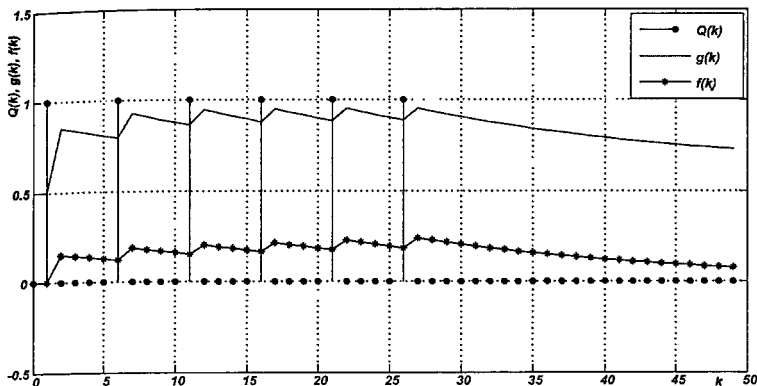


Рис.2.8. Циклическое воздействие иглы на волокна НМ

Воздействие иглы на НМ проявляется в изменении его структуры и плотности. Изменение структуры заключается в том, что «перепутанность» волокон, т.е. количество точек взаимодействия, и сила взаимосвязи между волокнами возрастают. Однако эта сила взаимосвязи не может превысить предела f_{max} , зависящего от упругости волокон. С другой стороны, иглы пробивают уже сформировавшиеся уплотненные участки материала и ослабляют их, т.е. снижают степень взаимосвязи волокон.

Плотность материала под действием иглы возрастает за счет притяжения в точку воздействия элементов волокон из соседних участков и сжатия этих волокон. Однако плотность не может превысить наибольшую плотность g_{max} , зависящую от упругих свойств волокон. Обозначим через $g(k)$ и $f(k)$ соответственно плотность материала и силу взаимосвязи между волокнами после k -го воздействия иглы на рассматриваемый участок.

Исходя из приведенных соображений связи для приведенных значений, вместо авторегрессионных уравнений (2.110), (2.111), можно записать в виде двух рекуррентных уравнений 1-го порядка

$$g(k+1) = g(k) + a(g_{\max} - g(k)) - bf(k) \quad (2.112)$$

$$f(k+1) = f(k) + c(f_{\max} - f(k)) - dg(k) \quad (2.113)$$

Здесь a , b , c , d – некоторые постоянные коэффициенты, зависящие от остальных свойств материала: коэффициентов трения и цепкости волокон, их упругости и извитости и т.п.

Уравнения (2.112) и (2.113) одинаковы по форме и отличаются лишь коэффициентами. Поясним физическую сущность этих уравнений. Первое уравнение означает, что плотность НМ после очередного воздействия иглы возрастает по сравнению с плотностью до воздействия на величину, зависящую от степени приближения плотности к наибольшему возможному значению.

Если плотность НМ уже близка к g_{\max} , то это приращение будет малым при одном и том же коэффициенте a . Наоборот, если плотность НМ далека от предельной, она может возрасти на значительную величину. Последний элемент правой части уравнения отражает влияние силы взаимосвязи между волокнами на рост плотности. Знак минус в этом члене означает, что сила взаимосвязи, как обычно сила упругости, препятствует изменению плотности. Аналогично трактуются элементы второго уравнения.

Приведем результаты совместного решения при коэффициентах $a = 0.5$, $b = 0.4$, $c = 1$, $d = 0.8$ и $g_{\max} = 1$ и $f_{\max} = 1$ для разных стартовых значений $g(0)$ и $f(0)$. Процедура Matlab `Autoregr2` приведена ниже

```
function [f,g] = Autoregr2;
a = 0.5; b = 0.4; c = 1; d = 0.8; gMax = 1; fMax = 1;
g = ones(21,1); f = ones(21, 1);
% g=0.5*ones(21,1); f=ones(21,1); Другие начальные условия
% g=0*ones(21,1); f=0*ones(21,1);
for k = 1:20 g(k+1, 1) = g(k, 1) + a*(gMax - g(k, 1)) - b*f(k, 1);
f(k+1, 1) = f(k, 1) + c*(fMax - f(k)) - d*g(k, 1);
end;
```

Графики, показывающие изменения $g(k)$ и $f(k)$, приведены на рис.2.9. Из графиков видно, что с увеличением числа воздействий иглы устанавливается некоторое одинаковое стационарное состояние, не зависящее от стартового состояния участка НМ. Это следует из линейности уравнений и устойчивости решений при выбранных коэффициентах.

Однако при конечном числе воздействий (в рассматриваемом примере при $k < 5$) может получиться как увеличение, так и снижение прочности в зависимости от соотношения числа воздействий иглы k и значений коэффициентов и параметров a , b , c , d , g_{\max} и f_{\max} , отражающих свойства волокнистого материала.

Отметим, что соотношения, аналогичные (2.112) и (2.113), но записанные в форме дифференциальных уравнений, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(g(t)\frac{dx(t)}{dt}\right) = -f(t) + Q(t); \quad \frac{dx(t)}{dt} \cdot \frac{dg(t)}{dt} + f(t) = Q(t) \quad (2.114)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \cdot \frac{dg(t)}{dt} + ag^3(t) = Q(t); \quad \frac{dg(t)}{dt} + bg^3(t) = cQ(t)$$

Они моделируют уплотнение НМ при большом числе воздействий иглы на один и тот же участок НМ, причем каждое воздействие лишь в малой степени меняет свойства и структуру НМ.

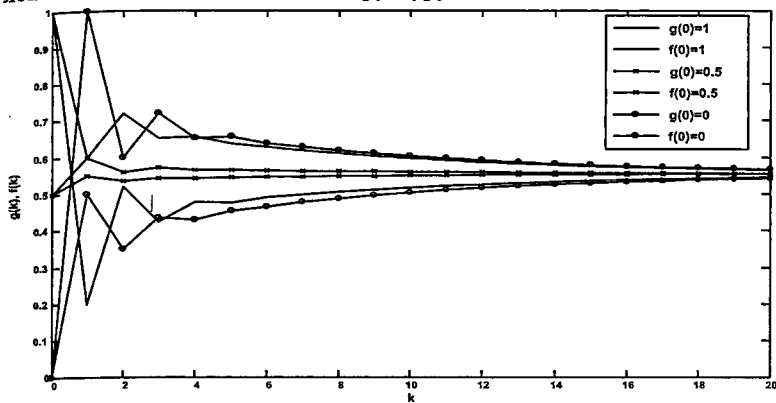


Рис.2.9. Динамика воздействия иглопрокалывания на НМ

Ниже приведена процедура и команды Matlab, решающие приведенные дифференциальные уравнения, приведенные к одному уравнению, методом Рунге - Кутты. Решения при разных частотах внешней синусоидальной силы приведены на рис.2.10.

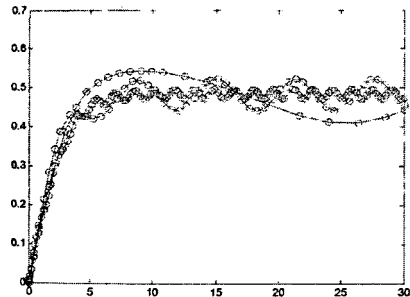
function y = D(t, x)

V = 0.9; gMax = 1; a = 0.1; g0 = 0.1;

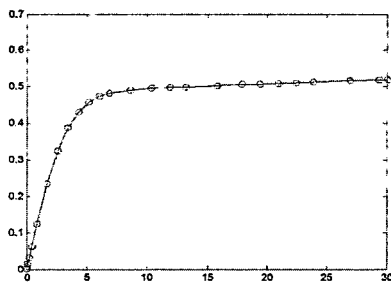
y = -V*x^3 + a*(gMax - x) + g0*(0.5 + 0.5*sin(0.2*t));

>> ode113(@D, [0 30], 0)

>> hold on



а) $Q(t) = \sin(t); \sin(4t); \sin(0.2t)$



б) $Q(t) = \sin(0.02t)$

Рис.2.10. Уплотнение НМ при разных значениях частот внешней силы $Q(t)$

2.7. Модель разрыва образца ткани

Описываемая модель имитирует процесс одноосного растяжения прямоугольного образца ткани, возникновение в нем областей разрыва отдельных волокон и распространение этих областей на весь образец.

Рассматриваемый образец ткани имеет прямоугольную форму. Стороны прямоугольника ориентированы по системам основных и уточных нитей. Растяжение образца производится в направлении основных нитей. Предполагается, что в областях перекрытия нитей основы и утка структура ткани имеет значительно большую прочность, чем в областях между перекрытиями.

Поэтому деформация в виде удлинения материала приходится в основном на участки нитей основы, приходящиеся на интервалы между уточными нитями, т.е. между перекрытиями. Однако, сама величина удлинения на каждом таком участке содержит значительную случайную составляющую. Она обусловлена вариациями в строении нитей основы на каждом участке, вариациями в свойствах волокон, особенностями перекрытия нитей основы и утка и др. Ограничимся рассмотрением только быстрых деформаций, при которых эластическая часть деформации не успевает развиться, и линейно-упругим (гуковским) приближением упругой деформации.

Пронумеруем уточные и основные нити индексами $i = 1, \dots, n_u$ и $j = 1, \dots, n_o$, где n_u и n_o – соответственно число уточных и основных нитей в образце. Значения пары индексов (i, j) задают конкретное перекрытие в образце. Для каждой нити основы между i -й и $(i+1)$ -й уточинами значения модуля упругости, длину основной нити и ее абсолютное удлинение в плоскости образца обозначим через $E(i, j)$, $L(i, j)$ и $d(i, j)$. Абсолютное удлинение образца основы D равно сумме удлинений отдельных участков для каждой из основных нитей

$$D = \sum_{i=1}^{n_u} d(i, j), \quad \forall j = 1, \dots, n_o \quad (2.115)$$

Обозначим через E – модуль упругости нитей основы. Из условия равновесия можно написать равенство

$$ED / L_o = E(i, j)d(i, j) / L(i, j), \quad \forall i, j \quad (2.116)$$

Формулы (2.115) и (2.116) дают соотношения нормировки, которым отвечают абсолютные удлинения отдельных участков каждой основной нити.

Для имитации разрыва необходимо задать значения предельной разрывной нагрузки и относительного разрывного удлинения для каждого участка основных нитей $P_b(i, j)$ и $e(i, j)$. Превышение этих значений текущими значениями удлинения или нагрузки означает разрыв нити основы. Однако, в отличие от пучка нитей, разрыв основной нити на одном из участков не означает ее исключение из дальнейшего участия в сопротив-

лении образца удлинению. В то же время, возникновение разрыва нити приводит к эффекту локализации напряжений в окрестностях участка разрыва.

Этот эффект можно учесть в модели путем коррекции значений удлинения близлежащих нитей основы: чем ближе к области разрыва расположены нити, тем в большей степени передаются им приложенные к участку напряжения, причем напряжения передаются как основным нитям, так и уточным.

С учетом того, что напряжения и деформации распространяются в ткани от точки их приложения с экспоненциальным законом ослабления, модельную зависимость характеристик нитей в окрестностях участка разрыва опишем формулой

$$d(i, j, t+1) = d(i, j, t) + P_{\max}(k) \exp\left(-\frac{|i - i_{\max}(k)|}{t}\right) \exp\left(-\frac{|j - j_{\max}(k)|}{t}\right) \quad (2.117)$$

В этой формуле d - приращение деформации сверх рассчитанной в соответствии с ее распределением по участкам согласно формулам (2.115) и (2.116) вследствие разрыва нити основы на участке с координатами $(i_{\max}; j_{\max})$.

Индекс k нумерует все эти участки, где нагрузка на элементы нити основы превысила разрывную нагрузку этой нити на данном участке. Периодическая t определяет время от начала испытания образца. Ее присутствие в знаменателях показателей экспонент учитывает эффект ослабления материала и распространения деформации вокруг участков разрыва на тем большее расстояние, чем больше продолжается удлинение образца.

Алгоритм состоит из генерации начальных условий моделирования и циклического повторения имитации растяжения образца:

1. Генерация значений модулей упругости и разрывной нагрузки нитей основы.
2. Задание начальных длин участков между уточинами для каждой нити основы с учетом случайной составляющей. Их нормирование на общую длину образца.
3. Циклическая часть:
 - 3.1. Генерация приращения длин каждой основной нити на каждом участке. Нормирование приращений на величину приращения всего образца на этапе удлинения в момент t с учетом приложенной к образцу нагрузки
 - 3.2. Вычисление упругих сил, возникающих на участках нитей основы вследствие их удлинения.
 - 3.3. Сравнение разрывных нагрузок с действующими силами упругости. Выделение участков образца, на которых эти силы превосходят разрывные нагрузки и происходит разрыв нитей основы (в приведенной ниже программной процедуре эту операцию выполняет отдельная подпрограмма - функция `maxmass`).
 - 3.4. Пересчет удлинений на участках нитей основы в окрестностях участков разрыва по формуле (2.117).
 - 3.5. Сохранение результатов и значений параметров по всем участкам образца на данном этапе удлинения и переход на следующий этап с возвратом к п.3.1 алгоритма. Цик-

лическое повторение продолжается, пока не будет достигнуто заданное число итераций или не возникнет разрыв по всей ширине образца.

Алгоритм имитации реализован в программной процедуре Matlab **RazrivTkani**, приведенной ниже.

```
function [d,E,Pbr] = RazrivTkani;
Npovt=60; %число шагов нарастания удлинения
no=100; %число нитей основы в образце
ny=200; %число нитей утка в образце
D=1; %удлинение основы на первом шаге
dD=1; %приращение удлинения по шагам
dmas=zeros(ny,no,Npovt); %массив для сохранения результатов моделиро-
вания удлинения основы
CVdo = 0.1; %коэффициент вариации удлинения основы
d=abs(normrnd(D/ny,CVdo*D/ny,ny,no)); %генерация приращений интервалов
между нитями утка при удлинении
dop=zeros(ny,no);
%нормирование удлинений интервалов d между уточинами на D по всем ос-
новам
dsum = sum(d); dn = dsum;
for k=1:ny-1 dn = [dn; dsum]; end;
d = D*d./dn; %нормирование интервалов между нитями утка
Esr = 50; CVE = 0.1;
E = normrnd(Esr, CVE*Esr, ny, no); %генерация модуля упругости
PbrSr = 6; CVPbr = 0.1;
Pbr = abs(normrnd(PbrSr, CVPbr*PbrSr, ny, no)); %генерация абсолютной раз-
рывной нагрузки нитей основы
Db = abs(normrnd(Npovt*dD/ny, 0.05*Npovt*dD/ny, ny, no)); %генерация абсо-
лютного разрывного удлинения нитей основы
Pbrmas = E.*Db; Pb0 = 1.2*min(min(Pbrmas));
indicator = 1; cycle = 0;
while indicator == 1 & cycle < Npovt
    cycle = cycle + 1;
    %начало циклов нарастания удлинений
    dmas(:, :, cycle) = d; %сохранение удлинений в массиве
    p = E.*d; % расчет силы упругости по элементам образца
    Pb = Pb0*ones(ny, no);
    [Pmax,iMax,jMax,i0,j0]=maxmass(p,ny,no,Pb); %поиск элементов с нагрузкой
    более Pbr
    n0 = length(i0);
    for k = 1:n0
        d(i0(1,k), j0(1,k)) = 0; %разрыв нитей
    end;
    % контроль разрыва по всей ширине (всех основных нитей)
    indicator = 1;
    for i = 1:ny
        sum0 = 0;
        for j = 1:no
            if d(i,j) == 0 sum0 = sum0 + 1; end;
        end;
    end;
```



```

    if sum0 >= no    indicator = 0;    end;
end;
nMax = length(Pmax);
%пересчет удлинений в напряженных элементах с распространением его на
соседние участки
i = 1:ny; j = 1:no;
for k = 1:nMax
    dop = dop + Pmax(1,k) / 1000 * exp(-abs(i - iMax(1,k)) /
cycle) * exp(-abs(j - jMax(1,k)) / cycle);
end;
for i = 1:ny for j = 1:no
    if d(i,j) > 0 %проверка на отсутствие разрыва
        d(i,j) = d(i,j) + dop(i,j); %коррекция удлинения на дополнительное
удлинение
    end;    end;    end;
% пересчет удлинений и перенормировка по элементам с учетом разрывов
dsum = sum(d); dn = dsum;
for k = 1:ny-1 dn = [dn; dsum];    end;
D = D + dD; d = D * d ./ dn;
end;
K = [1 20 (cycle - 5):cycle]; %номера циклов, выводимых на печать
figure, surf(dmas(:,:,1)); colormap(gray(2));
for ik = 1:length(K)
    figure, pcolor(dmas(:,:,K(1,ik))); colormap(gray(2));
end;
figure, surf(dmas(:,:,cycle)); colormap(gray(2));
end

function [Pmax, iMax, jMax, i0, j0] = maxmass(p, n1, n2, Pb);
pMax=p(1,1); iMax=1; jMax=1;
for i=1:n1 for j=1:n2
    if p(i,j) > pMax
        pMax=p(i,j); iMax=i; jMax=j;
    end; end; end;
pMax=Pb; Ppred=0.9*pMax; Pbr=0.95*pMax; Pmax=[]; i0=[]; j0=[];
for i=1:n1 for j=1:n2
    if p(i,j) > Pbr
        i0=[i0 i]; j0=[j0 j];
    else
        if p(i,j) > Ppred
            iMax=[iMax i]; jMax=[jMax j]; Pmax=[Pmax p(i,j)];
        end; end; end; end;

```

Поясним некоторые элементы алгоритма и программы. При имитации удлинения образца предполагается, что удлинение образца осуществляется циклически, с добавлением на каждом шаге абсолютного удлинения величиной dD . Начальное удлинение образца равно D . Поэтому в среднем на каждое расстояние между соседними нитями утка приходится удлинение, равное D / ny . Среднеквадратическое отклонение этого удлинения равно $CVdo D / ny$, где $CVdo$ - коэффициент вариации удлинения основных

нитей на разных участках их длины. Выбор нормального закона распределения для случайных вариаций можно обосновать относительно малой величиной вариаций и действием центральной предельной теоремы теории вероятностей. На основании значений массивов данных для этих характеристик нитей основы вычисляется нижняя граница разрывной нагрузки Pb_0 , по которой и определяется момент разрыва нити основы.

В модели рассматривался образец, состоявший из 100 основных и 200 уточных нитей. Моделировалось 60 повторных циклов удлинения образца. На рис.2.11 и 2.12 видно, как с нарастанием числа циклов на средне-статистически однородном фоне расположения нитей постепенно появляются нарушения, которые затем развиваются, перераспределяются по площади образца, пока не достигают конечного состояния, зависящего от либо от заданного числа циклов, либо от достижения разрыва по всей ширине образца. К сожалению, вывод изображений в черно-белой палитре и в штриховых рисунках не позволяет отобразить получаемое многообразие распределения дислокаций - локальных зон концентрации деформации в образце. Трехмерные изображения величины деформации показывают постепенно нарастающую деструкцию образца.

Один из вариантов реализации алгоритма позволил получить серию изображений, показывающую распространение разрывов нитей основы в образце по мере его удлинения, которые показаны на рис.2.11. Образец образован 80 нитями основы и 80 нитями утка. Следует отметить нелинейный характер нарастания дислокаций. Если на первых 2/3 циклов однородность образца практически не нарушалась (происходило накопление деформации в пределах существовавшей структуры ткани), то начиная с некоторого уровня деформации нарастание дислокаций происходит лавинообразно.

Другой вариант образца приведен на рис.2.12. Здесь 200 нитей утка и 100 нитей основы при 60 циклах нарастания удлинения. На рис.2.13 приведены трехмерные диаграммы распределения удлинения участков нитей основы в начале моделирования и после 60-го цикла. Они подтверждают начальное статистическое однородное распределение удлинений, которое вследствие статистического разброса приводит к постепенному усилению различия в деформации разных участков и образованию дислокаций.

Оценка динамики развития деформации и разрыва в образце с использованием построенной модели связана с выбором информативных показателей статистической неоднородности двумерного поля деформаций $d(i, j)$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. На рис.2.14 приведены гистограммы распределения значений удлинения $d(i, j)$ участков основных нитей на разных циклах C удлинения - начального $C = 0$ последних шести до завершения имитации. Для большей наглядности на рис.2.15 приведены те же гистограммы с логарифмической шкалой по оси абсцисс.

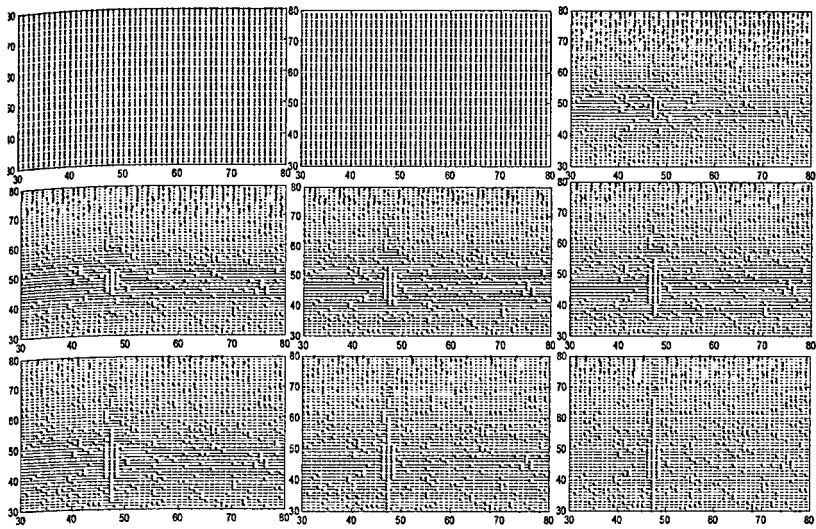


Рис.2.11. Номера циклов: 1-й, 5-й, 10-й, 20-й, 28-й, 30-й.

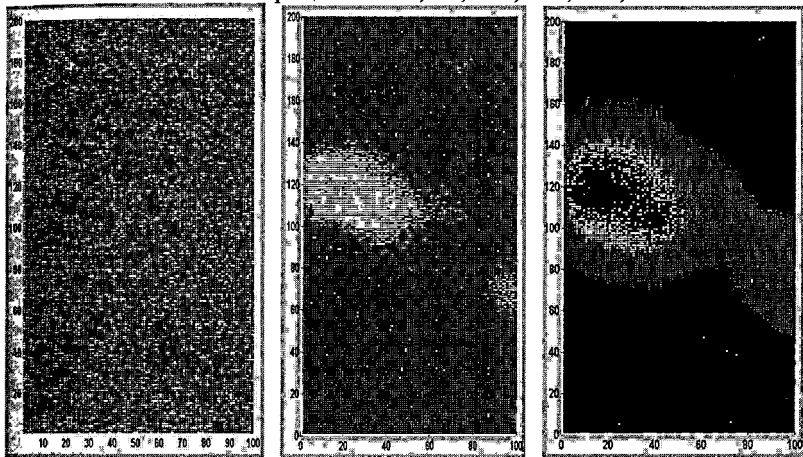


Рис.2.12. Начальное состояние образца, после 55-го цикла, после 60-го цикла. Белый цвет соответствует участкам с наибольшей деформацией, черный - с наименьшей деформацией, либо разорвавшимся нитям.

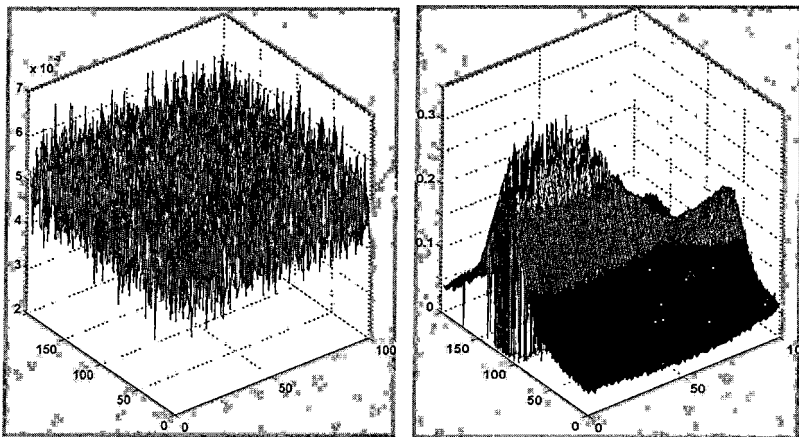


Рис.2.13 Распределение удлинения нитей основы в начальном состоянии и после 60-го цикла

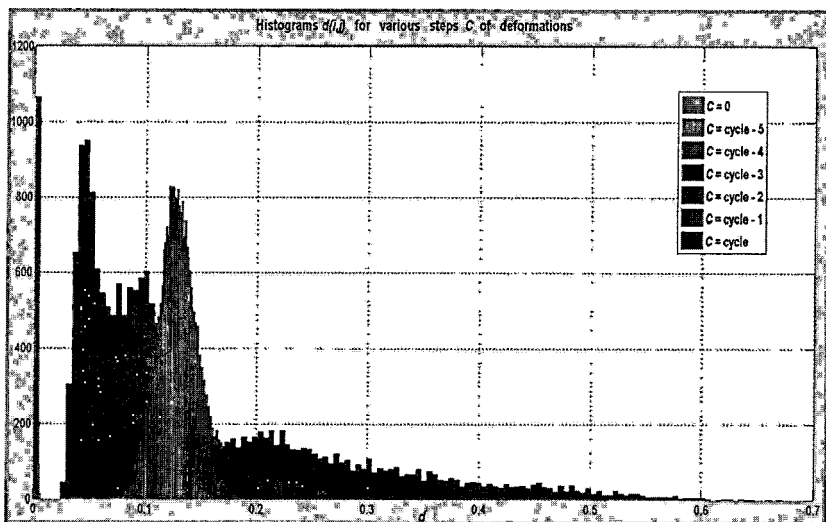


Рис.2.14. Гистограммы удлинения нитей основы для разных циклов

На рисунках видно существенное изменение не только абсолютных значений удлинения, но и формы распределения. Последнее обстоятельство является доказательством хаотизации деформации и лавинообразного развития процесса разрыва.

На рис.2.16 приведена динамика изменения среднего значения dSr , медианы $dMed$, максимального $dMax$, минимального $dMin$ и среднеквадратического отклонения $dSKO$ в зависимости от номера цикла удлинения C .

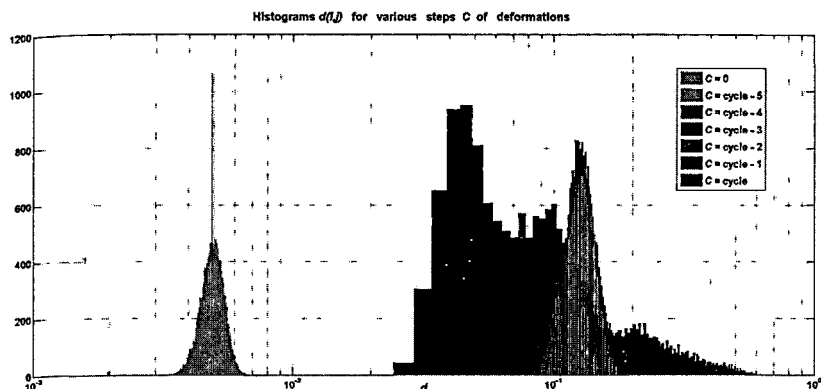


Рис.2.15. Гистограммы (рис.2.14) в полулогарифмическом масштабе

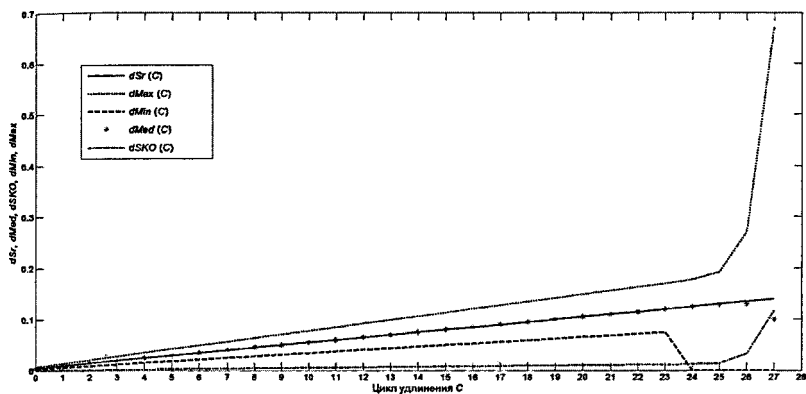


Рис.2.16. Динамика нарастания деформации и разрывов с ростом числа циклов удлинения

Оценки получены с помощью гистограмм (рис.2.14) и также отображают нарастание деформации и процесс разрыва образца.

2.8. Моделирование испытаний образцов тканей на истирание

В настоящее время существует большой ассортимент текстильных полотен специального назначения. Особое место среди них занимают ткани для рабочей одежды работников нефтегазовой и других отраслей, обладающие анти-электростатическими свойствами со встроенными токопроводящими волокнами и/или нитями. Эти ткани должны обладать комплексом защитных, гигиенических, технологических и эксплуатационных свойств, обеспечивающих безопасность труда, защиту от воздействия вредных производственных факторов. При этом одежда из этих тканей

должна быть гигиеничной, удобной, нетоксичной, износостойкой, а так же удовлетворять эстетическим требованиям и корпоративному стилю.

Одним из наиболее важных эксплуатационных показателей для спецодежды является износостойкость. изнашивание одежды под воздействием сложного комплекса механических, физико-химических и биологических факторов, протекающее во времени, вызывает изменения в микро- и макроструктуре тканей. Эти изменения ухудшают свойства тканей и приводят к их разрушению, что совершенно недопустимо для спецодежды, эксплуатируемой на предприятиях с повышенным уровнем вредных производственных факторов. Основной причиной изнашивания тканей для спецодежды является воздействие механических факторов износа, в первую очередь, трения, которое влечет за собой разрушение ткани от истирания. Прогнозирование истираемости тканей возможно лишь при наличии математических и компьютерных моделей, связывающих параметры строения и сырья ткани и показатели истираемости.

Эти же модели открывают путь к автоматизации задач прогнозирования, оптимизации структуры, обработки данных. Однако построение такого рода моделей невозможно без анализа существующих методов исследования и накопления информации о свойствах уже существующих тканей. Поэтому актуальной является задача сравнения и оценки существующих методик испытаний тканей на истираемость.

В настоящее время существует несколько государственных стандартов на методы определения стойкости к истиранию текстильных материалов. Для рассматриваемой группы тканей на практике используется метод истирания по ГОСТ 18976 на приборе ДИТ или ИТ-3М.

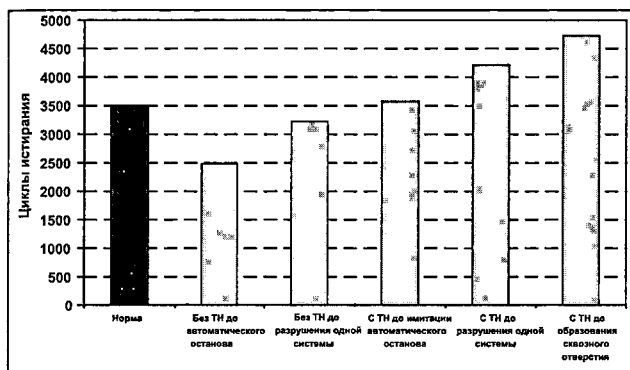
Чтобы проводить истирание тканей специального назначения с токопроводящей нитью по ГОСТ 18976, необходимо либо извлекать из структуры ткани токопроводящую нить, либо не использовать контактный датчик из нихромового провода, предназначенный в приборе для автоматического останова испытаний. Извлечение токопроводящей нити из ткани является трудоемкой и длительной процедурой с использованием дополнительных приспособлений – специальной иголки, лупы, микроскопа и проч. Кроме того, извлечение токопроводящей нити приводит к нарушению первоначальной структуры ткани и, как следствие, к недостоверным результатам испытания.

При проведении испытания без контактной нихромовой проволоки не происходит автоматического останова прибора при контакте нихромовой проволоки с грибком прибора, т.е. происходит ручной останов прибора в момент, определяемый испытателем.

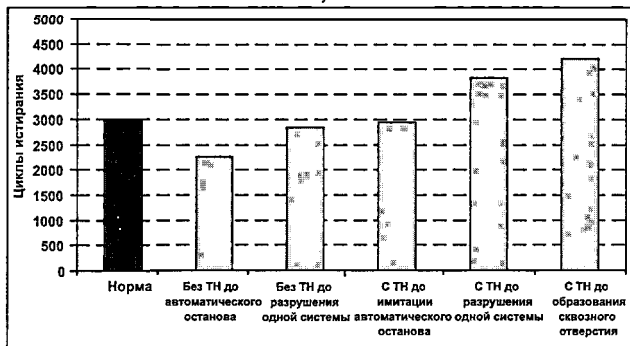
С целью анализа и сравнения результатов истирания в зависимости от различных условий и стадий завершения испытания, было проведено экспериментальное истирание нескольких тканей специального назначения.

