

Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени Жангир хана

Кафедра «Строительство и строительные материалы»

Практикум

по дисциплине «Строительная механика» для студентов специальности 5В072900 «Строительство» Составитель: Таскалиев А.Т., ст. преп., Султанова А.У., преп.

Рецензент: Сахаров Н.К., заместитель директора АО «Гидромаш - Орион»

Практикум

по дисциплине «Строительная механика» для студентов специальности 5В072900 «Строительство»

Обсуждено на заседании кафедры 7 февраля 2011г., протокол №7. Рекомендовано учебно-методическим бюро машиностроительного факультета 23 февраля 2011г., протокол №6. Одобрено УМС университета 2011г., протокол №.

Цель практикума — изучение задач по курсу строительной механики статически определимых стержневых систем. Сборник включает задачи по построению эпюр и линий влияния внутренних усилий в разных по типу конструкциях (балки, рамы, фермы, распорные системы). Сборник содержит задачи на определение перемещений в стержневых системах от различных внешних воздействий. В сборнике к каждому типу задач приводятся пример решения, необходимые пояснения и требуемые для самостоятельного изучения темы учебники и учебные пособия.

РГКП «Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени Жангир хана»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Эпюры и линии влияния внутренних силовых факторов	
в стержневых системах	4
1.1. Расчет однопролетных балок. Формулировка задачи	4
1.2. Расчет многопролетных балок. Формулировка задачи	9
2. Расчет плоских рам. Формулировка задачи	15
3. Расчет балочных ферм. Формулировка задачи	23
4. Расчет распорных и комбинированных систем. Формулировка	
задачи	28
Литература	30

Введение

Основная цель сборника - помочь студенту усвоить законы статики кинематически неизменяемых плоских стержневых систем. От обычных учебников по строительной механике сборник отличается значительным многообразием расчетных схем конструкций, в которых требуется построить эпюры и линии влияния внутренних силовых факторов, либо определить линейные и угловые перемещения заданных сечений. Задачи в сборнике расположены по возрастающей сложности, при этом к каждому типу задач приводится пример расчета, необходимые для решения задач пояснения и требуемые для самостоятельного изучения темы учебники и учебные пособия.

Сборник посвящен статике стержневых систем, не имеющих «избыточных» (лишних) связей. Для определения внутренних сил в них достаточно знать (и уметь приметать) только законы равновесия. В этой части приведены задачи, которые позволят студенту освоить методы и технику построения эпюр внутренних силовых факторов и линий влияния в различных по сложности стержневых системах.

Сборник задач может быть использован на практических занятиях по строительной механике, при промежуточном контроле знаний студентов, а также на зачетах и экзаменах.

1. Эпюры и линии влияния внутренних силовых факторов в стержневых системах

1.1. Расчет однопролетных балок. Формулировка задачи

Для одной из однопролетных балок, изображенных на рис. 1.1.1 - 1.1.25 требуется:

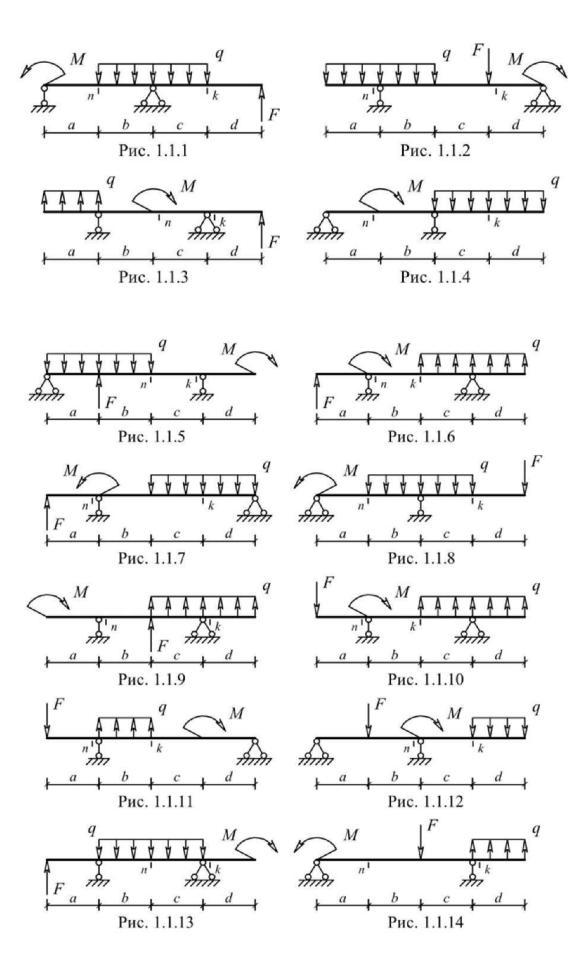
построить эпюры внутренних силовых факторов и линии влияния внутренних усилий в сечениях n и k.

