

Министерство образования и науки
Республики Казахстан

**КАЗАХСКАЯ ГОЛОВНАЯ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ**

Кафедра "Водоснабжение и водоотведение"

ГИДРАВЛИКА И АЭРОДИНАМИКА

Учебное пособие

Часть I

Алматы 2004

УДК[532+533.6] (075.8)

Гидравлика и аэродинамика. Учебное пособие. Часть II.
Джартаева Д.К. Алматы: КазГАСА, 2001 - 68 стр.

В учебном пособии изложены основные вопросы технической механики жидкости и газа. Рассмотрено движение в трубопроводах, дан гидравлический расчет водогазопроводных труб и воздухопроводов. Приведены расчеты истечения жидкости и газа из отверстий, изложены некоторые аспекты теории турбулентных воздушных струй. Освещены вопросы обтекания тел потоком жидкости и газа и моделирования гидроаэродинамических явлений. Предназначено для студентов инженерно-строительных специальностей.

Ил.23 Библиогр. 8 назв.

Печатается по плану издания министерство образования и науки Республики Казахстан на 2001 год.

Рецензенты:

Т.Х. Ахмедов, д-р техн. наук, проф., КазНИИ Энергетика

К.Ш. Аширяев, канд.техн.наук, доц. КазГАСА

Казахская головная

ISBN 9965-423-86-5

© архитектурно-строительная
академия, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Жидкость и ее физические свойства	6
Контрольные вопросы	10
Глава 2. Гидростатика	11
2.1. Гидростатическое давление и его свойства	11
2.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости	12
2.3. Основное уравнение гидростатики	14
2.4. Равновесие жидкости при наличии гравитационных сил – силы тяжести	15
2.5. Некоторые понятия в гидростатике	18
2.6. Приборы для измерения давления	20
2.7. Гидростатическое давление на плоскую фигуру	21
2.8. Давление жидкости на криволинейные поверхности	25
2.9. Закон Архимеда	27
2.10. Равновесие жидкостей при наличии негравитационных массовых сил	29
Примеры и контрольные вопросы	30
Глава 3. Гидродинамика	32
3.1. Методы исследования движения жидкости	32
3.2. Основные понятия	34
3.3. Виды движения жидкости	36
3.4. Уравнение неразрывности потока	37
3.5. Дифференциальные уравнения движения Л.Эйлера. Интеграл Д.Бернулли	38
3.6. Уравнение Бернулли для струйки идеальной жидкости	40
3.7. Уравнение Бернулли для струйки реальной жидкости	41
3.8. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости	42
3.9. Геометрический и энергетический смысл уравнения Бернулли	46
3.10. Условия применимости уравнения Бернулли	47
3.11. Общие сведения о гидравлических потерях	48
3.12. Одномерное движение сжимаемого газа	49
Примеры и контрольные вопросы	54
Библиографический список	57

ВВЕДЕНИЕ

Гидравлика – наука, изучающая законы равновесия и движения жидкостей. Слово «гидравлика» происходит от двух греческих слов: хюдор – вода, авлос – труба. Гидравлика делится на два раздела: гидростатика и гидродинамика.

Гидростатика изучает законы равновесия жидкостей, гидродинамика – законы движения жидкостей.

В настоящее время законы гидравлики применяются во всех областях техники. На знании гидравлики базируются расчеты водопроводных, канализационных сетей, маслопроводов, воздухопроводов, газопроводов, расчет водопроводных сооружений ГЭС; зная законы гидравлики, можно определять основные параметры насосов и вентиляторов, гидродвигателей, гидропередатчиков, правильно эксплуатировать гидравлическое оборудование металлорежущих станков.

Краткая история развития гидравлики

Зарождение гидравлики связано с именем Архимеда (III в до н.э.). Тогда появился его знаменитый трактат «О плавающих телах», содержащий известный закон – закон Архимеда.

В период феодализма с его натуральным хозяйством, отсутствием промышленности было вполне закономерным, что гидравлика как наука не развивалась. Только с переходом к капитализму появляется необходимость в развитии гидравлики. Рост торговли требовал строительства судоходных каналов, рост населения в городах требовал нового подхода к вопросам водоснабжения и канализации, рост ремесел и промышленности требовал двигательной силы, которой могла стать энергия воды. Таким образом, в эпоху капитализма появились все предпосылки для развития гидравлики и гидромашиностроения. К этому периоду относятся известные уже в гидравлике работы Леонардо да Винчи (конец XV в.) «О движении воды в речных сооружениях»; трактат Галилея (XVI в.) «Рассуждение о телах, пребывающих в воде, и о тех, которые в ней движутся»; в 1643 г. Торичелли – ученик Галилея – впервые исследовал движение жидкости и установил закон вытекания жидкости через отверстие в сосуде. В 1650 г. французский ученый Блез Паскаль опубликовал закон о передаче внешнего давления в жидкости (известный закон Паскаля); в 1687 г. гениальный английский ученый Исаак Ньютон сформулировал законы внутреннего трения в движущейся жидкости, впервые в науку было введено понятие о вязкости жидкости.

Большой вклад в развитие гидравлики как науки сделали русские ученые – члены Петербургской академии наук: Михаил Васильевич Ломоносов (1711-1765 г.г.), Даниил Иванович Бернулли (1700-1792 г.г.), Леонард Павлович Эйлер (1707-1783 г.г.). Ломоносовым был открыт закон сохранения энергии, Бернулли дал энергетическую, гидравлическую

оценку жидкости, изложенную в книге «Гидродинамика», Эйлер вывел дифференциальные уравнения равновесия и движения жидкости. В 1883 г. Николай Павлович Петров разработал гидродинамическую теорию смазки. Мировую известность получили работы гениального русского ученого Николая Егоровича Жуковского (1847-1921 г.г.) «Видоизменение метода Кирхгофа», «Теория воздушных винтов», «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах». В первой работе дано обоснование теории подъемной силы крыла, которая распространена теперь на лопасти насосов и компрессоров; этот метод указывает пути разработки рациональных профилей лопастей современных машин. Вторая работа содержит теорию и метод расчета пропеллеров, на основании которых создана теория осевых насосов. В третьей работе Н.Е. Жуковским дана блестящая теория гидравлического удара. Большие заслуги принадлежат академику Николаю Николаевичу Павловскому (1884-1937 г.г.).

В последующие годы развитие гидравлики связывается с именами таких ученых, внесших значительный вклад в развитие прикладной гидравлики, как Зегжда А.П., Киселев П.Г., Агроскин И.И., Чугаев Р.Р., Альшуль А.Д., Леви И.И., Чертоусов М.Д., Абрамович Г.Н. и другие.

Глава 1. ЖИДКОСТЬ И ЕЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Жидкостью называется физическое тело, обладающее свойством текучести, в силу чего жидкость не имеет собственной формы, принимая форму сосуда, в которой ее помещают. Вторым отличительным свойством жидкости является то, что она мало изменяет свой объем при изменении давления или температуры, в этом отношении жидкость сходна с твердым телом.

Жидкости делятся на два вида: капельные и газообразные.

1. Капельные жидкости (малосжимаемые) характеризуются большим сопротивлением сжатию и малым сопротивлением растягивающим и касательным усилиям. К капельным жидкостям относятся вода, нефть, бензин, керосин, ртуть, спирт и др.

2. Газообразные (сжимаемые) жидкости обладают большой сжимаемостью, не оказывают сопротивления ни растягивающим, ни касательным усилиям, имеют малую вязкость. К газообразным жидкостям относятся все газы.

Все силы, действующие на частицы жидкости, можно разделить на две группы: внутренние силы упругости и внешние силы. Внутренними силами упругости называются силы взаимодействия между частицами жидкости. Внешние силы – это силы, приложенные к частицам рассматриваемого объема жидкости извне, в частности со стороны жидкости, окружающей данный объем.

Внешние силы могут быть разделены на две группы: 1) силы массовые или объемные – это собственный вес жидкости, силы инерции и центробежные силы, 2) силы поверхностные – это силы, приложенные к поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем жидкости. К ним относятся: атмосферное давление, силы трения, силы сжатия и растяжения. Если изучается механическое воздействие жидкости на твердую поверхность, то можно говорить о силе реакции этой поверхности, приложенной к жидкости со стороны поверхности.

Учет внутреннего трения значительно осложняет изучение законов движения жидкостей. В целях упрощения создано понятие абстрактной модели идеальной или невязкой жидкости. Идеальная жидкость характеризуется подвижностью (абсолютной), т.е. отсутствием в жидкости сил внутреннего трения, отсутствием деформаций сжатия и растяжения. Идеальная жидкость в природе не существует.

Реальная или вязкая жидкость обладает достаточной подвижностью. В отличие от идеальной жидкости, в реальной жидкости при движении возникают касательные напряжения внутреннего трения, величина которых пропорциональна скорости сдвига одного слоя жидкости относительно другого. Следовательно, при относительном покое эти напряжения равны нулю. Такая закономерность была открыта Ньютоном, поэтому такие жидкости (вода, бензин, керосин, масло и т.п.) называют ньютоновскими жидкостями.

Но в природе имеются жидкости, в которых касательные напряжения определяются суммой двух величин: одна, как для ньютоновских жидкостей, зависит от скорости сдвига слоев, а другая – не зависит от скорости и является постоянной величиной для данного вида жидкости. Такие жидкости называются неньютоновскими или бингемовскими, они не обладают большой подвижностью. Примером является битум, гидро-смесь.

Рассмотрим свойства жидкости.

1. Объемный вес жидкости – вес (G) единицы ее объема (W):

$$\gamma = \frac{G}{W}. \quad (1.1)$$

Размерность $\gamma [\frac{\kappa\Gamma}{\text{м}^3}, \frac{H}{\text{м}^3}]$. γ дисциплированной воды при 4°C – $1000 \frac{\kappa\Gamma}{\text{м}^3} = 9810 \frac{H}{\text{м}^3}$.

Объемный вес газов:

1) воздуха $\gamma = 1,188 \frac{\kappa\Gamma}{\text{м}^3} = 11,654 \frac{H}{\text{м}^3}$;

2) кислорода $\gamma = 1,312 \frac{\kappa\Gamma}{\text{м}^3} = 12,871 \frac{H}{\text{м}^3}$;

3) водорода $\gamma = 0,0827 \frac{\kappa\Gamma}{\text{м}^3}$.

2. Плотность – отношение массы (m) жидкости к объему (W):

$$\rho(\rho) = \frac{m}{W}. \quad (1.2)$$

Размерность ρ - $\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^4}, \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^4} \right]$. Плотность воды при $t=4^\circ\text{C}$ является максимальной и равна $102,8 \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^4}$.

Из физики известно, что вес тела определяется как: $G=mg$, откуда:

$$m = \frac{G}{g}. \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.2), получаем:

$$\gamma = \rho g. \quad (1.4)$$

3. Температурное расширение – изменение объема жидкости при увеличении температуры, характеризуется коэффициентом температурного расширения β_t , выражающий относительное увеличение объема при повышении температуры на 1°C :

$$\beta_t = \frac{1}{W} \frac{\Delta W}{\Delta t}, \quad (1.5)$$

где W – изменение объема, Δt – изменение температуры.

Размерность β_t $\left[\frac{1}{^\circ\text{C}} \right]$.

4. Сжимаемость – изменение объема при изменении давления, характеризуется коэффициентом объемного сжатия β_w , выражающий уменьшение объема при изменении давления. Знак (-) показывает, что увеличение давления соответствует уменьшению объема жидкости:

$$\beta_w = \frac{1}{W} \frac{\Delta W}{\Delta P}. \quad (1.6)$$

Размерность β_w - $\left[\frac{\text{м}^2}{\text{Н}} \right]$.

Жидкость, как и все твердые тела, подчиняется закону Гука. В данном случае этот закон связывает изменение объема жидкости с интенсивностью всестороннего сжатия данного объема, что характеризуется модулем упругости E , величиной, обратной β_w :

$$E = \frac{1}{\beta_w}. \quad (1.7)$$

Размерность E - $\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1\text{Па} \right]$.

5. Вязкость.

При движении жидкости в трубах и открытых руслах каждый слой ее частиц скользит по другому, т.е. внутри жидкости происходит процесс, аналогичный трению. Силы, возникающие в результате скольжения слоев частиц жидкости, называются силами внутреннего трения или силами вязкости.