Сначала испытания проводились на образцах с предварительно извлеченными токопроводящими нитями, с использованием контактной нихромовой проволоки, до автоматического останова прибора. Затем удаляли контактный датчик и продолжали испытания до разрушения одной системы нитей.

Далее испытания проводили на образцах тех же тканей с токопроводящей нитью, не используя контактный датчик, до имитации состояния автоматического останова, до разрушения одной системы нитей и до образования сквозного отверстия. Результаты испытаний представлены в виде гистограмм на рис.2.17.



а)



б)

Рис.2.17. а) Ткань «Rigchief Universab» арт. 103383

б) Ткань «Премьер FR-350» арт. 10202a-M

Из данных рис.2.17 видно, что результаты, полученные при истирании тканей без токопроводящей нити, намного ниже нормы. Число циклов истирания образцов на приборе без нихромовой проволоки может варьироваться в широких пределах и зависит от субъективной оценки заверше-

ния испытаний.

Для практического подтверждения полученных данных в четырех аккредитованных лабораториях проведены межлабораторные сравнительные испытания по показателю "стойкость к истиранию" антиэлектростатических тканей для специальной одежды по ГОСТ 18976. Характеристики антиэлектростатических тканей представлены в табл.2.3. Полученные результаты испытаний представлены в табл.2.4.

Таблица 2.3

Наименование ткани	Сырьевой состав ткани, %	Поверхностная плотность ткани, г/м ²
«Лидер-Комфорт 250», арт. 18422 а/х-М	Основа, уток: см. пр. Х/Б-80, ПЭ-20; токопроводящая нить – ПЭ к.н.+ Ме-сод.	255±10
«TRITON-T»	Основа, уток: см. пр. Х/Б-80, ПЭ-20 токопроводящая нить – ПЭ + Ме-сод.	250±12,5
«ГРЕТА-М», арт. 8С60-КВК	Основа: к.н. ПЭ-49 токопроводящая нить – ПЭ + Ме-сод. Уток: Х/Б-51	212-15
«ДИОРИТ-М», арт. 03С8-КВК	Основа: к.н. ПЭ-37, токопроводящая нить – ПЭ + Ме-сод. Уток: Х/Б-63	235-16

Таблица 2.4

Наименование ткани	Испытательные лаборатории				Норма
	А	В	С	Д	
«Лидер-Комфорт 250», арт. 18422 а/х-М	4318	4520	8016	5253	3500
«TRITON-T»	4707	4734	5029	5557	4000
«ГРЕТА-М», арт. 8С60-КВК	5638	5793	6312	5237	4500
«ДИОРИТ-М», арт. 03С8-КВК	8994	9017	9554	6191	5000

Из табл.2.3 следует, что результаты испытания одних и тех же тканей, полученные от разных испытательных лабораторий, значительно отличаются друг от друга, что объясняется существенным влиянием субъективного фактора момента окончания испытания. Из рис.2.18 видно, что образцы из лаборатории А истерты до дыры, соизмеримой с диаметром контактного датчика.

Образцы, полученные из лаборатории D, истерты до частичного раз-

рушения нитей одной системы. Образцы из лаборатории В истерты до полного разрушения одной системы нитей. Образцы, полученные из лаборатории С, истерты до сквозного отверстия диаметром, приблизительно равным 1 см.

Сравнение данных межлабораторных сравнительных испытаний приводит к выводу, что методика по ГОСТ 18976 не может применяться для группы тканей с токопроводящими нитями, поскольку отсутствует единый критерий завершения истирания тканей специального назначения с токопроводящей нитью.

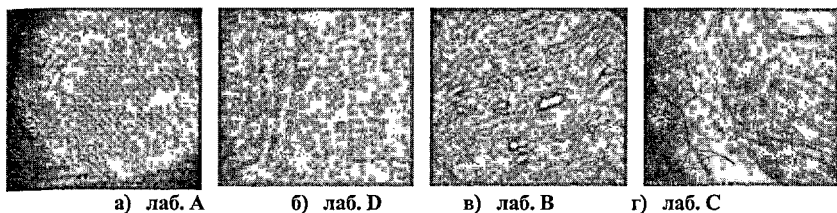


Рис.2.18

В связи с этим была предложена и опробована методика определения стойкости к истиранию по плоскости тканей для спецодежды, содержащих токопроводящие волокна и/или нити, основанная на оценке потери массы образца ткани при истирании до заданного числа циклов. Данная методика не имеет отмеченных выше недостатков, оказалась эффективной при практическом применении и может быть успешно использована для получения данных о динамике истирания тканей.

Эта методика позволяет целенаправленно спланировать и провести серии экспериментов, которые дают информацию достаточного объема и точности для построения математических и компьютерных моделей, описывающих закономерности и зависимости между особенностями строения и структуры электропроводящих тканых полотен для спецодежды и их истираемостью. Такие модели необходимы как в автоматизированных измерительных комплексах по испытанию свойств специальных тканей, так и с целью прогнозирования свойств тканей новых структур.

Таким образом, отсутствие единого стандартного критерия окончания испытания по показателю "стойкость к истиранию по плоскости" тканей для спецодежды, содержащих токопроводящие волокна и/или нити, приводит к результатам с большим значением размаха варьирования определяемого показателя качества для одних и тех же тканей, испытанных в различных лабораториях.

Предложенная методика проведения испытаний тканей с токопроводящими волокнами и/или нитями позволяет получить достаточно информации для построения адекватных математических и компьютерных моделей динамики истирания тканей специального назначения.

2.9. Исследование динамики истирания и сравнение методик приборов ИТ-3М и Martindale

В настоящее время известны две методики, позволяющие определять показатель "стойкость к истиранию" тканей специального назначения, содержащих токопроводящую нить – ГОСТ 18976 и ГОСТ Р 51552. В России для определения стойкости к истиранию антиэлектростатических тканей специального назначения широко используется методика ГОСТ 18976. Сущность методики заключается в определении количества циклов истирания, выдерживаемых тканью до разрушения. Однако, данная методика не распространяется на ткани с применением металлических и металлизированных нитей. Для того, чтобы проводить истирание тканей специального назначения с токопроводящей нитью по ГОСТ 18976, необходимо либо извлекать из структуры ткани токопроводящую нить, либо не использовать контактный датчик из нихромового провода, предназначенный в приборах ДИТ-М и ИТ-3М для автоматического останова испытаний. В первом случае результаты испытаний будут недостоверными, т.к. нарушается первоначальная структура ткани. Во втором случае – отсутствует единый стандартный критерий окончания испытаний, что приводит к результатам с большим значением размаха варьирования определяемого показателя качества для одних и тех же тканей, испытанных в различных лабораториях.

В результате анализа существующих проблем была разработана и опробована новая методика определения стойкости к истиранию тканей для спецодежды, содержащих токопроводящие нити. Методика разработана путем дополнения и внесения изменений в ранее существующую методику [1,2]. Она не имеет вышеперечисленных недостатков, оказалась эффективной при практическом применении и может быть использована для получения данных о динамике истирания тканей.

Сущность методики заключается в оценке потери массы образца ткани при истирании до заданного числа циклов. Испытания по определению стойкости к истиранию исследуемой группы тканей по предложенной методике проводились на приборе ИТ-3М и приборе для определения устойчивости к истиранию тканей по методу Мартиндаля (UGT-7012-M8), с целью выявления наличия или отсутствия корреляционной зависимости между полученными данными. Зависимость между величиной коэффициента корреляции и числом испытаний, необходимых для получения его достоверности, известна.

Исследования проводились на нескольких типовых образцах антиэлектростатических тканей для специальной одежды. В качестве примера представлены результаты испытания двух образцов тканей, краткая характеристика которых представлена в табл.2.5.

Исследования проводились путем постадийного истирания тканей на приборах ИТ-3М и Мартиндаля. В качестве критерия степени истирания принята потеря массы образцов, которая определяется отношением разно-

сти показателей до и после испытания к первоначальному значению показателя. Она полностью отвечает требованиям, предъявляемым к параметрам оптимизации, т.е. является количественной, однозначной и статистически эффективной.

Таблица 2.5

Наименование ткани	Сырьевой состав ткани, %	Поверхностная плотность ткани, г/м ²
Rigchief Universal, арт. 103383	Основа, уток: Х/Б-100; Токопроводящая нить – ПЭ + Ме-сод.	320 ± 16
«Лидер-Комфорт 250», арт. 18422 а/х-М	Основа, уток: см. пр. Х/Б-80, ПЭ-20; токопроводящая нить – ПЭ к.н.+ Ме-сод.	255±10

Для получения зависимости изменения потери массы ткани в результате истирания на приборе ИТ-3М производили измерение потери массы образцов после 2000, 2500, 3000, 3500, 4000 циклов для всех исследуемых тканей. В качестве абразива использовалось серошерстяное сукно арт. 6405. Смена абразива производилась после каждой заправки. Полученные результаты представлены в табл.2.6.

Таблица 2.6

Количество циклов истирания	Потеря массы, %	
	Rigchief Universal, арт. 103383	«Лидер-Комфорт 250», арт. 18422 а/х-М
2000	2,58	1,45
2500	3,11	1,84
3000	5,05	2,63
3500	9,92	3,52
4000	14,38	4,87

На основании этих данных построены регрессионные зависимости изменения потери массы $m(t)$ тканей от количества тысяч циклов t истирания на приборе ИТ-3М. Эти зависимости имеют вид

$$\text{арт. 103383: } m_1(t) = 0,555t^3 - 2,067t^2 + 3,057t; \quad R^2 = 0,990$$

$$\text{арт. 18422: } m_2(t) = 0,278t^2 + 0,070t; \quad R^2 = 0,988$$

Графики зависимостей представлены на рис.2.19. Значения R^2 равны квадратам коэффициентов детерминации, характеризующим степень достоверности полученных регрессий.

Для получения зависимости изменения потери массы ткани от количества циклов истирания на приборе Martindale образцы истирались до 15000, 20000, 25000, 30000, 35000 циклов. Потерю массы образцов определяли после каждой стадии истирания. В качестве абразива на приборе Martindale использовалась шерстяная абразивная ткань. Смену абразива осуществляли после 50000 циклов истирания. Результаты испытаний представлены в табл.2.7. На основании полученных данных построены регрессионные зависимости изменения потери массы тканей $m_{1,2}(t)$ от количества

тысяч циклов t истирания на приборе Martindale. Эти зависимости имеют вид

$$\text{арт. 103383: } m_1(t) = -0,0063t^2 + 0,568t; \quad R^2 = 0,981$$

$$\text{арт. 18422: } m_2(t) = 0,007t^2 + 0,142t; \quad R^2 = 0,992$$

Графики зависимостей представлены на рис.2.20. Отметим, что близкие по величине потери массы у тканей обоих артикулов достигаются на приборе Martindale при числе циклов на порядок большем, чем на приборе ИТ-3М. Следовательно, прибор Martindale осуществляет процесс истирания более «деликатно», позволяя исследовать его динамику более детально, чем на приборе ИТ-3М.

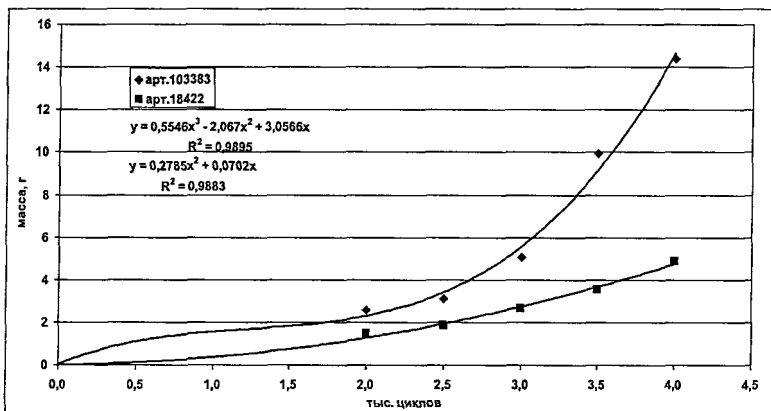


Рис.2.19. Экспериментальные данные и линии регрессионных зависимостей потери массы при истирании на приборе ИТ-3М

Для наглядности на рис.2.21 приведены фотографии образцов ткани арт. 103383, снятых с приборов ИТ-3М и Martindale при приблизительно одинаковых потерях массы после указанного на рисунке числа циклов истирания (числитель – прибор ИТ-3М, знаменатель – прибор Martindale). На рис.2.22 показаны аналогичные результаты для ткани арт. 16422.

Таблица 2.7

Количество циклов истирания	Потеря массы, %	
	Rigchief Universal, арт. 103383	«Лидер-Комфорт 250», арт. 18422 а/х-М
15000	7,36	3,8
20000	8,88	5,11
25000	10,02	7,59
30000	11,03	10,64
35000	12,37	12,81

Фотографии подтверждают сделанные выводы о существенном различии в динамике процесса истирания на сравниваемых приборах. Если на

приборе ИТ-3М после определенного числа циклов начинается интенсивное и все возрастающее разрушение нитей ткани на локальном участке области истирания, то на приборе Martindale истирание происходит по всей рабочей поверхности образца более равномерно в течение гораздо большего числа циклов, и картина разрушения нитей отличается от аналогичного явления на приборе ИТ-3М.

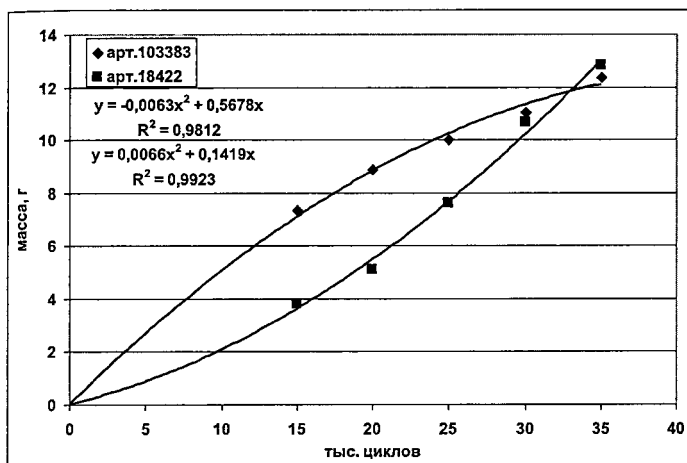


Рис.2.20. Экспериментальные данные и линии регрессионных зависимостей потери массы при истирании на приборе Martindale

2.10. Экспериментальные исследования истирания тканей специального назначения на основе метода Martindale

Истирание локальных участков тканей на изделиях в ходе их эксплуатации является одной из главных причин потери этими изделиями своего потребительского назначения и основным видом физического износа этих изделий. Истирание тканей происходит в результате их механического трения о другие предметы, к которым прикасается ткань, или о другие участки той же ткани.

В отличие от других видов износа характерным признаком истирания является потеря тканью части волокнистой массы элементами истираемого участка. При этом, как правило, происходит изменение структуры истираемого участка ткани, которое, в свою очередь, отражается на интенсивности дальнейшего истирания. Таким образом, истирание ткани представляет собой динамически развивающийся процесс с изменяющимися в ходе этого процесса параметрами локального участка ткани.

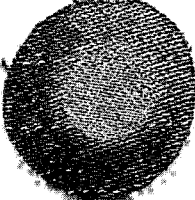
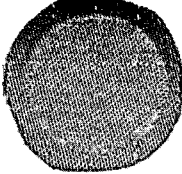

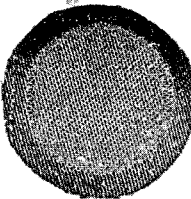
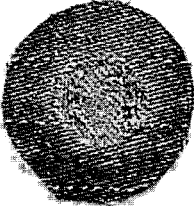
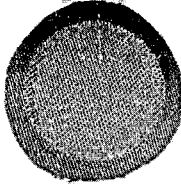
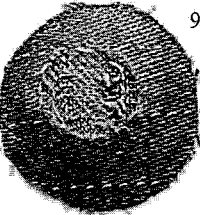
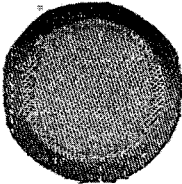
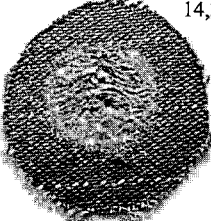
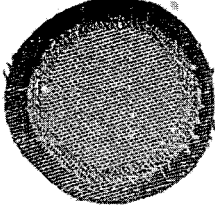
Циклы	ИТ-3М	Мартиндаль
2000/ 15000	 2,58%	 7,36%
2500/ 20000	 3,11%	 8,88%
3000/ 25000	 5,05 %	 10,02%
3500/ 30000	 9,92 %	 11,03%
4000/ 35000	 14,38 %	 12,37%

Рис.2.21

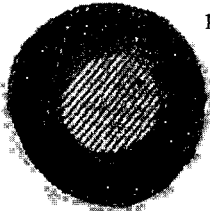
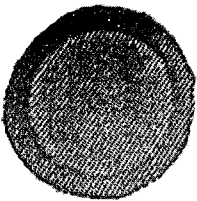
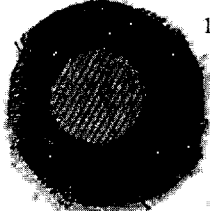
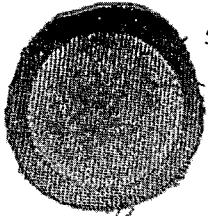
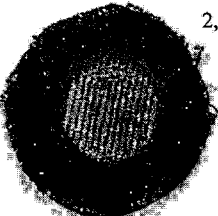
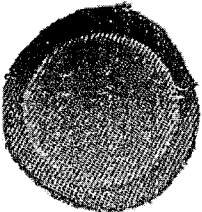
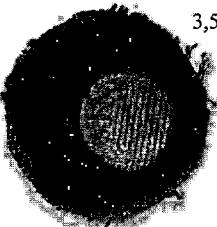
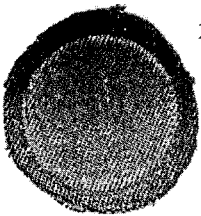
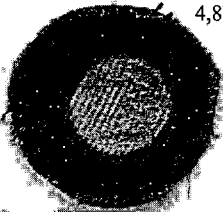
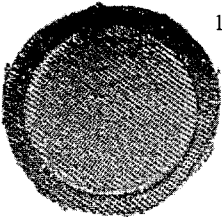
Циклы	ИТ-3М	Мартиндаль
2000/ 15000	 1,45%	 3,80%
2500/ 20000	 1,84%	 5,11%
3000/ 25000	 2,63 %	 7,59%
3500/ 30000	 3,52 %	 10,64%
4000/ 35000	 4,87 %	 12,81%

Рис.2.22

Важнейшим фактором, оказывающим влияние на динамику истирания, является вероятностная природа важнейших геометрических и физико-механических характеристик ткани. Структура ткани, связанная с раппортом переплетения основных и уточных нитей, является периодической. Однако в масштабах одного или малого числа раппортов характеристики нитей: диаметр, плотность волокон, скрученность, ворсистость, показатели трения и сцепления, - подвержены заметным случайным вариациям. Вследствие переплетения нити в ткани деформированы. Случайные вариации наблюдаются и в этих деформациях: в степени изогнутости, смятия, смещении положения, пористости структуры ткани и других показателях. По перечисленным причинам процесс истирания ткани с точки зрения моделирования систем следует отнести к классу нестационарных динамических стохастических процессов с переменными параметрами.

Простейшая математическая модель, описывающая процесс истирания локального участка ткани, может быть представлена дифференциальным уравнением

$$\frac{dm(t)}{dt} = -A(m(t), t)m(t) \quad (2.118)$$

где $m(t)$ – масса истираемого участка в момент времени t , $A(\dots)$ – функционал, определяющий скорость уменьшения плотности массы в единицу времени.

В линейном приближении этот функционал равен

$$A(m(t), t) = a_0 + a_m m(t) + a_t t \quad (2.119)$$

где a_0 , a_m , a_t – некоторые коэффициенты, зависящие от перечисленных выше характеристик нитей и образованного ими участка ткани.

Уравнение (2.118) с функционалом (2.119) является уравнением Бернулли, которое преобразуется в линейное уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} - (a_0 + a_m t)u(t) = a_t, \quad u(t) = m^{-1}(t) \quad (2.120)$$

Задача Коши для этого уравнения при начальном условии $m(t=0) = m_0$ и может быть решено аналитически. Решение имеет вид

$$u(t) = \exp \left[-(a_0 t + a_t t^2) \left(m_0^{-1} + a_m \int_0^t \exp(-a_0 \tau - a_t \tau^2) d\tau \right) \right] \quad (2.121)$$

На рис.2.23 представлена динамика уменьшения массы $m(t)$ согласно формуле (2.121) при двух вариантах исходных данных, отличающихся знаком коэффициента a_m : 1) $m_0 = 1$ г; $a_0 = 0,1$ с⁻¹; $a_m = 0,1$ г⁻¹ с⁻¹; $a_t = 0,1$ с⁻², и 2) $m_0 = 1$ г; $a_0 = 0,1$ с⁻¹; $a_m = -0,1$ г⁻¹ с⁻¹; $a_t = 0,1$ с⁻².

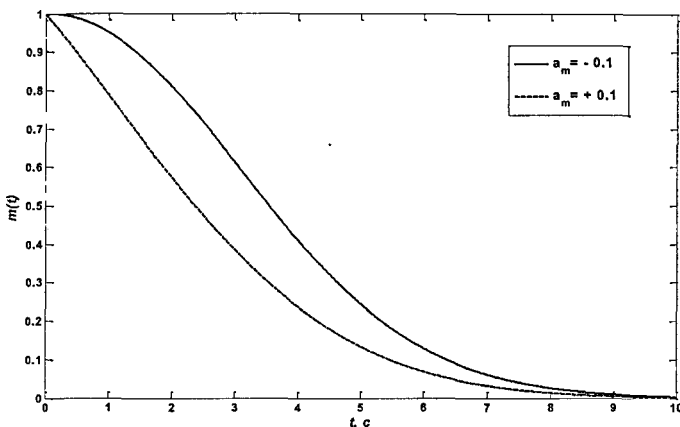


Рис.2.23. Динамика уменьшения массы образца ткани при стирании

В модели (2.118) - (2.119) не учитываются статистический характер истирания ткани и ее специфическая периодическая структура. Несомненным преимуществом модели является существование конечного выражения (2.121), которое в явном виде описывает изменение массы стираемого участка. Подбирая оптимальные значения параметров модели (коэффициенты a_0 , a_m , a_t) по данным натуральных экспериментов, можно получить адекватную модель для прогнозирования степени истираемости конкретной ткани за определенный интервал времени истирания.

Для получения экспериментальных данных разработаны методики и созданы соответствующие приборы, осуществляющие процесс истирания образцов испытываемых тканей. Однако некоторые типы специальной защитной одежды для газовщиков, нефтяников и работников других отраслей изготавливают из тканей, к которым стандартные методики не пригодны. Так, износ тканей с токопроводящими нитями нельзя проверять по стандартной методике, поскольку на приборах ДИТ-М и ИТ-3М, используемых по такой методике, фиксация момента окончания испытаний происходит по электрическому замыканию контакта при появлении сквозного отверстия в образце. В токопроводящих тканях такие замыкания могут происходить на любом этапе испытаний и не отражают истинной картины истирания. Кроме того, в указанных приборах в качестве абразива используются суконные ткани, которые могут сильно отличаться по свойствам в разных сериях, что ведет к разбросу в оценках, далеко выходящему за пределы статистической погрешности.

Поэтому для оценки истираемости тканей специального назначения, содержащих токопроводящие нити, в настоящее время используется методика, предложенная Martindale и реализованная в приборе UGT-7012-M8. В качестве примера в табл.2.8 представлены результаты испытаний на

этом приборе ткани арт. «Universal FR» 240. Здесь n – число циклов истирания, p – процент потери массы образцом.

Из приведенных фотографий образца ткани видно, что наибольшему разрушению подвергаются участки, подвергшиеся наибольшему воздействию со стороны эталонной абразивной ткани. Следует отметить, что при аналогичных испытаниях на приборах ДИТ-М и ИТ-3М истирание образца сопровождается эффектами раздиранья ослабленных участков, что искажает процесс разрушения образца в результате его истирания.

В табл.2.9 приведены данные натурных экспериментов для нескольких артикулов тканей, в которых отражены зависимости потери массы образцами в зависимости от числа циклов истирания.

Из таблицы видно, что, несмотря на примерно одинаковый характер нарастания потери массы образцов с увеличением числа циклов, наблюдаются значительные отличия между ними, зависящие от артикула ткани.

2.11. Компьютерная модель истирания ткани

Истирание материала является одним из видов его разрушения. Оно заключается в отделении от поверхности материала малых фрагментов под действием касательных сил.

Механизм истирания твердого материала выглядит примерно следующим образом. Поверхность материала всегда имеет микронеровности. Их профиль, как правило, случаен, а высота от среднего уровня колеблется от долей миллиметра до тысячных или десятитысячных долей миллиметра. Истирающее воздействие осуществляется поверхностью другого материала (истирающей поверхностью), которая прижимается к истираемой поверхности силами нормального давления. При этом происходит не только касание истираемой и истирающей поверхностей в отдельных точках, но и деформация сжатия или смятия отдельных участков обеих поверхностей.

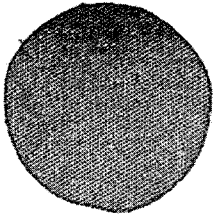
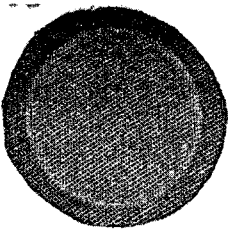
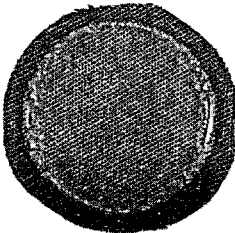
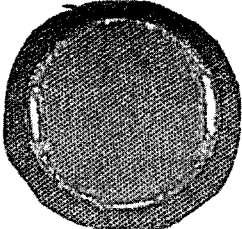
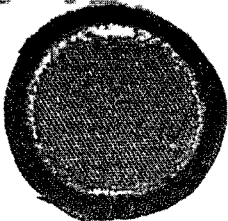
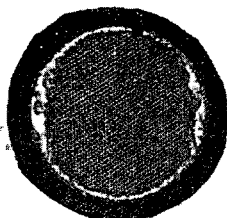
При относительном перемещении поверхностей вдоль плоскости на участках их соприкосновения действуют касательные нагрузки. Их действие приводит к смещению участков материала – деформациям сдвига и/или среза. Когда смещение превосходит предельную величину деформации, происходит отделение участка поверхности или ее фрагмента. Отделенная часть поверхности либо соединяется с поверхностью материала на соседних участках, либо полностью отрывается от материала.

Первый случай – соединение – характерен для материалов с идеальной молекулярной и надмолекулярной структурой твердого материала с поверхностью, близкой к идеально отполированной, т.е. с минимальными неровностями. Этот случай и означает полирование поверхности материала как результат взаимодействия его поверхности с поверхностью другого материала. Второй случай – отрыв – и представляет собой процесс истирания. Важно, что все эти процессы взаимодействия поверхностей двух ма-

териалов происходят лишь в поверхностной зоне материала и не распространяются на его глубину.

Таблица 2.8

Результаты истирания ткани арт. «Universal FR» 240

n , p	0 0%	$1,0 \cdot 10^4$ 8,11%	$1,5 \cdot 10^4$ 12,73%
Вид образца			
n , p	$2,0 \cdot 10^4$ 14,65%	$2,5 \cdot 10^4$ 20,22%	$3,0 \cdot 10^4$ 22,98%
Вид образца			

Истирание всегда взаимно, т.е. ему подвергаются обе взаимодействующие поверхности. Поэтому при исследовании истирания важно, чтобы истирающая поверхность была "эталонной", одинаковой для всех сравниваемых материалов и истиралась значительно медленнее, чем исследуемый материал.

Иную картину представляет процесс истирания волокнистого материала. При соприкосновении поверхностей двух волокнистых материалов - истирающего и истираемого - происходит касание и зацепление между волокнами этих поверхностей. При относительном перемещении поверхностей вдоль касательной плоскости фрагменты наиболее слабых волокон могут отрываться. Другие волокна частично извлекаются из материала и меняют свою форму, расположение в материале и взаимодействие с остальной массой волокнистого материала.

Если волокно благодаря своей длине заходит глубоко в объем материала, то для его извлечения требуются значительные и длительные воздействия. То же происходит, если волокно находится на поверхности истираемого материала, но сильно связано во многих точках своей длины с другими волокнами.

Таблица 2.9

Результаты испытаний по истиранию тканей на приборе UGT-7012-M8

Артикул	Сырьевой состав	PP, г/м ²	n	p
Арт. "СТ-21А"	Основа, уток: х/б-100; токопровод. нить – см. пр. ПЭ, х/б + Ме-сод.	275±14	10000	2,64
			15000	3,21
			20000	4,37
			25000	5,19
			30000	6,35
арт. "TRITON-T"	Основа, уток: см. пряжа х/б - 80 ПЭ - 20 включая токопровод. нить – ПЭ + Ме-сод.	250±12,5	10000	2,04
			15000	2,53
			20000	3,08
			25000	4,24
			30000	4,81
"Премьер FR-350" арт. 10202а-М	Основа, уток: х/б-100; включая токопровод. нить – к.н. ПЭ + Ме-сод.	340±17	10000	2,72
			15000	5,45
			20000	5,91
			25000	8,91
			30000	10,49
Арт. "Universal FR" 240	Основа, уток: х/б-100; включая токопровод. нить – х/б + Ме-сод.	240±12	10000	8,11
			15000	12,73
			20000	14,65
			25000	20,22
			30000	22,98
Арт. СТ-20А	Основа, уток - см. пряжа: х/б - 60, ПЭ - 40; включая токопровод. нить – см. пряжа ПЭ, х/б + Ме-сод.	215±10	10000	3,12
			15000	3,81
			20000	4,66
			25000	6,88
			30000	9,33

На первом этапе процесса истирания уменьшается объемная или поверхностная плотность волокнистого материала. Это приводит к значительному сокращению количества контактов между волокнами в единице объема и тем самым увеличивает вероятность излучения отдельных волокон из поверхности.

Второй процесс при истирании - отрыв фрагмента волокна от остальной его части. Он возможен, если сила, приложенная в некоторый момент времени к конкретному волокну, оказалась больше его предела прочности. Как извлеченные волокна, так и оторванные фрагменты волокон в дальнейшем не участвуют в сопротивлении материала истиранию. Они вместе образуют ту убыль массы, которая и проявляется как процесс истирания.

Очевидно, что все эти процессы сугубо стохастические. В них участвует большое число разных факторов геометрической, механической и физической природы. Поэтому для моделирования истирания возможны два подхода. При первом подходе стохастический характер процесса игнорируется. Рассматривается динамика усредненных показателей. Весь описанный выше механизм процесса прячется в нескольких коэффициентах, отражающих интегральные свойства материала по отношению к истираю-

щим воздействиям. В этом случае невозможно обнаружить роль отдельных факторов иначе, как натурными экспериментами, результаты которых обычно отображают эмпирическими регрессионными зависимостями.

При втором подходе приходится разрабатывать набор моделей, описывающих разные стороны механизма истирания, связывать их между собой для получения общей модели. Этот путь теоретически и алгоритмически сложен и не гарантирует успеха в конце пути.

Оценим среднее число волокон на 1 кв.мм поверхности волокнистого материала. В качестве исходного значения примем, что плотность материала равна 1 г/мм^3 , а линейная плотность волокна равна $1/6 \text{ 000 г/м} = 1/6 \text{ 000 000 г/мм}$. Тогда в 1 мм^3 материала находится 6.000 000 мм длины волокон. Считая, что их средняя длина в 1 мм^3 равна 1 мм, получаем, что среднее число отрезков волокон в 1 мм^3 равно 6 000 000. Если объемная плотность материала волокна равна $1,5 \text{ г/мм}^3$, то волокна заполняют часть 1 мм^3 объема, равную $1/1,5 = 0,66$, т.е. примерно $2/3$ объема материала. При истирании воздействию подвергается только тонкий поверхностный слой волокнистого материала. При толщине этого слоя $0,01 \text{ мм}$ получаем, что на площади в 1 мм^2 будет находиться примерно 60 000 отрезков волокон длиной около 1 мм.

Модель истирания

Для моделирования процесса истирания ткани была разработана компьютерная имитационная статистическая модель. Она дала возможность учесть специфику структуры образцов истираемых тканых полотен, статистический разброс характеристик различных локальных участков образца, изменение свойств волокнистой массы в процессе истирания, в частности, плотности, коэффициентов трения и упругости по отдельным истираемым участкам, а также эффекты пластической необратимой деформации участков.

В модели приняты следующие допущения и следующие физическое представление о процессе истирания. Образец размещен в плоскости $(X; Y)$. Истирание означает постепенную убыль массы по оси Z . Считаем, что в разных точках $(x; y)$ убыль происходит независимо друг от друга. Поэтому отдельные участки нумеруются порядковыми номерами $j = 1, \dots, M$.