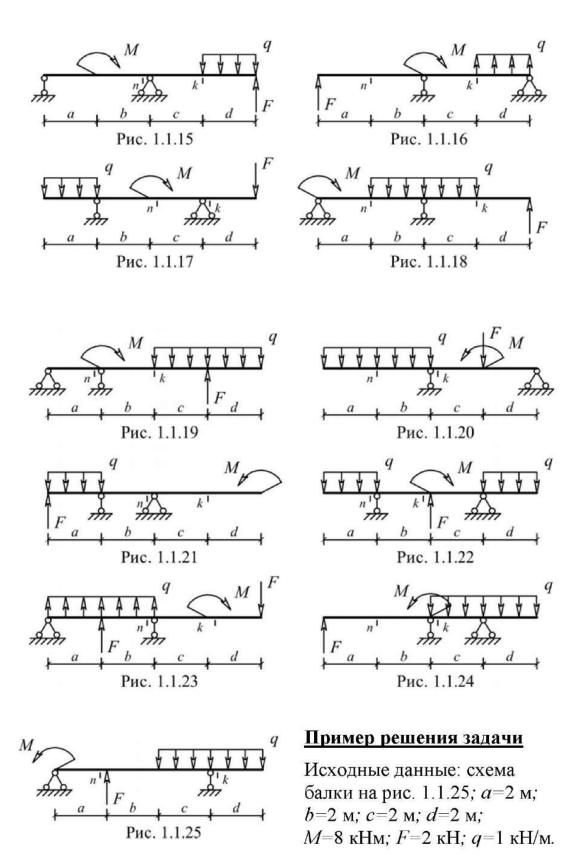
определить усилия в сечениях n и k по линиям влияния от заданной нагрузки и сравнить их с усилиями на эпюрах.

Таблица 1.1

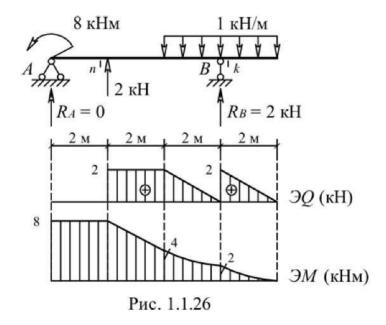
Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7
а, м	2	3	4	2	2	4	3
<i>b</i> , м	3	4	2	4	3	2	3
С, М	4	3	2	2	4	3	2
<i>d</i> , м	2	4	3	2	3	2	4
М, кНм	6	5	4	6	8	10	7
F, к H	4	5	3	6	7	2	8
<i>q</i> , кН/м	2	1	3	4	2	1	3

Исходные данные для расчета принять из табл. 1.1.