Свойство жидкости оказывать сопротивление сдвигу слоев частиц жидкости есть вязкость. Будем считать, что поток жидкости движется в открытом русле. Стенка тормозит движение, и скорость изменяется по мере удаления от стенки. Рассмотрим два слоя а и б, движущихся со скоростями U_1 и U_2 . Расстояние между слоями dy . Разность скорости равна du . Слой а скользит по слою б с относительной скоростью du , ускоряя движение слоя б, а слой б, соответственно тормозит движение слоя а.

Рис. 1.1 Влияние сил трения

Между этими слоями возникают силы внутреннего трения: T_b – ускоряет движение слоя б, сила T_a – замедляет движение слоя а.

Впервые наличие внутреннего трения между слоями частиц жидкости было отмечено И. Ньютоном, который высказал гипотезу о том, что сила внутреннего трения $F_{тр}$ зависит от свойств жидкости и пропорциональна площади поверхности S соприкасания слоев частиц и их относительной скорости перемещения $\frac{du}{dy}$.

Позднее эта гипотеза была доказана на практике русским ученым Н.П.Петровым в работе “Трение в машине и влияние смазывающей жидкости”. Им была предложена зависимость:

$$F_{тр} = \pm \mu S \frac{du}{dy}. \quad (1.8)$$

или

$$\frac{F_{тр}}{S} = \tau = \pm \mu \frac{du}{dy}. \quad (1.9)$$

где μ - коэффициент динамической вязкости, характеризующий свойства жидкости;

$\frac{du}{dy}$ – градиент скорости по нормали (du – скорость сдвига слоев, dy – расстояние между слоями двух смежных слоев);

τ - касательные напряжения трения.

Знак (+) или (-) в уравнении (1.9) принимают в зависимости от знака градиента скорости с учетом того, чтобы напряжение трения было положительным.

Размерность: $\mu - \left[\frac{H \cdot c}{M^2} \right]$ или $[Pa \cdot c]$

Для расчетов часто применяется коэффициент кинематической вязкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.10)$$

Размерность: $\nu - \left[\frac{M^2}{c} \right]$.

Вязкость измеряется вискозиметром в условных градусах Энглера ($^{\circ}E$). Такая вязкость называется условной.

Для перевода условной вязкости в градусах Энглера в значение кинематического коэффициента вязкости используется формула Убеллоде:

$$\nu = 0,00731 \cdot \frac{{}^{\circ}E - 0,0631}{{}^{\circ}E}. \quad (1.11)$$

Размерность: $\nu - \left[\frac{CM^2}{c} \right]$; $1 \text{ ст} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{M^2}{c}$.

Вязкость жидкостей практически не зависит от давления, но значительно уменьшается с увеличением температуры.

Контрольные вопросы

1. Определение гидравлики, как науки.
2. Что такое жидкость? Как различаются жидкости?
3. Какие силы действуют на жидкости?
4. Перечислите физические свойства жидкости и единицы измерения физических величин.
5. Что такое вязкость? Единицы измерения.

Глава 2. ГИДРОСТАТИКА

2.1 Гидростатическое давление и его свойства

Рассмотрим некоторый объем жидкости, находящийся в равновесии под действием сил P_1, P_2, P_3 и т.д. Рассечем объем произвольно выбранной плоскостью ABCD, мысленно отбросим верхнюю часть объема, тогда для сохранения равновесия необходимо к плоскости ABCD приложить силу, эквивалентную по действию отброшенным силам P_1, P_2 и P_3 . Пусть на площадку ω с центром в точке a действует сила P , которая является равнодействующей всех сил, приложенных к данной плоскости.

Рис. 2.1 Объем покоящейся жидкости.

Тогда отношение $\frac{P}{\omega} = P_{\text{ср}}$ - среднее гидростатическое давление на площадку ω . При уменьшении площадки (ω) до 0, $P_{\text{ср}}$ будет стремиться к некоторому пределу, который выражает давление в данной точке, следовательно, можно записать:

$$P = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{P}{\omega} \quad (2.1)$$

В гидравлике, силу P называют суммарной или общей силой давления на площадку; P – гидростатическое давление в точке или просто гидростатическое давление.

Размерность P (совпадает с напряжением) – $\frac{H}{m^2} = 1 \text{ Па}$.

Гидростатическое давление обладает тремя характерными свойствами:

1. Гидростатическое давление P_n направлено по нормали к площадке, внутрь объема жидкости (рис. 2.2).

2. Гидростатическое давление действует одинаково по всем направлениям и выражается равенством:

$$P_x = P_y = P_z = P_n \quad (2.2)$$

3. Гидростатическое давление в точке зависит от ее координат в пространстве, можно записать:

$$P = f(x, y, z) \quad (2.3)$$

Рис. 2.2 Свойство гидростатического давления.

2.2 Дифференциальные уравнения равновесия жидкости

В покоящейся жидкости рассмотрим элементарный объем жидкости в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами dx , dy , dz (рис. 2.3). Оси координат параллельны его ребрам. В центре тяжести каждой грани приложена сила гидростатического давления, заменяющая действие окружающей жидкости.

Эти силы направлены по нормали, внутрь объема параллелепипеда. Каждая из этих сил равна произведению гидростатического давления в центре тяжести данной грани на ее площадь.

Рис. 2.3 К выводу уравнений равновесия. Обозначим через P гидростатическое давление в центре тяжести (т.А) параллелепипеда, учитывая 3-е свойство давления, что гидростатическое давление зависит от координат точки, найдем, что давления в центре тяжести граней отличаются от давления в т.А на величины, соответственно, $\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} dx$, $\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} dy$, $\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} dz$.

Тогда силы гидростатического давления равны:

$$\begin{aligned} dP_x &= (P - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} dx) dydz \\ dP_x^1 &= (P + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} dx) dydz \\ dP_y &= (P - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} dy) dxdz \\ dP_y^1 &= (P + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} dy) dxdz \\ dP_z &= (P - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} dz) dxdy \\ dP_z^1 &= (P + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} dz) dxdy \end{aligned} \quad (2.4)$$

На рассматриваемый параллелепипед действуют также и массовые силы, результирующую которых обозначим через dG , которая равна произведению ускорения j массовой силы на массу жидкости в объеме параллелепипеда

$$dG = j \rho dxdydz \quad (2.5)$$

Обозначая проекции ускорения на координатные оси через X, Y, Z определим проекции массовых сил:

$$\begin{aligned}
dG_x &= X \rho dx dy dz \\
dG_y &= Y \rho dx dy dz \\
dG_z &= Z \rho dx dy dz
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Жидкость находится в равновесии, поэтому сумма проекций действующих сил равна нулю.

Можно записать:

$$\begin{aligned}
(P - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} dx) dy dz - (P + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} dx) dy dz + X \rho dx dy dz &= 0 \\
(P - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} dy) dx dz - (P + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial y} dy) dx dz + Y \rho dx dy dz &= 0
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

$$(P - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} dz) dx dy - (P + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} dz) dx dy + Z \rho dx dy dz = 0$$

Произведя сокращения и отнеся все члены уравнения к единице массы, т.е. разделив каждое уравнение на массу параллелепипеда ($\rho dx dy dz$), получим систему уравнений Л.Эйлера:

$$\begin{aligned}
X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= X \\
Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= Y \\
Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= Z
\end{aligned}
\tag{2.8} \quad \text{или} \tag{2.9}$$

Уравнения равновесия жидкости были получены в российской академии наук Л.Эйлером (1775 г.). Они выражают связь между массовыми силами, гидростатическим давлением и координатами любой точки жидкости в состоянии равновесия.

2.3 Основное уравнение гидростатики

Уравнение гидростатического давления можно получить из уравнений равновесия Л.Эйлера (2.9).

Умножим соответственно каждый его член на dx, dy, dz сложим их и получим, что

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} dz = X dx + Y dy + Z dz
\tag{2.10}$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = \rho (X dx + Y dy + Z dz)
\tag{2.11}$$

Т.к. по третьему свойству гидростатического давления $P=f(x,y,z)$, то выражение в правой части уравнения (2.11) есть полный дифференциал давления

$$\rho (Xdx + Ydy + Zdz) = dP \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) называется основным дифференциальным уравнением статики жидкости.

Из уравнения (2.12) следует, что при равновесии полным дифференциалом должна быть и левая часть уравнения (2.10). в частности, при постоянной плотности $\rho = \text{const}$ (жидкость несжимаемая) получили:

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi, \quad (2.13)$$

где $d\Phi$ – некоторая силовая функция,

$\Phi = f(x, y, z)$, частные производные которой по осям координат равны:

$$1X = \frac{d\Phi}{dx}; \quad 1Y = \frac{d\Phi}{dy}; \quad 1Z = \frac{d\Phi}{dz}.$$

В этом случае силовая функция называется потенциалом сил, тогда уравнение (2.12) запишется в виде:

$$\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) = dP \quad (2.14)$$

$$\text{или } \rho d\Phi = dP. \quad (2.15)$$

Из этого следует важный вывод: жидкость может находиться в равновесии только в том случае, когда массовые силы, действующие на нее, имеют потенциал.

Поверхность, в каждой точке которой давление постоянно $P = \text{const}$, называется поверхностью равного давления. Уравнение этой поверхности можно получить из основного дифференциального уравнения статики (2.12): $P = \text{const}$,

$dP = 0$, $\rho \neq 0$, то уравнение имеет вид:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (2.16)$$

Поверхность уровня на границе «жидкость-атмосфера» называется свободной поверхностью.

2.4. Равновесие жидкости при наличии гравитационных сил – силы тяжести.

Интегрируя основное уравнение (2.12) гидростатики можно его использовать для различных случаев покоя жидкости. Рассмотрим частный случай: жидкость находится под действием силы тяжести (рис 2.4). На свободной поверхности жидкости давление равно P_0 . Располагаем оси координат как показано на рис. 2.4. Плоскость XOY будет плоскостью сравнения. Единичные силы тяжести по осям будут равны: $Z1 = 0$; $Y1 = 0$; $X1 = -g1$.

Подставляя эти значения в уравнении полного дифференциала давления (2.12) получим:

$$dP = -\rho g dz1 \quad (2.17)$$

Интегрируем (2.17):

$P = -\rho g z + \text{const}$, (2.18), но как мы знаем, $\rho g = \gamma$, тогда можно записать $p = -\gamma z + C$ (2.19)

Значение постоянной найдем из граничных условий:

при $z = z_0$, т.е. полной глубине (от свободной поверхности до дна сосуда), давление $P = P_0$. Подставляя эти условия в (2.19) найдем C :

$$C = P_0 + \gamma z_0 \quad (2.20)$$

Подставляя значение C в уравнение (2.19)

$$P - P_0 = \gamma (z_0 - z) \quad (2.21)$$

$$\text{или } \frac{P_0}{\gamma} + z_0 = \frac{P}{\gamma} + z \quad (2.22)$$

Рис. 2.4 Жидкость под действием гравитационных сил

Левая часть уравнения (2.22) относится к точкам с координатой z_0 , в которых гидростатическое давление равно P_0 , а сумма

$\frac{P_0}{\gamma} + z_0$ есть const. Правая же часть уравнения относится к произ-

вольно выбранной т.М, погруженной под уровень свободной поверхности на глубину h . Так как левая часть уравнения постоянна, то постоянна и его правая часть.

Уравнение (2.22) называется основным уравнением гидростатики для жидкости, находящейся под действием силы тяжести.

Так как $z_0 - z = h$, то уравнение (2.22) можно записать в виде:

$$P = P_0 + \gamma h \quad (2.23)$$

На основании анализа уравнения (2.23) можно установить следующее: на сколько увеличивается давление на поверхности жидкости, на столько же увеличивается гидростатическое давление в рассматриваемой точке. Это положение носит название закона Паскаля, который формулируется так: изменение давления в какой-либо точке покоящейся жидкости, не нарушающее ее равновесия, передается в остальные ее точки без изменения.

Если сосуд открытый, т.е. свободная поверхность жидкости соприкасается с атмосферой $P_0 = P_a$, то полное гидростатическое давление определяется:

$$P = P_a + \gamma h \quad (2.24)$$

Избыток полного гидростатического или абсолютного давления над атмосферным называется манометрическим или избыточным давлением:

$$P_{\text{изб.}} = \gamma h \quad (2.25)$$

В инженерной практике встречаются области с давлением ниже атмосферного (всасывающие трубы насосов, насадки, вакуум-котлы и т.д.). Такие области называются вакуумом. Вакуумным давлением называется избыток атмосферного давления над полным давлением:

$$P_{\text{вак.}} = P_a - P \quad (2.26)$$

Для измерения вакуума используют прибор, называемый вакуумметром, представляющий собой изогнутую трубку, один конец трубки помещается в область вакуума, а другой в открытый сосуд с жидкостью.