Первоначальное распределение плотности волокнистого материала по толщине в точке $(x; y)$ при начальной толщине участка в этой точке $H_0(x; y)$ описывает функция $r_0(h)$. Если толщина участка больше толщины H_s , устанавливаемой внешней нагрузкой, которая прижимает к поверхности истираемого образца истирающую поверхность, то есть $H_0(x; y) > H_s$, то происходит перед началом истирания сжатие этого участка до толщины H_s . При этом плотность материала возрастает и описывается функцией $r_s(h) = r_0(h) H_0(x; y) / H_s$, $0 < h < H_s$.

Разделим общую площадь образца S на M участков площадью $dS = S / M$. Перед началом истирания образец нагружается силой F . Ее действие

приводит к сжатию части участков. Обозначим через $E(j)$ модуль упругой деформации сжатия для участка j , а через J - подмножество участков образца, подвергшихся первоначальному сжатию. Толщина сжатого материала и число сжатых участков должны удовлетворять условию равновесия

$$\sum_{j \in J} E(j) \left(\frac{H_0(j) - H_s}{H_0(j)} \Big|_{H_0(j) > H_s} \right) ds = F \quad (2.122)$$

При известном начальном профиле участков $H_0(x; y) = H_0(j), j = 1, \dots, M$ и модуля упругости $E(j)$ уравнение (2.122) может быть решено методом итераций. Особенность его решения в том, что подмножество J , для которого должно выполняться (2.122), зависит от значения H_s и изменяется при его итеративном поиске.

Обозначим: $m(t)$, г - масса участка материала; $H(t)$, мм - толщина материала; $dS = dXdY$ - площадь рассматриваемого участка. Здесь t - порядковый номер цикла истирания: $t = 0, 1, \dots, T \bmod$; $dm(j, t)$, г - убыль материала на цикле t .

Считаем, что убыль массы материала тем больше, чем меньше плотность (или масса - при постоянной площади dS участка) со случайными вариациями α . Тогда убыль материала на участке j в цикле t можно описать уравнением

$$dm(j, t) = A \frac{m(j, 0)}{m(j, t-1)} (1 + \alpha) \quad (2.123)$$

Здесь коэффициент A равен средней убыли массы при постоянной по толщине плотности участка j истираемого материала. В результате цикла t масса участка уменьшится на $dm(j, t)$: $m(j, t) = m(j-1, t) - dm(j, t)$. Такое уменьшение массы должно привести к уменьшению толщины участка j на величину $dH(j, t) = dm(j, t) / r_s(H(j, t), t)$. Толщина участка должна быть равна $H_s(j, t) = H(j, t-1) - dH(j, t)$.

Однако новый "виртуальный" профиль поверхности $H_s(j, t)$ после цикла t истирания может вновь измениться вследствие постоянно действующей нагрузки F точно так же, как он изменился перед началом всего процесса. Поэтому в соответствии с уравнением (2.122) осуществляется коррекция профиля участков и тем самым - переход от "виртуального" профиля - к реальному профилю $H_s(j, t) \rightarrow H(j, t)$.

Как отмечено выше, процесс истирания является вероятностным. Его ход зависит от многих факторов и случайных вариаций. Поэтому величина истирания разных участков образца различна. С нарастанием числа циклов область истирания локализуется на локальных подмножествах участков. Чтобы учесть в модели этот эффект «положительной обратной связи», следует корректировать величину коэффициента A в формуле (2.123). Предла-

гается следующая корректировочная формула, учитывающая в относительных величинах суммарную величину удаленной массы

$$A(t) = A^p, \quad \text{где } p = \frac{m(j,t)}{m(j,0)} \quad (2.124)$$

Следовательно, перед началом истирания, когда число выполненных циклов t равно нулю, параметр p равен единице, и коэффициент равен своему начальному значению A . Когда же суммарная удаленная масса равна исходной массе данного участка, то остаточная масса и параметр p равны нулю, а коэффициент A равен единице.

Ниже приведен алгоритм моделирования динамики истирания

Алгоритм А2.1

1. Ввод параметров моделируемого образца
2. Задание условий моделирования варианта истираемого образца материала
3. Задание начальных условий и начального состояния модели образца
4. Генерация значений случайных функций и полей для начального состояния образца
5. Моделирование начального сжатия образца под действием нагрузки со стороны истирающей поверхности. Расчет изменения формы поверхности и плотности истираемого образца под действием нагрузки.
6. Имитация удаления части массы с истираемой поверхности. Расчет изменения толщины образца на каждом участке и нового "виртуального" профиля толщины.
7. Пересчет вновь сформированного "виртуального" профиля с учетом сжимающего давления на истираемую поверхность по алгоритму, использованному в п.5.
8. Проверка отсутствия нулевой массы или нулевой толщины по всем участкам образца. Если условие выполнено, то возврат к п.6 для имитации нового цикла истирания. Если условие нарушено (что означает истирание одного из участка до "дыры"), то прекращение имитации и вывод накопленной в процессе моделирования информации для статистической обработки результатов моделирования рассматриваемого варианта образца.

Моделирующий алгоритм **А2.1** с такими возможностями позволил объединить разные аспекты и факторы процесса истирания и построить достаточно полный и гибкий инструмент в виде компьютерной программы для исследования и прогнозирования характеристик истирания.

В модели предполагался следующий механизм истирания образца текстильного полотна. Образец прямоугольной формы размещается в расправленном и натянутом виде на твердой плоской поверхности. Его внешняя поверхность неравномерна по толщине (высоте) и плотности материала из-за неравномерности распределения волокнистой массы в материале и его структурных особенностей, например, переплетения нитей основы и утка в ткани. Поэтому неравномерность содержит как детерминированную периодическую, так и случайную составляющую, причем по обоим показателям: толщине h и объемной плотности ρ . На рис.2.24 приведен пример геометрической модели толщины образца.

Отдельные участки образца подвергаются истиранию независимо

друг от друга. Это позволило перейти от двумерной модели к одномерной геометрической модели образца. Значения h и ρ моделировались по следующим формулам

$$\begin{aligned} h_s(i) &= \text{Distr}_h(m_h, s_h, n) + \text{Per}_h(2\pi i / T_h), \\ \rho_s(i) &= \text{Distr}_\rho(m_\rho, s_\rho, n) + \text{Per}_\rho(2\pi i / T_\rho), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.125)$$

Здесь индекс i нумерует участки прямоугольного образца; Distr_h и Distr_ρ – законы распределения случайных составляющих (например, нормальный закон распределения); m_h, m_ρ, s_h и s_ρ – соответственно средние значения и среднеквадратические отклонения; Per являются периодическими функциями индекса i с периодами T_h и T_ρ ; n – общее число участков, на которые разделен образец.

Перед началом истирания к свободной поверхности образца с постоянной величиной силы давления P прижимается плоская истирающая поверхность. Под давлением толщина материала в местах наибольших значений величина h уменьшается до тех пор, пока упругая сила реакции материала на сжатие не компенсирует силу внешнего давления P . Одновременно увеличивается плотность материала на участках сжатия. В результате неравномерность по толщине и плотности изменяются и перед началом истирания уже отличаются от исходных значений. Для имитации этого этапа был разработан следующий итерационный алгоритм:

Алгоритм А2.2

$$h_{\min} = \min_{i=1, \dots, n}(h_i); \quad h_{\max} = \max_{i=1, \dots, n}(h_i); \quad dh = h_{\max} - h_{\min}; \quad h_0 = h_{\min} + 0,5dh; \quad f = 0$$

Пока $|P - f| > \epsilon_P$, выполнять:

1. $f = 0$. Для $i = 1, \dots, n$: если $h_i > h_0$, то $f = f + k(h_i - h_0)$;
2. Если $f > P$, то $dh = 0,5dh$; $h_0 = h_0 + dh$; иначе $dh = 0,5dh$; $h_0 = h_0 - dh$

Алгоритм А2.2 позволяет найти максимальное значение h_0 , до которого уменьшится толщина образца. Это значение алгоритм находит из условия, что сжатие образца происходит на тех его участках и до тех пор, пока возникающее на этих участках суммарная сила реакции упругого сжатия f не достигнет значения внешней силы P , действующей на образец.

На следующем этапе моделирования производится коррекция значений толщины и плотности материала для учета рассчитанной величины сжатия по следующему алгоритму:

Алгоритм А2.3

$$\text{Для } i = 1, \dots, n: \quad \text{если } h(i) > h_0, \text{ то: } \{ \rho(i) = \rho_s(i) h_s(i) / h_0; \quad h(i) = h_0 \}$$

Имитация циклического истирания поверхности материала заключается в моделировании толщины слоя $dh(i)$, отделяемого от i -го участка образца, и соответствующем изменении толщины, плотности и степени сжатия этого участка. Величина $dh(i)$ зависит от сил сцепления и трения меж-

ду волокнами материала и стирающей поверхностью. Она является случайной величиной, причем закон ее распределения неизвестны.

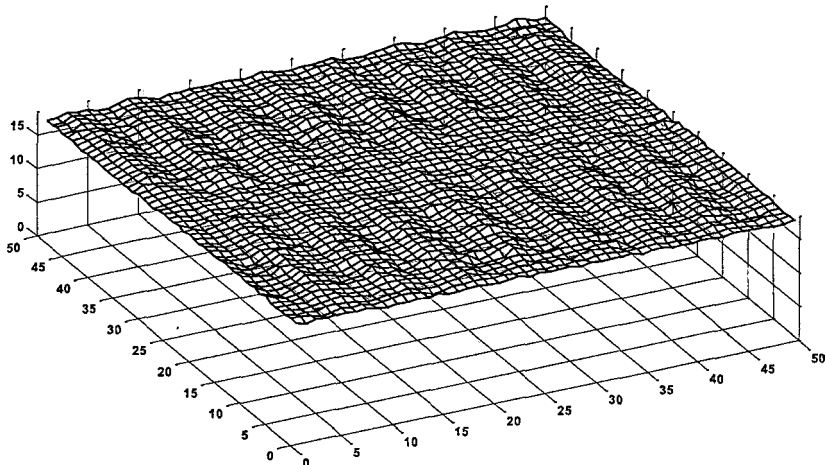


Рис.2.24. Модель толщины образца ткани

Параметры этого распределения зависят от плотности и коэффициентов трения и сцепления между волокнами и между материалом и истирающей поверхностью на данном участке. Эти зависимости играют роль положительной обратной связи в процессе истирания. В результате по мере развития процесса область наибольшего истирания концентрируется на некотором наиболее слабом участке. Примем степенной закон распределения величины $dh(i)$

$$f_{dh}(x) = \frac{a}{h(i)} \left(1 - \frac{x}{h(i)} \right)^a, \quad 0 \leq x \leq h(i); \quad a > 1 \quad (2.126)$$

Его параметр a является функцией от относительного изменения плотности материала: $a = a(\rho_n(i) / \rho_s(i))$, где $\rho_n(i)$ – плотность материала i -го участка после отделения массы $dm(i)$. Такое распределение является частным случаем бета-распределения и соответствует асимметрично распределенной случайной величине, значения которого ограничены диапазоном $[0; h(i)]$.

Графики распределения $f_{dh}(x)$ для различных значений параметра a приведены на рис.2.25. Из графиков видно, что при достаточно больших значениях параметра a распределение сосредоточено в окрестности моды $dh = 0$, т.е. толщина отделяемого слоя будет минимальной. Истиранию подвергаются только те участки, которые непосредственно касаются истирающей поверхности. Пересчет значений плотности после отделения очевиден. В результате получаем алгоритм:

Алгоритм А2.4

Для $i = 1, \dots, n$: если $h(i) = h_0$, то выполнить:

1. Генерация случайного значения $dh(i)$ согласно распределению $f_{dh}(x)$
2. $h(i) = h(i) - dh(i)$; $\rho(i) = \rho(i) h(i) / h_0$ коррекция толщины и плотности
3. $dm(i) = \rho(i) dh(i) dx dy$; $m(i) = m(i) - dm(i)$ коррекция массы участка
4. $Sm(t) = Sm(t) + dm(i)$ накопление истираемой массы; t – номер цикла истирания.

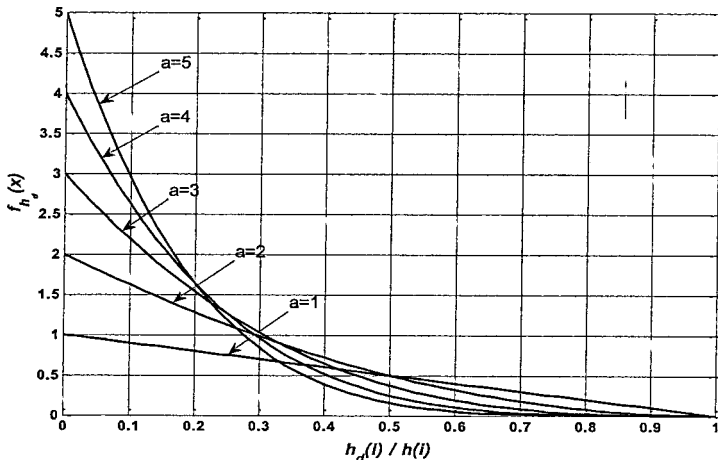


Рис.2.25. Распределения толщины стираемого слоя

Модель в целом состоит из реализации алгоритмов А2.2, А2.3 и циклического выполнения алгоритмов А2.4 и А2.2 (пересчета толщины материала с учетом равновесия внешней силы и силы упругости).

В качестве примера работы алгоритма рассмотрим имитацию процесса истирания для материала, толщина и плотность которого состоят из случайной и периодической составляющей. На рис.2.26 изображены начальный профиль образца по плотности массы и профили постепенно истираемых слоев материала после каждых 5000 циклов (нижние кривые соответствуют каждому сотому циклу). Аналогичные распределения для толщины элементов показаны на рис.2.27. Из-за наложения кривые показывают толщину элементов лишь на завершающей стадии истирания. Наблюдается постепенная концентрация разрушения на элементах, имеющих наименьшую массу. В рассматриваемой системе действует своего рода положительная обратная связь: чем больше истирается элемент на предыдущих циклах, тем в большей будет величина его истирания на следующем цикле. Вместе с тем, на начальной стадии истирания наблюдается эффект выравнивания неравномерности элементов по толщине как под действием нагрузки, так и вследствие потери массы.

На рис.2.28 показано изменение профиля толщины образца в процессе истирания при начальном профиле, содержащем только периодическую (гармоническую) составляющую без случайных компонентов. На нижних

линиях профиля видно, как с увеличением числа циклов истирания оно локализуется на нескольких участках, пока не происходит полного истончения материала на одном из них. Во избежание слияния на графиках получаемых профилей для их более ясного отображения на рис.2.27 и 2.28 профили приведены с пропуском ряда циклов.

На рис.2.29а приведена динамика нарастания суммарной истираемой массы материала в зависимости от числа циклов, из которой видно постепенное нарастание истираемой массы с ростом числа циклов (числа по оси абсцисс означают сотни циклов). На рис.2.29б показано нарастание среднеквадратического отклонения вариации толщины материала между отдельными локальными участками с увеличением числа циклов истирания. Кривая наглядно показывает нарастание «хаоса» в процессе истирания образца.

Предложенные математическая и компьютерная модели статистической имитации процесса истирания образца полотна описывают динамику этого процесса. Приведенные результаты натурных экспериментов по исследованию истирания по методу Martindale для тканей специального назначения различных артикулов на качественном уровне близки к результатам компьютерного моделирования. Приведенный пример работы моделирующего алгоритма позволяет детально отслеживать динамику истирания образца ткани с учетом таких факторов, как периодичность плотности и толщины локальных участков образца, наличие случайных вариаций в свойствах волокнистой массы образца, изменения плотности, упругости, характеристик трения и пластичности в зависимости от числа циклов истирания.

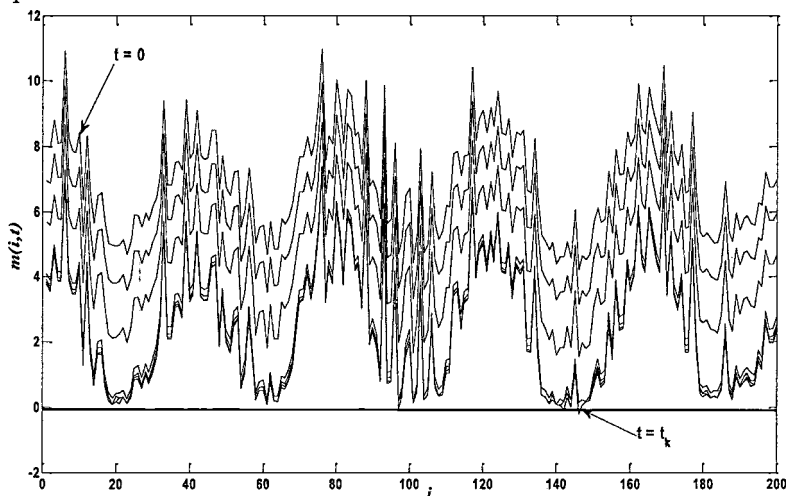


Рис.2.26. Изменение массы элементов образца ткани за циклы истирания

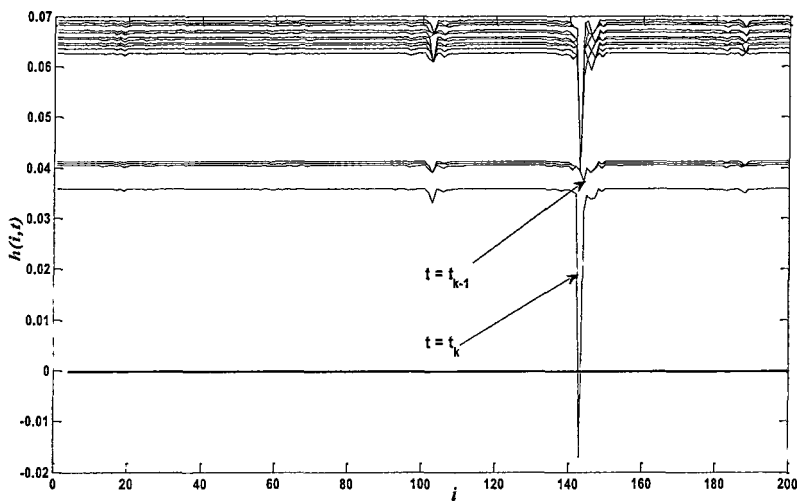


Рис.2.27. Изменение толщины элементов образца ткани за циклы истирания

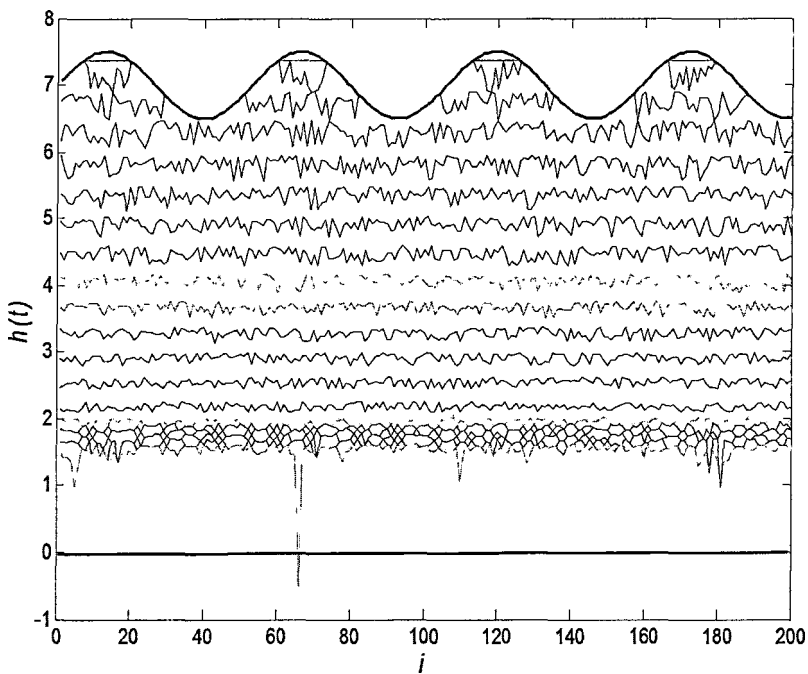
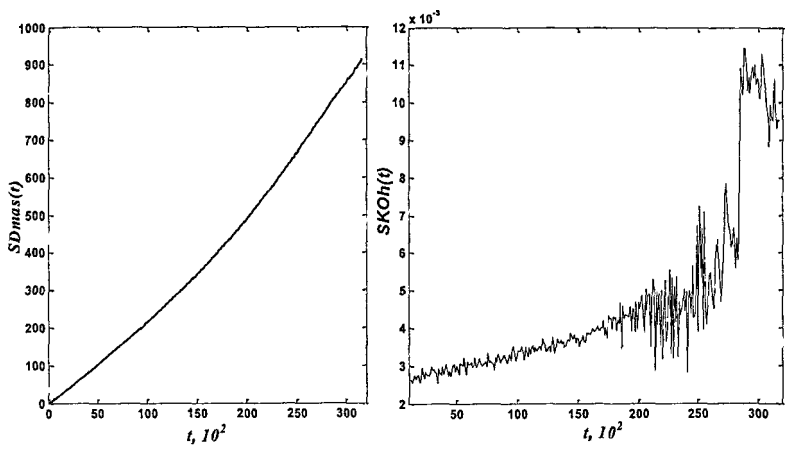


Рис.2.28 Динамика истирания (периодический начальный профиль по толщине)



а) б)
 Рис.2.29. Истираемая масса (а) и СКО толщины образца (б)

Глава 3. МКЭ - модели волокнистых материалов

3.1. Метод конечных элементов и уравнения деформируемых сплошных сред

Метод конечных элементов (МКЭ) - один из наиболее распространенных и мощных современных методов компьютерного моделирования материалов различной природы, изделий из них и физических процессов. В этом методе материал рассматривается как деформируемая сплошная среда. Механические и физические свойства среды описываются заранее выбранными известными законами и задаются значениями соответствующих параметров. Изделие из материала представляется геометрической моделью. Взаимодействие изделия с окружением описывается краевыми условиями задачи. При рассмотрении нескольких взаимодействующих изделий в модель включают условия контакта, т.е. решается контактная задача. Исследуемая система описывается уравнениями в частных производных и МКЭ - один из методов их решения при сложных краевых условиях и при сложной форме области, в которой ищут решение.

В МКЭ геометрическую модель изучаемой системы представляют набором плоских (в двумерной задаче) или трехмерных (в трехмерной задаче) выпуклых фигур из некоторого стандартного набора, например, треугольников, четырехугольников, тетраэдров, параллелепипедов произвольных размеров и формы. Тем самым систему аппроксимируют неравномерной сеткой из соединенных между собой стержней. В процессе решения может возникнуть необходимость перестройки части сетки конечных элементов, например, для детализации отдельных областей, в которых градиенты полей характеристик материала особенно велики.

Далее решается задача об эволюции состояний системы и сплошной среды в соответствии с уравнениями, которые описывают эту эволюцию. Решаемые уравнения на каждом цикле линеаризованы, а решение аппроксимируют известными простыми (линейными или квадратическими) функциями. При оценке качества аппроксимации используют вариационные принципы.

Исследование системы методом МКЭ-моделирования включает следующие этапы:

1. Построение твердотельной геометрической модели системы.
2. Генерация сетки конечных элементов, заполняющих без перекрытий и по возможности максимально близко к поверхности геометрическую твердотельную модель, упорядочение элементов и их узлов.
3. Задание физико-механических свойств материала и выбор законов, описывающих поведение этого материала под влиянием внешних воздействий и его взаимодействия с соседними участками.
5. Задание граничных и начальных условий моделирования, включая условия контакта и связей между компонентами системы.

6. Задание условий имитации для моделируемого режима (статика, динамика, колебания, переходные режимы, собственные колебания и т.п.) и моделируемых показателей системы.

7. Линеаризация и решение системы уравнений на каждом этапе эволюции системы в моделируемом режиме.

8. Обработка результатов моделирования.

Таким образом, само моделирование состоит из построения системы аппроксимирующих линейных алгебраических уравнений, проверки ее непротиворечивости и циклического решения системы с учетом результатов предыдущих циклов и контроля совместности уравнений на каждом цикле.

Очевидно, что практическая реализация такой программы действий возможна только на компьютере (причем, чем более мощном, тем лучше) и при наличии автоматизированного инструментария на каждом этапе разработки. В настоящее время существуют такие автоматизированные программные системы с разными уровнями возможностей, доступности и удобства использования: ANSYS, ABAQUS, MSC.NASTRAN, MSC.MARC, COMSOL (FEMLAB), APLA, SOLID WORKS и др.

При использовании МКЭ для решения задач о деформации сплошных сред в неявном виде решают уравнения, описывающие эти деформации. Они полно описаны в литературе. Поэтому ограничимся краткой справкой. Представленные ниже уравнения относятся к упругой среде и записаны в линейном приближении, которое чаще всего используется в МКЭ. Они адаптированы для двумерного пространства (плоскости). При этом отсутствует не только зависимость перемещений, деформаций и напряжений от третьей координаты Z , но также и ограничения в этом направлении. Такая адаптация объясняется следующими причинами. Во-первых, многие волокнистые материалы являются двумерными. Во-вторых, для трехмерных изделий из волокнистых материалов во многих случаях оказывается достаточным рассматривать двумерную модель. Все входящие в эти уравнения величины могут быть или являются функциями двух координат x и y .

Для сплошной среды в качестве основной переменной используют вектор перемещений каждой точки среды относительно ее исходного положения - поле перемещений $\mathbf{u} = [u(x,y); v(x,y)]$. Компоненты тензора деформаций для малых деформаций выражают через этот вектор

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

В линейном приближении в результате деформации площадь элемента изменяется до величины

$$dS' = dS(1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

т.е. относительное изменение площади элемента равно сумме диагональных компонент тензора

$$\frac{dS' - dS}{dS} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$$

В векторном поле сил, действующих на элементы среды $F(x,y)$, в соответствии с третьим законом Ньютона силы должны уравновешивать друг друга в целом по всей рассматриваемой области среды. Неуравновешенными остаются только силы на границе области. В этом случае, согласно векторному анализу вектор силы, действующей в элементе объема среды, должен быть дивергенцией тензора второго ранга, называемого тензором напряжений σ

$$F_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}; \quad F_y = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}$$

Здесь $F = (F_x; F_y)$ – вектор объемной плотности силы, компоненты которого имеют размерность Н м^{-3} , а тензор напряжений имеет размерность давления $[\sigma] = \text{Н м}^{-2} = \text{Па}$.

Из условия уравновешивания внутренних моментов следует симметричность тензора напряжений $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$.

Условие равновесия среды задается уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho g_x = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho g_y = 0$$

Здесь ρ – плотность среды (масса на единицу объема); вектор $g(x,y)$ – поле ускорений, возникающих под действием внешних сил, действующих в единице объема элемента среды. Размерности этих величин: $[\rho] = \text{кг м}^{-3}$; $[g] = \text{м с}^{-2}$.

При адаптации уравнений к двумерному пространству размерности величин меняются: $[F] = \text{Н м}^{-2}$; $[\sigma] = \text{Н м}^{-1}$; $[\rho] = \text{кг м}^{-2}$; $[g] = \text{м с}^{-2}$. Плотности сил и массы относятся не к единице объема, а к единице площади, а напряжение – не к единице площади, а к единице длины.

Энергия деформации среды идет на изменение термодинамического баланса и работу сил деформации, что отражает термодинамическое равенство

$$dW = TdH + \sigma_{xx}d\varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy}d\varepsilon_{xy} + \sigma_{yy}d\varepsilon_{yy}$$

Здесь W – внутренняя энергия, T – температура, H – энтропия элемента среды. Из этого выражения следует, что при постоянной температуре и энтропии тензор напряжения может быть выражен через производные от свободной энергии Φ

$$\sigma_{xx} = \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{xx}} \right)_H = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xx}} \right)_T; \quad \sigma_{xy} = \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{xy}} \right)_H = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{xy}} \right)_T; \quad \sigma_{yy} = \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{yy}} \right)_H = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{yy}} \right)_T$$

В общем виде свободная энергия как скалярная функция может быть выражена через инварианты тензора деформации

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + m (\varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yy}^2)$$

Коэффициенты λ и m называют коэффициентами Ламэ.

Закон Гука о линейной зависимости между напряжениями и деформациями среды в общем случае записывается в виде

$$\sigma_{ik} = \sum_{l,m=1,2} \lambda_{iklm} \varepsilon_{lm}, \quad i, k = 1, 2$$

Здесь индексы 1 и 2 нумеруют координаты x и y ; λ_{iklm} – коэффициенты пропорциональности. В МКЭ они задаются для фрагментов среды, которые можно считать однородными по свойствам.

Для изотропных сред зависимость между напряжениями и деформациями в соответствии с законом Гука может быть представлена в виде

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left((1-\mu)\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy} \right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left((1-\mu)\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx} \right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\mu)} \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}); \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \mu\sigma_{xx}); \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{xy}$$

В этих формулах E – модуль упругости (модуль Юнга), μ – коэффициент Пуассона для поперечного сжатия. Размерность E совпадает с размерностью σ .

Условие равновесия элемента однородной изотропной среды записывается в виде

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) + \rho g_x = 0$$

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + \rho g_y = 0$$

или в векторной форме

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\mu} \text{grad div } u = -\rho g \frac{2(1+\mu)}{E}$$

Уравнения движения упругой среды получают, добавляя силы инерции в уравнения равновесия согласно принципу Даламбера

$$\rho \frac{d^2 u(x, y, t)}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(x, y, t)}{\partial y} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{d^2 v(x, y, t)}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{xy}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(x, y, t)}{\partial y} + \rho g_y$$

Уравнения движения для вектора перемещения $u(x, y, t)$ имеют вид

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{E}{2(1+\mu)} \Delta u + \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \text{grad div } u + \rho g_x$$

$$\rho \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{E}{2(1+\mu)} \Delta v + \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \text{grad div } v + \rho g_y$$

Эти уравнения описывают упругие волны в однородной изотропной среде при малых деформациях. В векторной форме уравнения имеют вид

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\mu)} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \nabla \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \rho \mathbf{g} \quad (1.127)$$

Здесь ρ – плотность среды; $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (u(\mathbf{r}, t); v(\mathbf{r}, t))$ – вектор смещения точки $\mathbf{r} = (x, y)$ среды вследствие деформации в момент t в декартовых координатах.

Операторы Лапласа Δ и набла ∇ обозначают операции

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right); \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.128)$$

Применение оператора Лапласа к векторной функции $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ означает применение его к каждому компоненту этого вектора. В итоге получается векторная функция, составленная из сумм вторых производных

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (1.129)$$

Применение оператора $\nabla \nabla$ к векторной функции также дает векторную функцию, составленную из вторых производных

$$\begin{aligned} \text{grad div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \left(\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.130)$$

Следовательно, уравнение (1.127) состоит только из вторых производных по времени и координатам от вектора перемещений. Обобщения уравнения возможны в нескольких направлениях:

- нелинейные упругие деформации;
- эластические деформации;
- пластические деформации;
- анизотропные деформации.

В рамках линейной аппроксимации эти обобщения приводят к появлению в уравнении самой векторной функции перемещения и ее производных 1-го порядка по времени и координатам.

Для упрощения численного решения переходят от уравнения с производной 2-го порядка по времени к системе уравнений, которые содержат только производные 1-го порядка по времени и которые разрешены относительно этих производных. В результате получается система из четырех уравнений в частных производных, в которой неизвестными являются компоненты векторной функции перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и их производные по времени, т.е. скорости этих перемещений $\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) / \partial t$. С учетом сказанного уравнение деформации удобно представить в обобщенной форме (при отсутствии объемных сил)

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (1.131)$$

Здесь вектор $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – четырехмерный, состоящий из компонент

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}, t) \\ v(\mathbf{r}, t) \\ u_t(\mathbf{r}, t) \\ v_t(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \text{ где } u_t(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t}; \quad v_t(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial v(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

Первые два компонента $u(\mathbf{r}, t)$ и $v(\mathbf{r}, t)$ – проекции на оси координат вектора перемещения точки \mathbf{r} среды к моменту t . Соответственно, третья и четвертая компоненты $u_t(\mathbf{r}, t)$ – скорости изменения этих проекций.

Структуру матриц коэффициентов уравнения удобнее представить, если преобразовать уравнение (1.131) к матричному виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u_t \\ v_t \end{pmatrix} &= \mathbf{W}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u_t \\ v_t \end{pmatrix} + \mathbf{W}_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u_t \\ v_t \end{pmatrix} + \mathbf{W}_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u_t \\ v_t \end{pmatrix} + \\ &+ \mathbf{B}_x \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u_t \\ v_t \end{pmatrix} + \mathbf{B}_y \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u_t \\ v_t \end{pmatrix} + \mathbf{D} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u_t \\ v_t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.132)$$

Все матрицы \mathbf{W} , \mathbf{B} и \mathbf{D} – квадратные, 4×4 . Их структура зависит от свойств моделируемой среды. Например, для однородной изотропной абсолютно упругой среды при сохранении ее объема в процессе деформации структура матриц должна удовлетворять следующим условиям.