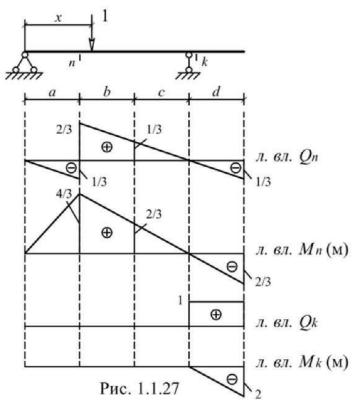




а) Эпюры внутренних силовых факторов (рис. 1.1.26)



б) Линии влияния внутренних силовых факторов в сечениях n и k (рис. 1.1.27)



в) Определение внутренних усилий S (изгибающего момента или поперечной силы) в сечениях n и k по формуле влияния:

$$S = M \cdot tga + F \cdot y + q \cdot \omega,$$

где M - сосредоточенный момент («+» - направлен по часовой стрелке, «-» - направлен против часовой стрелки);

- a наклон линии влияния в месте приложения M; F сосредоточенная сила («+» направлена вниз, «-» направлена вверх);
- y ордината линии влияния под силой; q интенсивность распределенной нагрузки («+» направлена вниз, «-» направлена вверх);
- ω площадь линии влияния под нагрузкой.

$$M_n = (-8) \cdot (4/6) + (-2) \cdot (4/3) + 1 \cdot 0 = -8 \kappa H_M,$$
 $Q_n = (-8) \cdot (-1/6) + (-2) \cdot (2/3) + 1 \cdot 0 = 0,$
 $M_k = (-8) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = -2 \kappa H_M,$
 $Q_k = (-8) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2 \kappa H.$

Значение усилий совпали с соответствующими усилиями на эпюрах. Пояснение к решению задачи

1) Для построения линий влияния в балках целесообразно воспользоваться статико-кинематическим методом. Суть метода заключается в том, что вначале определяется вид линии влияния. Для этого из балки удаляется связь, линию влияния усилия в которой требуется построить. В полученном таким образом механизме с одной степенью свободы строится эпюра возможных перемещений (рис. 1.1.28). В теории линий влияния на основе принципа возможных работ доказано, что вид линии влияния совпадает с очертанием этой эпюры. При известном очертании линии влияния любую ее ординату несложно вычислить из законов статики. Для этого достаточно установить единичный груз над ординатой, отделить часть балки, содержащей искомое усилие, и рассмотреть равновесие этой части.

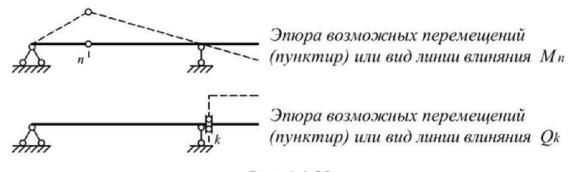


Рис. 1.1.28

<u>Примечание.</u> Знак линии влияния определиться автоматически, если возможное перемещение механизму задать в направлении, совпадающем с положительным направлением искомого усилия.

2) При определении усилий по линиям влияния следует помнить, что внешний сосредоточенный момент вносится в формулу влияния со знаком «+», если направлен по часовой стрелке, внешняя сосредоточенная сила и распределенная нагрузка со знаком «+», если направлены вниз. Такие правила приняты при выводе формулы влияния. Знак же тангенса определяется обычным образом, т.е. в первой и третьей четвертях он положительный (если линия влияния не перевернута).

1.2. Расчет многопролетных балок. Формулировка задачи

Для одной из многопролетных балок, изображенных на рис. 1.2.1 - 1.2.25 требуется:

построить эпюры внутренних силовых факторов и линии влияния внутренних усилий в сечении

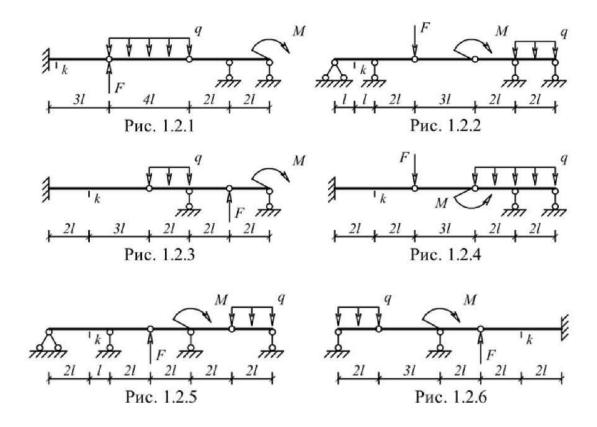
определить усилия в сечении к по линиям влияния от заданной нагрузки и сравнить их с усилиями на эпюрах;