В первом сосуде давление $P_0 < P_a$, жидкость в трубке под действием P_a , действующего на поверхности жидкости в сосуде 2, поднимается на высоту $h_{\text{вак.}}$, (вакуумметрическая высота), которая может быть определена из уравнения

$$P_a = P_0 + \gamma h_{\text{вак.}};$$

$$h_{\text{вак.}} = \frac{P_a - P_0}{\gamma}, \quad (2.27)$$

Пьезометрическая и вакуумметрическая высота могут быть измерены в м. вод. столба, в атмосферах (атм.): 1 ат.=10 м.в.ст.; в мм рт.ст. Атмосферное давление равно 760 мм рт.ст.=10 м.в.ст., следовательно, предельное значение вакуума 760 мм рт.ст.=10 м в.ст.

В практике часто пользуются единицей измерения давления называемой технической атмосферой 1 атм.=736 мм рт.ст.=10 м вод.ст.

2.5. Некоторые понятия в гидростатике

Пьезометрическая высота давления.

Если в закрытый сосуд (рис.2.5), к которому присоединены две трубки, открытые сверху, поместить жидкость, и на поверхность жидкости оказывать давление $P_0 > P_a$, то жидкость в трубках поднимается на высоту h_A и h_B . Эти трубки называются пьезометрами (пьезо-греческое слово давление, метр-измерение), а высота h_A (h_B)-пьезометрической.

Жидкость в точках А и В, которая находится под давлением P_0 , поднимается по пьезометрам и испытывая атмосферное давление P_a , остановится на одной плоскости 0^1-0^1 , называемой напорной плоскостью.

Пьезометрической высотой давления h называется высота h от точки, находящейся под давлением до поверхности, где давление равно атмосферному.

Из основного уравнения гидростатики, следует, что

$$h_A = \frac{P_A - P_a}{\gamma} \quad (2.28)$$

$$h_B = \frac{P_B - P_a}{\gamma} \quad (2.29)$$

Из рис. (3.1) видно, что пьезометрические высоты давления для любых точек, расположенных на разных уровнях жидкости, неравны между собой.

Пьезометрический или гидростатический напор

На рис. 2.5 для точек А и В координаты положения относительно плоскости сравнения 0-0 равны Z_A и Z_B , а сумма координат и пьезометрических высот h_A и h_B есть величина постоянная $H_A=H_B$ и называется пьезометрическим или гидростатическим напором.

$$H_A = Z_A + h_A = Z_A + \frac{P_A - P_a}{\gamma}, \quad (2.30)$$

$$H_B = Z_B + h_B = Z_B + \frac{P_B - P_a}{\gamma}. \quad (2.31)$$

Пьезометрическим или гидростатическим напором H называется высота для точки, находящейся под давлением от плоскости сравнения до поверхности, где давление равно атмосферному. Для точек А и В (рис. 2.5) пьезометрические высоты различны, а пьезометрический напор одинаков.

Вакууметрическая высота

В инженерной практике встречаются области с давлением ниже атмосферного (всасывающие трубы насосов, насадки, вакуум-котлы и т.п.). Такие области называются вакуумом.

На рис. 2.6 в сосуде на поверхности жидкости $P_0 < P_a$; в изогнутой трубке, один конец которой помещен в область вакуума, а другой - в сосуд с жидкостью 2, на поверхности которого давление равно атмосферному, жидкость поднимается на высоту $h_{\text{ВАК}}$, называемой вакууметрической высотой.

Атмосферное давление уравнивается следующими соотношениями:

$$P_a = P_0 + \gamma h_{\text{ВАК}}, \quad (2.32)$$

$$\text{Отсюда, } h_{\text{ВАК}} = \frac{P_a - P_0}{\gamma}. \quad (2.33)$$

Единица измерения. Пьезометрическая и вакууметрическая высоты могут быть измерены в метрах водяного столба (м.вод.ст.), в атмосферах (физическая атм. и техническая атм.), в миллиметрах ртутного столба (мм рт.ст.)

$$1 \text{ ат} = 10 \text{ м вод.ст.} = 760 \text{ мм рт.ст.}, \quad 1 \text{ ат} = 10 \text{ м.в.ст.} = 736 \text{ мм рт.ст.}$$

Рис. 2.5 Пьезометрическая
высота

Рис. 2.6 Вакууметрическая
высота

2.6. Приборы для измерения давления

Для измерения величины давления применяются пьезометры, жидкостные и механические манометры, вакуумметры.

1. С пьезометрами мы, знакомы по предыдущему материалу. Это стеклянные трубки $\varnothing 5-12$ мм, такие пределы приняты исходя из условия капиллярности. Пьезометр помещается на измерительной шкале. Нижняя часть (конец) пьезометра соединяется с той плоскостью, где требуется измерить давление. Под действием давления на свободной поверхности и веса столба жидкости высотой H , жидкость в пьезометре поднимается на высоту h , т.е. избыточное гидростатическое давление в точке установки пьезометра будет

$$P_{\text{изб.}} = \gamma h, \quad (2.34)$$

$$\text{Отсюда, } h = \frac{P_{\text{изб.}}}{\gamma}. \quad (2.35)$$

При помощи пьезометра можно определить абсолютное гидростатическое давление (рис. 2.5):

$$P = P_a - \gamma h, \quad (2.36)$$

Можно определить давление P_0 :

$$P_0 + \gamma H = P_a + \gamma h \quad (2.37)$$

$$P_0 = P_a + \gamma (h - H) \quad (2.38)$$

Или зная P_0 и h , определить H :

$$H = \frac{P_a - P_0}{\gamma} + h, \quad (2.39)$$

Пьезометр измеряет давление в натуральную величину в м вод. ст. и применяют его для измерения давлений не более 3-4 м в.ст.

2. Жидкостные манометры отличаются от пьезометров тем, что в них используются жидкость большого удельного веса – ртуть. Простейшим типом жидкостного манометра является U – образный ртутный манометр.

Для того, чтобы определить полное гидростатическое давление в сосуде в точке присоединения манометра надо ввести поправку, равную глубине понижения уровня ртути в левом колене a :

$$\text{Справа: } P_{0-0} = P_a + \gamma_{\text{рт}} h_p \quad (2.40)$$

$$\text{Слева: } P_{0-0} = P_0 + \gamma_{\text{ж}} a \quad (2.41)$$

$$P = P_a + \gamma_{\text{рт}} h_p - \gamma_{\text{ж}} a \quad (2.42)$$

Применяется также и дифференциальные манометры, служащие для определения разности давления в двух точках.

Рис. 2.7 Жидкостный манометр.

3. Механические манометры – пружинные и мембранные, предназначены для измерения значительных давлений. В пружинных манометрах давление передается на пружину, которая перемещает соединенную с ней стрелку по измерительной шкале. В мембранных манометрах давление передается под мембрану, которая деформируется, и перемещает стрелку. Пружинные манометры измеряют давление до 10000 ат., а мембранные – до 30 ат.

4. Мы уже говорили о вакууметрах, (рис.2.6) предназначенных для измерения вакуума, они также могут быть жидкостными и механическими. В мембранных вакууметрах стрелка показывает вакуум в том случае, когда мембрана деформируется под действием атмосферного давления после того, как под мембрану подведено пониженное давление.

2.7. Гидростатическое давление на плоскую фигуру

Рассмотрим давление покоящейся жидкости на плоскую стенку, наклоненную под углом α к горизонту.

Давление на поверхности жидкости – P_0 . Расположим систему координат как показано на рисунке 2.8 развертки плоской стенки ABCD.

Рис. 2.8 Давление на наклонную стенку

Выделим элементарную площадку $d\omega$, в центре тяжести этой площадки на глубине h действует гидростатическое давление p . Тогда сила полного гидростатического давления, действующая на площадку $d\omega$:

$$dP = p d\omega, \quad (2.43)$$

Из основного уравнения гидростатики имеем:

$$P = P_0 + \gamma h = P_0 + \gamma z \sin \alpha \quad (2.44)$$

Подставим уравнение (2.44) в уравнение (2.43) и проинтегрируем его:

$$P = P_0 \omega + \gamma \sin \alpha \int_{\omega} z d\omega \quad (2.45)$$

Интеграл $\int_{\omega} z d\omega = S_y$ – статистический момент площади смоченной поверхности ABCD относительно оси y .

Глубина погружения центра тяжести смоченной поверхности фигуры ABCD:

$$h_c = z_c \sin \alpha.$$

Тогда статический момент площади смоченной поверхности:

$$S_y = z_c \omega = \frac{h_c \omega}{\sin \alpha}.$$

Учитывая это, уравнение (2.45) запишется в виде:

$$P=(p_0+ \gamma h_c)\omega. \quad (2.46)$$

Выражение в скобках – полное гидростатическое давление в центре тяжести поверхности плоской фигуры ABCD.

Сила полного гидростатического давления на плоскую фигуру равна произведению площади смоченной поверхности фигуры на полное гидростатическое давление в центре тяжести этой поверхности.

Сила избыточного гидростатического давления на поверхности ABCD равна: если $P_0=P_a$.

$$P= \gamma h_c\omega. \quad (2.47)$$

Здесь, γh_c – избыточное давление в центре тяжести смоченной поверхности ABCD.

Сила избыточного гидростатического давления на плоскую фигуру равна произведению площади смоченной поверхности на избыточное давление в центре тяжести этой поверхности. Точка приложения гидростатического давления на плоскую фигуру называется центром давления. Положение центра давления можно определить из условия равенства моментов сил.

Известно, что момент равнодействующей силы относительно любой оси должен быть равен сумме моментов составляющих ее сил относительно этой же оси.

В данном случае равнодействующей элементарных сил избыточного давления является сила избыточного давления. Момент этой силы относительно оси у равен:

$$M=Ph_d= \gamma h_c\omega h_d \quad (2.48)$$

Момент составляющих силы давления относительно той же оси равен:

$$M= \int_{\omega} (pd\omega)h= \int_{\omega} \gamma h^2 d\omega = \gamma \int_{\omega} h^2 d\omega = \gamma I_y \quad (2.49)$$

Здесь избыточное давление в центре элементарной площадки $d\omega$ есть γh (h – глубина погружения этого центра, $h= z\sin\alpha$), а

$$\int_{\omega} h^2 d\omega = I_y - \text{момент инерции относительно оси у.}$$

Приравнявая уравнения (2.48) и (2.49) имеем:

$$\gamma h_c\omega h_d= \gamma I_y, \quad (2.50)$$

$$h_d= \frac{I_y}{\omega h_c}. \quad (2.51)$$

Момент инерции I_y относительно оси у можно выразить через момент инерции I_0 относительно оси, проходящей через центр тяжести смоченной поверхности ABCD:

$$I_y=I_0+ h_c^2\omega \quad (2.52)$$

Подставим это значение в зависимость (2.51):

$$H_d= h_c+ \frac{I_y}{\omega h_c}. \quad (2.53)$$

Центр давления расположен ниже центра тяжести смоченной поверхности.

Построение эпюры гидростатического давления.

Рис. 2.9 Эпюра гидростатического давления.

Рассмотрим построение эпюры гидростатического давления на плоский вертикальный щит шириной b . Определим избыточное давление в т.М (рис. 2.9).