Первые два скалярных уравнения в (1.132) должны выражать связь между компонентами вектора $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Учтем также физический смысл оператора Лапласа. Поэтому структура матриц \mathbf{W} и \mathbf{D} такова

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{xy} & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \mathbf{W}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{yx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{yy} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{W}_{xy} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Элементы матриц, обозначенные буквами, могут иметь различные, в том числе и нулевые, значения. То же можно сказать и об элементах матриц \mathbf{B} . Эти матрицы задают эффекты конвекции, которые в данном случае представляют собой перенос деформации и массы среды.

Для анизотропной среды число отличных от нуля компонентов тензора упругости λ_{iklm} зависит от размерности пространства и симметрии анизотропного материала. При изучении многих механических свойств тканей им придают плоскую форму. В этом случае пространство – двумерное, а симметрия – кубическая (в двумерном пространстве – квадратная). У тензора упругости остается всего три отличных от нуля компонента $\lambda_{xxxx} = \lambda_1$, $\lambda_{xxyy} = \lambda_2$ и $\lambda_{xyxy} = \lambda_3$. Свободная энергия элемента ткани определяется выражением

$$F = \frac{1}{2} \lambda_1 (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + \lambda_2 \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2 \lambda_3 \varepsilon_{xy}^2$$

Компоненты тензора деформации равны

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{xx}} = \lambda_1 \varepsilon_{xx} + \lambda_2 \varepsilon_{yy}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{yy}} = \lambda_1 \varepsilon_{yy} + \lambda_2 \varepsilon_{xx}; \quad \sigma_{xy} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{xy}} = \lambda_3 \varepsilon_{xy}$$

Обращение этих формул позволяет выразить деформации через напряжения

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1 \sigma_{xx} - \lambda_2 \sigma_{yy}); \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (-\lambda_2 \sigma_{xx} + \lambda_1 \sigma_{yy}); \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{\lambda_3} \sigma_{xy}$$

В отличие от изотропной упругой двумерной среды, для описания которой достаточно двух независимых параметров, например, E и μ , для такой же анизотропной среды с квадратной симметрией необходимо задать три независимых параметра λ_1 , λ_2 и λ_3 . Первые два определяют удлинение элемента среды вдоль осей X и Y . В качестве значений для этих параметров могут быть использованы модули упругости нитей основы и утка. Третий параметр определяет деформацию сдвига, вызывающую отклонение формы элемента от прямоугольника. Поскольку сопротивление нити изгибу, по меньшей мере, на порядок меньше сопротивления растяжению, то этот параметр в большой степени зависит от трения между нитями и расплывания нитей при их взаимном сжатии в переплетении ткани.

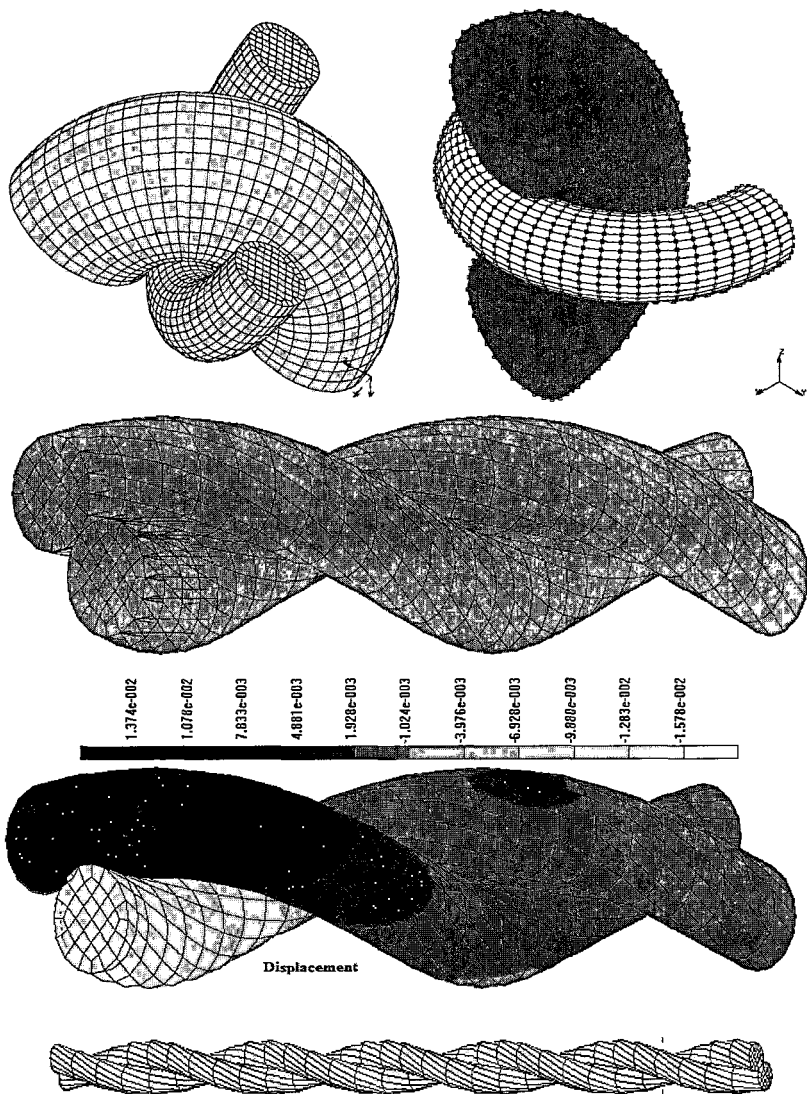
Не всегда можно ограничиться двумерными моделями волокнистых материалов и изделий из них. На рис.3.1 приведены примеры разработанных трехмерных геометрических моделей с сеткой конечных элементов для взаимодействующих элементов нитей основы и утка и нитей. Они образуют систему, напоминающую по строению элемент каната и стренги крученой пряжи. На некоторых из них формой и цветом показаны деформации и поля напряжений, возникающие в системе под действием внешних воздействий.

Ниже приведены примеры постановок и решения некоторых задач для волокнистых материалов и изделий из них, в которых использовались модели деформируемой сплошной среды с упругими, вязко-упругими и/или упруго-пластическими свойствами.

3.2. Компьютерное МКЭ-моделирование взаимодействия нетканого материала с иглами при иглопрокалывании

Одним из распространенных механических способов производства НМ является способ иглопрокалывания, при котором волокнистый холст скрепляется образующими его волокнами в результате прокалывания его специальными иглами. Управление этим процессом требует знания зависимостей между физико-механическими характеристиками НМ и управля-

емыми параметрами процесса. Натурные эксперименты для решения такого рода задач оказываются трудоемкими и дорогостоящими, поэтому компьютерное моделирование процесса иглопрокалывания является в этом случае одним из наиболее эффективных методов исследования.



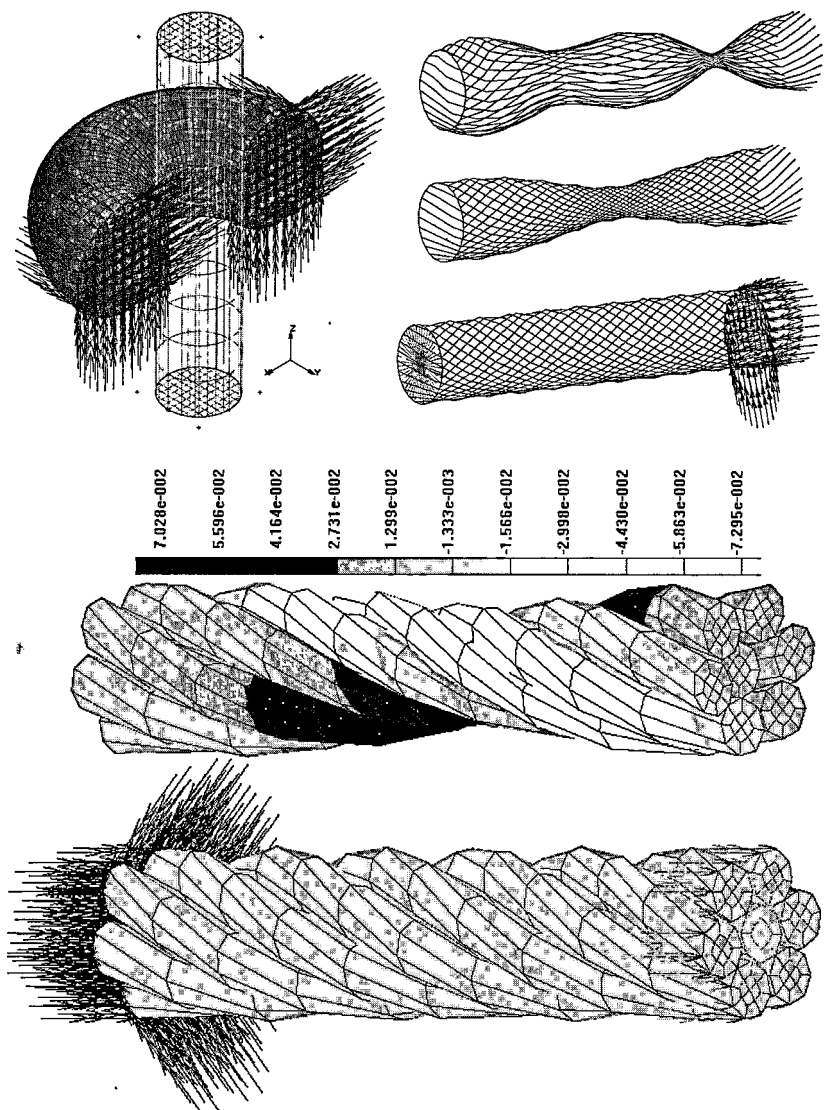


Рис.3.1 Геометрические модели и сетки конечных элементов для крученных и взаимодействующих нитей. Стрелками показаны внешние силы и граничные условия

Моделирование этой среды осуществлялось МКЭ в соответствии с уравнениями механики деформируемых сплошных сред. Было построено несколько двумерных геометрических моделей взаимодействия игл с НМ. Некоторые из моделей показаны на рис.3.2 в виде игл и деформируемого материала с сеткой и узлами конечных элементов.

Иглы моделировались треугольными клиньями абсолютно твердого материала. НМ моделировался как изотропная деформируемая сплошная среда с упруго-пластическими свойствами. Значение модуля упругости НМ в модели принято за единицу $E = 1$. Это позволило измерять напряжения в единицах модуля. Коэффициент Пуассона принят равным $\nu = 0,33$. Порог пластической деформации принят равным $Y_p = 0,2$ в единицах модуля упругости. Геометрические размеры: толщина слоя НМ, расстояние между иглами, глубина перемещения и угол наклона игл и др., - выбирались пропорциональными реальным геометрическим размерам иглопрокалывающего оборудования. Время моделирования равно $T = 1$ ед. времени и квантовалось на 100 шагов с продолжительностью 0,01 ед.

Поскольку имитировалось взаимодействие нескольких тел (НМ и иглы), то в модели решалась контактная задача. Взаимодействие между иглами и НМ происходило по линиям касания игл с НМ. Оно проявлялось в виде сил нормального давления в соответствии с деформацией НМ и касательных сил трения с коэффициентом трения $\mu = 0,25$ между металлом и волокном. В одной из моделей на рис.3.2 для имитации входа иглы в НМ и раздвигания его среды без нарушения сетки конечных элементов в соответствующей зоне НМ была использована сетка элементов меньших размеров.

Модель позволила менять различные параметры и характеристики деформируемого НМ и игл, такие как толщина и плотность НМ, геометрическая форма игл. Рассматривались механические свойства НМ как в виде абсолютно-упругого, так и в виде упруго - пластичного материала. Задавались условия контакта игл с материалом, в частности, отсутствие или наличие трения между НМ и иглами, а также глубина и скорость перемещения игл в НМ. Таким образом, данная модель позволила производить анализ процесса взаимодействия НМ и игл по многим параметрам. Применение относительных единиц длины, времени и нагрузки дает возможность обобщить результаты и распространить их на группы однотипных материалов.

Работа с вариантами модели показала, что для получения картины распространения деформаций и напряжений в НМ достаточно более простой модели (рис.3.3), в которой рабочие поверхности игл моделируются плоскостями (в двумерной модели - линиями *a* и *b*).

При моделировании динамики иглопрокалывания эти линии перемещаются вдоль оси *X*. Циклический закон перемещения приведен на

рис.3.4а. Форма НМ и поле напряжений по фон Мизесу в момент первого наибольшего вхождения иглы приведены на рис.3.4б.

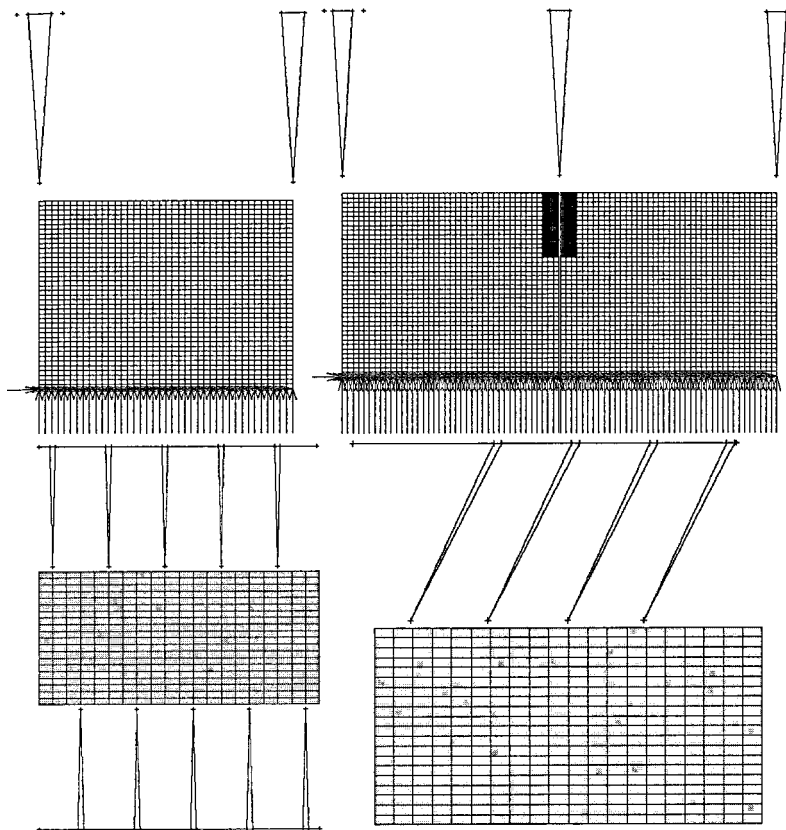


Рис.3.2 Варианты расположения систем игл для прокалывания НМ

На рис.3.5а показана динамика изменения во времени полной относительной деформации (Total Strain) и ее пластической составляющей в двух наиболее важных узлах Node 117 и Node 332. Пластическая деформация (Plastic Strain) у них одинакова. На рис.3.5б показаны деформация НМ и поле смещений точек НМ в момент наибольшего углубления игл. На рисунках видна значительная неравномерность в деформации как во времени, так и в разных точках НМ.

Конечное состояние НМ и игл по завершении моделирования представлено на рис.3.4б и рис.3.5б для упруго - пластического материала. Из рисунков видно, что пластичность материала приводит к отрыву материала от игл, причем величина отрыва возрастает при увеличении пластичности

материала. Там же приведены поля напряжения и перемещений, описывающие их распределение по объему НМ.

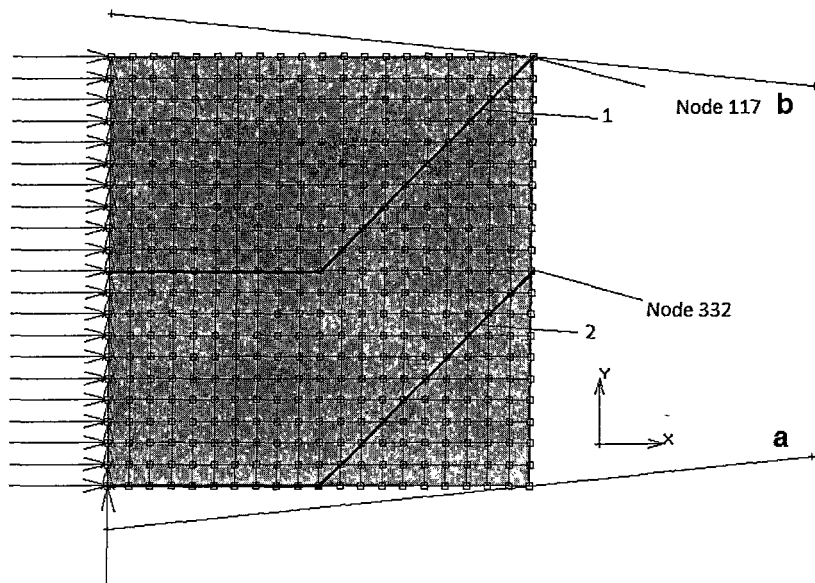


Рис.3.3 Упрощенная двумерная модель «НМ – игль»

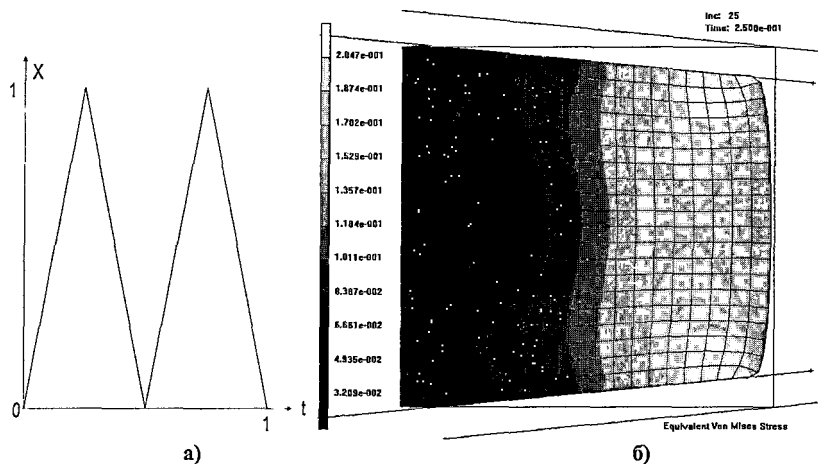
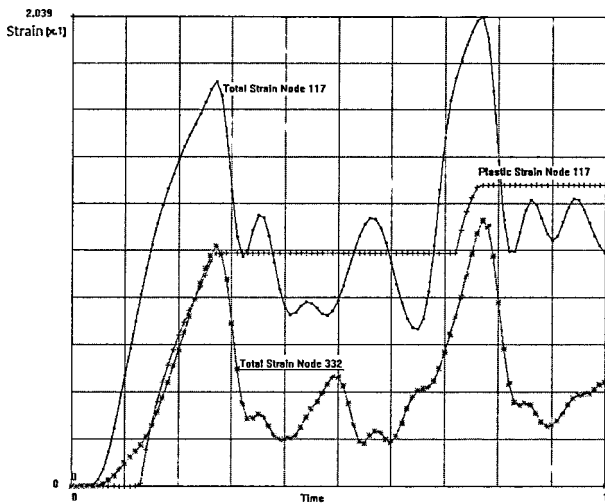
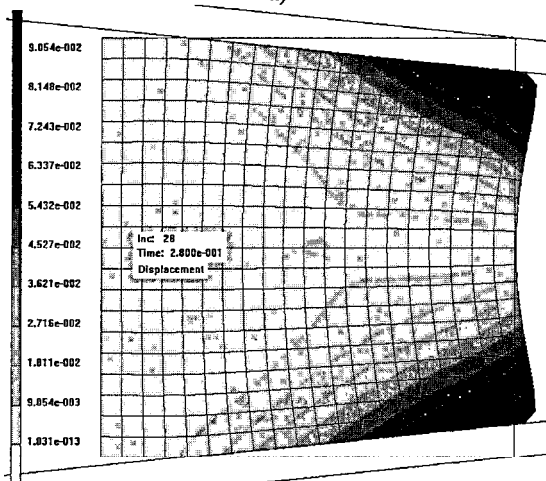


Рис.3.4 а) перемещение игл; б) поле напряжений в НМ при конечном положении игл



а)



б)

Рис.3.5

- а) эпюры относительных полной и пластической деформаций в узлах 117 и 332
 б) распределение перемещений на 28 шаге моделирования
 (из ста шагов для двух циклов входа игл)

Распределения различных характеристик и компонентов деформации позволяют наглядно судить о наиболее напряженных областях образца, в которых материал подвергается наибольшему напряжениям и деформации. У большинства характеристик НМ эти области сосредоточены в окрестно-

сти участка приложения нагрузки (т.е. в области вхождения игл в материал) и не распространяются на весь объем материала.

Свойства НМ в разных вариантах моделирования задавались по-разному, что позволило сравнить между собой эти варианты. Значения параметров для каждого варианта приведены в табл.3.1. Одной из проблем моделирования является компактное и наглядное представление обилия информации, получаемой в результате имитации процесса или системы. Нами были выбраны распределение полной и пластической составляющей деформации в точках, расположенных на линиях 1 и 2, и диаграммы перемещений узлов Node 117 и Node 332 во времени (рис.3.3). Время моделирования принято равным единице и разделено на 100 шагов имитации.

Таблица 3.1

Значения параметров					
Варианты моделей	Модуль упругости E	Коэффициент Пуассона ν	Предел пластичности, Y_p	Коэффициент трения, μ	Коэффициент демпфирования γ
1	1	0,33	0,2	0,25	0
2	1	0,33	1e20	0	0
3	1	0,01	1e20	0,25	5
4	1	0,33	0,2	0,25	5

На рис.3.6а показаны перемещения точек, образующих линии 1 и 2, в момент наибольших напряжений (21-й шаг имитации) и в конце имитации (100-й шаг). Соответствующие кривые обозначены 1-21, 2-100, 2-21 и 2-100.

Смещения концентрируются вблизи области воздействия игл, уменьшаясь по экспоненте с увеличением расстояния до иглы. В динамическом режиме при больших напряжениях могут быть значительные кратковременные смещения точек, расположенных удаленно от места воздействия игл. Такой же экспоненциальный характер убывания наблюдается для полной деформации и упругой составляющей деформации в точках тех же кривых и в те же циклы даже при максимально больших напряжениях в НМ.

Второй вариант модели соответствует абсолютно упругому НМ. После воздействия игл он полностью восстанавливает форму. Несмотря на кратковременные напряжения, деформации и перемещения точек НМ, возникающие при взаимодействии с иглами, все их значения восстанавливаются до исходных величин, т.е. до нулей. Это может служить косвенным подтверждением качества вычислительных схем используемой системы моделирования.

Третий вариант модели характерен отсутствием пластической деформации у НМ, но включением в рассмотрение эластической составляющей деформации. При этом модель физико-механических свойств НМ является

линейной в отличие от первого варианта с нелинейной пластической составляющей деформации.

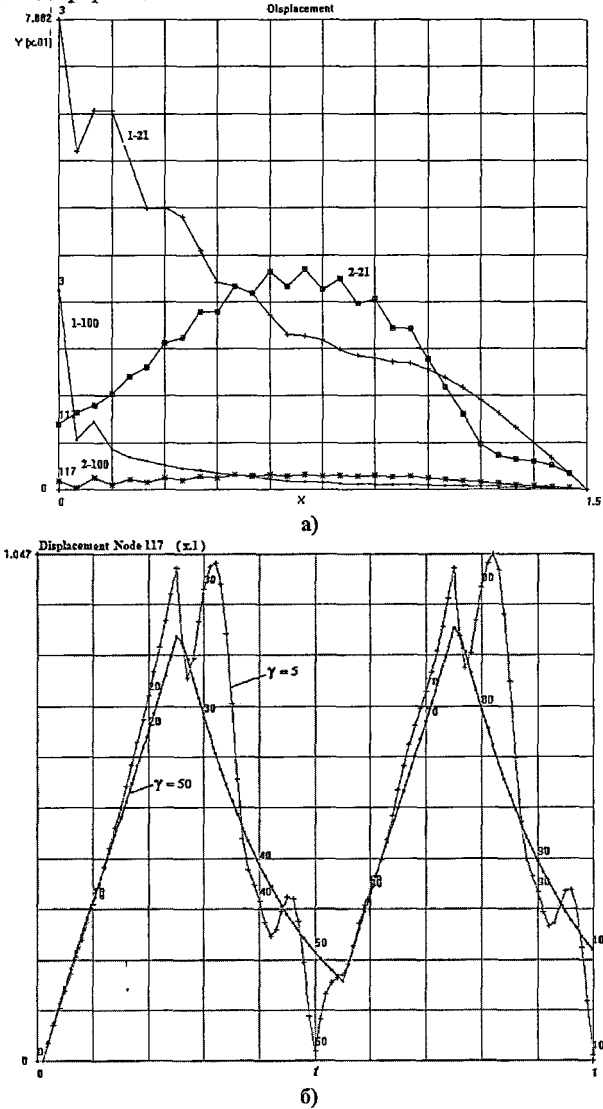


Рис.3.6 а) перемещения точек, образующих линии 1 и 2, в момент наибольших напряжений и в конце имитации; б) перемещения точки Node 117 во времени для двух значений коэффициента демпфирования $\gamma = 50$ и $\gamma = 5$

В экспериментах с третьим вариантом модели коэффициент демпфирования варьировался в широком диапазоне. На рис.3.6б приведены величины смещения узла Node 117 за время моделирования для $\gamma = 50$ и $\gamma = 5$. Увеличение демпфирования сглаживает частые и небольшие по амплитуде пульсации смещения, но практически не меняет общего характера смещений узла.

Четвертый вариант соответствует НМ с упруго-эласто-пластическими свойствами. На рис.3.7 показана динамика различных характеристик деформации в узле Node 117: Полная (Total), упругая (Elastic) и пластическая (Plastic) составляющие деформации, рис.3.7а; энергия, поглощенная демпфированием (Damping), работа сил трения (Friction) и контакта (Contact), рис.3.7б; напряжения деформации полное (Equivalent Stress) и по фон Мизесу (Von Mises), нормальная (Normal) и касательная (Shear) составляющие, рис.3.7в.

Влияние эластической составляющей деформации мало заметно в таких характеристиках, как относительная величина деформации или смещение отдельных точек внутри НМ, но хорошо обнаруживается на энергетических характеристиках. Это же относится и работе, которую совершают силы трения, касательные к плоскости взаимодействия иглы и НМ, и силы контакта между ними, направленные по нормали к этой плоскости.

Найденные зависимости и эффекты влияния параметров НМ на динамику его деформации говорят о сложном механизме взаимодействия игл с материалом и, как следствие, о необходимости детального исследования, возможность которого предоставляют разработанные модели.

3.3. Модель деформации элемента нити в ткани

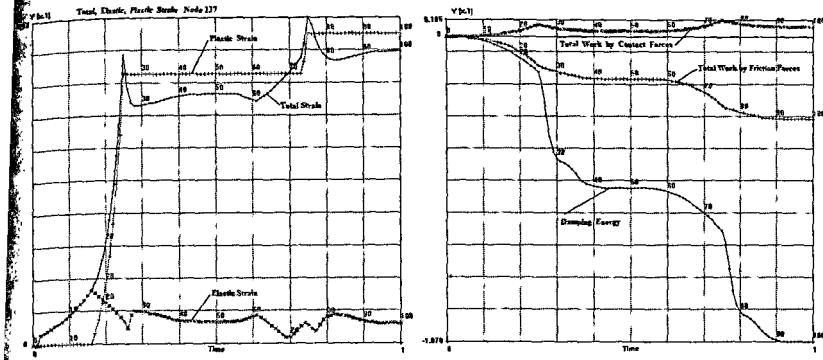
Для оценки деформации элемента нити в ткани под действием растягивающих нагрузок и влияния изгиба элемента нити в ткани на величины деформаций и напряжений были построены модели элемента нити. Они были исследованы с использованием МКЭ.

Для сравнения рассмотрены три модели элементов нити в виде брусьев. В модели 1 брус имел изгиб в плоскости, перпендикулярной плоскости ткани. В модели 2 элемент нити моделировался прямым бруском в плоскости ткани (см. рис.3.8). Модель 3 отличалась от модели 2 способом имитации взаимодействия этого элемента нити с другими нитями.

Далее принимаем за единицу длины $L = 1$. Протяженность элемента нити в плоскости ткани в обоих случаях равна $2L = 2$ условным единицам длины. Площадь поперечного сечения элемента нити также в обоих случаях одинакова и равна $(2/3)^2$ единиц длины. В обеих моделях рассматриваются плоские деформации, т.е. все величины в моделях не зависят от координаты Z , ось которой направлена перпендикулярно рисункам.

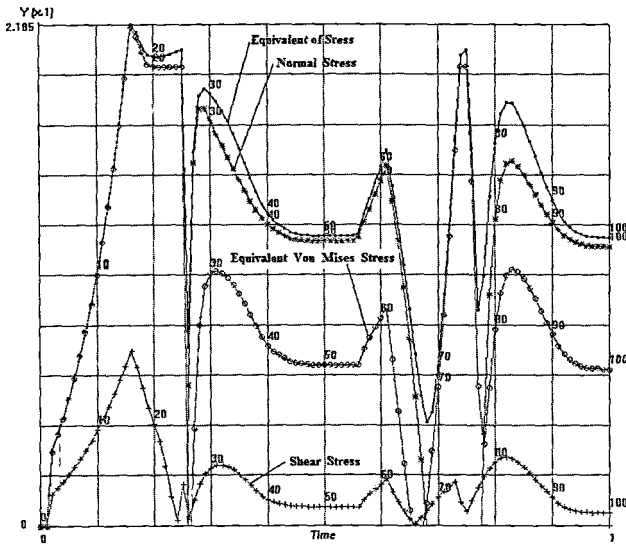
Построение сетки конечных элементов выполнено таким образом, чтобы тип элементов был в обеих моделях одинаковым, а число элементов

почти одинаковым (756 у изогнутого бруса и 800 у прямого бруса).



а)

б)



в)

Рис.3.7. а) составляющие деформации; б) потери энергии
в) составляющие напряжения

Величина изгиба у изогнутого бруса была выбрана достаточно большой (амплитуда по оси Y равна 1 условной единице длины), чтобы эффект изгиба мог проявиться заметным образом.

При одинаковых габаритных размерах обеих моделей ($-1 \leq X \leq 1$ и $-1 \leq Y \leq 1$) протяженность изогнутого бруса в модели 1, конечно, больше, чем прямого бруса в моделях 2 и 3. Если протяженность прямого бруса (по

оси X) равна 2 единицам длины, то у изогнутого бруса длина средней линии в этих же пределах оси X равна 2,76 единиц длины. Это различие необходимо учитывать при сравнении результатов моделирования деформации.

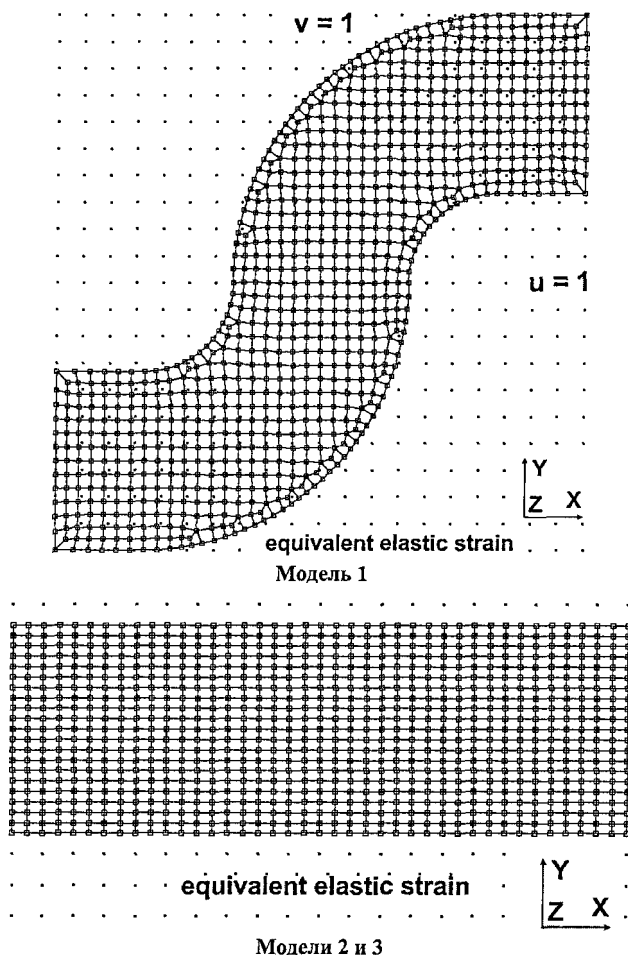


Рис.3.8. Геометрические модели элемента нити в виде изогнутого и прямого бруса

Поскольку рассматривается деформация элемента нити в плоскости XU , то все переменные и параметры моделей задаются в этой плоскости и не зависят от координаты Z . Толщина брусьев одинакова во всех их поперечных сечениях и принята равной их ширине, т.е. $2/3$ условной единицы длины. Свойства материала брусьев одинаковы. Материал однороден по всему объему, имеет плотность, равную единице условной плотности, яв-

ляется абсолютно упругим и изотропным с модулем упругости $E = 10000$ и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$.