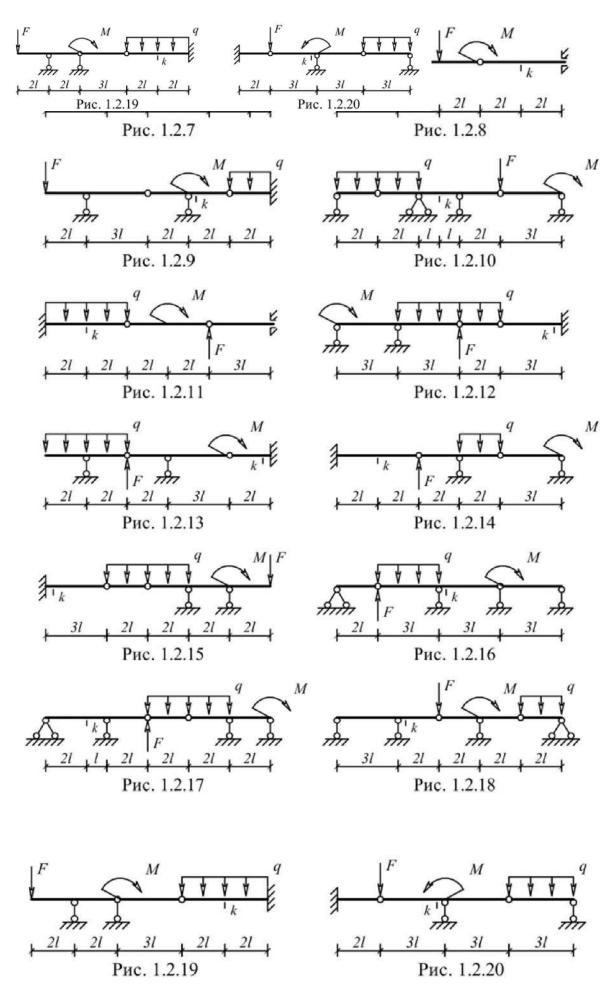
найти максимальное и минимальное значение изгибающего момента в сечении к от подвижной системы связанных грузов, показанной на рис. 1.2.26.

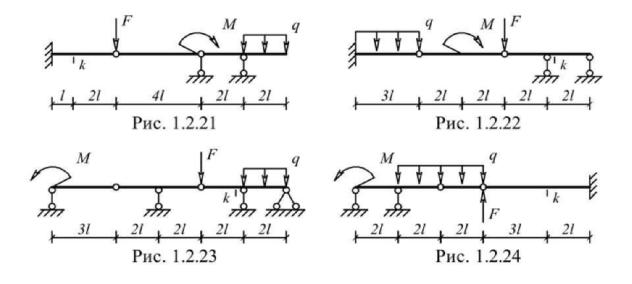
Таблица 1.2

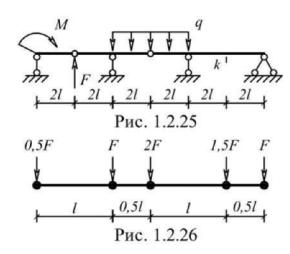
Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7
<i>l</i> , м	2	3	4	2	2	4	3
М, кНм	6	5	4	6	8	10	7
<i>F</i> , кН	4	5	3	6	7	2	8
q , к ${ m H/m}$	2	1	3	4	2	1	3

Исходные данные для расчета принять из табл. 1.2.