Избыточное давление определяется глубиной погружения т.М:

$P = \gamma h$. Спускаемся по прямой ОА: в т.А, гидростатическое давление изменяется по линейному закону.

$$\text{Для: т.О} \quad P=0 \quad (2.54)$$

$$\text{т.А} \quad P = \gamma h \quad (2.55)$$

Отложим перпендикулярно к поверхности ОА отрезок jh , получаем т.В. Соединяем прямой точки В и О, получаем ΔOAB , это и есть эпюра гидростатического давления на плоскую фигуру ОА. Площадь ΔOAB умножается на ширину щита b – это даст величину гидростатического давления:

$$p = \Omega_{\Delta OAB} b = 1/2 h_1^2 b \quad (2.56)$$

Сила гидростатического давления по первому свойству должна быть направлена перпендикулярно к площади действия и внутрь объема жидкости, а центр приложения – это центр тяжести эпюры давления. Следовательно, сила P приложена в центре давления (т.Д.) плоской фигуры ОА, центр тяжести для прямоугольного треугольника располагается на $1/3h_1$, следовательно, сила приложена в т.Д, находящейся на $1/3h_1$, от основания фигуры. Иногда при построении эпюры откладывается не γh , а просто h , тогда сила P определяется по формуле:

$$P = \Omega b \gamma = \frac{1}{2} h_1^2 \gamma b \quad (2.57)$$

2.8. Давление жидкости на криволинейные поверхности

Рассмотрим криволинейную поверхность АВ, подверженную действию избыточного гидростатического давления (рис.2.10). Выделим на этой поверхности бесконечно-малую горизонтальную полоску площадью $d\omega$, центр тяжести которой погружен на глубину h . На эту полоску будет действовать сила давления dP , равная $dP = \gamma h d\omega$, которую можно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие, т.е. силы dP_x и dP_z :

$$dP_x = dP \cos \alpha; \quad (2.58)$$

$$dP_z = dP \sin \alpha; \quad (2.59)$$

$$\text{Или } dP_x = \gamma h d\omega \cos \alpha$$

Произведение $(d\omega \cos \alpha)$ является площадью проекции элементарной полоски $d\omega$ на вертикальную плоскость, т.е.

$$d\omega \cos \alpha = d\omega_z. \text{ Тогда,}$$

$$dP_x = \gamma h d\omega_z. \quad (2.60)$$

Рис. 2.10 Давление на криволинейную поверхность.

Проинтегрируем последнее выражение:

$$P_x = \int_{\omega_z} \gamma h d\omega_z = \gamma \int_{\omega_z} h d\omega_z, \quad (2.61)$$

где $\int_{\omega_z} h d\omega_z$ - статистический момент площади вертикальной проекции криволинейной поверхности $d\omega_z$ относительно свободной поверхности.

Он равен: $\int_{\omega_z} h d\omega_z = \omega_z h_c$, где h_c – центр тяжести вертикальной проекции криволинейной поверхности.

Горизонтальная составляющая силы избыточного гидростатического давления, действующего на криволинейную поверхность равна произведению силы гидростатического давления в центре тяжести вертикальной проекции криволинейной поверхности на площадь смоченной поверхности вертикальной проекции.

$$P_x = \gamma h_c \omega_z. \quad (2.62)$$

Рассмотрим вертикальную составляющую избыточного давления:

$$dP_z = \gamma h d\omega \sin \alpha; \quad (2.63)$$

где $d\omega \sin \alpha$ - есть площадь горизонтальной проекции полоски $d\omega$ (проекция $d\omega$ на горизонтальную плоскость) равная $d\omega_x$, а произведение $(h d\omega_x)$

представляет собой объем dW призмы (см. рис. 2.10), т.е. $h d\omega_x = dW$, тогда вертикальная составляющая полной силы гидростатического давления равна:

$$P_z = \int_{\omega_z} \gamma h d\omega \sin \alpha = \gamma \int_{\omega_x} h d\omega_x = \gamma dW . \quad (2.64)$$

Объем W является суммой элементарных объемов и называется телом давления.

Тело давления – это фигура, получаемая при проведении вертикальных плоскостей через конечные точки криволинейной поверхности, ограниченная вертикальными плоскостями, самой криволинейной поверхностью и свободной поверхностью жидкости.

Вертикальная составляющая силы избыточного гидростатического давления, действующего на криволинейную поверхность, равна весу жидкости в объеме тела давления:

$$P_z = \gamma W. \quad (2.65)$$

Полная сила избыточного гидростатического давления является равнодействующей ее составляющих P_x и P_z и определяется зависимостью

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} . \quad (2.66)$$

Направление этой силы определяется углом β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{P_z}{P_x} \quad (2.67)$$

Сила P приложена в центре давления (в точке пересечения вектора силы P с криволинейной поверхностью – т.Д. – рис. 2.10). Вектор силы P должен проходить через точку пересечения составляющих P_x и P_z под углом β .

Сила P_z приложена в центре тяжести тела давления. Сила P_x приложена в центре давления вертикальной проекции смоченной поверхности криволинейной фигуры. Точка пересечения направлений этих сил даст точку, определяющую направление P .

2.9. Закон Архимеда

Рассмотрим давление жидкости на тело, погруженное в нее. Введем некоторые допущения: поверхность тела не имеет перегибов, поэтому с любой горизонтальной прямой пересекается только в двух точках. Пересечем тело вертикальными плоскостями, параллельными плоскостями oyz и oxz на элементарные призмы с площадками $d\omega_1$ и $d\omega_2$ (рис. 2.11).

Тогда проекции элементарных сил давления действующих на площадки $d\omega_1$ и $d\omega_2$, на вертикальную ось будут равны:

$$\begin{aligned} dP_{1z} &= p_1 d\omega_1 \cos(dP_{1,z}) = p_1 d\omega = \gamma h_1 d\omega, \\ dP_{2z} &= - p_2 d\omega_2 \cos(dP_{2,z}) = -p_2 d\omega = -\gamma h_2 d\omega. \end{aligned} \quad (2.68)$$

p_1 и p_2 – манометрические давления в центре тяжести площадок $d\omega_1$ и $d\omega_2$;

h_1 и h_2 – глубины погружения центра тяжести $d\omega_1$ и $d\omega_2$.

Рис. 2.11 К закону Архимеда.

Интегрируя (2.68) и суммируя для определения результирующей вертикального давления на тело:

$$P = \int_{\omega} p_1 d\omega - \int_{\omega} p_2 d\omega = \gamma \left(\int_{\omega} h_1 d\omega - \int_{\omega} h_2 d\omega \right) = \gamma(W_1 - W_2) = \gamma W \quad (2.69)$$

W_1 и W_2 – объемы призмы, у которых верхнее основание – проекция тела на плоскость $хоу$, а нижнее – верхняя и нижняя поверхность тела АВСД, W – объем тела.

Последняя формула является теоретическим выражением закона Архимеда: на тело, погруженное в жидкость, действует сила равная весу вытесненной жидкости. Эта сила называется подъемной силой.

Основы Плавания тел

Подъемная сила или сила Архимеда приложена в центре погруженной части тела, называемом центром водоизмещения.

Теория плавания тела основана на законе Архимеда. Тело, погруженное в жидкость находится под действием двух сил:

1. Силы тяжести – G ;
2. Подъемной силы – P_{π} .

Равновесие тел, погруженных в жидкость рассматривается с 2-х позиций:

1. Плаваемости – способности тела плавать;
2. Остойчивости – способности восстанавливать свое изначальное положение после устранения действия силы, вызывающей поворот (крен) плавающего тела относительно его продольной или поперечной оси.

Условия плавучести определяется в соответствии с законом Архимеда.

Сила тяжести включает собственный вес и полезную нагрузку. Возможны следующие случаи:

1. $G > P_{\pi}$ - тело тонет;
2. $G = P_{\pi}$ - тело находится в безразличном равновесии, т.е. плавает погруженным в жидкость на любой глубине;
3. $G < P_{\pi}$ - тело всплывает на поверхность жидкости, где и наступает равновесие, т.е. $G = P_{\pi}^1 = \gamma W^1$, где W^1 - объем жидкости в погруженной части плавающего тела.

Линия пересечения свободной поверхности жидкости с боковой поверхностью плавающего тела называется ватерлинией, а плоскость, ограниченная этой линией называется плоскостью плавания.

Линия, находящаяся через центр тяжести плавающего тела, называется осью плавания (0-0).

2.10. Равновесие жидкостей при наличии негравитационных массовых сил

В практике существует равновесие жидкостей (капельных и газообразных) при наличии негравитационных сил – сил инерции и электромагнитных сил. Мы рассмотрим случай равновесия жидкостей при наличии сил инерции. Силы инерции добавляются к силам тяжести в этом случае, если жидкость в сосуде находится в равновесии в то время, когда сосуд движется, т.е. жидкость находится в относительном покое.

На рис. 2.12 представлен открытый цилиндрический сосуд, наполненный жидкостью, вращается вокруг своей вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Жидкость будет вращаться с той же скоростью и по отношению к стенкам сосуда будет в относительном покое. На частицу действует сила тяжести G и сила инерции (центробежная сила) P_{π} :

$$G = mg, \quad P_{\pi} = m \omega^2 r \quad (2.70)$$

r - расстояние до частицы от оси вращения,

m - масса частицы.

Составляющие силы тяжести по осям, отнесенные к единице массы равны: $X_1 = 0$; $Y_1 = 0$; $Z_1 = -g$.

Сила инерции имеет следующие составляющие, также отнесенные к единице массы: $X = 1\omega^2 x$, $Y = 1\omega^2 y$, $Z = 0$.

Рис. 2.12 Жидкость под действием негравитационных сил

Подставляя в уравнение полного дифференциала давления и интегрируя, имеем

$$P = \frac{\rho \omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \gamma z + C \quad (2.71)$$

Постоянная интегрирования определяется из граничных условий: $z=z_0, x=y=0$ (рис. 2.10)

$$P=P_0, \quad C = P_0 + \gamma z_0 \quad (2.72)$$

Уравнение (2.71) имеет вид:

$$P - P_0 = \frac{\rho \omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \gamma (z - z_0) \quad (2.73)$$

Свободная поверхность жидкости (рис. 2.10) является поверхностью равного давления $P=P_0=P_a=\text{const}$, а $x^2+y^2=r^2$, тогда уравнение поверхности имеет вид: $\frac{r \omega^2}{2} - \gamma z = \text{const}$ (2.74)

Уравнение (2.74) является уравнением параболоида вращения.

Пример и контрольные вопросы

В качестве иллюстрации применения законов равновесия рассмотрим случай покоя в двух сообщающихся сосудах двух жидкостей равного объемного веса. Известны глубина h_1 над линией раздела и объемные веса жидкостей γ_1 и γ_2 . Определить разность уровней жидкостей в 2-х сосудах. Давление на свободной поверхности жидкостей одинаковые.

Решение: проведем горизонтальную плоскость раздела 0-0. Тогда давление в т.1 будет равно давлению в т. 2, т.к. эти точки лежат на одной и той поверхности равного давления. $P_1=P_2$

Определим P_1 и P_2 :

$$P_1 = P_0 + \gamma h_1;$$

$$P_2 = P_0 + \gamma h_2.$$

Приравнявая получаем:

$$P_0 + \gamma h_1 = P_0 + \gamma h_2.$$

Т.к. P_0 -одинаковые, то $h_2 = h_1 \gamma_1 / \gamma_2$,

$$\text{т.е.} \quad h_1 / h_2 = \gamma_2 / \gamma_1,$$

Зная h_2 , находим Δh :

$$\Delta h = h_1 - h_2 = h_1 - h_1 \gamma_1 / \gamma_2 = h_1 (1 - \gamma_1 / \gamma_2).$$

Рис. К задаче.

1. Приведите определение гидростатического давления и его свойства.
2. Физический смысл дифференциальных уравнений Эйлера.
3. Вывод уравнения гидростатического давления жидкости, находящейся под действием сил тяжести.
4. Что называется полным и избыточным давлением, вакуумом?
5. Как рассчитать гидростатическое давление на плоские и криволинейные поверхности?
6. Поясните, что такое пьезометрическая высота и пьезометрический напор?
7. Сформулируйте законы Архимеда и Паскаля.
8. Условия плавучести и равновесия тел при плавании

Глава 3. ГИДРОДИНАМИКА

Гидродинамика изучает законы движения жидкости. Параметры, характеризующие движение – скорость и давление, которое называется гидродинамическим, изменяются в потоке жидкости в пространстве и во времени. Основная задача гидродинамики состоит в исследовании этих параметров в потоке жидкости, в нахождении функций вида: $U=f_1(x,y,z,t)$ и $P=f_2(x,y,z,t)$.

3.1 Методы исследования движения жидкости

Существуют два метода исследования движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера. В обоих методах жидкость (капельная и газообразная) рассматривается как сплошная среда, полностью занимающая пространство. В качестве элемента жидкости принимается частица бесконечно малых размеров, не отождествляя ее с молекулой или атомом.

1. Метод Лагранжа. По этому методу исследуется движение отдельных частиц жидкости.