Краевые условия для задачи деформации состоят из четырех составляющих, одинаковы для моделей 1 и 2 и показаны на рис.3.9. Условия обозначены как apply1 - apply4 и указаны стрелками на рисунках. Два условия apply3 и apply4 для модели 3 (рис.3.9) отличаются от аналогичных условий для моделей 1 и 2.

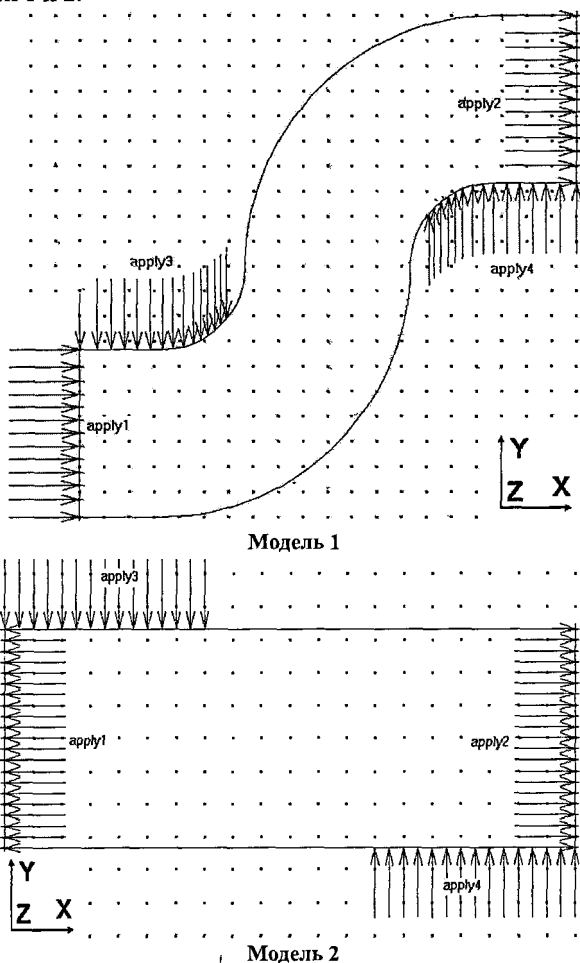


Рис.3.9. Краевые условия для задачи плоской деформации изогнутого и прямого бруса

Условие apply1 для всех моделей "запрещает" перемещение узлов сечения, к которому оно приложено, вдоль оси Z и допускает произволь-

ные перемещения вдоль оси Y и повороты вокруг всех трех осей. Кроме того, задано принудительное начальное смещение этого сечения в отрицательном направлении по оси X на величину $u_1 = -1/3$ условных единиц длины.

Условие `apply2` для всех моделей аналогично условию `apply1` и отличается тем, что в этом условии принудительное начальное смещение задано в положительном направлении оси X на величину $u_2 = +1/3$ условных единиц длины. Таким образом, деформация растяжения элемента нити по оси X в обеих моделях задана не через величину прикладываемой внешней силы, а через величину максимального смещения торцевых сечений бруса вдоль оси X .

Взаимодействие элемента нити с другими нитями задается через условия `apply3` и `apply4` в виде внешних распределенных сил. Для моделей 1 и 2 максимальная величина этих сил равна 10 условным единицам силы на один узел сетки, к которому сила приложена. Величина силы не постоянна, а линейно нарастает от нулевого значения до этого максимального значения с течением времени t моделирования и нарастания деформации. Узлы, к которым приложены силы, указаны на рис.3.9 и 3.10.

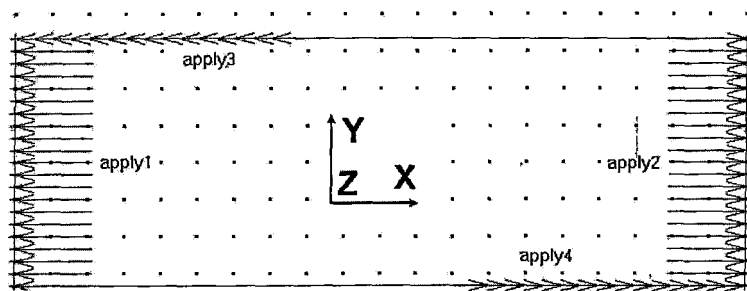


Рис.3.10. Краевые условия для задачи плоской деформации прямого бруса (модель 3)

В моделях 1 и 2 в начальном состоянии эти силы направлены по оси Y вниз для условия `apply3` и вверх для условия `apply4`. По мере нарастания деформации и изменения положения узлов сетки, точки приложения сил смещаются вместе с узлами.

В отличие от моделей 1 и 2, в модели 3 взаимодействие элемента нити с другими нитями имитировалось касательными силами (рис.3.10), действующими на боковых поверхностях бруса на участках его взаимодействия с другими нитями. Эти силы имитируют силы трения. Их величина вычисляется как сила нормального давления (в `apply3` и `apply4` моделей 1 и 2), умноженного на коэффициент трения, который принят равным 0.3. Таким образом, эти касательные силы так же, как и силы нормального давления, нарастают по мере роста деформации от нуля до максимального зна-

чения, равного 0,3 10 условных единиц силы на каждый узел, к которому они приложены.

При моделировании деформации на всех моделях имитировался динамический режим деформации в течение времени t от 0 до 1 условной единицы времени, который квантовался на 50 шагов. При этом внешние прикладываемые деформации u_1 и u_2 в условиях $apply_1$ и $apply_2$ "включались" скачкообразно в начальный момент $t = 0$ и оставались неизменными в течение всего времени, а распределенные силы в условиях $apply_3$ и $apply_4$ нарастали линейно во времени.

В процессе моделирования рассчитывались следующие характеристики деформации для каждого элемента сетки: 1) перемещения по осям X и Y ; 2) все компоненты тензора относительных упругих деформаций и тензора упругих напряжений; 3) значения эквивалентного напряжения по фон Мизесу (equivalent von Mises Stress, EMS); 4) значения эквивалентной упругой деформации (equivalent elastic Strain, EES).

На рис.3.11 показаны начальное и конечное (при $t = 1$) положения элемента нити с элементами и узлами сетки для модели 1. Приведено распределение величины эквивалентного (по фон Мизесу) напряжения по объему элемента нити. Наибольшие значения напряжения приходятся на внутренние участки поверхности наибольшего изгиба элемента нити. Заметим, что при большом удлинении элемента нити вдоль оси X (33%) разница между максимальным и минимальным значениями напряжений весьма велика (максимум равен 4370 условных единиц напряжения, минимум равен 54 условных единицы, т.е. отличаются на два порядка!).

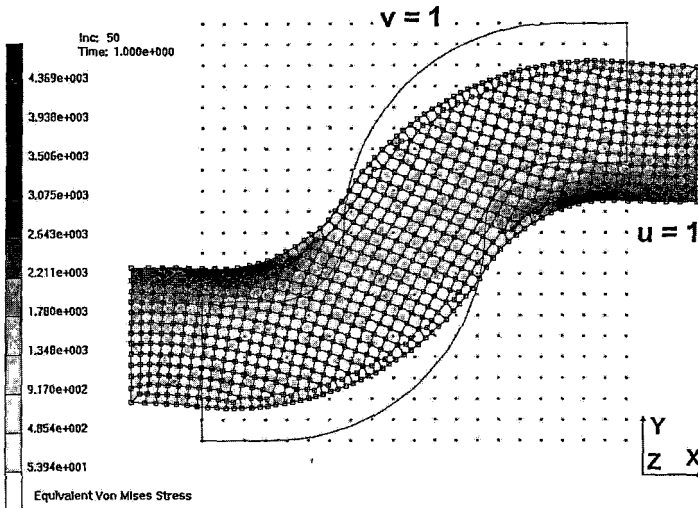
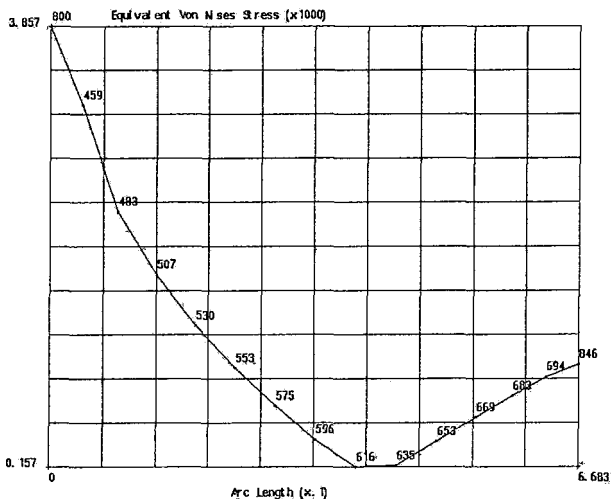
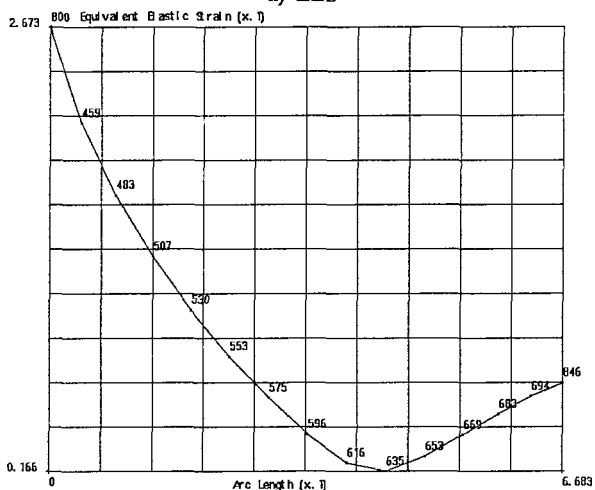


Рис.3.11. Начальное и конечное (деформированное) положение элемента нити для модели 1 с полем распределения эквивалентного напряжения по фон Мизесу EMS

Для цепочки узлов, на которой наблюдался наибольший перепад напряжений, построены эпюры величин EMS и EES, которые представлены на рис.3.12а и 3.12б. Числа на кривых указывают номера узлов конечно-элементной сетки, к которым относятся эти ординаты.



а) EES



б) EMS

Рис.3.12. Эпюры: а) эквивалентной относительной упругой деформации EES, и б) эквивалентного напряжения по фон Мизесу EMS в деформированном положении элемента нити для модели 1

Из приведенных полей напряжений и эпюр деформаций и напряжений следует, как и можно было ожидать, что наиболее напряженные участки бруса находятся у его поверхности, причем наибольшие значения напряжений и деформаций приходятся на наиболее искривленные участки. Поскольку рассматривается плоская деформация, однородная по оси Z , то эффект смятия бруса в поперечном направлении модели не учитывают. Уменьшение поперечных сечений бруса происходит одновременно с продольным растяжением без изменения объема (площади элементов). При больших значениях сил нормального давления (вместо 10 условных единиц - 100 или 500 единиц) происходит продавливание кривизны бруса в поперечном направлении, которое на рис.3.11 наблюдается лишь в малой степени.

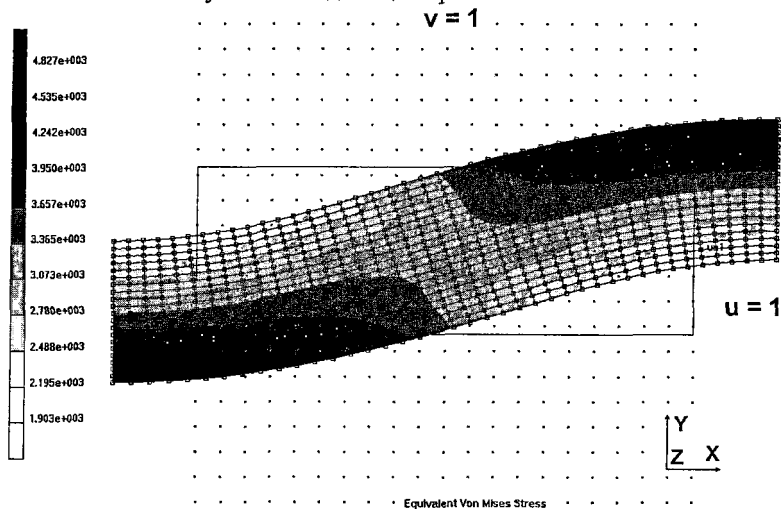
Практически пропорциональная зависимость между EMS и EES, которая наблюдается на рис.3.12а и 3.12б, есть следствие абсолютной упругости, однородности и линейности деформации, которая была задана свойствами материала.

На рис.3.13 и 3.14 приведены аналогичные результаты моделирования для модели 2. На рис.3.13 поле распределения EMS показано вместе с расположением элементов и узлов сетки и без них для большей наглядности распределения. Как следует из рисунка, брус не только удлинится вдоль оси X , но и искривляется под действием сил распределенной нагрузки со стороны других нитей, взаимодействующих с данным элементом нити. Заметим, что в отличие от модели 1, в модели 2 значения EMS монотонно нарастают как в продольном, так и в поперечном направлениях бруса. При этом наибольшие значения приходятся на внешние участки кривизны деформации. Наибольшее и наименьшее значения напряжений различаются всего в три раза (максимум ~ 4750 и минимум ~ 2000 условных единиц напряжений).

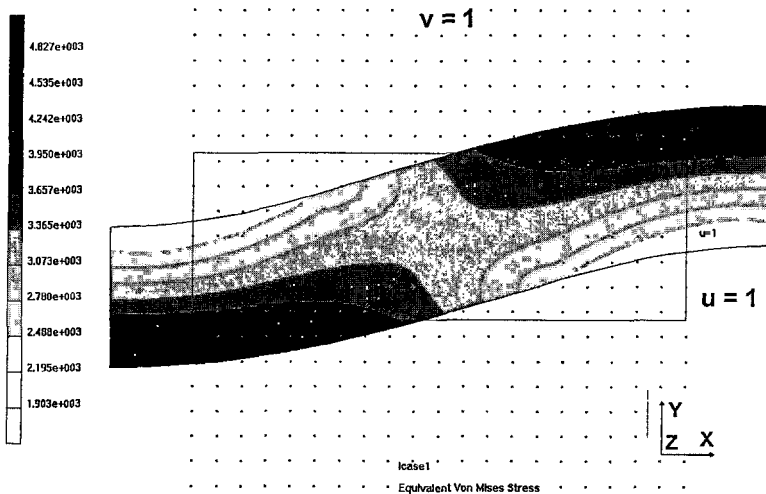
Это хорошо видно на эпюрах EES и EMS (рис.3.14а, 3.14б), показывающих изменение эквивалентных деформаций и напряжений в наиболее деформированных сечениях.

Рассмотрим теперь результаты моделирования на модели 3. Они приведены на рис.3.15 и 3.16. Касательные распределенные нагрузки так же, как и нормальные силы, приводят к изменению кривизны бруса. Однако величина кривизны заметно меньше, чем для модели 2. Заметим, что такой же эффект наблюдается и в случае касательной нагрузки, приложенной к поверхности изогнутого бруса, причем изменение кривизны происходит еще в меньшей степени, поскольку касательные нагрузки в этом случае не имеют единого направления действия. В поперечных сечениях эпюры для величин EES и EMS также монотонны, как и для модели 2. Однако, в отличие от модели 2 изменение величин заметно отличается от прямолинейного (сравнить рис.3.14 и 3.16). Диапазон варьирования

напряжения EMS также сокращается: наибольшее значение равно ~ 3430 , а наименьшее ~ 2800 условных единиц напряжения.



а) показана сетка конечных элементов



б) не показана сетка конечных элементов

Рис.3.13 Начальное и конечное (деформированное) положение элемента нити для модели 2 с полем распределения эквивалентного напряжения по фон Мизесу EMS по материалу элемента нити

По результатам моделирования и сравнения трех моделей модно сделать следующие выводы.

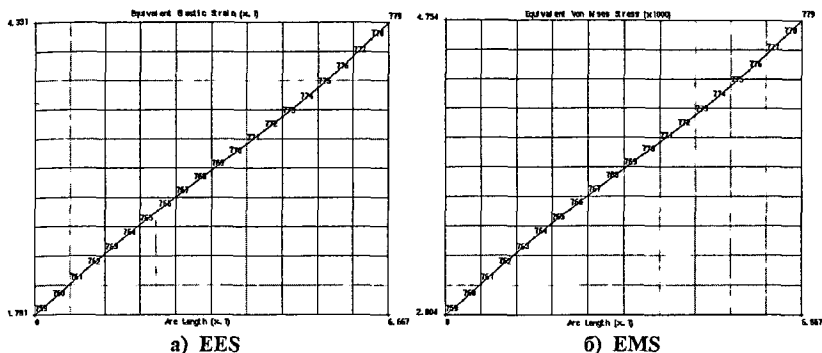


Рис.3.14 Эшоры: а) эквивалентной относительной упругой деформации EES и б) эквивалентного напряжения по фон Мизесу EMS в деформированном положении элемента нити для модели 2

1. Деформация изогнутого элемента нити существенно отличается от деформации прямолинейных элемента нити даже в пределах упругих деформаций. Поэтому следует ожидать, что для реальной нити или пряжи, являющейся анизотропным упруго-пластическим материалом, деформация не может быть смоделирована идеализированными упруго-пластическими элементами правильной (например, цилиндрической) формы даже при трехмерном моделировании.
2. Случайные вариации свойств материала и геометрических характеристик элемента нити могут привести к значительному разбросу в характеристиках деформированного состояния, поскольку последнее чувствительно к таким вариациям.
3. Замена искривленных элементов нити прямолинейными в плоскости ткани возможны при условии подбора эквивалентных значений параметров материала и исключения из рассмотрения изменения свойств ткани в сечениях по ее толщине.

Моделирование нагрузки, распределенной по длине нити основы

Рассмотрим еще две модели. Модель 4 имитирует протяженный участок нити, на который приходится несколько (в данном случае десять) областей взаимодействия нити с нитями другой системы (рис.3.17). Это взаимодействие в отличие от модели 3 имитируется касательными нагрузками (силами трения). Они направлены по поверхности нити в сторону, противоположную растяжению нити (apply3 и apply4).

Левый конец участка нити закреплен и является точкой отсчета деформаций и смещений (apply1). Правый конец принудительно смещается вдоль осевой линии нити с постоянной скоростью от нулевого значения смещения в начальный момент до величины, равную 10% начальной длины нити, к концу моделирования (apply2).

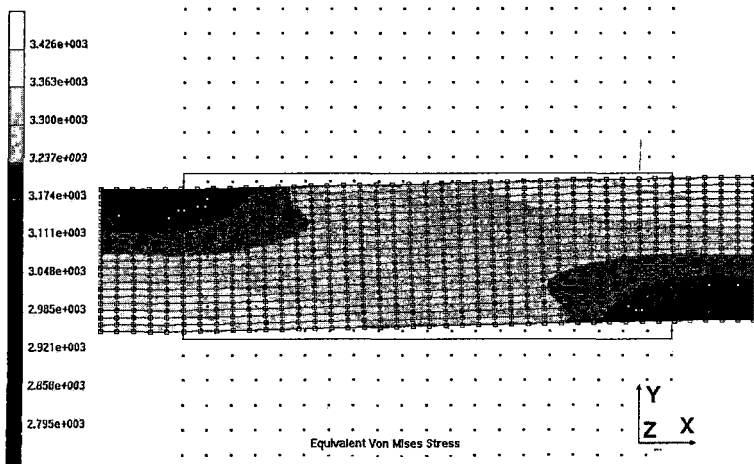


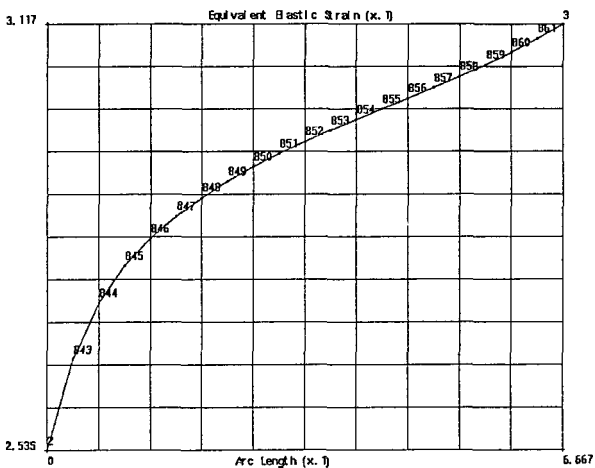
Рис.3.15 Начальное и конечное (деформированное) положение элемента нити для модели 3 с полем распределения эквивалентного напряжения по фон Мизесу EMS

- В качестве характерных показателей деформации нити выбраны:
- эквивалентное напряжение по фон Мизесу, EMS;
 - эквивалентная упругая деформация, EE;
 - значения компонентов тензора деформации:
 - нормальной ϵ_{xx} вдоль оси X (Comp.11 на рис.3.18);
 - нормальной ϵ_{yy} вдоль оси Y (Comp.22 на рис.3.18);
 - касательной ϵ_{xy} в плоскости XY (Comp.12 на рис.3.18) вдоль осевой линии моделируемого участка нити с начальными координатами $(0; 0) - (L; 0)$.

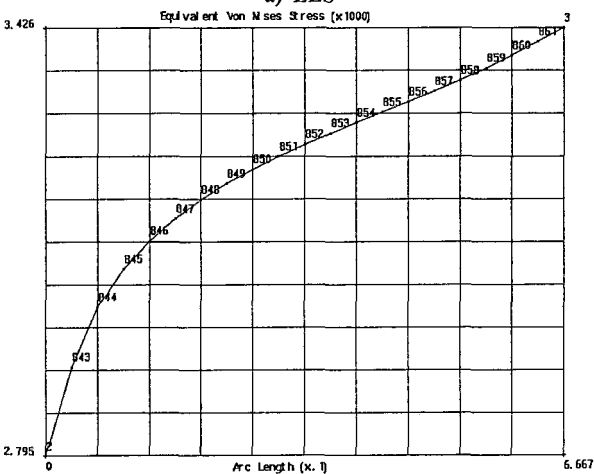
Кроме того, на рис.3.19 приведены значения EMS и аналогичные компоненты тензора упругой деформации (Equivalent von Mises Stress, Comp.11, Comp.22, Comp.12 of Stress).

Из графиков на рис.3.18 и 3.19 следует, что основная деформация и напряжения возникают в модели 4 в направлении оси X . По сравнению с ними другие составляющие деформации и напряжения значительно (примерно на порядок) меньше.

Этот вывод верен в широком диапазоне значений параметров материала. Для примера, на рис.3.20 приведены кривые, аналогичные рис.3.18-3.19, но при значении коэффициента Пуассона $\mu = 0,01$ (на рис.3.18-3.19 $\mu = 0,27$), а на рис.3.21 коэффициент Пуассона $\mu = 0,48$. Значения коэффициента Пуассона влияют на величину поперечной деформации (Comp.22). Остальные показатели практически не чувствительны к этому параметру материала.



a) EES



б) EMS

Рис.3.16. Эшоры: а) эквивалентной относительной упругой деформации EES и б) эквивалентного напряжения по фон Мизесу EMS в деформированном положении элемента нити для модели 3

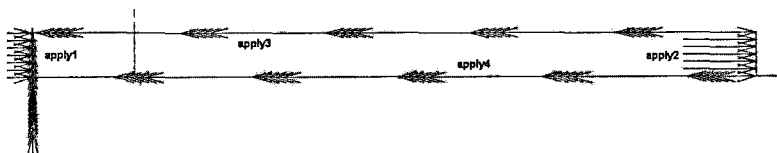


Рис.3.17. Краевые условия для задачи плоской деформации прямого бруса модель 4

Влияние касательных сил взаимодействия нити с другими нитями (имитирующих силы трения) показано на рис.3.22, 3.23. Моделирование проводилось на модели 4 при исходных условиях ($\mu = 0,27$), но увеличенных в 10 раз касательных распределенных нагрузках.

Заметим, что в большей степени начинает проявляться совместное действие поперечных и касательных нагрузок в конечном изгибе бруса (рис.3.15). Распределение деформаций и напряжений по длине бруса (рис.3.16) также существенно отличается от исходного варианта (рис.3.11 и 3.12).

Модель 5 (рис.3.17 – 3.20) совпадает по всем параметрам с моделью 1, но в ней рассмотрено одновременное действие нормальных и касательных распределенных нагрузок $apply3$, $apply4$ и $apply5$ (рис.3.17), нарастающих по мере удлинения по оси X . На рис.3.18 приведено распределение эквивалентных упругих деформаций EES по объему бруса. Наибольшие деформации сосредоточены, как и во всех предыдущих моделях, на участках наибольшей кривизны бруса.

Различие в величине деформации достигает двух порядков. На рис.3.19а приведены эпюры различных составляющих относительной деформации (Equivalent Elastic Strain, Component Strain 11, Component Strain 22, Component Strain 12 - эквивалентной, нормальной по оси X , нормальной по оси Y и касательной в плоскости XY), - и на рис.3.19б - аналогичных составляющих напряжения. Отметим неравномерность изменения этих характеристик вдоль оси элемента нити и относительно небольшой диапазон различий в значениях деформации и напряжений. Так, максимальное и минимальное значения деформации отличаются друг от друга примерно в 5 - 6 раз, а для напряжений - в 3 - 4 раза.

Наряду с эпюрами по осевым линиям были построены аналогичные эпюры по поперечным сечениям бруса в наиболее напряженных сечениях. Они приведены на рис.3.27. Из рисунков видно, что по поперечным сечениям характеристики деформации и напряжения меняются монотонно. При этом диапазон различия минимальных и максимальных значений примерно такой же, как и в вдоль осевой линии.

На рис.3.28, 3.29 приведена модель 6. Она построена как периодическое (10 -кратное) повторение модели 5 элемента нити. При этом граничные условия на торцах бруса вынесены на концы полученной периодической структуры ($apply1$ и $apply2$). Нормальные и касательные нагрузки сохранены неизменными.

Фрагменты их распределения на начальном и конечном участках периодической структуры приведены на рис.3.29. Левый конец бруса закреплен ($apply1$). При моделировании деформации правый конец бруса смещался вдоль оси X на 10% протяженности бруса по этой оси ($apply2$). Величины распределенных нагрузок нарастают линейно по мере смещения конца бруса.

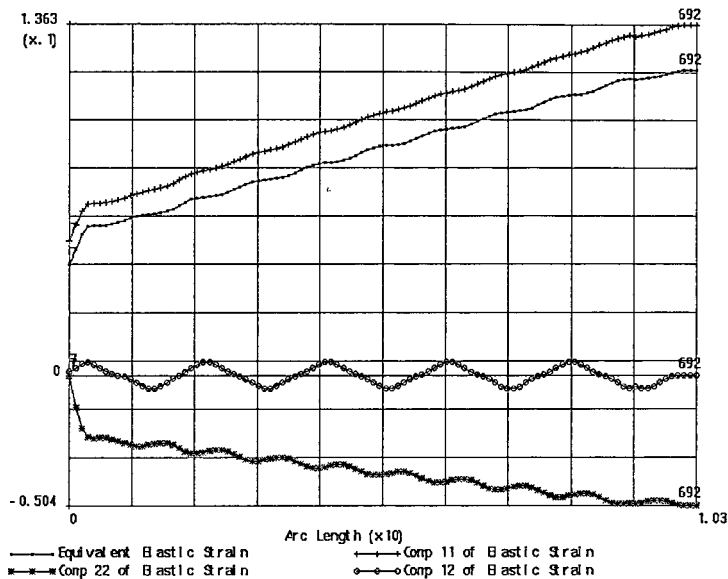


Рис.3.18.

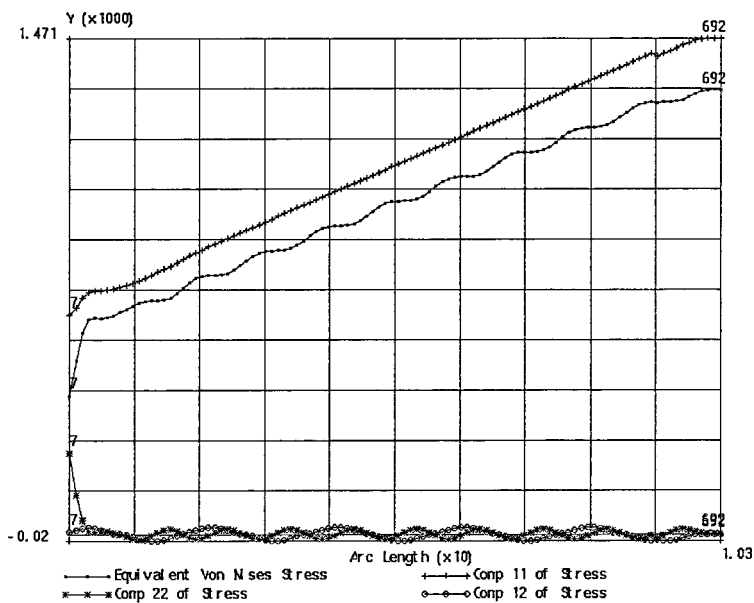


Рис.3.19.

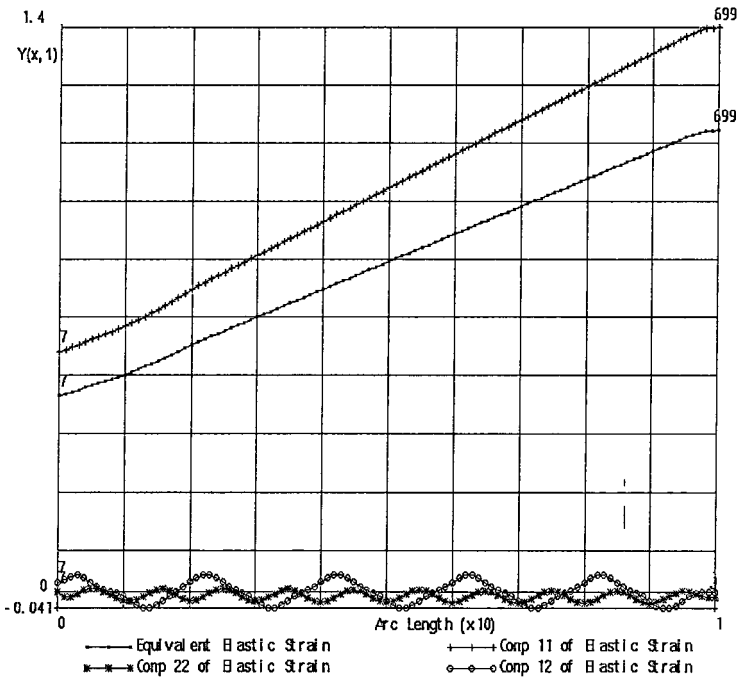


Рис.3.20. $\mu = 0,01$

Распределение эквивалентной упругой деформации EES по объему бруса в конце удлинения показано на рис.3.30. Аналогичное распределение имеет и EMS. Видно, что наибольшие деформации возникают вблизи правого конца бруса в окрестности точки приложения удлинения.

Затем касательные напряжения частично "гасят" возникающие деформации, и далее по всей длине бруса они практически постоянны и малы. Заметим, что в рассматриваемой модели распределенные нагрузки имитировали нормальные нагрузки и силы трения вследствие взаимодействия с другими нитями.

Однако, в отличие от сил трения, распределенные нагрузки, включенные в модель, являются активными силами, значения которых не зависят от смещений участков бруса. Поэтому суммарное действие касательных сил приводит к нарастанию деформаций в окрестности левого конца бруса. Неполное уравнивание составляющих сил, действующих в направлении оси Y , приводит к некоторому глобальному изгибу и смещению вдоль этой оси всего бруса (левый конец бруса неподвижен).