Пример решения задачи

Исходные данные: схема балки на рис. 1.2.25; l=2 м; M=4 кНм; F=2 кН; q=2 кН/м.

а) Кинематический анализ системы

Степень свободы системы

$$W = 3D - (2III + C) = 3 \cdot 3 - (2 \cdot 2 + 5) = 0.$$

Геометрическая неизменяемость многопролетной балки следует из анализа ее «монтажно-поэтажной» схемы, показанной на рис. 1.2.27. Все диски на этой схеме имеют необходимое число правильно установленных связей. Следовательно, многопролетная балка является статически определимой системой.

б) Реакции в связях

Силы, обеспечивающие равновесие дисков балки, показаны на рис.1.2.28.

Из уравнений равновесия для диска A-1 находятся реакции:

$$x_1 = 0$$
; $y_A = -1$ кH; $y_1 = 1$ кH.

Из уравнений равновесия для диска 1–2 находятся реакции:

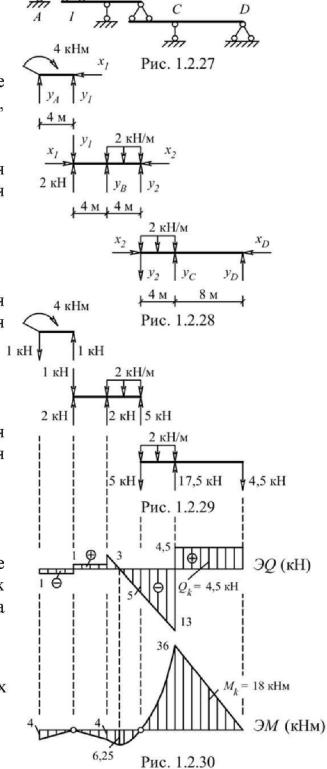
$$x_2 = 0$$
; $y_B = 2$ кH; $y_2 = 5$ кH.

Из уравнений равновесия для диска 2-Д находятся реакции:

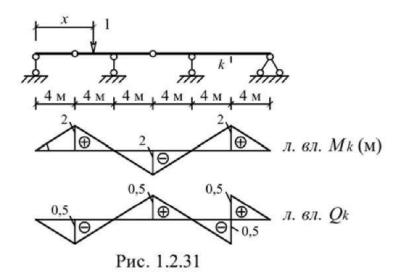
$$x_D$$
=0; y_C = 17,5 кH; y_D = -4,5 кH.

Правильное направление и величины найденных реакций показаны на рис. 1.2.29.

в) Эпюры внутренних силовых факторов



г) Линии влияния внутренних силовых факторов в сечении k



д) Определение внутренних силовых факторов в сечении k по линиям влияния

$$M_k = 4 \cdot 0.5 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-8) = -18 \text{ kHm},$$

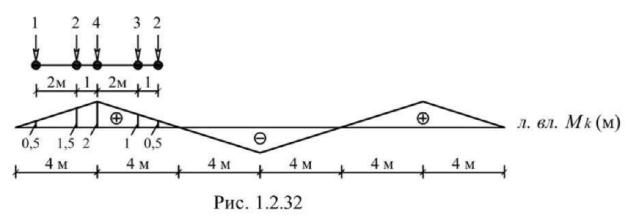
 $O_k = 4 \cdot (-0.5/4) + (-2) \cdot (-0.5) + 2 \cdot 2 = 4.5 \text{ kH}.$

Знаки и значения усилий совпали со знаками и значениями усилий на эпюрах.

- е) Определение невыгодного загружения линии влияния изгибающего момента в сечении к подвижной системой связанных грузов, показанной на рис. 1.2.26
- 1) На рис. 1.2.32 показано положение системы грузов, при котором в сечении к возникает максимальный (наибольший со знаком плюс) изгибающий момент. Критическим грузом является сила 4 кH, так как при переходе этого груза через вершину знак производной M_k меняется с «+» на «-»:

$$<= dM_k/dx = (1+2+4) \cdot 0,5+(3+2) \cdot (-0,5) > 0,$$

=> $dM_k/dx = (1+2) \cdot 0,5+(3+2+4) \cdot (-0,5) < 0$.
 $maxM_κ = 1 \cdot 0,5+2 \cdot 1,5+4 \cdot 2+3 \cdot 1+2 \cdot 0,5=15,5$ κΗΜ.