Выделим некоторую область занятую движущейся жидкостью (рис. 3.1). Рассмотрим ряд движущихся частиц жидкости $M_1, M_2, M_3 \dots$, находящихся в данный момент на границе этой области.

X_0 и Z_0 – начальные координаты этих частиц. Считаем, что для каждой частицы M известны зависимости:

$$\begin{aligned}x &= f_1(x_0, z_0, t) \\ z &= f_2(x_0, z_0, t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Рис. 3.1 К методу Лагранжа

Пользуясь этими координатами можно легко построить путь движения (траекторию) этих частиц и найти путь dS , пройденный за время dt , а выражение $(\frac{dS}{dt})$ дает скорость в данной точке, зная которую можно определить ускорение. Согласно, этого метода x и z – текущие координаты, величины dx и dz рассматриваются как проекции пути dS на соответствующие координатные оси.

Тогда, для скорости имеем:

$$\begin{aligned}U_x &= \frac{dx}{dt} \\ U_z &= \frac{dz}{dt}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\text{Для ускорения: } a_x = \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$a_z = \frac{\partial U_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (3.3)$$

По методу Лагранжа при движении потока жидкости мы следим за отдельными частицами жидкости в течение времени t , за которое эти частицы, двигаясь по своим траекториям, пройдут всю рассматриваемую область.

2. Метод Эйлера. Рассмотрим некоторую область, занятую движущейся жидкостью (рис. 3.2). Выделим в рассматриваемой области точки 1,2,3... Эти точки неподвижны при протекании жидкости через них. Здесь величины x и z не текущие координаты частиц жидкости, а просто координаты точек пространства.

Рис. 3.2 К методу Эйлера. В момент времени t_1 в т.1 будет находиться частица жидкости, имеющая скорость $U_1(t_1)$, в т.2 будет частица жидкости, имеющая скорость $U_2(t_1)$, в т.3- $U_3(t_1)$, и т.д.

Как видно из рисунка 3.2 в момент времени t_1 поток может быть представлен векторным полем скоростей. В следующий момент t_2 в т.1,2,3... будем иметь скорости $U_1(t_2)$, $U_2(t_2)$, $U_3(t_2)$ и другое поле скоростей.

По методу Эйлера поток движущейся жидкости представляется векторным полем скоростей, относящимся к неподвижным точкам пространства. Сопоставляя векторные поля скоростей, можно представить, как рассматриваемый поток меняется с течением времени. По данному методу dx и dz - это приращения координат x и z .

Метод Лагранжа не нашел широкого применения в технической механике жидкости из-за его сложности. Для изучения движения жидкости используется метод Эйлера, но полностью не отказались от рассмотрения движения частиц жидкости: считается, что движение жидкости происходит не за интервал времени t_1 , а за некоторой элементарный отрезок времени

dt , в течении которого рассматриваемая частица жидкости проходит через рассматриваемую точку пространства.

3.2. Основные понятия

Рассмотрим ряд понятий. Если в потоке жидкости через точки 1,2,3 и т. д., взятых на расстоянии ΔS друг от друга, провести векторы скоростей U_1 , U_2 , U_3 и т.д., показывающие направления скоростей движения частиц в данный момент времени, то получим ломаную линию 1-2-3 и т.д.(рис. 3.3). Если уменьшать длину отрезков, то в пределе ломаная линия станет кривой. Эта кривая называется линией тока и характеризуется тем, что в данный момент времени во всех ее точках векторы скоростей будут

касательными к ней. Если в движущейся жидкости выделить бесконечно малый замкнутый контур и через все его точки провести линии тока, то последние образуют как бы непроницаемую трубчатую поверхность, которая называется трубкой тока. Трубка тока характерна тем, что жидкость не может ни вытекать из нее, ни поступить в нее. Следовательно, в трубке тока жидкость протекает как в обычной трубе, только с бесконечно малой площадью сечения.

а)

б)

Рис. 3.3 К основным понятиям
а - линия тока, б- элементарная струйка.

Масса жидкости внутри трубки тока называется элементарной стружкой жидкости. При неустановившемся движении жидкости форма трубки тока непрерывно меняется, вместе с ней изменяется и элементарная стружка жидкости. При установившемся движении жидкости трубка тока и элементарная стружка жидкости остаются постоянными. Совокупность элементарных струек, представляющих непрерывную массу частиц, движущихся по какому-либо направлению, образует поток жидкости. Поток жидкости может быть полностью или частично ограничен твердыми стенками (трубопровод, канал) и может быть свободным (струя, выходящая из гидромонитора).

Поперечное сечение струйки жидкости, перпендикулярное к ее внутренним линиям тока, называется живым сечением струйки.

Живое сечение потока (ω) – поперечное сечение потока, перпендикулярное его направлению. Расходом потока Q называется объем жидкости, проходящей в единицу времени через живое сечение потока ω . Расход измеряется в м³/сек., л/с и определяется как:

$$Q = \frac{W}{t} \quad (3.4)$$

Это понятие объемного расхода. В отдельных случаях пользуются понятием весового расхода – это вес жидкости, проходящий в единицу времени через живое сечение потока и измеряется в кг/с. Между весовым и объемным расходами существует зависимость:

$$G = \frac{G_0}{t} \quad (3.5)$$

$$G = \gamma Q \quad (3.6)$$

γ - объемный вес жидкости.

Смоченный периметр χ - часть периметра живого сечения, соприкасаемая с твердыми стенками.

Гидравлический радиус R – отношение площади живого сечения потока к смоченному периметру: $R = \frac{\omega}{\chi}$ (3.7)

Для напорных круглых труб $R = \frac{d}{4}$.

Средняя скорость потока V . Под средней скоростью понимается такая скорость, с которой должны двигаться все частицы жидкости в потоке, чтобы пропустить через его живое сечение действительный расход, проходящий при неравномерном распределении скоростей: $V = \frac{Q}{\omega}$ м/с. (3.8)

В вентиляционной и отопительной практике широко пользуются понятием эквивалентного диаметра:

$$d_{\text{экв}} = 4 \frac{\omega}{\chi} = 4R \quad (3.9)$$

$$\text{Для круглой трубы: } d_{\text{экв}} = d \quad (3.10)$$

$$\text{Для квадратной трубы: } d_{\text{экв}} = a \quad (3.11)$$

$$\text{Для прямоугольной трубы: } d_{\text{экв}} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b} \quad (3.12)$$

Здесь d – диаметр трубы, a и b – размеры поперечного сечения некруглых труб.

3.3. Виды движения жидкости

Установившееся движение – движение жидкости, при котором скорость потока и давление в любой точке потока не меняется с течением времени и зависит только от ее положения в потоке, т.е. являются функциями ее координат: $U = f_1(x, y, z)$ и $P = f_2(x, y, z)$. Пример: истечение жидкости из резервуара при постоянном напоре, движение воды в канале при постоянной ширине и глубине потока.

Неустановившееся движение – движение жидкости, при котором скорость движения и давление в каждой точке меняются с течением времени, т.е. являются функциями не только координат, но и времени: $U = f_1(x, y, z, t)$ и $P = f_2(x, y, z, t)$. Пример: истечение жидкости из отверстия резервуара при переменном напоре.

Равномерное движение – установившееся движение жидкости, при котором площадь живого сечения потока и средняя скорость не меняются по длине потока. Пример движение жидкости в трубе и каналах постоянного сечения.

Неравномерное движение – установившееся движение жидкости, при котором площадь живого сечения потока и средняя скорость меняются по длине. Пример: движение жидкости в трубе переменного сечения, в естественных руслах, на перепадах.

Безнапорное движение – движение потока жидкости со свободной поверхностью и происходит оно под действием силы тяжести. Пример: движение воды в реке и каналах, движение жидкости в трубах с неполным наполнением.

Напорное движение - движение потока жидкости при соприкосании по всему периметру с твердыми стенками. Движение происходит под давлением. Пример: движение воды в водопроводных трубах, газа- в газопроводах.

3.4 Уравнение неразрывности потока

Неразрывный сплошной поток жидкости – это поток, в котором отсутствуют пустоты и движение непрерывное. Сплошность потока может нарушаться в том случае, когда давление в жидкости будет меньше давления ее паров, жидкость вскипает и уравнение неразрывности применять нельзя.

Рассмотрим установившееся движение несжимаемой жидкости. Доказательство ведем от «противного», т.е. в предположении изменения массы потока. На рис. 3.4 представлен поток жидкости, ограниченный твердыми стенками. Выделим два сечения с площадями ω_1 и ω_2 и средними скоростями V_1 и V_2 и рассмотрим участок, заключенный между ними.

Через сечение I за время Δt поступает масса жидкости m_1 , а через сечение II- m_2 .

Масса m_1 не может быть больше массы m_2 , т.к. жидкость несжимаема, а стенки жестки. Но масса m_1 не может быть и меньше массы m_2 , т.к. жидкость текуча и при наличии атмосферного давления разрыв в сплошном потоке невозможен. Следовательно, $m_1 = m_2 = \text{const}$ (3.13.)

Массы m_1 и m_2 можно выразить через объемы жидкости, прошедшие через сечение I и II за время Δt :

Рис. 3.4 Иллюстрация уравнения неразрывности

$$m_1 = \rho_1 Q_1 \Delta t \quad (3.14)$$

$$m_2 = \rho_2 Q_2 \Delta t \quad (3.15)$$

где ρ_1 и ρ_2 – плотности жидкости в сечениях I и II.

На основании (3.13) можно записать:

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \text{const} \quad (3.16)$$

Для несжимаемой жидкости $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{const}$, тогда

$$Q_1 = Q_2 = Q = \text{const} \quad (3.17)$$

Уравнение (3.17) называется уравнением постоянства расхода, оно показывает, что при установившемся движении жидкости расход ее в любом сечении потока постоянен.

Равенство (3.17) можно записать в следующем виде:

$$\omega_1 V_1 = \omega_2 V_2 = \text{const} \quad (3.18)$$

Уравнение (3.18) называется уравнением неразрывности потока, оно показывает, что при установившемся движении жидкости, несмотря на изменение средних скоростей и площадей живых сечений по длине потока, их произведение является величиной постоянной. Из уравнения (3.18) вытекает:

$$V_1 / V_2 = \omega_2 / \omega_1 \quad (3.19)$$

Эта зависимость показывает, что средние скорости всегда обратно пропорциональны площадям соответствующих живых сечений.

3.5 Дифференциальные уравнения движения Л.Эйлера.

Интеграл Д. Бернулли

От уравнения равновесия Л. Эйлера (2.8) можно перейти к дифференциальным уравнениям движения жидкости, введя в них проекции силы инерции, отнесенные к единице массы по соответствующим осям. Эти силы имеют вид $\frac{dU_x}{dt}$; $\frac{dU_y}{dt}$; $\frac{dU_z}{dt}$ и прибавляются с обратным знаком, т.к. силы инерции направлены в сторону, противоположную движению. Дифференциальные уравнения движения Л.Эйлера записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{dU_x}{dt} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{dU_y}{dt} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{dU_z}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Рассмотрим интегрирование уравнений движения Л.Эйлера (3.20) в случае установившегося движения идеальной жидкости, произведенное Д.Бернулли.

Умножим соответственно каждое из уравнения (3.20) на dx, dy, dz (бесконечно малые перемещения частиц жидкости за время dt) и сложим все члены уравнения:

$$(Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) - \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} dx + \frac{\partial U_y}{\partial t} dy + \frac{\partial U_z}{\partial t} dz \right) = 0 \quad (3.21)$$

Рассмотрим каждое слагаемое.

Первое слагаемое: $Xdx + Ydy + Zdz = d\Pi$, где $d\Pi$ - полный дифференциал массовой силы.

Второе слагаемое: по третьему свойству гидростатического давления зависит от координат точки, т.е. $P = f(x, y, z)$, тогда выражение в скобках есть полный дифференциал давления:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) = \frac{1}{\rho} dP$$

Третье слагаемое: третий член можно преобразовать следующим образом: приращения dx, dy и dz связаны с перемещением частицы жидкости за время dt и равны: $dx = U_x dt$, $dy = U_y dt$, $dz = U_z dt$. Подставляя значение dx, dy, dz в третий член уравнения (3.21) получим: $\partial U_x U_x + \partial U_y U_y + \partial U_z U_z$ или $\frac{\partial(U_x^2)}{2} + \frac{\partial(U_y^2)}{2} + \frac{\partial(U_z^2)}{2}$

По дифференциальному исчислению это выражение равно $\frac{dU^2}{2}$, где U - полная скорость в точке.