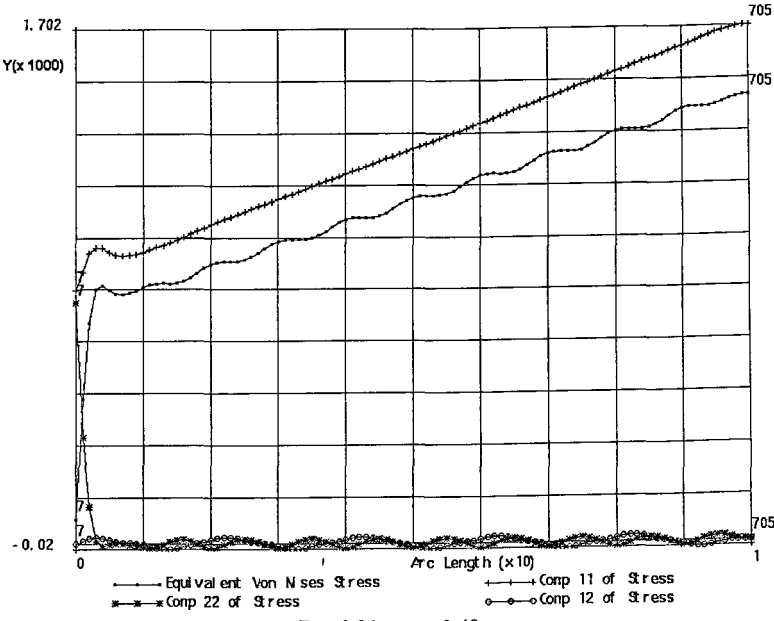
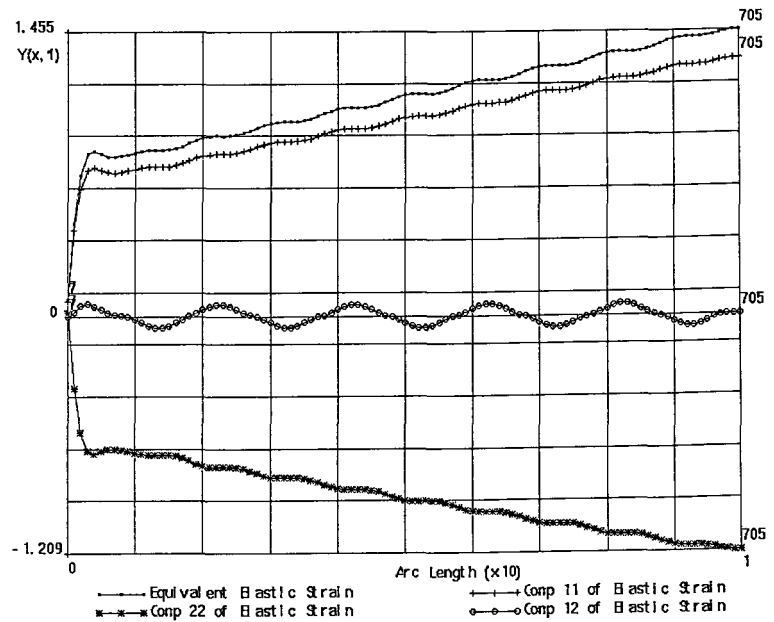
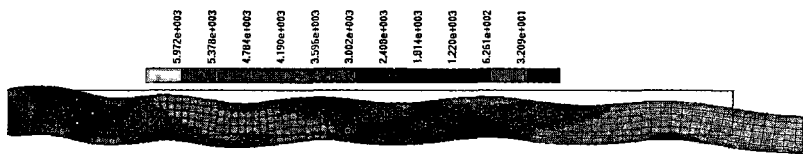


Рис.3.21. $\mu = 0,48$



Equivalent Von Mises Stress

Рис.3.22.

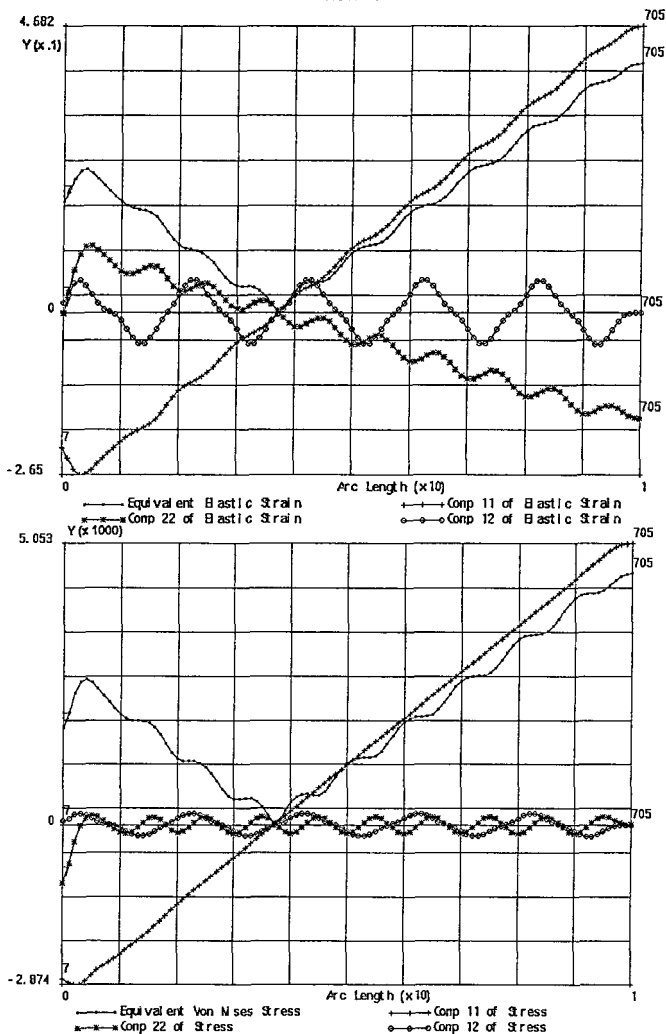


Рис.3.23. $\mu = 0,27$ Касательные нагрузки увеличены в 10 раз (с 100 до 1000)

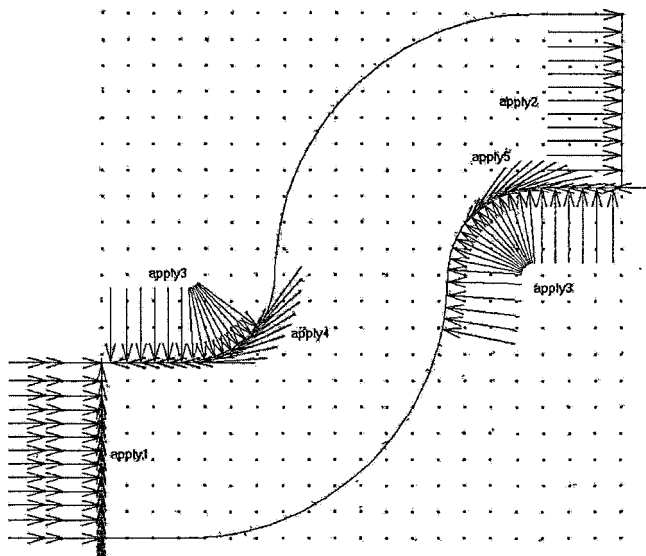


Рис.3.24. Модель 5 (аналогична модели 1, но одновременно – нормальные и касательные нагрузки) (файл trenieniti4.mud)

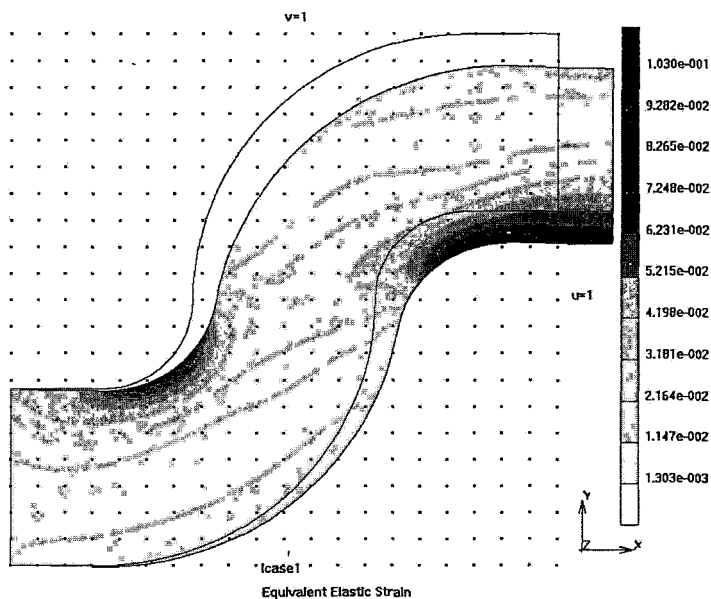
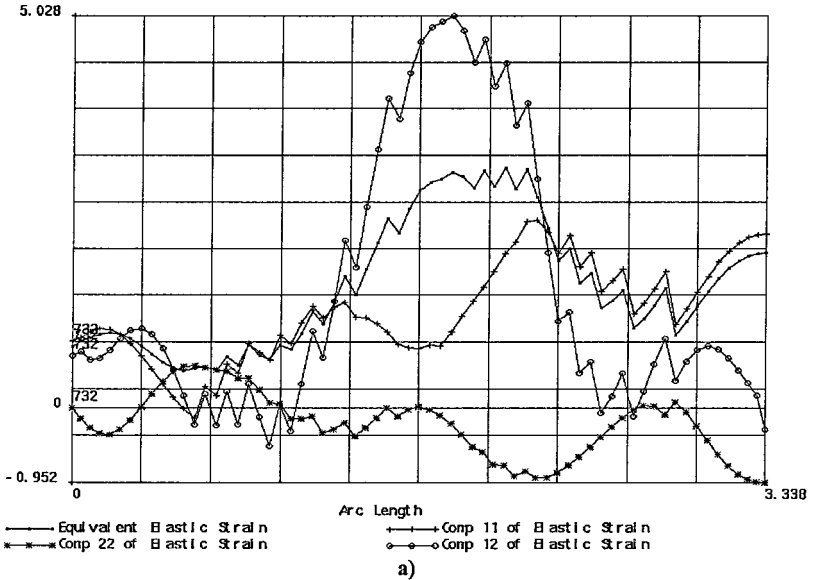
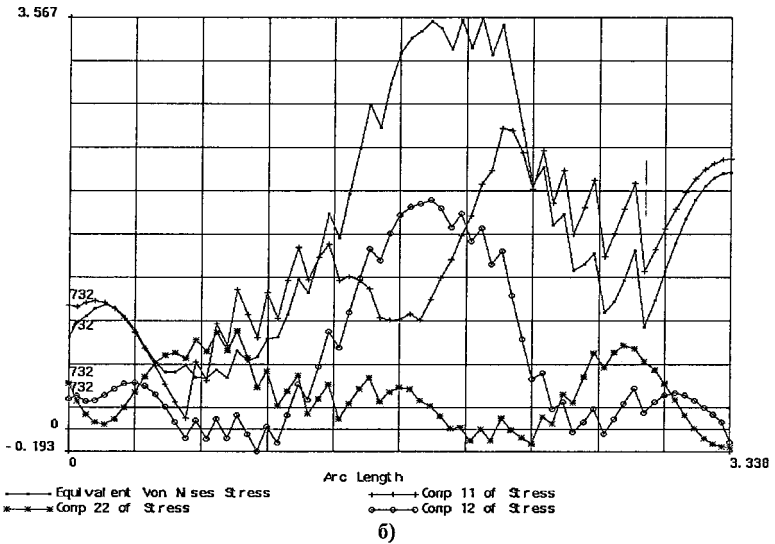


Рис.3.25. Модель 5. Распределение EES после приложения нагрузок

Y ($\times 0.1$)



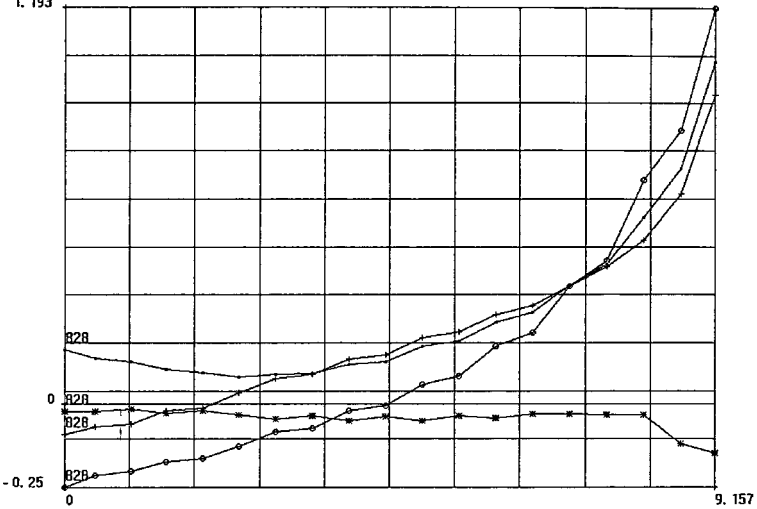
Y ($\times 100$)



Prс.3.26

Y (x. 1)

1. 193

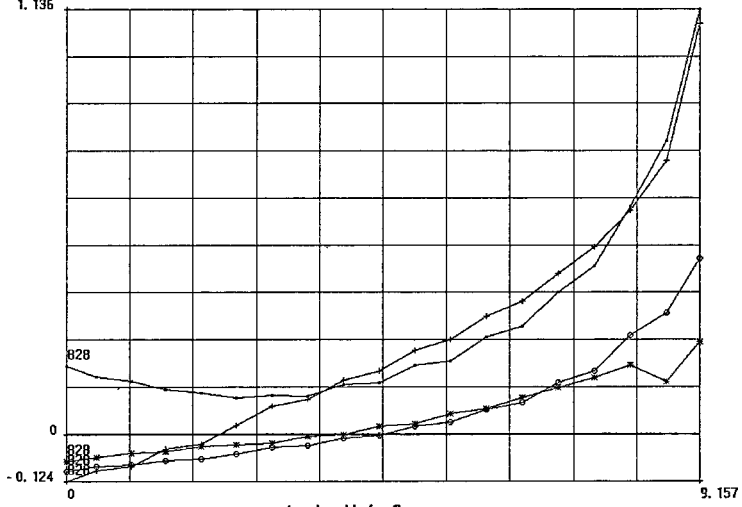


—▲— Equivalent Elastic Strain
—●— Comp 11 of Elastic Strain
—■— Comp 22 of Elastic Strain
—◇— Comp 12 of Elastic Strain

a)

Y (x1000)

1. 136



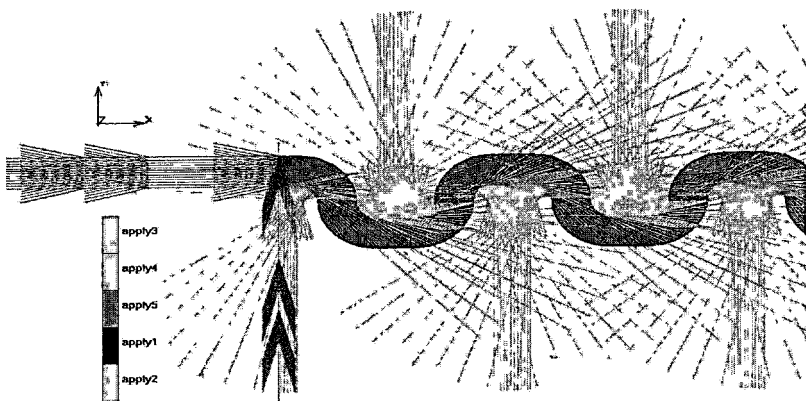
—▲— Equivalent Von Mises Stress
—●— Comp 11 of Stress
—■— Comp 22 of Stress
—◇— Comp 12 of Stress

b)

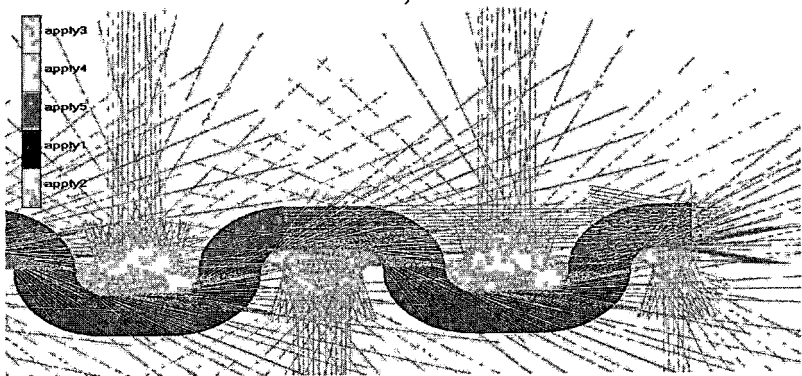
Рис.3.27



Рис.3.28. Модель 6. Геометрическая модель

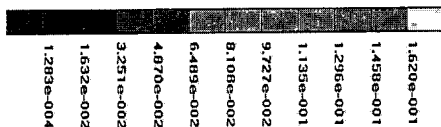


a)



b)

Рис.3.29. Модель 6. Граничные условия: распределение нормальных и касательных полей сил трения и давления по длине нити



Equivalent Elastic Strain

Рис.3.30

3.4. Модель фиксации уточной нити в ткани после прибора

Используем МКЭ для моделирования релаксации положения уточной нити в ткани в результате взаимодействия с основными нитями. Первоначально распрямленная уточная нить под действием основных нитей изгибается. Конечное изогнутое состояние уточной нити, положение основных нитей и форма их поперечных сечений зависят от соотношения упругой, эластической и пластической составляющих деформации этих нитей. Описываемая ниже модель позволяет учесть перечисленные факторы взаимодействия нитей в динамическом режиме переходного процесса релаксации взаимного положения нитей.

В качестве примера рассматривается саржевое переплетение 3x1. Нити основы и утка считаются примерно одинаковыми: текст $T = 16$, разрывная нагрузка $P = 6,5$ сН, относительное разрывное удлинение $e = 4\%$, объемная плотность $r = 1,5$ г/см³. Площадь S поперечного сечения нити равна $S = T / r = 0,011$ мм². Следовательно, диаметр нитей равен $d \sim 0,12$ мм. Модуль упругости $E = P / (e S) = 14347$ сН/мм². Коэффициент Пуассона примем равным 0,3.

Для учета эластической составляющей деформации в модели использована зависимость величины этого деформации от времени, которая описывается формулой

$$F = 50000(1 + t^{0.6})$$

Кроме этой зависимости, задается уровень начала пластической деформации Y_p , начиная с которого в нити возникает этот вид деформации.

Для упрощения моделирования с помощью персонального компьютера ограничимся плоской задачей. На рис.3.31 представлена геометрическая модель и ее фрагмент с сеткой конечных элементов. Толщина нитей принята равной 0,1 мм и шириной 0,15 мм. Радиус скругления при построении поперечного сечения нити 0,05 мм. Модули упругости утка $E_u = 1,5e6$, основы $E_o = 2,0e6$.

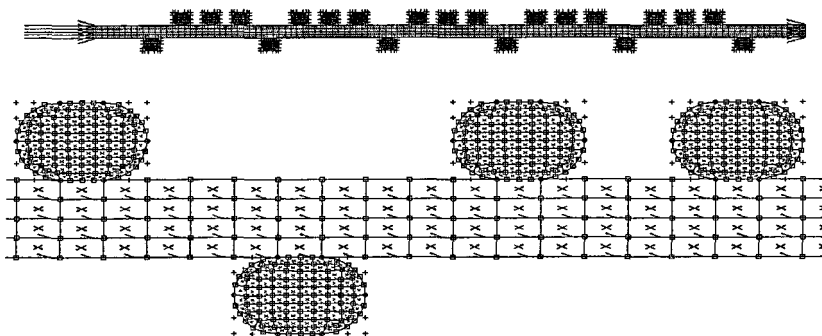


Рис.3.31 Геометрическая модель уточной нити с указателями фиксации концов и увеличенный фрагмент модели

Краевые условия модели: концы уточной нити зафиксированы вдоль оси X , но не вдоль оси Y . Основные нити, лежащие на уточной нити, перемещаются вниз по линейному закону с постоянной скоростью на величину 0,2 мм от начального положения. Основные нити, расположенные под уточной нитью, точно так же двигаются вверх на 0,2 мм.

На рис.3.32 изображен фрагмент уточной нити в пределах одного раппорта с распределением различных контролируемых величин по окончании цикла деформации.

Влияние порога пластичности уточной нити

Изгиб уточной нити под действием основных нитей и фиксация положения утка происходит за доли секунды. Поэтому эластическая составляющая деформации нити не успевает себя проявить. Вместе с тем пластическая составляющая «срабатывает» в полной мере, погашая осцилляции упругих составляющих. Поэтому представляет интерес проанализировать, в какой степени уровень начала пластических деформаций Y_p сказывается на результирующей форме уточной нити и распределении в ней показателей деформации: общей пластической деформации и эквивалентного напряжения (по фон Мизесу).

Для изучения этого вопроса с моделью был выполнен компьютерный эксперимент при нескольких значениях порога пластичности Y_p . Результаты представлены в виде графиков.

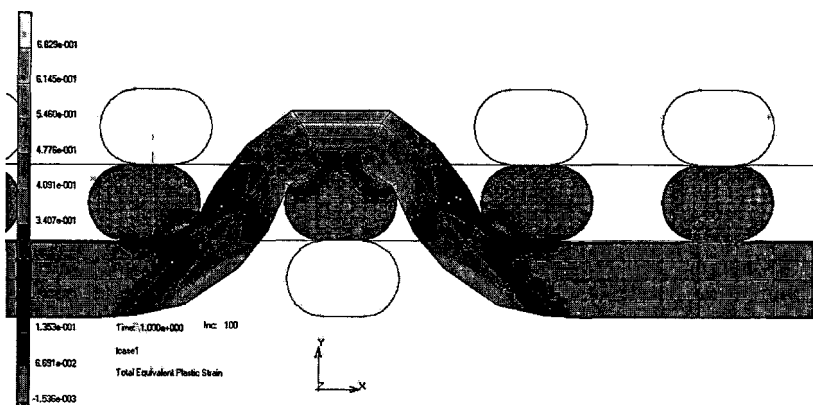
На рис.3.33 приведены распределения общей пластической деформации при порогах пластичности $Y_p = 0,01$ и $Y_p = 0,5$. При высоком уровне порога пластичности уточная нить сминает сечения основы. При этом сама уточная нить практически не деформировалась. Следует отметить отрыв средней нити основы от уточной нити и смещение крайних уточных нитей к средней нити по оси X .

3.5. Модель сжатия с трением двух упруго-пластических нитей

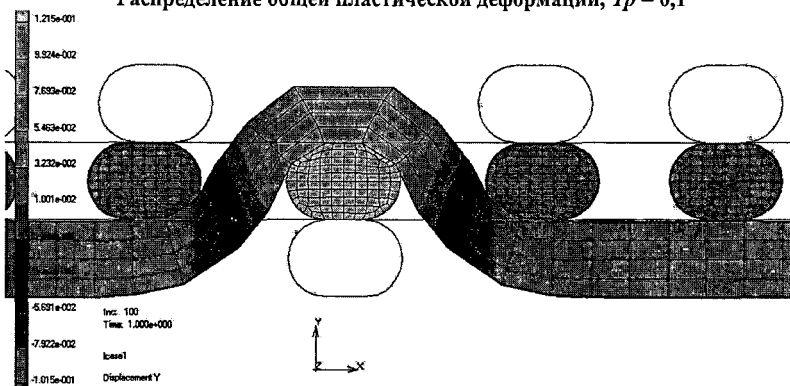
Рассматривается сжатие двух параллельно или квази-параллельно расположенных нитей имеет место в тканях, трикотаже и крученой пряже. При этом первоначальная округлая форма нитей изменяется в зависимости от трения между ними, соотношения их модулей жесткости и пластических свойств.

Приблизительно динамику сжатия двух нитей и изменение их сечений можно исследовать с помощью МКЭ.

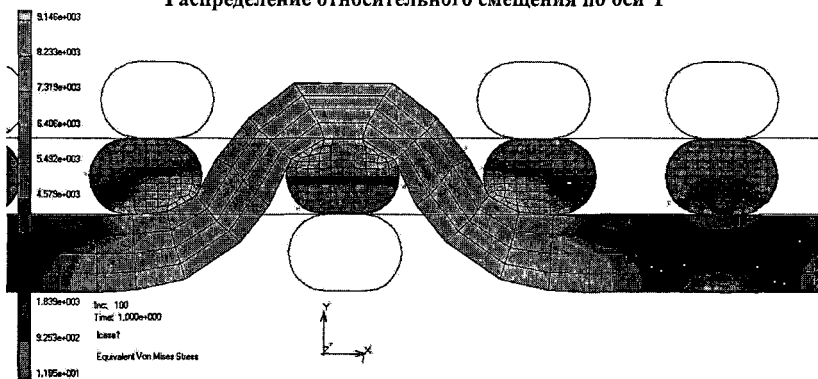
На рис.3.34 представлена геометрическая модель сечений в виде двух усеченных окружностей, соприкасающихся по малой плоскости касания. На рисунке показаны сетка конечных элементов, внешняя нагрузка в виде нормального давления на внешние поверхности нитей (apply1) и условие фиксации положения узлов по оси Y (но не по оси X) для фиксации положения модели относительно осей координат при деформации.



Распределение общей пластической деформации, $Y_p = 0,1$

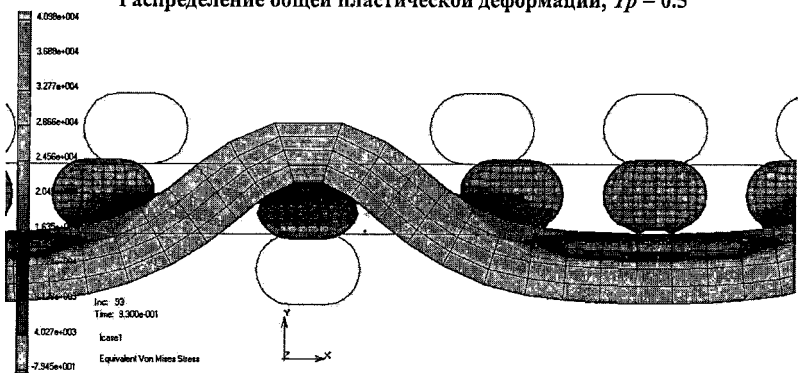
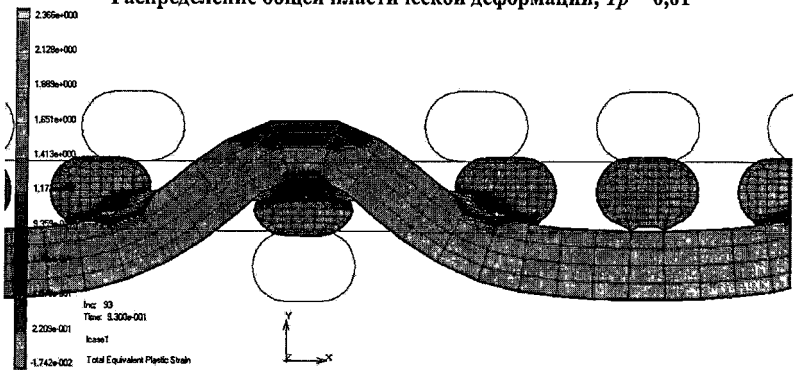
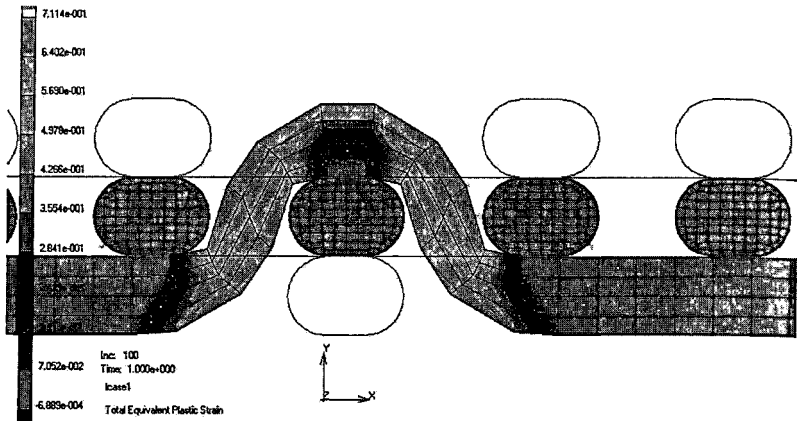


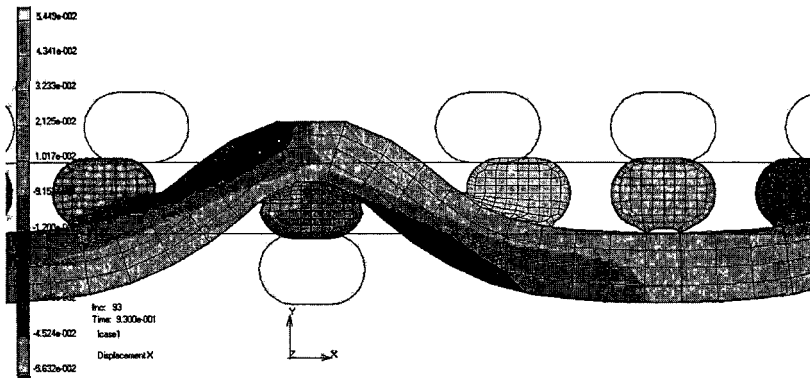
Распределение относительного смещения по оси Y



Распределение эквивалентного (по фон Мизесу) напряжения

Рис.3.32





Распределение относительного смещения по оси X, $Y_p = 0.5$

Рис.3.33

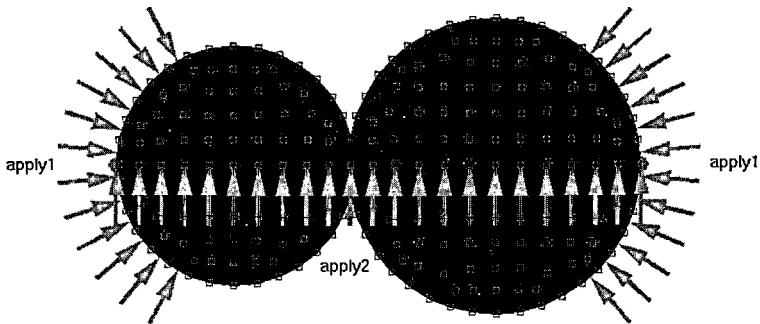


Рис.3.34

Исходные диаметры сжимаемых нитей в условных единицах равны соответственно 0,8 и 1,0. Модуль упругости для обеих нитей принят одинаковым и равным $E = 60$ усл. ед., коэффициент Пуассона равен 0,3. По линии касания сечений задан коэффициент «сухого» трения 0,25. К поверхностям сечений приложено давление P , равное 10 усл. ед.. Его размерность та же, что и модуля упругости. Давление как граничное условие задано по 12 сегментам конечных элементов у каждого из сечений симметрично относительно оси X. Общее время моделирования $T_{mod} = 1$ усл. ед.

С моделью выполнена имитация динамической деформации с линейно нарастающей во времени нагрузкой P для четырех вариантов:

1. Материал обеих нитей абсолютно и линейно упругий;
2. Материал обеих нитей линейно упруго-пластичный с границей начала текучести $Y_p = 15$ усл. ед.

3. Материал обеих нитей линейно вязко-упруго-пластичный с коэффициентом вязкости, равным 5 усл. ед., и границей начала текучести $\Upsilon_p = 15$ усл. ед.;
4. Материал обеих нитей линейно вязко-упруго - пластичный с коэффициентом вязкости, равным 50 усл. ед., и границей начала текучести $\Upsilon_p = 15$ усл. ед.

Для сравнения вариантов моделей в качестве динамической характеристики процесса сжатия двух нитей рассмотрены кривые динамики перемещения центральной точки касания нитей по оси X относительно начала координат во времени за 100 шагов по времени (рис.3.35).

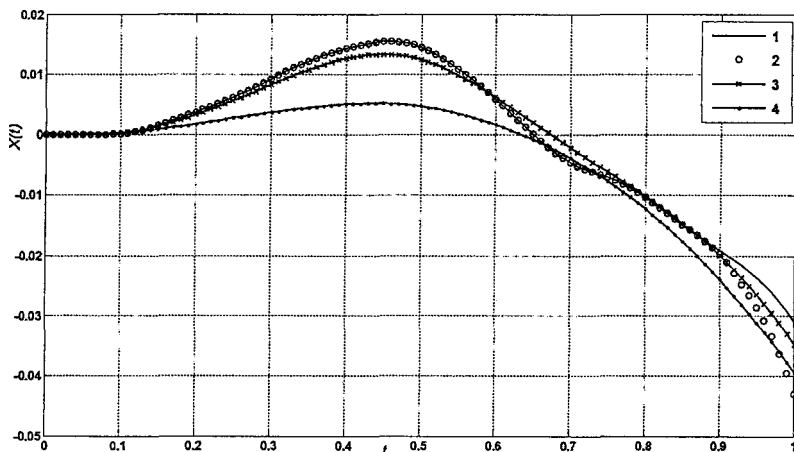


Рис.3.35. Смещения центральной точки касания сечений во времени для четырех вариантов модели

На рис.3.36, 3.37 приведены распределения относительных деформаций и эквивалентных напряжений для первых двух вариантов моделей.

В отличие от абсолютно упругой деформации порог текучести приводит к нарушениям в структуре конечных элементов. Это видно и по эпюрам напряжения вдоль осевой линии сечений (по оси X), которые для всех вариантов показаны на рис.3.38. Происходит не только общее снижение напряжения в сечениях к концу моделируемого отрезка времени, но и распределение значительно отличаются по форме. Динамика деформации также существенно меняет вид распределений. Это видно по временным диаграммам изменения напряжения и деформации для центральной точки контакта для разных вариантов модели (рис.3.39).

Разные точки поперечных сечений в процессе деформации находятся в существенно разных условиях. Эта разница видна на графиках, приведенных на рис.3.40 и 3.41. На них показаны значения эквивалентной пол-

ной относительной деформации в узлах, соответствующих границам и центрам окружностей сечений. Эти узлы пронумерованы слева направо номерами 1, 2, 3, 4, 5.

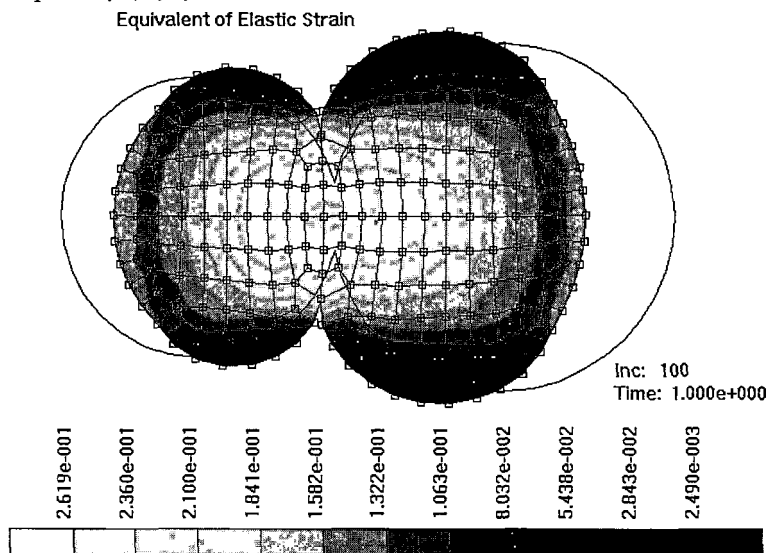


Рис.3.36 Модель сжатия двух нитей. Вариант 1. Распределение эквивалентной относительной упругой деформации

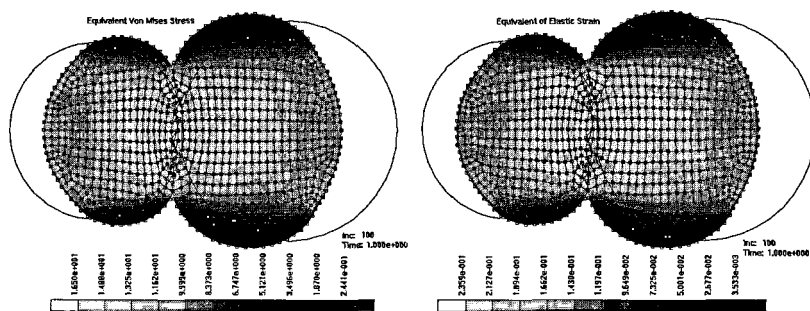


Рис.3.37 Модель сжатия двух нитей. Вариант 2. Распределение эквивалентного напряжения (по фон Мизесу) и эквивалентной относительной упругой деформации

Графики показаны для двух наиболее отличающихся вариантов: 1-го и 4-го. Заметим, что относительные деформации узлов 1 и 5, как и можно было ожидать, практически совпадают. Наибольшим вариациям подвержен узел 3 в центре касания окружностей.

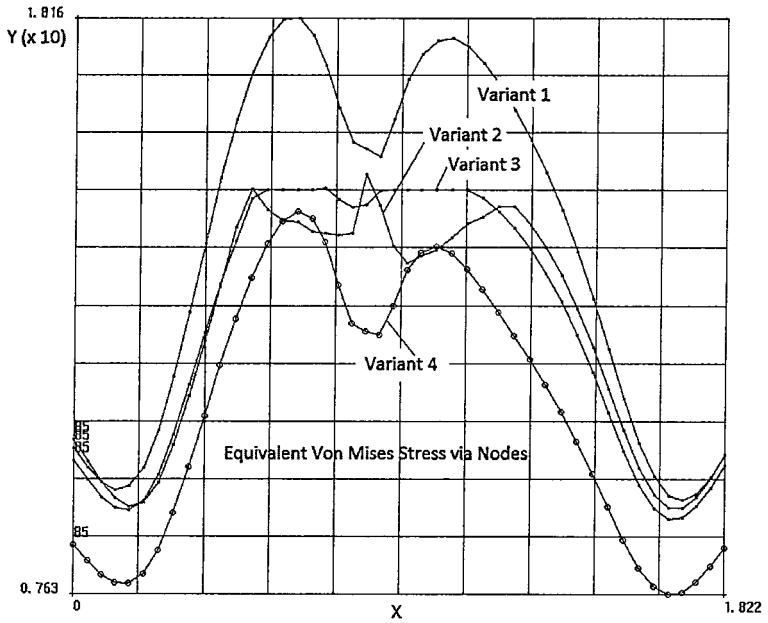


Рис.3.38

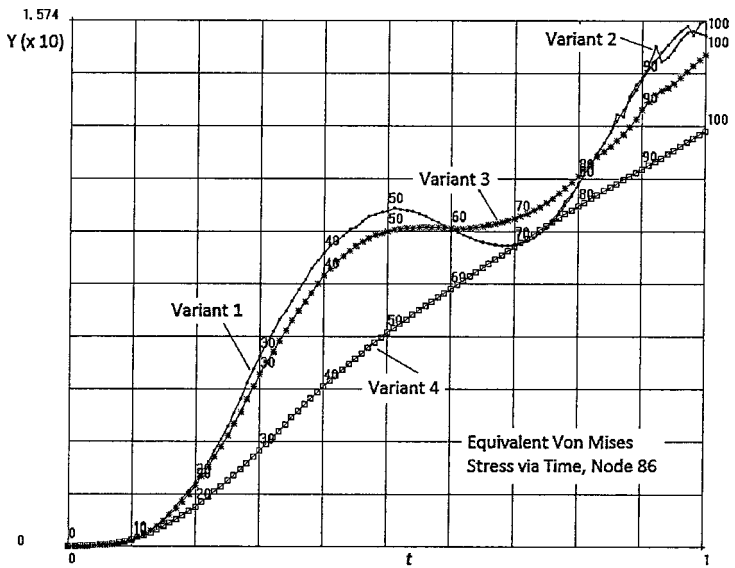


Рис.3.39

2. 191 Equivalent of Total Strain (x.1)

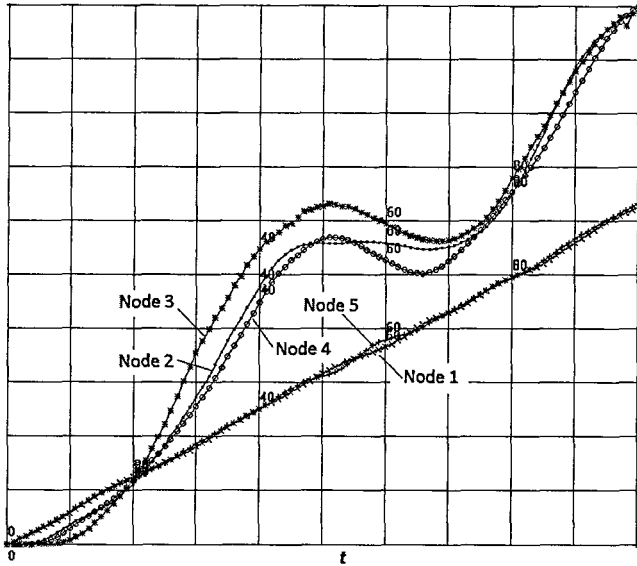


Рис.3.40

Вместе с тем, колебания деформации во времени для 4-го варианта значительно меньше, чем у 1-го варианта: сказывается демпфирование за счет эласто-пластических составляющих деформации. Рис.3.42 и 3.43 показывают, что наличие эластической составляющей «демпфирует» структурные нарушения в системе конечных элементов и позволяет модели остаться в пределах гладких решений.

1. 705 Equivalent of Total Strain (x.1)

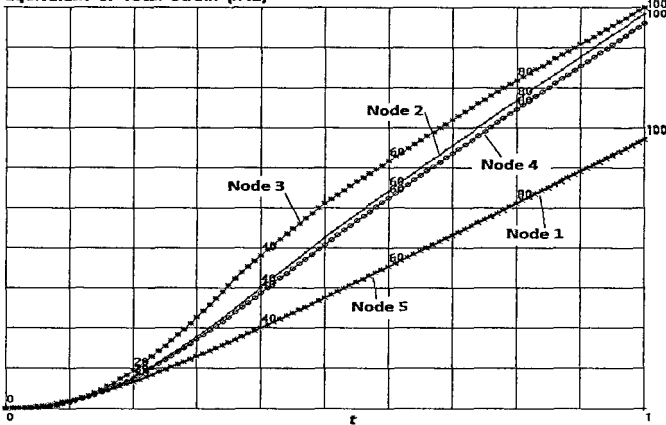


Рис.3.41

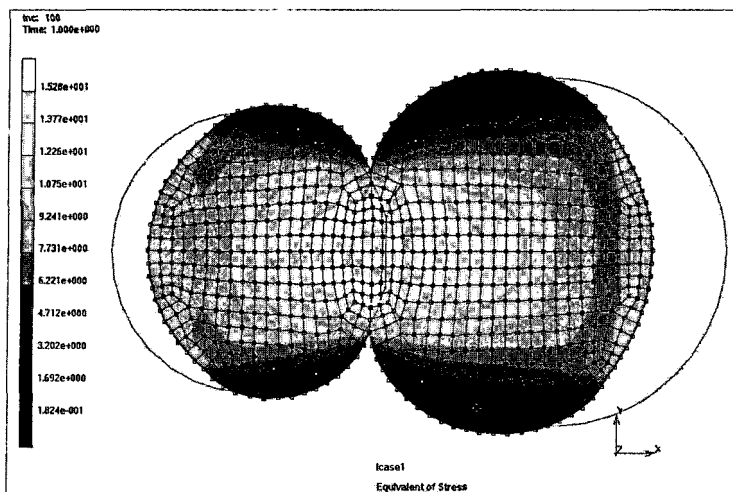


Рис.3.42

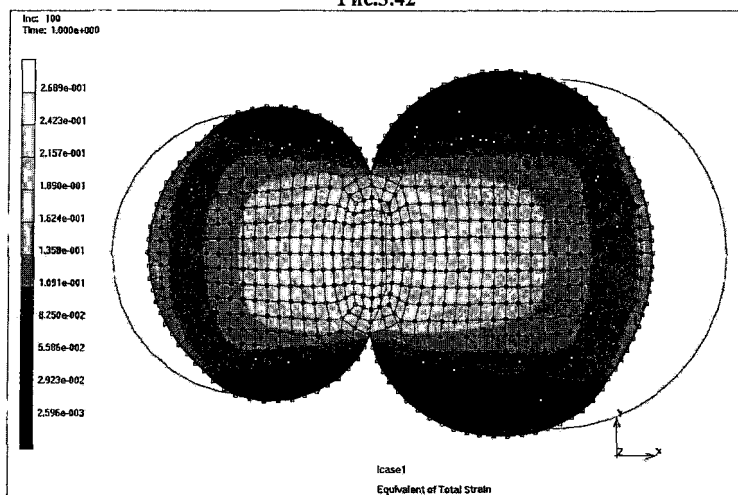
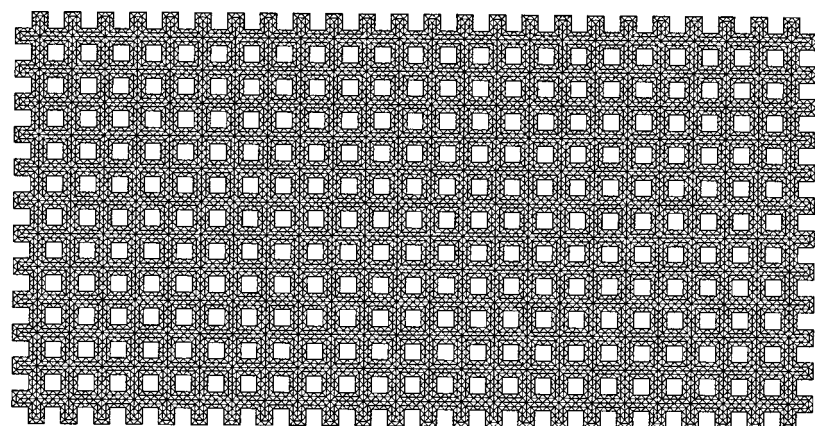


Рис.3.43

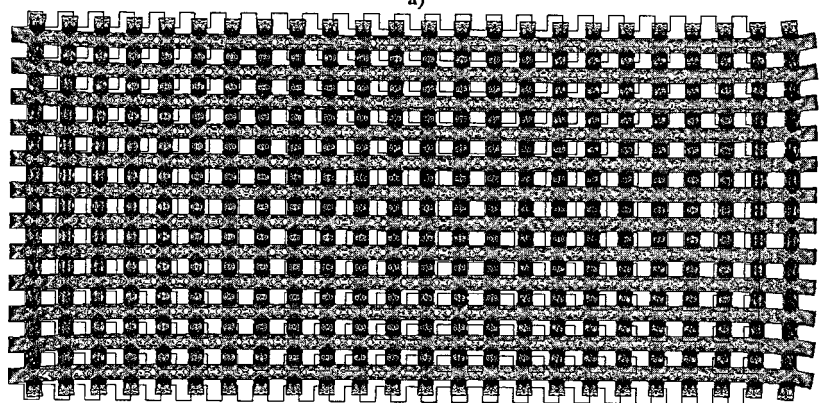
3.6. Модель деформации образца ткани

Геометрическая модель плотняного переплетения показана на рис.3.44а. Характеристики нитей: модуль упругости $E = 2e3$; коэффициент Пуассона 0,45; диаметр нитей $d = 0,1$ мм; интервал между нитями $T = 0,8$ мм. К правым концам основных нитей (на рисунке горизонтальные нити) приложена нагрузка, вызывающая их равномерно нарастающее во времени перемещение до 10% от длины образца.

На рис.3.44б показано конечное распределение эквивалентных напряжений.



а)



б)

Рис.3.44

Видна трансформация положения нитей после приложения нагрузки. На рис.3.45 показаны конечные эпюры компонентов тензора деформаций ϵ_{xx} ϵ_{yy} ϵ_{xy} и тензора напряжений σ_{xx} σ_{yy} σ_{xy} , снятые вдоль крайней на образце нити основы.

Из графиков следует, что деформация и напряжения равномерно распределяются по длине образца. Периодическая структура строения ткани проявляется в периодических вариациях величин. Наибольшая в среднем деформация и напряжения – это нормальные деформации и напряжения вдоль оси X .

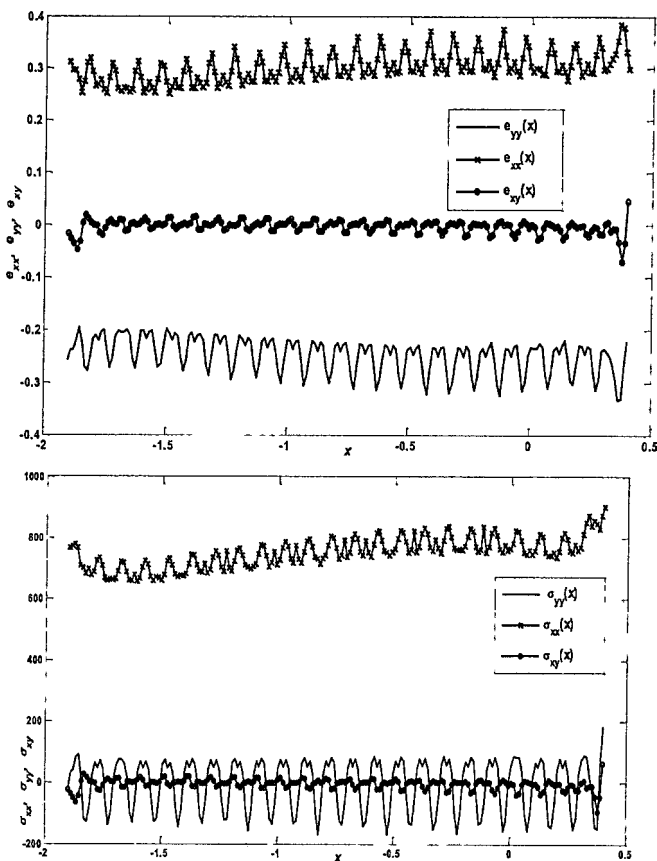


Рис.3.45

Напряжения вдоль утка и касательные напряжения практически равны нулю, а деформация уточных нитей даже при очень большом коэффициенте Пуассона значительно меньше деформации основы.

Другой вариант модели для удлинения образца ткани может быть построен исходя из следующих предпосылок. Образец моделируется плоским прямоугольником, одна сторона которого зажата в неподвижном зажиме, а противоположная перемещается с постоянной скоростью. Чтобы учесть периодические структурные вариации в образце ткани, связанные с переплетением нитей утка и основы, модуль упругости, коэффициент Пуассона и поверхностная плотность как характеристики физико-механических свойств образца описываются периодическими функциями координат x и y , направленных вдоль нитей основы и утка. Для имитации

сил трения между двумя системами нитей зададим распределенную по площади образца силу, направленную против направления удлинения ткани на данном локальном участке образца.

В модели выбраны следующие значения параметров и соответствующие функции: длина образца по основе и утку соответственно $L_o = 5e-2$ м, $L_y = 2e-2$ м. Толщина ткани $h = 1e-3$ м. Моделируемое время удлинения вдоль основы $Tm = 10$ с с постоянной скоростью до величины $D = 0,1 L_o$.

Проекции на оси координат распределенной по площади образца силы трения равны $F_x = Fn u(x,y) / L_o$ и $F_y = Fn v(x,y) / L_y$, где $Fn = 1e8$ Н м⁻², $u(x,y)$ и $v(x,y)$ - смещения результате деформации точки образца с координатами x и y соответственно в направлении осей X и Y . Модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала задаются формулами

$$E(x, y) = En(1 + a \cos(2000\pi xy / (L_o L_y)))$$

$$v(x, y) = 0,33E(x, y)$$

$$\rho(x, y) = R(1 + a \cos(2000\pi xy / (L_o L_y)))$$

Здесь среднее значение модуля En равно $1e6$ Н м⁻², амплитуда вариации модуля и плотности a выбрана равной $0,5$, средняя плотность R равна 1300 кг м⁻³.

На рис.3.46 показаны линии уровня для смещений точек образца ткани в конце моделируемого времени удлинения.

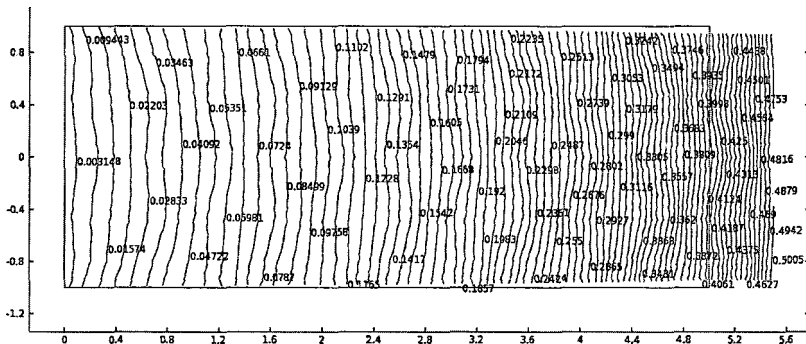


Рис.3.46

Из рисунка видно, что структурная неравномерность ткани приводит к волнообразному нарастанию деформации от линии крепления ткани к перемещаемой (на рисунке - правой) границе. Сила сопротивления деформации, действующая по площади образца, приводит к неравномерному нарастанию деформации вдоль направления деформации. Деформация распространяется и подвержена вариациям не только вдоль направления удлинения, но и в поперечном направлении. Сделанные выводы подтверждаются графиком компонента ϵ_{xx} тензора деформации, представленным на рис.3.47. В то время как средняя относительная деформация к концу

удлинения должна составлять 10%, из-за неравномерного распределения деформации вдоль образца у линии закрепления относительная деформация близка к нулю, а у перемещаемой границы образца она достигает 30%.

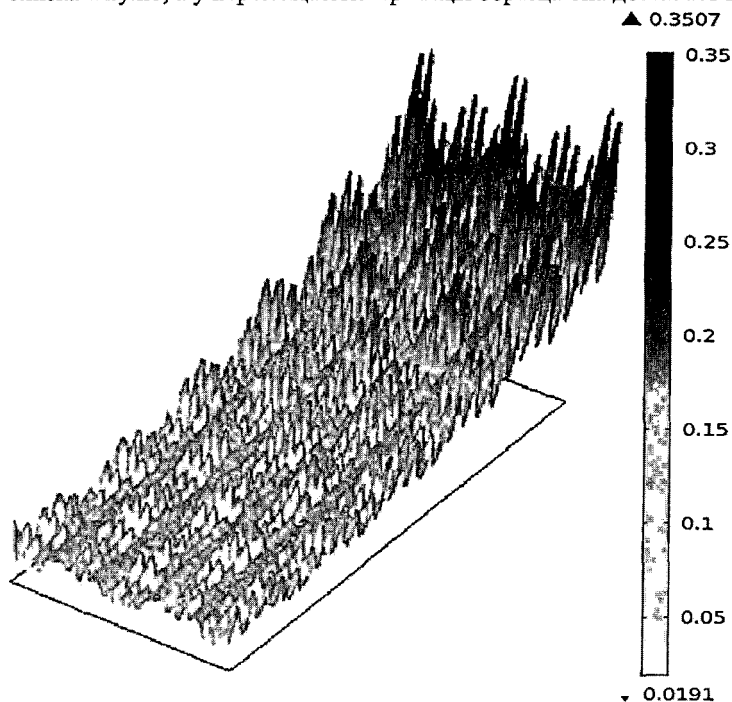


Рис.3.47

3.7. Модель удлинения нити основы в образце ткани

Рассмотрим деформацию нити основы, заработанной в образец ткани, который подвергается равномерно нарастающему удлинению вдоль основы до 10% длины образца. Одной из целей моделирования является оценка влияния изгиба нити в ткани на ее деформацию, а также роль взаимодействия нити основы с перекрывающимися ее уточными нитями.

При разработке модели следует учитывать, что в процессе формирования ткани нить основы претерпевает существенные изменения: она изгибается и при этом растягивается, сжимается и расплющивается под действием уточных нитей. Затем происходит релаксация напряжений. Нить переходит в новое равновесное состояние, которое, однако, отличается от исходного состояния для распрямленной нити тем, что нить в ткани из-за указанных деформаций становится неоднородной вдоль своей длины: меняются как ее геометрические, так и физико-механические характери-

ки. Представленная ниже модель показывает, как можно в первом приближении учесть перечисленные факторы и особенности нити, заработанной в ткань.

Геометрическая модель нити представлена на скриншоте (рис.3.48). Для упрощения рассмотрено полотняное переплетение. Не представляет никаких принципиальных трудностей построить геометрическую модель нити основы для любого другого, в том числе и многослойного переплетения. Граничная линия модели составлена из фрагментов эллиптических кривых.

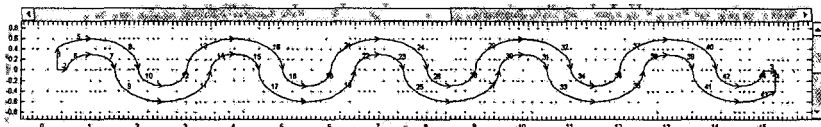


Рис.3.48. Скриншот геометрической модели нити основы в образце ткани

На пронумерованных сегментах границ заданы граничные условия моделирования в виде сил, которые имитируют действие на нить контактирующих с ней нитей утка. Направление этих сил задается с учетом взаимодействия с этими нитями, а их величина нарастает пропорционально времени, как и перемещение вправо правой торцевой границы нити (на рисунке фрагмент 4). Левая торцевая граница нити (фрагмент 1) зафиксирована, что имитирует зажим этого конца нити в неподвижном зажиме.

Деформация нити основы в ткани при ее формировании приводит к неоднородности ее характеристик по длине. Это обстоятельство учтено в модели заданием периодически изменяющегося по длине нити значения модуля упругости в соответствии с формулой

$$E = E_0(1 + a|\sin(2\pi x / L)|)$$

Здесь $E_0 = 2e6 \text{ Pa}$ – «базовое» значение модуля упругости, $a = 0,8$ – амплитуда вариации модуля по длине нити, $L = 4$ – удвоенный период гармонической вариации модуля. Коэффициент Пуассона ν выбран равным 0,33.

На рис.3.49 линиями уровня показано поле распределения относительного удлинения элементов нити в направлении оси X к концу моделируемого удлинения образца ткани.

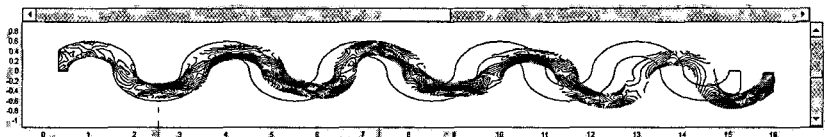


Рис.3.49. Скриншот поля относительной деформации нити вдоль оси к концу моделирования

Как видно из рисунка, деформация распределена весьма неоднородно на разных участках изгибов нити и на разных участках ее длины. Сама форма нити после деформации теряет свою симметрию: проявляется действие нитей утка, препятствующих распрямлению и удлинению основы, и неоднородность модуля упругости нити основы.

Рассматриваемая модель, на первый взгляд, идентична модели растяжения упругого гофрированного материала, например, стального листа. Однако, на самом деле, в модели учитывается такой существенный фактор, как воздействие уточных нитей, а также неоднородность материала нити по длине, которая проявляется в переменном модуле упругости. Поэтому и поведение нити основы существенно отличается от поведения гофрированного материала. Вместе с тем, следует отметить, что гофрированная форма нити основы значительно повышает эффективную упругость нити и препятствует обрыву нити даже при больших деформациях образца ткани.

Литература и информационные ресурсы

1. *Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В.* Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2001. – 562 с.
2. *Бабичев А.В.* Автоматизация построения моделей и визуализация результатов численного моделирования деформирования наноструктур. Вычислительная механика сплошных сред. - 2008. - Т.1, №4. - С.21-27.
3. *Баженов В.А., Оробей В.Ф., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В.* Строительная механика. - Специальный курс. Применение метода граничных элементов. Одесса, "Астропринт", 2001. 284 с.
4. *Березин И.Я., Чернявский О.Ф.* Сопротивление материалов. Усталостное разрушение металлов и расчеты на прочность и долговечность при переменных напряжениях: Учебное пособие. Под общей редакцией О.Ф. Чернявского. - Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2003. - 76 с.
5. *Беркович И.И., Громаковский Д.Г.* Трибология. Физические основы, механика и технические приложения. Учебник для вузов/ Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2000. 268 с.
6. *Биргер И.А.* Детерминированные и статистические модели суммирования повреждений / Проблемы прочности. - 1978, №11. - с.353-357.
7. *Бокицкий М.Н.* Длительная прочность полимеров. – М.: Химия. 1978. – 308 с.
8. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. - М., 1984. - 312 с.
9. *Братов В.А.* Численные модели динамики разрушения. Вычислительная механика сплошных сред. - 2009. - Т.2, №3. - С.5-16.
10. *Брашлер Е.* Крепость хлопчатобумажной пряжи. – М.: Гизлегпром, 1939. –152 с.
11. *Бриджмен П.* Анализ размерностей. - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 148 с.
12. *Будников В.И.* и др. Основы прядения. Учебник для вузов текстильного промышленности // В.И. Будников, И.В. Будников, В.Е. Зотиков, Н.Я. Канарский, А.П. Раков. В двух частях. Часть II. Под ред. В.Е. Зотикова, Гос. изд-во легкой пром-сти. М - Л. 1945. - 312 с.
13. *Будников В.И.* Процесс деления в механическом прядении. – М.: Легкая индустрия, 1965. – 274 с.
14. *Бузов Б.А., Модестова Т.А., Алыменкова Н.Д.* Материаловедение швейного производства. – М.: Легпромбытиздат, 1986.
15. *Бундаев В.В.* Руководство к решению задач по механике твердого деформируемого тела матричными методами: Учебное пособие. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2006. - 223 с.
16. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
17. *Ванчиков А.Н.* Прядение химических волокон в смеси с хлопком. – М.: Легкая индустрия, 1966. – 72 с.
18. *Вахрушев А.В., Федотов А.Ю.* Исследование вероятностных законов распределения структурных характеристик наночастиц, моделируемых методом молекулярной динамики. Вычислительная механика сплошных сред. - 2009. - Т.2, №2. - С.14-21.

19. *Веттегрень В.И., Башкарев А.Я., Суслов М.А.* Кинетика трения и износа полимерных композиционных материалов. Физика твердого тела, 2005. том 47, вып.9. с.1619-1624.
20. *Видельман В.Э.* Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / В.Э. Видельман, Ю.В. Соколкин, А.А. Ташников; Под ред. Ю.В. Соколкина, - М.: Наука, 1997. – 288 с.
21. *Винтер Ю.М.* Прогнозирование и оценка эффективности процессов смешивания в прядении, Дисс. на соискание ученой степени доктора техн. наук, Центральный научно-исследовательский институт промышленности лубяных волокон, 1981.
22. *Волков И.А., Ереев М.Н., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С.* Модель поврежденной среды для оценки долговечности конструкций при совместном действии механизмов мало- и многоциклового усталости. Вычислительная механика сплошных сред, - 2012. - Т.5, №1, - С.54-60.
23. *Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С.* Численное моделирование накопления повреждений при сложном пластическом деформировании. Вычислительная механика сплошных сред. - 2009. - Т.2, №1. - С.5-18.
24. *Волошин В.П., Медведев Н.Н., Фенелонов В.Б., Пармон В.Н.* | Исследование структуры пор в компьютерных моделях плотных и рыхлых упаковок сферических частиц. Ж. структ. химии, т.40 (4). 1999. с. 681-692.
25. *Волошин В.П., Медведев Н.Н.* Исследование препика структурного фактора. Анализ неоднородных упаковок Леннард-Джонсовских атомов. – Журн. Структурной химии. – 2005. Т.46, №1. С.96-100.
26. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 428 с.
27. *Гийон Э., Митеску К.Д., Юлен Ж.-П., Ру С.* Фракталы и перколяция в пористой среде. Успехи физических наук, т.161, №10, окт. 1991. с.121 – 128.
28. *Горский Л.К.* Статистические алгоритмы исследования надежности. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
29. *Горишков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.
30. ГОСТ 18976-73 Ткани текстильные. Метод определения стойкости к истиранию.
31. ГОСТ 51552-99 Материалы текстильные. Методы определения стойкости к истиранию текстильных материалов для защитной одежды.
32. *Гребенник И.В., Романова Т.Е., Яськов Г.Н., Шеховцов С.Б.* Упаковка шаров различных радиусов в параллелепипеде с учетом погрешностей. Искусственный интеллект, Харьков. - 2005. №4. С.119-129.
33. *Гулд Х., Тобочник Я.* Компьютерное моделирование в физике. М.: Мир, 1990.
34. *Гусев В.Е.* Химические волокна в текстильной промышленности. Легкая индустрия, 1971.- 608 с.
35. *Дик И.Г., Дьяченко Е.Н., Миньков Л.Л.* Моделирование случайной упаковки шаров // Физ. мезомех. - 2006. - Т. 9. - № 4. - С. 63-69.
36. *Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.В.* Компьютерное моделирование прочностных характеристик волокнистых композиционных материалов на базе модели многоуровневых иерархических структур. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.
37. *Дружинин Г.В.* Надежность автоматизированных производственных систем. – 4-е изд., перераб.и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1986.

38. *Елисеев В.В., Зиновьева Т.В.* Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней.: Учеб. Пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та, 2008. – 95 с.
39. *Ерофеев В.И.* Братья Коссера и механика обобщенных континуумов. Вычислительная механика сплошных сред. - 2009. - Т.2, №4. - С.5-10.
40. *Ерофеев В.И., Кажасев В.В., Семерикова Н.П.* Макромеханическое моделирование упругой и вязкоупругой сред Коссера // Вычислительная механика сплошных сред. - 2009 - т.2, №2 - с.40-47.
41. *Жихаев А.П., Стельмашенко В.И., Федосеева О.Ю.* Исследование износостойкости комплексных текстильных обивочных материалов. Известия вузов. Технология текстильной промышленности №2, 2002.
42. *Забродин Д.А., Севостьянов П.А.* Компьютерное моделирование стабильности поточных линий по производительности. Известия вузов. Технология текстильной промышленности №6, 2004, с.124-126.
43. *Забродин Д.А.* Исследование производственной стабильности и надежности автоматизированных поточных линий хлопкопрядильного производства методами компьютерного моделирования. /Д.А. Забродин, П.А. Севостьянов// Доклад на 60-й Юбилейной научной сессии РНТОРЭС имени А.С. Попова, посвященной дню радио. Выпуск: LX-1. – Москва, 2005.
44. *Забродин Д.А., Севостьянов П.А.* Компьютерный анализ стабильности поточных линий по производительности при вариациях их параметров и структуры. Сборник научных трудов аспирантов, вып. №10 – М.: МГТУ имени А.Н. Косыгина, 2005 – с.43-48.
45. *Забродин Д.А.* Влияние распределения времен наработки на отказ и восстановления на производительность поточных линий. Известия вузов. Технология текстильной промышленности №1, 2010, с.120-123.
46. *Забродин Д.А.* Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – М.: МГТУ имени А.Н. Косыгина, 2006.
47. *Забродин Д.А., Севостьянов П.А.* Моделирование потери свойств текстильных материалов как задача теории надежности. Химические волокна №4, 2009, с.41-45.
48. *Забродин Д.А., Севостьянов П.А.* Моделирование изменения функциональности специальных тканей с использованием теории надежности. Известия вузов. Технология текстильной промышленности №8, 2010, с.96-99.
49. *Забродин Д.А.* Влияние распределения времен наработки на отказ и восстановления на производительность поточных линий. Известия вузов. Технология текстильной промышленности №1, 2010, с.120-123.
50. *Забродин Д.А., Лебедева В.И., Никитюк В.Ю., Севостьянов П.А.* Компьютерное моделирование динамики истирания текстильных полотен. ЭНИ "Технологии 21 века в легкой промышленности" №5, 2011.
51. *Захаров В.С.* Блочные модели с сухим трением в сейсмостектонике. - ГЕОразрез.ЭНИ. - М.: Изд. МГУ, вып.2 - 2010 (7). <http://www.georazrez.ru>
52. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. - 542 с.