На основании произведенных преобразований уравнение (3.21) можно записать в виде:

$$d\Pi - \frac{1}{\rho} dP - \frac{dU^2}{2} = 0 \quad (3.22)$$

Проинтегрируем уравнение (3.22):

$$\Pi - \int \frac{1}{\rho} dP - \frac{U^2}{2} = \text{const} \quad (3.23)$$

Выражение (3.23) известно в литературе под названием интеграла Бернулли.

3.6. Уравнение Бернулли для струйки идеальной жидкости

Если движение капельной жидкости происходит только под действием массовых сил, а из массовых - только силы тяжести, то в уравнении (3.23) имеем: $\Pi = -gz$, $\rho = \text{const}$, $\int \frac{1}{\rho} dP = \frac{P}{\rho}$.

Подставляя эти значения в уравнение (3.23) получим:

$$-gz - \frac{P}{\rho} - \frac{U^2}{2} = \text{const}$$

или деля на ρ и зная, что $\rho g = \gamma$, уравнение принимает следующий вид:

$$z + \frac{P}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = \text{const} = H_d \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) называется уравнением Бернулли. Для газообразных жидкостей уравнение Бернулли имеет вид:

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \text{const} = H_d \quad (3.25)$$

Уравнение Бернулли для двух сечений струйки идеальной жидкости будет иметь вид:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} = H_d = E \quad (3.26)$$

где H_d – гидродинамический напор,

E – удельная энергия.

Все члены уравнения Бернулли (3.26) имеют линейную размерность, в этом можно убедиться, подставив размерность величин.

z – является координатой движущейся струйки относительно плоскости сравнения и называется геометрической высотой положения или геометрическим напором;

$\frac{P}{\gamma}$ – пьезометрическая высота давления или пьезометрический напор;

$\frac{U^2}{2g}$ – скоростная высота или скоростной напор.

Для определения пьезометрического и скоростного напоров в лабораторных условиях можно воспользоваться пьезометрической трубкой и динамической скоростной трубкой Пито (с изогнутым концом рис 3.5).

На рис 3.6 представлено графическое изображение уравнения Бернулли.

3.7. Уравнение Бернулли для струйки реальной жидкости

Из уравнения (3.26) следует, что напор в любом первом сечении всегда равен напору в любом последующем сечении:

$$H_{d1} = H_{d2} \quad (3.27)$$

Для реальной жидкости напор в любом первом сечении всегда будет больше напора в последующем сечении, т.к. часть напора расходуется на преодоление гидравлических сопротивлений движению вследствие сил трения в вязкой (реальной) жидкости, которые уменьшают скорость движения, напор и энергию. Поэтому $H_{d1} > H_{d2}$

$$H_{d1} - H_{d2} = h_{f1-2} \quad (3.28)$$

Где h_{f1-2} – удельные потери напора по пути движения элементарной струйки реальной жидкости.

Уравнение Бернулли в этом случае можно записать:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + h_{f_{1-2}} \quad (3.29)$$

графическое изображение уравнения (3.29) представлено на рис. 3.7

Рис. 3.5 Пьезометр и гидродинамическая трубка

Рис. 3.6 Уравнение Бернулли для струйки невязкой жидкости.

Для струйки вязкой жидкости удельная энергия по пути движения уменьшается, вследствие этого напорная линия будет наклонной, т.е. на пути от сечения I до сечения II часть энергии используется на преодоление сил трения и называется линией удельной энергии.

Рис. 3.7 Уравнение Бернулли для струйки вязкой жидкости.

Линия, соединяющая уровни в динамических трубках, называется напорной плоскостью, находящаяся на высоте H_d от плоскости сравнения.

Линия, соединяющая уровни в пьезометрах, называется пьезометрической линией.

3.8. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости

Распространение уравнения Бернулли для потока в целом затрудняется неравномерностью распределения скоростей по живому сечению потока. Аналитическое решение задачи учета неравномерности распределения скоростей представляет значительные трудности. Поэтому в гидравлике обычно все расчеты ведутся по средним скоростям, только лишь в теории струй-по максимальным скоростям, но и в том и другом случаях необходимо вводить поправочные коэффициенты на начальную неравномерность. В гидравлике при решении отдельных вопросов часто исполь-

зуют законы количества движения и энергии (применительно к которым и следует рассмотреть эти коэффициенты).

По предложению Павловского Н.Н. для этой цели рассматривают три интеграла: расхода, количества движения и энергии.

На основании интегрирования устанавливают зависимости для поправочных коэффициентов, а их численное значение определяют опытным путем.

1. Интеграл расхода.

Расход жидкости в интегральной форме

$$Q = \int_{\omega} U d\omega, \text{ где } U - \text{местная или мгновенная скорость.} \quad (3.30)$$

Ее можно представить как среднюю скорость с отклонением от нее ΔU :

$$U = V + \Delta U,$$

$$Q = \int_{\omega} (V + \Delta U) d\omega = \int_{\omega} V d\omega + \int_{\omega} \Delta U d\omega = V\omega + \int_{\omega} \Delta U d\omega \quad (3.31)$$

$$Q = V\omega; \quad \int_{\omega} \Delta U d\omega = 0$$

Следовательно, при определении расхода местную скорость можно заменить средней, это понятие о средней скорости (глава 3.2).

2. Интеграл количества движения

При изучении гидравлики часто необходимо знать величину количества движения секундной массы жидкости, протекающей через данное поперечное сечение.

Секундное количество движения (КД) для потока будет равно интегральной сумме количеств движений элементарных масс жидкости, протекающей через бесконечно малую площадку $d\omega$ в пределах площади всего сечения ω :

$$\text{КД} = m u; \quad m = \rho Q t; \quad Q = u d\omega, \quad t = 1$$

$$\text{КД}_{\text{действ.}} = \int_{\omega} \rho u d\omega l u = \rho \int_{\omega} u^2 d\omega \quad (3.32) \text{ заменим:}$$

$$\begin{aligned} \text{КД}_{\text{действ.}} &= \\ \rho \int_{\omega} (u + du)^2 d\omega &= \rho \left(\int_{\omega} V^2 d\omega + 2V \int_{\omega} \Delta U d\omega + \int_{\omega} \Delta U^2 d\omega \right) = \rho (V^2 \omega + \int_{\omega} \Delta U^2 d\omega), \text{ где} \\ 2V \int_{\omega} \Delta U d\omega &= 0 \text{ (см. пункт 1).} \end{aligned}$$

Это выражение можно записать так:

$$\text{КД}_{\text{действ.}} = \rho V^2 \omega \left(1 + \frac{\int_{\omega} \Delta U^2 d\omega}{V^2 \omega} \right) = \rho V^2 \omega (1 + \eta) = x_0 \rho V^2 \omega \quad (3.33)$$

$$\eta = \frac{\int_{\omega} \Delta U^2 d\omega}{V^2 \omega}; \quad 1 + \eta = x_0; \quad \rho V^2 \omega = (\text{КД})_{\text{ср. скор.}} \quad (3.6)$$

Этот коэффициент x_0 называется коэффициентом Буссинеска или коэффициентом количества движения.

$$KД_{\text{действ.}} = x_0 KД_{\text{ср. скор.}} \quad (3.34)$$

$$x_0 = \frac{KД_{\text{действ.}}}{KД_{\text{ср. скор.}}} \quad (3.35)$$

$$x_0 \cong 1,037 \quad (3.36)$$

3. Интеграл энергии

Интеграл энергии (живой силы) при постоянной плотности и при замене местной скорости средней по аналогии с предыдущими выкладками можно записать:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= m \frac{U^2}{2} \\ \mathcal{E}_{\text{действ.}} &= \int_{\varpi} \rho U d\omega 1 \frac{U^2}{2} = 0,5 \rho \int_{\varpi} U^3 d\omega = 0,5 \rho \int_{\varpi} (U + \Delta U)^3 d\omega \end{aligned} \quad (3.37)$$

После интегрирования:

$$\mathcal{E}_{\text{действ.}} = 0,5 \rho (V^3 \omega + 3V^2 \int_{\varpi} \Delta U d\omega + 3V \int_{\varpi} \Delta U^2 d\omega + \int_{\varpi} \Delta U^3 d\omega).$$

Из четырех интегралов интегралы $\int_{\varpi} \Delta U d\omega = 0$ и $\int_{\varpi} \Delta U^3 d\omega = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{действ.}} &= \\ 0,5 \rho (V^3 \omega + 3V \int_{\varpi} \Delta U^2 d\omega) &= 0,5 \rho v^3 \omega (1 + 3 \frac{\int_{\varpi} \Delta U^2 d\omega}{v^2 \omega}) = 0,5 \rho v^3 \omega (1 + 3\eta) = 0,5 \rho v^3 \omega \alpha, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где $0,5 \rho V^3 \omega = \mathcal{E}_{\text{ср. ск.}}$

$$\alpha = \frac{\mathcal{E}_{\text{действ.}}}{\mathcal{E}_{\text{ср. скор.}}} = (1 + 3\eta) \quad (3.39)$$

$$\alpha \cong 1,11 \quad (3.40)$$

Коэффициент α -называется коэффициентом Кориолиса или коэффициентом кинетической энергии.

Таким образом, коэффициенты x_0 и α учитывают неравномерность распределения скоростей по живому сечению при определении КД (количества движения) и энергии. Законы распределения скоростей по живому сечению изучены недостаточно. Что затрудняет определение поправочных коэффициентов.

Коэффициент Буссинеска x_0 мало отличается от 1, поэтому в большинстве случаев его принимают равным 1. К примеру, при сопоставлении опытных данных с расчетным при анализе неравномерного движения это дает удовлетворительные результаты.

Переходя к уравнению Бернулли и распространяя его на поток жидкости в целом и принимая во внимание, что уравнение Бернулли выражает энергетический закон, все расчеты необходимо вести по средней скорости, т.е. в уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости следует ввести в третье слагаемое вместо местной скорости среднюю скорость V , а учесть неравномерность скоростей по живому сечению по-

тока коэффициентом Кориолиса α . Тогда уравнение Бернулли для потока реальной жидкости примет вид:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + hf_{1-2}, \quad (3.41)$$

α_1 и α_2 – коррективы кинетической энергии (коэффициенты Кариолиса) в сечении I и II.

V_1 и V_2 – средние скорости в сечениях I и II.

hf_{1-2} – потери напора или энергии на пути от сечения I до сечения II.

$$I_1 = \frac{hf_{1-2}}{l} = \frac{(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g}) - (z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g})}{l}, \quad (3.42)$$

l – расстояние между сечениями I и II.

Формула (3.42) определяет величину гидравлического уклона и справедлива для непрерывного напорного движения.

Для неравномерного безнапорного движения ($P_1 = P_2 = P_a$) гидравлический уклон I_1 определяется по формуле:

$$I_1 = \frac{(z_1 + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}) - (z_2 + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g})}{l} \quad (3.43)$$

При равномерном безнапорном движении ($P_1 = P_2 = P_a$, $V_1 = V_2$):

$$I_1 = \frac{z_1 - z_2}{l} \quad (3.44)$$

Пьезометрический уклон – это изменение удельной потенциальной энергии вдоль потока на единицу длины:

$$I_n = \frac{(z_1 + \frac{P_1}{\gamma}) - (z_2 + \frac{P_2}{\gamma})}{l} \quad (3.45)$$

Для равномерного напорного движения, когда $P_1 = P_2$, $V_1 = V_2$, тогда $I_1 = I_n$.

3.9. Геометрический и энергетический смысл уравнения Бернулли

Рассмотрим каждый член уравнения (3.41) с геометрической и энергетической точек зрения.

Геометрический смысл. Все члены уравнения, как было рассмотрено ранее (гл. 3, 3.5) имеют линейную размерность. Поэтому уравнение Бернулли может быть сформулировано так: для всех точек потока а) сумма трех высот – положения, пьезометрической и скоростной – есть величина постоянная, б) сумма трех напоров – геометрического, пьезометрического и скоростного есть величина постоянная.

Энергетический смысл. Известно, что полной удельной энергией называется энергия движущейся жидкости, отнесенная к единице массы и вычисленная относительно плоскости сравнения, что и было сделано при выводе уравнения Бернулли. Рассмотрим уравнение струйки невязкой жидкости:

$z + \frac{P}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = \text{const} = E$. Каждый член этого уравнения выражает часть механической энергии в линейных единицах:

z -удельная энергия положения, $(z + \frac{P}{\gamma})$ - удельная потенциальная энергия;

$\frac{U^2}{2g}$ - удельная кинетическая энергия. На основании этого можно сделать вывод, что для струйки невязкой жидкости сумма удельных энергий равна полной удельной энергии E и эта величина постоянна.

Рассмотрим уравнение вязкой жидкости:

$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + hf_{1-2}$, где hf_{1-2} –это потеря энергии при движении потока от сечения I и II. Следовательно, при движении потока вязкой жидкости полная удельная энергия, равная сумме удельных энергий (потенциальной и кинетической) есть величина непостоянная, т.е. $E \neq \text{const}$, так как при движении теряется часть энергии hf_{1-2} на преодоление сил сопротивления. Общий вывод: уравнение Бернулли есть систематическое выражение закона сохранения энергии.

3.10 Условия применимости уравнения Бернулли

Имеются три условия применимости уравнения Бернулли к потоку жидкости, которые должны соблюдаться одновременно:

1 условие. Расход Q между сечениями I и II должен быть постоянен, $Q = \text{const}$.

2 условие. Движение жидкости должно быть установившимся, т.е. скорость потока и давление в любой его точке являются функцией ее координат:

$$V = f_1(x_1 y_1 z_1); \quad p = f_2(x_2 y_2 z_2)$$

3 условие. Движение жидкости в сечениях I и II, соединяемых уравнением Бернулли должно быть параллельноструйным или плавноизменяющимся, в промежутке между сечениями I и II движение жидкости может быть и резкоизменяющимся.

3.11. Общие сведения о гидравлических потерях

При выводе уравнения Бернулли для потока реальной жидкости добавляется член - h_f , мы его назвали гидравлические потери напора вдоль потока. Эта величина характеризует изменение гидродинамического напора вдоль потока за счет преодоления сил сопротивления, возникающих при движении реальной жидкости. Гидравлические потери делятся на потери напора по длине потока h_l и на потери местные h_m :

$$h_f = h_l + h_m \quad (3.43)$$

Рассмотрим в отдельности каждый вид гидравлических потерь.

1. Потери по длине потока:

При движении жидкости между нею и стенками трубы возникают силы сопротивления, в результате чего частицы жидкости, прилегающие к поверхности трубы, тормозятся. Это торможение передается последующим слоям, причем скорость движения частиц жидкости по мере удаления от оси трубы постепенно уменьшается. Равнодействующая сил сопротивления направлена в сторону, противоположную движению и параллельна направлению движению. Это и есть силы гидравлического трения. Для преодоления сопротивления трения и поддержания поступательного движения жидкости необходимо, чтобы на жидкость действовала сила, направленная в сторону движения жидкости, по величине равная $F_{тр.}$, т.е. необходимо затрачивать энергию. Энергия или напор, расходуемый на преодоление сил сопротивления, называется потерянй энергией или потерянй напором. Следовательно, потери напора, затрачиваемые на преодоление сопротивления трения носят название потери напора на трение или потерь напора по длине потока, обозначаются h_l .

Потери напора по длине определяются по формуле Дарси-Вейсбаха

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}, \quad (3.44)$$

где λ - коэффициент гидравлического трения, зависит от режима движения жидкости;

l – длина участка, где определяется потери напора по длине;

d – диаметр трубопроводов;

V – средняя скорость протекания потока в трубопроводе.

Изменение напора и энергии в потоке может вызываться не только трением, но и изменением сечения (внезапное расширение, внезапное сужение), изменением направления потока (колени, поворот, тройники) и еще другими причинами (рис. 3.8)

Потери напора, вызываемые резким изменением конфигурации границ потока, называются местными потерями напора или потерями на местные сопротивления, назначаются h_m и определяются по формуле Вейсбаха:

$$h_m = \xi \frac{V^2}{2g} \quad (3.45)$$

где ξ - коэффициент сопротивления, зависит от вида сопротивления.

Рис. 3.8 Виды местных сопротивлений
в трубопроводе:

1. Внезапное сужение.
2. Диафрагма.
3. Вентиль.
4. Поворот.

На основании (3.43), (3.44) и (3.45) можно записать; что общие потери потока определяются суммой потерь напора по длине потока и потерь на местные сопротивления:

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} + \xi \frac{V^2}{2g} \quad (3.46)$$

3.12 Одномерное движение сжимаемого газа

Элементы газодинамики.

При движении газа, воздуха с большими скоростями их плотность зависит от скорости движения. Изучением законов движения газа занимается газодинамика.

Термодинамическое состояние газа определяется тремя величинами: давлением P , плотностью ρ , температурой T . Зависимость между этими параметрами газа устанавливается уравнением состояния – уравнением Менделеева-Клапейрона:

$$\frac{P}{\rho} = RT = \text{const}, \quad (3.47)$$

где R – газовая постоянная, дж/кг град.

Изменение состояния газа происходит при тепловом или механическом или совместном воздействии.

Тепловое воздействие осуществляется подводом или отводом тепла от газа, механическое – в совершении данным объемом газа некоторой работы или в приложении к нему некоторой внешней работы. Характерными процессами перехода газа из одного состояния в другое являются:

- изохорические, происходящие при постоянном объеме; изотермические – при постоянной температуре; изобарические – при постоянном давлении; адиабатические – при отсутствии теплообмена между газом и окружающей средой.

Газодинамика имеет дела с быстроходящими процессами, при которых не успевает происходить теплообмен с внешней средой, поэтому важное значение приобретают адиабатические движения.

При адиабатическом движении давление и плотность газа имеют зависимость:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^K \quad \text{или} \quad \rho = C P^K \quad (3.48)$$

$$\text{где } C = \frac{P_0}{\rho_0^K} = \text{const},$$

K-показатель адиабаты,

$$K = \frac{C_p}{C_v}, \quad (3.49)$$

C_p -удельная теплоемкость при постоянном давлении,

C_v -удельная теплоемкость при постоянном объеме.

$$\frac{C_p}{R} = \frac{K}{K-1} \quad (3.50)$$

$$\frac{C_v}{R} = \frac{1}{K-1} \quad (3.51)$$

Используя уравнение состояния (3.47), можно найти отношение температуры в данном сечении:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{P}{P_0} \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{K-1} \quad \text{или} \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{K-1}{K}} \quad (3.52)$$

Известно, что скорость звука в дифференциальной форме:

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

При распространении звука без тепла, т.е. при адиабатическом движении; используя (3.48):

$$a^2 = K C P^{K-1} = K \frac{P}{\rho}.$$

$$\text{Следовательно адиабатическая скорость звука: } a = \sqrt{K \frac{P}{\rho}} = \sqrt{KRT} \quad (3.53)$$

Основные уравнения. Уравнение энергии (уравнение Бернулли) адиабатического движения газа.

Основными уравнениями для одномерного движения газа также, как и для несжимаемой жидкости являются уравнения неразрывности, количества движения и энергии (уравнение Бернулли)

Уравнение неразрывности для газа:

$$\rho_1 V_1 \omega_1 = \rho_2 V_2 \omega_2 \quad (3.54)$$

Отличается от соответствующего уравнения несжимаемой жидкости тем, что плотность газа меняется от сечения к сечению. Иногда в газодинамике пользуются понятием плотности тока: $j = \rho V$, равной массовому расходу газа через единицу площади.

Тогда уравнение неразрывности (3.54) примет вид:

$$j_1 \omega_1 = j_2 \omega_2 \quad (3.55)$$

Уравнение количества движения имеет тот же вид, что и для несжимаемой жидкости:

$$\rho_1 V_1^2 \omega_1 = \rho_2 V_2^2 \omega_2 \quad (3.56)$$

Плотность газа для различных сечений неодинакова.

Уравнение энергии (уравнение Бернулли).

Когда плотность не постоянна $\rho \neq \text{const}$, вид интеграла Бернулли определяется зависимостью плотности жидкости от параметров потока. Наиболее простым с точки зрения математики является адиабатическое движение, при котором плотность есть функция только давления. Такие жидкости называются баротропными. Для них плотность зависит от давления:

$$\rho = f(P).$$

Тогда интеграл Бернулли в дифференциальной форме с учетом потенциала массовых сил Φ (сила веса, центробежная сила, сила инерции)

$$\text{запишется в форме:} \quad \frac{1}{\rho} dP + d\left(\frac{V^2}{2} + \Phi\right) = 0$$

или

$$\frac{dP}{f(P)} + d\left(\frac{V^2}{2} + \Phi\right) = 0 \quad (3.57)$$

$$\text{Проинтегрируем:} \quad \Phi + \int_{P_0}^P \frac{dP}{f(P)} + \frac{V^2}{2} = \text{const} \quad (3.58)$$

$$\text{Если обозначить} \quad \int_{P_0}^P \frac{dP}{f(P)} = P\text{-функция давления} \quad (3.59)$$

Тогда (3.58) запишется в виде:

$$\frac{V^2}{2} + \Phi + P = \text{const} \quad (3.60)$$

Это интеграл Бернулли для баротропного газа.

При отсутствии массовых сил, $\Phi=0$:

$$\frac{V^2}{2} + P = \text{const} \quad (3.61)$$

P – функция давления, значение которой определяется из выражения (3.59) при заданной связи между плотностью и давлением.

При адиабатическом движении газа:

$$P = \frac{K}{K-1} \left(\frac{P}{\rho} - \frac{P_0}{\rho_0} \right) \quad (3.62)$$

Тогда интеграл Бернулли, записанные для двух сечений, имеет вид:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{K}{K-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{K}{K-1} \frac{P_2}{\rho_2} = \text{const} \quad (3.63)$$

Интеграл Бернулли является одним из основных уравнений газовой динамики и широко применяется в различных своих формах. Используя уравнение состояния (3.47), уравнение (3.63) примет вид:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{K}{K-1} RT_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{K}{K-1} RT_2 = \text{const} \quad (3.64)$$

Подставив вместо $(KRT)=a^2$, получим

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{a^2}{K-1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{a^2}{K-1} = \text{const} \quad (3.65)$$

Если воспользоваться тепловой функцией или энтальпией, определяемой по формуле $i=C_p T$

(3.66)

Используя формулу (3.50) получим выражение для определения энтальпии:

$$i = \frac{K}{K-1} RT \quad (3.67)$$

или

$$\frac{K}{K-1} RT = P \text{ (функция давления)}$$

Тогда уравнение Бернулли можно представить в виде:

$$\frac{V_1^2}{2} + C_p T_1 = \frac{V_2^2}{2} + C_p T_2 \quad (3.68)$$

или

$$\frac{V_1^2}{2} + i_1 = \frac{V_2^2}{2} + i_2 \quad (3.69)$$

Эти уравнения (3.63)-(3.69) не исчерпывают всех видов интеграла Бернулли для адиабатического процесса, движущегося газа.

3.13 Режимы движения жидкости

В природе существуют два режима движения вязкой жидкости: ламинарный и турбулентный. При ламинарном режиме движения поток жидкости движется слоями, каждый слой скользит друг относительно друга, траектории отдельных частиц между собой не пересекаются, т.е. сохраняется параллельноструйность.

При турбулентном режиме движения слоистость нарушается, все струйки перемешиваются, траектории частиц пересекаются, наблюда-

ется хаотическое движение частиц жидкости, напоминающее броуновское движение.

Впервые мысль о наличии двух режимов движения жидкости высказал Д.И. Менделеев (1880г.). Английский физик Рейнольдс экспериментальными исследованиями подтвердил высказывание Менделеева, дал ряд зависимостей, имеющих большое значение в гидродинамике. Опытная установка О. Рейнольдса представлена на рис. 3.9

Рис.3.9 Установка Рейнольдса.

Установка состоит из большого бака (1), заполняемого исследуемой жидкостью, и небольшого бачка (2), в который наливается красящее вещество, нерастворимое в исследуемой жидкости. Из бака (1) выходит стеклянная трубка (3) постоянного диаметра, имеющая на конце кран, позволяющий регулировать количество жидкости, пропускаемое через стеклянную трубку и измеряемое мерным сосудом (7). Для обеспечения плавного входа жидкости в трубку (3) она имеет входную воронку, к которой из бачка (2) подведена тонкая трубка (5), имеющая сверху кран (6). Через трубку (5) поступает красящее вещество для подкрашивания жидкости во время опытов.