53. *Зубчанинов В.Г.* Основы теории упругости и пластичности: Учебн. для вузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 368 с.: ил.
54. *Ибатуллин И.Д.* Кинетика усталостной повреждаемости и разрушения поверхностных слоев: монография / *И.Д. Ибатуллин.* - Самара: Самар. гос. тех. ун-т, 2008. - 387 с.: ил.
55. *Иванищева О.И.* Компьютерное моделирование в стохастических задачах хрупкого разрушения. – Воронеж. Изд. ВГУ, 2003. 38 с.
56. *Иванова Е.А.* Развитие теоретических основ молекулярной динамики и динамики частиц. - СПб.: СПбГПУ. <http://www.ipme.ru/ipme/labs/dme/prive/ivanova/>
57. *Ильиных А.В., Вильдеман В.Э.* Моделирование структуры и процессов разрушения зернистых композитов. Вычислительная механика сплошных сред. - 2012. - Т.5, №4. - С.443-451. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.4.52
58. *Калентьев Е.А., Тарасов В.В.* Численный анализ напряженно-деформированного состояния пряди каната с линейным касанием при растяжении и кручении. Вычислительная механика сплошных сред. - 2010. - Т.3, №4. - С.16-28.
59. *Капитанов А.Ф.* Фрикционные процессы прядения. Ч. 1. Прядение и трибология. – М.: МГТУ. – 2005, 294 с.
60. *Капитанов А.Ф.* Фрикционные процессы прядения. Ч. 2. Силовые поля. – М.: МГТУ. – 2006, 298 с.
61. *Касперович С.А., Резников Г.Д.* Программный комплекс для анализа математических моделей нерегулярных упаковок. – Математическое моделирование. – 1993. Т.5, №8. С.63-70.
62. *Качанов Л.М.* Механика пластических сред. – М.: Гостехиздат, 1948. – 217 с.
63. *Клебанов Я.М., Давыдов А.Н., Биткина Е.В.* Методика расчета напряженно-деформированного состояния композиционных материалов. Ansys Multiphysics. www.ansysolutions.ru
64. *Клейнен Дж.* Статистические методы в имитационном моделировании /Пер. с англ. Ю.П. Адлера, К.Д. Аргуновой, В.Н. Варыгина, А.М. Талалая; Под ред. и с предисл. Ю.П. Адлера и В.Н. Варыгина. – Вып. 1. – М.: Статистика, 1978. – 221 с., ил. – (Математико-статистические методы за рубежом).
65. *Кловани С.Ф.* Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / Клованич С.Ф. - Запорожье: Изд-во журнала "Світ гео-техніки", 2009. - 4000 с.
66. *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. Т.1, 2. – М.: Мир, 1990.
67. *Корчевская О.В., Жуков Л.А.* Получение нижних границ для задач двух- и трехмерной ортогональной упаковки с помощью нейронных сетей, используя алгоритм безотходной упаковки. ЭНИ "Исследовано в России, <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2008/062/pdf>
68. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. - М.: Изд-во "Наука". 1960. - 428 с.

69. Кочу Х.Т. Исследование эффективности смешивания волокон в экспрессной прядильной лаборатории. Дисс. канд. техн. наук. - М., МТИ, 1975.
70. Кошур В.Д. Компьютерное моделирование интеллектуальных композитных материалов. – Proceedings of International Conf. RDAMM-2011, v/6? Pt.2, Spec.Issue, p.218-225.
71. Кравчук А.С. О некоторых моделях нанотрибологии. Вычислительная механика сплошных сред. - 2008. - Т.1, №4. - С.55-60.
72. Крагельский И.В., Шедров В.С. Развитие науки о трении. Сухое трение // - М.: Изд. АН СССР, 1956. – 237 с.
73. Крагельский, И.В., Добычин, М.Н., Камбалов, В.С. Основы расчетов на трение и износ. - М.: Машиностроение, 1977, 257 с.
74. Кузнецов В.П. и др. Конечно-элементное моделирование наноструктурирующего выглаживания. // Кузнецов В.П., Смолин И.Ю., Дмитриев А.И., Коновалов Д.А., Макаров А.В., Киряков А.Е., Юровских А.С. Физическая механика. - 2011, т.14, №6. 87-97 с.
75. Кузькин В.А., Кривцов А.М. Моделирование деформирования и разрушения фибриллярных структур. Вычислительная механика сплошных сред. - 2008. - Т.1, №3. - С.76-84.
76. Кукин Г.Н., Соловьев А.Н. Текстильное материаловедение. Часть II – М.: Легкая индустрия, 1964. – 380 с.
77. Кукин Г. Н., Соловьев А. Н. Текстильное материаловедение Часть III – М.: Легкая индустрия, 1967.
78. Куликов Р.Г., Труфанов Н.А. Применение итерационного метода к решению задачи деформирования однонаправленного композиционного материала с нелинейно-вязкоупругим связующим. Вычислительная механика сплошных сред. - 2011. - Т.4, №2. - С.61-71.
79. Курина А.А., Братченя Л.А., Корсакова Т.В. Исследование устойчивости льно-содержащих обувных нетканых материалов нового поколения к микробиологическому разрушению. Известия вузов. Технология текстильной промышленности №4, 2007.
80. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. 246 с.
81. Левенштейн В.И. О границах для упаковок в n -мерном евклидовом пространстве. Доклады АН СССР, 1979, т.245, №6, с.1299–1303
82. Логинов А.В. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – М.: МТИ, 1988.
83. Ломов С.В. Прогнозирование строения и механических свойств тканей технического назначения методами математического моделирования. - Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, СПб: СПбГУТД, 1995.
84. Ломов С.В., Фернуст И. Wisetex – виртуальный мир и реальное прогнозирование структуры и свойств текстильных композитов. Технический текстиль, №13, 2006.
85. Ломов С.В., Годара А., Варриер А. Сжимаемость «леса» нанотрубок. Композиты и наноструктуры. – 2009. - № 1. – С.59-64.
86. Макаров П.В. Подход физической мезомеханики к моделированию процессов деформации и разрушения. // Физическая механика. - 1998. №1, 61-81 с.

87. *Малкин А.И., Куликов-Костошко Ф.А., Шумихин Т.А.* Статистическая кинетика квазихрупкого разрушения. Журнал технической физики. - 2008. - Т.78, вып.3. - С.49-56.
88. *Медведев Н.Н.* Метод Вороного – Делоне в исследовании структуры некристаллических систем / РАН, Сиб. отд-ние, РФФИ, Институт химической кинетики и горения СО РАН. Новосибирск: НИЦ ЦИГТМ СО РАН, Изд. СО РАН, 2000, 214 с.
89. Метод молекулярной динамики в физической химии / Ред. Ю.К. Товбин. – М.: Наука, 1996.
90. *Мизгулин В.В., Кадушиников Р.М., Алиевский Д.М., Алиевский В.М.* Моделирование плотных материалов методом упаковки сфероиэдров. Компьютерные исследования и моделирование, 2012. - Т.4, №4. С.757-766.
91. *Морозов И.А.* Влияние структуры эластомерного нанокompозита на его механические свойства. Автореф. дисс. ... канд. физико-математ. Наук, - Пермь, Ин-т механики сплошных сред УрО РАН, 2008. 16 с.
92. *Мортон В.Е., Херл Д.В.С.* Механические свойства текстильных волокон. – М.: Легкая индустрия, 1971. – 184 с.
93. *Москвитин Б.В.* Циклические нагружения элементов конструкций. - М.: Наука, Главная редакция физико-математ. лит-ры, 1981, 344 с.
94. *Мусалимов.* Континуальная модель спирально-анизотропного срежня и ее применение в статике кабелей (+ библиография) Интернет
95. *Мухачева А.С.* Задачи двумерной упаковки в контейнеры: новые подходы к разработке методов локального поиска оптимума / А.С. Мухачева, А.Ф. Валева, В.М. Картак - М.: МАИ, 2004. - 193 с.
96. *Никитиных Е.И.* Разработка теоретических основ и методики прогнозирования характеристик старения текстильных материалов: Автореф. дис. к.т.н. - М., МТИ, 1993.
97. *Никитюк В.Ю., Забродин Д.А., Лебедева В.И., Севостьянов П.А.* Оценка воспроизводимости методов определения истираемости тканей специального назначения. Известия вузов. Технология текстильной промышленности №3, 2011, с.26-30.
98. *Никитюк В.Ю., Забродин Д.А., Лебедева В.И., Севостьянов П.А.* Исследование динамики истирания и сравнение методик приборов ИТ-3М и Мартиндаля ЭНИ "Технологии 21 века в легкой промышленности" №5, 2011.
99. *Новиков В.У., Бурьян О.Ю.* Моделирование межфазного слоя в анизотропных композитах. Прикладная физика. – 2000. № 1. – С.67-78.
100. *Олехова Л.В.* Кручение неоднородного анизотропного стержня. - М.: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат.наук, МГУ, 2009. 19 с.
101. *Осяев О.Г.* Эмпирический критерий прочности композитных материалов. Вестник ДГТУ. Технические науки. - 2010. - Т.10, №3 (46). - С.330-332.
102. *Пальмов В.А.* Приложение теории обобщенного континуума к проблеме пространственного затухания в сложных механических системах. Вычислительная механика сплошных сред. - 2009. - Т.2, №4. - С.105-110.
103. *Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В.* Структурные уровни деформации твердых тел. - Новосибирск: Наука, 1985. - 254 с.
104. *Панин В.Е., Панин А.В., Деревягина Л.С.* Масштабные уровни пластической деформации и механические свойства материалов с наноструктурой // Сб. науч. трудов VI

- Всероссийской (международной) конференции "Физикохимия ультрадисперсных (нано-) систем", под ред. Петрунина В.Ф. Томск. М.: МИФИ. 2003. С.269–277.
105. *Панин В.Е., Панин А.В.* Проблемы мезомеханики прочности и пластичности наноструктурных материалов. // Изв. Вузов Физика. 2004. Т.47. №8. С.5–17.
106. *Паринов И.А.* Математическое моделирование структурно-чувствительных свойств высокотемпературных сверхпроводников // Диссертация ... докт. техн. наук по специальности: 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт), Новочеркасск, 2007.
107. *Паринов А.Т.* Предварительно напряженные железобетонные конструкции, армированные канатами (под редакцией Грицыка В. И., Паринова И. А.). Ростов-на-Дону: Изд-во Наука-Спектр. 2010. 368 с.
108. *Пек Б.* Сравнение расчетов простейших моделей в Comsol и Elmer. <http://www.csc.fi/english/pages/elmer>
109. *Пинежанинов Ф., Пинежанинов П.* Статьи по методу конечных элементов. - Научно-практический журнал "Exponenta Pro. Математика в приложениях". СПб, 2003. www.exponenta.ru
110. *Пирогов К.М., Вяткин Б.А.* Основы надежности текстильных машин. – М.: Легпромбытиздат, 1985. – 256с.
111. *Полухин В.А.* Статистико-геометрический анализ аморфных сплавов металл-металлоид // Статистическое моделирование структуры двухкомпонентных аморфных тел / УНЦ АН СССР, Свердловск, 1984. С.18 – 36.
112. *Попов В.Л., Кренер Э.* О роли масштабных уровней в теории упругопластичности. // Физическая механика. - 1998. №1. 109-118 с.
113. *Поршнев С.В.* Компьютерное моделирование физических процессов в пакете Matlab. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 592 с., ил.
114. Построение 2D ячеек Вороного [Электронный ресурс] / <http://algotist.manual.ru/math/geom/index.php.htm>, 2006.
115. *Просевуский А.К.* Оптическое материаловедение: моделирование оптических материалов и процессов. Учеб. пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО,- 2008. – 125 с.
116. *Псахье С.Г.* и др. Метод подвижных клеточных автоматов как новое направление дискретной вычислительной механики. I. Теоретическое описание. // *Псахье С.Г., Остермайер Г.П., Дмитриев А.И., Шилько Е.В., Смолин А.Ю., Коростелев С.Ю.* Физическая механика. - 2000, т.3, №2. 5-13 с.
117. *Псахье С.Г.* и др. Метод клеточных автоматов как инструмент физической мезомеханики материалов. // *Псахье С.Г., Коростелев С.Ю., Смолин А.Ю., Дмитриев А.И., Шилько Е.В., Моисеенко Д.Д., Татаринцев Е.М., Алексеев С.В.* Физическая механика. - 1998. №1. 95-108 с.
118. *Псахье С.Г.* и др. Развитие подхода к моделированию деформирования и разрушения иерархически организованных гетерогенных, в том числе контрастных, сред. // *Псахье С.Г., Шилько Е.В., Смолин А.Ю., Димаки А.В., Дмитриев А.И., Коноваленко И.С., Астафуров С.В., Завшек С.* Физическая механика. - 2001. т.14, №3. 27-54 с.

119. *Путич С., Ускокович П.С., Алексич Р.* Анализ усталостного разрушения и роста трещин в ламинатных композитах с эпоксидной матрицей, армированных графитовыми волокнами. Проблемы прочности. – 2003. № 3. – С.68-103.
120. *Ратиани Н. И.* Исследование структуры пряжи. Изв. вузов. Технология текстильной промышленности, № 5, 1968 г.
121. *Раишван И.Г.* Методы оценки распределения волокон по поперечным сечениям пряжи. – М.: Легкая индустрия, 1970г. - 200с.
122. *Ревуженко А.Ф., Александрова Н.И.* Кинетика смешивания порошковых материалов: численное моделирование в трехмерной постановке / Физическая мезомеханика. – 2005. Т.8, №5. С.77-83.
123. *Ротенберг А.В.* О возможном виде тензора вязких напряжений в механике сыпучих тел. - М.: ЭНИ "Исследовано в России", 2001. - 465 - 475. <http://zhurnal.apc.relam.ru/articles/2001/042.pdf>
124. *Садырин, А.И.* Компьютерные модели динамического разрушения композиционных материалов. Учеб. Пособие: Н.Новгород: НГУ, 2010. – 35 с.
125. *Светаишков А.А., Куприянов Н.А., Манабаев К.К.* Приближенный алгоритм решения задач вязкоупругости. Вычислительная механика сплошных сред. - 2012. - Т.5, №3. - С.292-299. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.3.34
126. *Севостьянов А.Г.* Сборник задач по теории процессов прядения. – М.: Гизлегпром, 1948. – 232 с.
127. *Севостьянов А.Г.* Составление смесок и смешивание в хлопкопрядении. – М.: Гизлегпром, 1954. – 340 с.
128. *Севостьянов А.Г.* Методы и средства исследования механико- технологических процессов текстильной промышленности. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2007. – 648 с.
129. *Севостьянов А. Г., Осмин Н.А., Щербаков В.П.* и др. Механическая технология текстильных материалов - М.: Легпромбытиздат, 1989.
130. *Севостьянов А.Г., Севостьянов П.А.* Моделирование технологических процессов. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984. – 344с.
131. *Севостьянов П.А.* Статистическая имитация растяжения и разрыва пряжи. Изв. вузов, Технология текстильной промышленности, №3, 1981, с.9 – 13.
132. *Севостьянов П.А., Лебедева В.И., Серякова Т.В.* Компьютерные технологии в анализе и проектировании геометрических и механических свойств волокнистых материалов // Вестник МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2010, с.95 – 99.
133. *Севостьянов П.А., Яковлева Ю.С.* Статистическая модель деформации волокнистого материала с кулоновским трением / Сб. научн. трудов асп. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2008, с.73 - 78.
134. *Севостьянов П.А., Радов А.В.* Исследование роли кулоновского трения в некоторых волокнистых продуктах методами статистического компьютерного моделирования. // Известия вузов. Технология текстильной промышленности. – Иваново, 2008. - №1. – с.98 – 102.
135. *Севостьянов П.А., Забродин Д.А., Горячая И.С., Лебедева В.И.* Модели сечений комбинированных нитей и пряжи. Изв. Вузов, Технология текстильной промышленности, Special Issue in English, №7, 2011, с.65 – 69.
136. *Севостьянов П.А.* Компьютерное моделирование технологических систем и продуктов прядения. – М.: Информ – Знание, 2006. – 448 с.

137. *Севостьянов П.А.* Прогнозирование характеристик и повышение эффективности исследований технологических систем прядильного производства. Дис.... д-ра техн. наук. – М.: 1985. – 437 с.
138. *Севостьянов П.А., Никитюк В.Ю., Забродин Д.А., Лебедева В.И.* Статистическая имитация истирания тканей методами компьютерного моделирования. Известия вузов. Технология текстильной промышленности №2, 2011, с.93-97.
139. *Севостьянов П.А., Забродин Д.А.* Обобщенная перколяционная модель износа двумерных полотен из волокнистых материалов. Известия вузов. Технология текстильной промышленности №4, 2011, с.151-154.
140. *Сергеенков А.П.* Теория процессов, технология, оборудование подготовки смесей и холстообразования. - М: МГТУ им. А. Н. Косыгина, 2004.
141. *Серякова Т.В.* Компьютерное моделирование формирования иглопробивных нетканых материалов для автоматического управления процессом иглопрокальвания: дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук : 05.13.06: защищена 17.03.2011 : утв. 24.06.11 / Серякова Татьяна Викторовна. – М., 2011. – 140 с. – Библиогр.: с. 220–230.
142. Смолин И.Ю., Соппа Э., Шмаудер З., Макаров П.В. Двумерное моделирование пластической деформации в матрице металлокерамического композита на мезоуровне: оценка напряженных состояний и численных методов. // Физическая механика. - 2000, т.3, №1. 17-22 с.
143. *Соловьев А.Н.* Свойства пряжи и зависимость их от крутки и свойств хлопка. – М.: ВНИТО текстильной промышленности, 1941. – 18 с.
144. *Сон Э.Е.* Лекции по механике сплошных сред. - М.: Изд. МФТИ. 2010. - 242 с.
145. *Сосновский Л.А., Щербаков С.* Концепции поврежденности материалов. // Вісник ТНТУ, Гомель, - 2011. - Спецвипуск - частина 1. - с.14-23. Сравнение программных систем моделирования. <http://www.math.rsu.ru/ac/links.html>
146. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев, Наукова Думка, 1986. – 266 с.
147. *Стоян Ю.Г., Придатко Д.И.* Упаковка различных круговых цилиндров в параллелепипеде // Докл. ГАГ Украины. – 2004. - №.4. – С.27-32.
148. *Сухов С.А.* Основы моделирования в Solid Works. Ульяновск: УлГТУ, 2007. - 48 с.
149. *Тарасевич Ю.Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. 2002.
150. *Тарасевич Ю.Ю., Манжосова Е.Н.* Решение задач теории перколяции с помощью пакета МАТЛАВ. Математика в приложениях. №2 (6) .2004. www.exponenta.ru
151. *Тоффоли Т., Марголус Н.* Машины клеточных автоматов. - М.: Мир, 1991.
152. Тросовые системы и основы теории нити. Интернет - ресурс
153. *Трыков П.П.* Кручение текстильных материалов и зависимость между свойствами волокна и крепостью пряжи. Дисс.... канд. техн. наук. – М., 1940. – 260 с.
154. *Усенко В.А.* Использование вискозного штапельного волокна в прядении. – Дис.... д-ра техн. наук. – М., 1955. – 412 с.
155. *Ушакова Н.Л.* Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. – Иваново: ИГТА, 1999.

156. *Ушакова Н.Л., Авроров В.А.* Системный анализ технологических средств машин прядильного производства // Прогрессивная техника и технология прядильного производства. Межуз. сб. науч. тр. – Иваново: ИГТА, 1995. – с.85-88.
157. *Фейли Л. Том.* Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: Физматгиз, 1958.
158. *Шайтан К.В.* Молекулярная динамика биополимеров. - М.: изд. МГУ, Молекулярная и клеточная регуляция. с.11 - 41.
159. *Шардаков И.Н., Голотина Л.А.* Моделирование деформационных процессов в аморфно-кристаллических полимерах. Вычислительная механика сплошных сред. - 2009. - Т.2, №3. - С.106-113.
160. *Шевченко В.Г.* Основы физики полимерных композиционных материалов. - М.: Изд. МГУ, 2010. 99 с.
161. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование систем – Искусство и наука. – М.: Мир, 1978.
162. *Шестаков И.С.* Решение задачи о движении уединенной волны бессеточным методом конечных элементов с использованием расширенной триангуляции Делоне и интерполяции Лапласа. - Кемерово, КГУ. 5 с.
163. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, Международная программа образования, 2001.
164. *Щербаков В.П., Скуланова Н.С.* Основы теории деформирования и прогноза текстильных материалов. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2008.
165. *Янпарова А.А., Маяков С.А.* Распараллеливание алгоритмов численного моделирования процессов перколяции с вытеснением. - Уфа: Вестник УГАТУ, Управление, вычислительная техника и информатика, Т.14, № 4 (39). 2010. с.160-165.
166. *Abhiraman A.S., George W.* Fiber Migration as a Semi-Markov Process. School of Textiles. North Carolina University, USA.
167. *Anandjiwatla R.D., Boguslavsky L.* Development of Needle-punched Nonwoven Fabrics from Flax Fibers for Air Filtration Applications. Textile Research Journal, v.78, 2008, p.614-624.
168. *Bilisik K., Turhan Y., Demiryurek O.* Tearing properties of upholstery flocked fabrics. Textile Research Journal, v.81, 2011, p.290-300.
169. *Close C.M., Frederick D.K.* Modeling and Analysis of Dynamic Systems, Houghton Mifflin Company, NJ, 1978.
170. *Das B.K., Debnath C.R., Ray P.K.* Scanning Electron Microscope Observations of Nonwoven Fabrics from Jute and Other Textiles. Textile Research Journal, v.57, 1987, p.528-531.
171. *Dutton K.C.* Overview and Analysis of the Meltblown Process and Parameters. Journ. of Textile and Apparel, Technology and Management, v.6, Issue 1, Fall 2008.
172. Encyclopedia of Computational Mechanics. Vol.1 – Fundamentals. Editors: E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes, J/Wiley & Sons, UK, - 2004. P.798.
173. Evaluation of Yarn Evenness in Fabric Based on Image processing. Textile Research Journal.

174. *Gardmark L., Martensson L.* An Experimental Investigation of Fiber Orientation and Some Properties of Needled Felts. *Textile Research Journal*, v.36, 1966, p.1037-1042.
175. *Godfrey T.A.* A Micromechanical Model for Blended Yarns with Fragmented Low-Elongation fibers. *Journ. of Textile and Apparel, Technology and Management*, v.2, Issue 1, Fall 2001.
176. *Goswami B.C., Beck T., Scardini F.L.* Influence of Fiber Geometry on the Punching-Force Characteristics of Webs During Needle Felting. *Textile Research Journal*, v.42, 1972, p.605-612.
177. *Green P.G., Sibson R.* Computing Dirichlet tessellations in the plane. *The Computer Journal*. – 1977, V.21, No.2. P.168-173.
178. *Grover E.B., Dillon J.H., Suppiger E.W.* Correlation of Fatigue with the Dynamic Modulus of Polymers. *Textile Research Journal*, v.36, 1966, p.346-355.
179. *Hearle J.W.S., Stevenson P.J.* Studies in Nonwoven Fabrics: Part VI: Prediction of Tensile Properties. *Textile Research Journal*, v.34, 1964, p.181-191
180. *Hearle J.W.S.* Cyclic Loading to Break of Yarn and Breaking Times. *Textile Research Journal*, v.36, 1966, p.591.
181. *Hearle J.W.S., Merchant V.B.* Interchange of Position Among the Components of a Seven-Ply Structure: Mechanism of Migration. *Journ. Textile Inst.* – 1962. V.53. T537-T552.
182. *Kim H.S., Pourdeyhimi B., Abhiraman A., Desa, P.* Characterization of structural changes in nonwoven fabrics during load-deformation experiments. *Journ. of Textile and Apparel, Technology and Management*, v.1, Issue 1, sept. 2000, pp.1 - 6.
183. *Kim H.S., Pourdeyhimi B.* Computational Modelling of Mechanical Performance in Thermally Point Bonded Nonwovens. *Journ. of Textile and Apparel, Technology and Management*, v.1, Issue 4, sept. 2001, pp.1 - 7.
184. *Kim H.S., Deshpande A., Pourdeyhimi B., Abhiraman A.S., Desai P.* Characterization of Structural Changes in Point-Bonded Nonwoven Fabrics during Load-Deformation Experiments, *Textile Research Journ.* 2000.
185. *Kompressibility of Kapok Fibrous Assembly / Textile Research Journ.,* 12-0178, 2012
186. *Krucinska I., Jalmuzna I., Zurek W.* Modified Rheological Model for Analysis of Compression of Nonwoven Fabrics. *Textile Research Journal*, v.74, 2004, p.127-133.
187. *Ji-Cheng Gu, Rice J.R., Ruina A.L.* Slip Motion and Stability of a Single Degree of Freedom Elastic System with Rate and State Dependent Friction. // *Journ. Mech. Phys. Solids*. 1984. - Vol.32, No.3, pp.167-186.
188. *Lamb G.E.R., Costanza P., Miller B.* Influences of Fiber Geometry on the Performance of Nonwoven Air Filters. *Textile Research Journal*, v.45, 1975, p.452-463.
189. *Lee S.M., Argon A.S.* The Mechanics of the Bending of Nonwoven Fabrics, Part I: Spunbonded Fabric (Cerex), *Journ. of the Textile Institute*, № 1, 1-11 (1983)
190. *Miao M., Glassey H.E.* An Experimental Study of the Needled Nonwoven Process. Part I: Fiber Geometry Before Needle Punching. *Textile Research Journal*, v.74, 2004, p.329-332.

191. *Miao M.* An Experimental Study of the Needled Nonwoven Process. Part II: Fiber Transport by Barbed Needles. *Textile Research Journal*, v.74, 2004, p.394-398.
192. *Miao M., Glassey H.E., Rastogy M.* An Experimental Study of the Needled Nonwoven Process. Part III: Fiber Damage Due to Needling. *Textile Research Journal*, v.74, 2004, p.485-490.
193. *Nosonovsky M., Rohatgi R.K.* Biomimetics in Material Science. Self-Healing, Self-Lubricating, Self-Cleaning Materials. – Springer, NY. 2012.
194. *Nussbaum J., Ruina Andy.* A Two degree-of-freedom earthquake model with static/dynamic friction. *Pure and Applied Geophysics*. 1987. V.125, No.4. P.629-656.
195. *Oxenham W.* Fasciated Yarns - a Revolutionary Development? *Journ. of Textile and Apparel, Technology and Management*, v.1, Issue 2, Winter 2001.
196. *Oxenham W., Iype C., Xu Y.M.* The Role of Fiber Finish on Drafting Behaviour. *Journ. of Textile and Apparel, Technology and Management*, v.1, Issue 3, Spring 2001.
197. *Padaki N.V., Alagirusamy R., Deopura B.L., Fangueiro R.* Influence of Preform Interlacement on the Low Velocity Impact Behavior of Multilayer Textile Composites. *Journal of Industrial Textiles*, v.40, No. 2 – Oct.2010. p.171-185.
198. *Peirce F.T.* Geometrical Principles Applicable to the Design of Functional Fabrics. *Textile Research Journ.* – 1947. V.17, P.123-147.
199. *Perumalraj R., Dasaradhan B.S.* Tensile Properties of Copper Core Yarns. *Journ. of Textile and Apparel, Technology and Management*, v.6, Issue 2, Fall 2009.
200. *Pourdeyhimi B., Xu B.* Characterizing Pore Size in Nonwoven Fabrics: Shape Considerations. - *International Nonwoven Journ.*, 6, (1), 26-30, (1994)
201. *Pourdeyhimi B., Ramanathan R., Dent, R.* Measuring Fiber Orientation in Nonwovens, Part II: Direct Tracking. *Textile Research Journ.*, 66, 747-753, (1996)
202. *Pourdeyhimi B., Dent R., Davis H.* Measuring Fiber Orientation in Nonwovens, Part III: Fourier Transform, *Textile Research Journ.*, 67, 143-151 (1997)
203. *Prahl H.F., Tovey H., Underwood C.E.* Short Investigation of Grafting as a Method for Improving Abrasion Resistance of Cross-Linked Cotton. *Textile Research Journal*, v.36, 1966, p.245-250.
204. *Primentas A., Iype C.* The Configuration of Textile Fibres in Staple Yarns. *Journ. of Textile and Apparel, Technology and Management*, v.1, Issue 4, Summer 2001.
205. *Primentas A.* Puncture and Tear of Woven Fabrics. *Journ. of Textile and Apparel, Technology and Management*, v.1, Issue 4, Summer 2001.
206. *Rawal A., Anand S., Shah T.* Optimization of Parameters for the Production of Needle-punched Nonwoven Geotextiles. *Journal of Industrial Textiles*, v.37, 2008, p.341-456.
207. *Ruina Andy.* Slip instability and state friction laws. *Journal of Geophysical Research*, V.88, No. B12, P.10,359-10,370, dec. 10, 1983.
208. *Ruina Andy L., Ji-Cheng Gu, Rice J.R., Tse S.T.* Slip Motion and Stability of a Single Degree of Freedom Elastic System with Rate and State Dependent Friction. *J. Mech. Phys. Solids*, V.32, No.3, pp.167-196, 1984.
209. *Shiekh El A., Backer S.* The Mechanics of Fiber Migration. Part 1: Theoretical Analysis, *Textile Research Journ.* – 1972. V.12. P.137-146.

210. *Soltani P., Keikhosravy M., Oskouei R.H., Soutis C.* Studying the Tensile Behaviour of GLARE Laminates: A Finite Element Modelling Approach. *Appl. Compos. Mater.* - 2011. Vol.18. - P.271-282. DOI: 10.1007/s10443-010-9155-x
211. *Stauffer D., Aharony A.* Introduction to Percolation Theory. Taylor and Fransis, London, 1994.
212. *Thorr F., Drean J.Y., Adolphe D.* Image Analysis to Study Nonwovens. *Textile Research Journal*, 68, 162-168 (1999).
213. *Velu Y., Farer R., Ghosh T., Seyam A.* Formation of shared/molded meltblowing nonwoven structures. *Journ. of Textile and Apparel, Technology and Management*, v.1, Issue 1, sept. 2000.
214. *Van Wyk C.M.* Note on the compressibility of wool // *Journal of the Textile Institute*. 1946. v.37, p. T285-292.
215. *Tan, P., Tong L., Sun X.* Effective properties for plain weave composites through-thickness reinforced with carbon nanotube forests // *Composite Structures*. 2008. v.84, p.1-10.

Научное издание

Севостьянов Петр Алексеевич

**КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ
В МЕХАНИКЕ
ВОЛОКНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Подписано в печать 26.07.2013. Заказ 11523

Формат бумаги 60x84/16. Бумага офсетная.

Гарнитура: Times New Roman.

Усл. Печ. л. 14,88

Тираж 100 экземпляров

Отпечатано в ООО «Тисо Принт»

127018, Москва, ул. Складочная, д. 3, стр. 6



*Севостьянов
Петр Алексеевич*

1946 года рождения, доктор технических наук, профессор. В 1964 г. окончил московскую физико-математическую школу №2 (ныне лицей «2-я Школа»), а в 1969 г. – Московский текстильный институт. Инженер-электромеханик по системам автоматического управления. С 1969 г. по настоящее время – аспирант, ассистент, доцент, профессор и заведующий кафедрой информационных технологий, вычислительной техники и САПР. За 40 лет преподавательской

работы поставил, методически обеспечил и преподавал дисциплины, связанные с математическими методами обработки данных, методами оптимизации, моделированием систем. Научные интересы: использование методов компьютерного, статистического и математического моделирования для решения различных физико-механических задач, связанных с исследованием свойств волокнистых материалов и сложных технических и технологических систем; применение методов статистической компьютерной имитации для моделирования динамики развития деформаций, перколяционных эффектов, разрушения; автоматизированная компьютерная обработка, анализ, идентификация потоков статистических данных. Опубликованы два учебника для вузов «Моделирование технологических процессов» (1984 г.), «Оптимизация технологических процессов» (1989 г.), учебное пособие «Математические методы обработки данных» (2004 г.), монография «Компьютерное моделирование технологических систем и продуктов прядения» (2006 г.); всего более 200 публикаций. Подготовил 20 кандидатов и двух докторов наук. Имеет звание Заслуженного деятеля науки Российской Федерации, Почетного работника высшего образования Российской Федерации, является лауреатом Премии правительства Российской Федерации в области науки и техники.