При малых скоростях течения воды (крану 4 дают малое открытие, одновременно открывают кран 6) окрашенная струйка четко выделяется среди движущейся жидкости, имея вид натянутой струны. (рис. 3.10). Режим движения имеем ламинарный.

Рис. 3.10 Режимы движения.

При увеличении скорости течения в трубе большая степень открытия крана 4) характер окрашенной струйки до известного предела не меняется, но по мере увеличения скорости течения струйка начинает колебаться, приобретая волнистый характер (рис 3.10б). Затем струйка совсем исчезает и вся масса жидкости в трубке (3) оказывается окрашенной (рис. 3.10в). Происходит переход ламинарного режима в турбулентный, характеризующийся интенсивным перемешиванием потока жидкости.

Опыт можно провести и в обратном направлении, переход от турбулентного в ламинарный режим. Но процесс не является полностью обратимым, т.к. ламинарный режим переходит в турбулентный при больших скоростях, чем при переходе от турбулентного режима к ламинарному. Ламинарный режим наблюдается при движении очень вязких жидкостей (нефти, битума, смазочных масел, мазута и т.д.), а также при движении воды через капиллярные трубки.

Но в большинстве случаев инженерной практики встречаются жидкости, близкие по вязкости к воде и сама вода, т.е. имеем дело с турбулентным режимом движения.

3.14 Критическая скорость. Число Рейнольдса

В результате экспериментов было установлено, что переход одного режима движения в другой происходит при определенной средней скорости движения потока. Скорость, при которой происходит смена режимов движения, называется критической скоростью. Различают две критические скорости: верхнюю и нижнюю. Верхний предел критической скорости ($V_{кр.в.}$) характеризует переход от ламинарного режима в турбулентный, а нижний предел ($V_{кр.н.}$) – переход от турбулентного в ламинарный. При этом всегда $V_{кр.в.} > V_{кр.н.}$. Опытным путем установлено, что критическая скорость зависит от вязкости, плотности жидкости и от диаметра трубки. На основании анализа размерностей Рейнольдс установил следующую зависимость:

$$V_{кр.в.} = \frac{\mu \cdot Re_{кр.}}{\rho \cdot d}, \quad (3.70)$$

где $Re_{кр.}$ – безразмерное число Рейнольдса, постоянное для всех жидкостей.

Чем меньше диаметр трубки, тем больше критическая скорость, тем дольше сохраняется ламинарный режим движения. Формула (3.70) часто записывается в следующем виде:

$$Re_{кр.} = \frac{V_{кр.} \cdot d}{\nu}, \quad (3.71)$$

где $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

Экспериментально доказано, для напорных потоков число Рейнольдса равно: $Re_{кр.}=2320$

Число Рейнольдса представляет собой отношение двух работ, производимых в текущей жидкости: работы сил ускорения или инерции и работы сил внутреннего трения или вязкости. Число Re - величина безразмерная.

Малые значения чисел Re соответствуют преобладанию работы сил внутреннего трения, а большие числа Re - преобладанию работы сил ускорения.

Если силы внутреннего трения равны нулю или ν (кинематической коэффициент вязкости) близок к нулю, т.е. жидкость идеальная, число $Re=\infty$.

Для любого сечения:

$$Re = \frac{d_{экр.} \cdot V}{\nu}, \quad (3.72)$$

где $d_{экр.}$ – эквивалентный диаметр.

Для прямоугольного сечения:

$$d_{экр.} = \frac{2ab}{a+b} \quad (3.73)$$

Для квадратного сечения:

$$d_{экр.} = a \quad (3.74)$$

где a и b – стороны прямоугольника или квадрата.

3.15 Основное уравнение равномерного движения в трубках

Самым распространенным видом напорного и безнапорного движения жидкости является равномерное движение. При равномерном движении величина средней скорости постоянна, т.е. жидкость движется по трубе постоянного диаметра. Если $V=\text{const}$, то распределение скоростей по сечению потока также неизменна, т.е. $\alpha = \text{const}$ – (α – коэффициент Карриоласа, учитывающий неравномерность распределения скоростей). Это условие выполняется при достаточном расстоянии начального сечения от входного сечения, т.е. это расстояние обеспечивает устойчивое распределение скоростей по сечению потока.

Составим уравнение Бернулли для 2-х сечений трубы. ($d=\text{const}$), учтем, что $V=\text{const}$, $\alpha = \text{const}$, т.е. члены, зависящие от кинетической энергии, сокращаются:

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\right) = \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma}\right) = h_f \quad (3.75)$$

Если ось трубы параллельна плоскости сравнения, то $z_1=z_2$:

$$h_f = \frac{P_1 - P_2}{\gamma}, \quad (3.76)$$

Рис. 3.11 К выводу основного уравнения
равномерного движения

Уравнение (3.75) называется основным уравнением равномерного движения жидкости в трубах.

При известных z_1 и z_2 исходя из (3.75) можно по давлению в одном сечении найти давление в другом при условии, что известно h_f (потери напора вдоль потока).

Уравнение (3.75), можно преобразовать. Выделим в трубе сечениями I и II соосный цилиндр радиусом a и длиной l . (рис. 3.12).

Рис. 3.12 Распределение касательных напряжений.

Считаем, что распределение скоростей в сечениях одинаково, частицы жидкости при движении от I до II не испытывают ускорения. Поэтому, силы приложенные к цилиндру, находятся в равновесии. Уравнение динамического равновесия:

$$(P_1 - P_2)\pi a^2 = 2\pi a l \tau \quad (3.77)$$

τ -касательное напряжение трения на стенке жидкого цилиндра. Разделим обе части уравнения на πa^2 :

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{\tau}{\gamma} \cdot \frac{2l}{a} \quad (3.78)$$

Учитывая формулу (3.76), (3.78) перепишется:

$$h_f = \frac{\tau}{\gamma} \cdot \frac{2l}{a}$$

или

$$\frac{h_f}{l} = i = \frac{2\tau}{\gamma a} \quad (3.79)$$

где i – гидравлический уклон.

Уравнение (4.10) можно представить в виде:

$$\tau = \frac{\gamma a i}{2} = \frac{\gamma}{2} (r - y) i, \quad (3.80)$$

где y – расстояние от стенки трубы до рассматриваемого слоя: $a = r - y$ (см. рис. 3.12)

Анализируя (3.80) можно сказать, что касательное напряжение трения распределяется по линейному закону. Максимальное значение τ у стенок трубы равно τ_0 ($y=0$) и на оси потока равно нулю.

$$\text{Тогда,} \quad \tau_0 = \frac{\gamma r i}{2}, \quad (3.81)$$

$$\text{Отсюда} \quad i = \frac{2\tau_0}{\gamma r}; \quad h_f = \frac{2\tau_0 l}{\gamma r}. \quad (3.81')$$

Уравнение (3.81') представляет собой общее выражение для определения h_f при равномерном движении в трубах круглого сечения ($d = \text{const}$). Уравнение (3.81) можно записать в ином виде, учитывая, что $\gamma = \rho g$ и деля на γ :

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = \frac{r i}{2}; \quad \text{или} \quad \frac{g r i}{2} = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (3.82)$$

Величина $\frac{\tau_0}{\rho}$ – имеет размерность квадрата скорости, обозначим $\frac{\tau_0}{\rho} = U_*^2$ –

скорость касательного напряжения на стенке или динамическая скорость. Она постоянна для каждого рассматриваемого случая:

$$U_*^2 = \frac{g r i}{2} = \frac{g r}{2} \cdot \frac{h_f}{l} \quad (3.83)$$

Следовательно, динамическая скорость определяется:

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (3.84)$$

Если подставить формулу (3.42) для определения потерь напора по длине в зависимость (3.83) и считая, что местными сопротивлениями можно пренебречь, то получим:

$$U_*^2 = \lambda \frac{V^2}{8}$$

$$\text{Отсюда,} \quad \frac{V^2}{U_*^2} = \frac{8}{\lambda} \quad \text{или} \quad \frac{V}{U_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \quad (3.85)$$

Примеры и контрольные вопросы.

Покажем практическое применение уравнения Бернулли на примере водомера Вентури, используемого для измерения расхода воды в трубопроводе.

Водомер сконструирован следующим образом: в трубопровод вмонтированы два фасонных участка: сходящийся (конфузор) и расходящийся (диффузор), соединенные между собой отрезком трубы диаметром меньше, чем основной трубопровод. В сечениях 1 и 2 к водомеру подключаются приборы (пьезометры) для определения перепада напора h на длине l конфузора (рис.3.7).

Ввиду небольшого расстояния между сечениями 1 и 2 потерей энергии на данном участке пренебрегаем.

Рис. Водомер Вентури.

Запишем для сечения 1 и 2 уравнение Бернулли: (пренебрегая потерями напора) и принимая $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Следовательно, разность показаний пьезометров равняется:

$$h = \left(\frac{P_1}{\rho} + z_1\right) - \left(\frac{P_2}{\rho} + z_2\right) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

В этом уравнении два неизвестных V_1 и V_2 .

Из уравнения неразрывности или сплошности потока имеем:

$$V_2 = V_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} = V_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

Подставляя в предыдущую формулу значение V_2 получаем:

$$2gh = V_1^2 \left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)$$

Отсюда $V_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1}}$

Теоретический расход через сечение 1 трубопровода равен:

$$Q_T = V_1 \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1}} \sqrt{h}$$

Поправочный коэффициент расходомера Вентури, как показывают опытные данные равен:

$$K = \frac{Q_T}{Q_{II}} = 0,98$$

Тогда, практический расход определяется

$$Q_{II} = KQ_T = 0.98 \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1}} \sqrt{h}$$

Первый множитель является величиной постоянной для данной установки, обозначим через А, тогда расход по водомеру Вентури равен:

$$Q = A \sqrt{h}$$

Таким образом, определяя практическ значение h по пьезометрам, можно получить величину расхода Q.

Контрольные вопросы.

1. Задачи гидродинамики.
2. Что называется элементарной струйкой?
3. Определение потока жидкости.
4. Что называется поперечным сечением, смоченным периметром, гидравлическим радиусом?
5. Определение расхода и средней скорости потока. Формулы.
6. Вывод уравнения неразрывности потока в гидравлической форме, его физический смысл.
7. Поясните уравнение движения Эйлера.
8. Вывод уравнения Бернулли для струйной невязкой жидкости.
9. Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости.
10. Геометрический и энергетический смысл уравнения Бернулли.
11. Дать графическое изображение уравнения Бернулли.
12. Формулы гидравлического и пьезометрического уклонов.
13. Смысл корректива скорости в уравнении Бернулли.
14. Определение полной удельной энергии потока.
15. Указать условия применимости уравнения Бернулли.
16. Пояснить, что такое гидравлические потери напора по длине потока.

17. С чем связывается наличие в движущемся потоке потерь на местные сопротивления?
18. Уравнение состояния газа.
19. Характерные процессы движущегося газа.
20. Уравнение неразрывности для газа, его физический смысл.
21. Уравнение количества движения газа.
22. Различные формы уравнения Бернулли для движущегося баротропного газа.

Библиографический список

1. Альтшуль А.Д., Животовский Л.С., Иванов Л.П. Гидравлика и аэродинамика. М: Стройиздат., 1987. 414с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М: Наука, 1978. 847с.
3. Повх И.П. Техническая гидромеханика. Л: Машиностроения, 1976. 502с.
4. Примеры расчетов по гидравлике. (Под редакцией А.Д. Альтштуля. М:Стройиздат, 1976. 254с.
5. Справочник по гидравлическим расчетам. (Под редакцией П.Г.Киселева.М: Энергия, 1977. 312с.
6. Чугаев Р.Р. Гидравлика. Л: Энергоиздат, 1982. 670с.

Учебное пособие

Диляра Карсыбаевна Джартаева

Гидравлика и аэродинамика

Техн. редактор

Подписано в печать

Формат 60x84 1/16. Бумага типографская. Ризограф. Усл.печ.л.
Уч.-изд.л. Тираж экз. Заказ № Цена договорная.

Издание Казахской головной архитектурно-строительной академии.
Редакционно-издательский отдел.
480043, г. Алматы, ул. К.Рыскулбекова, 28