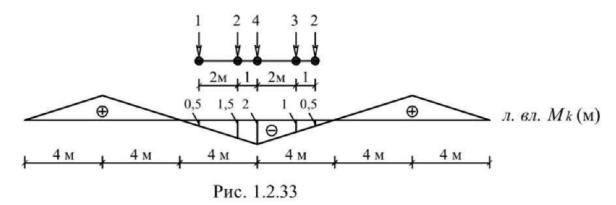


2) На рис. 1.2.33 показано положение системы грузов, при котором в сечении k возникает минимальный (наибольший со знаком минус) изгибающий момент. Критическим грузом является сила 4 кH, так как при переходе этого груза через вершину знак производной M_k меняется с «-» на «+»:

$$<=dM_k/dx = (1+2) \cdot (-0.5) + (3+2+4) \cdot 0.5 > 0$$

=>
$$dM_k/dx = (1+2) \cdot (-0.5) + (3+2+4) \cdot 0.5 > 0.$$

 $min\ M_{\kappa} = 1 \cdot (-0.5) + 2 \cdot (-1.5) + 4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-0.5) = -15.5 \text{ kHm}.$



Пояснения к решению задачи

- 1) Стержневая система является статически определимой, если степень ее свободы W равна нулю и она геометрически неизменяемая. В геометрически неизменяемых системах перемещения от нагрузок являются следствием только деформаций ее элементов. Для многопролетных статически определимых балок анализ геометрической неизменяемости проще выполнять через построение т.н. «монтажно-поэтажной» схемы, показывающей последовательность монтажа отдельных балок. На каждом «этаже» такой схемы должно присутствовать три связи (см. рис. 1.2.27).
- 2) При определении реакций в связях многопролетной статически определимой балки целесообразно воспользоваться наиболее общим подходом, заключающимся в том, что любая многодисковая статически определимая система может быть представлена в виде набора отдельных дисков с действующими на них внешними нагрузками и реакциями связей, обеспечивающих им равновесие в составе системы. В теории статически определимых систем доказано, что число независимых уравнений статики в точности равно числу реакций в связях, включая и силы взаимодействия в шарнирах, которые на смежные диски прикладываются в соответствии с законом Ньютона «действие равно противодействию», т.е. равными и противоположно направленными.

<u>Примечание.</u> Сосредоточенные внешние силы, действующие на шарниры, можно приложить к любому из смежных дисков.

После построения эпюр внутренних силовых факторов в отдельных дисках они объединяются и образуют эпюры для многопролетной балки в целом (см. рис. 1.2.30).

3) При построении линий влияния усилий в многопролетных балках проще всего воспользоваться статико- кинематическим методом, описание которого приведено в пояснениях к разделу 1.1. Поскольку линии влияния усилий в статически определимых системах имеют полигональный вид, то достаточно найти всего одну наиболее просто определяемую из условий равновесия ординату этой линии влияния. В примере определена ордината, когда единичный груз установлен над сечением *k*. При таком положении груза второстепенные балки (см. рис. 1.2.27) не работают, их можно отбросить и из законов равнове-

сия определить изгибающий момент и поперечную силу в сечении k основной балки.

- 4) Правила определения усилий по линиям влияния и формула влияния приведены в разделе 1.1.
- 5) Определение максимального и минимального значений усилия S от подвижной системы связанных между собой сосредоточенных грузов требует нахождения невыгодного загружения линии влияния этой системой грузов. В теории линий влияния доказано, что в при невыгодном загружении один из грузов (критический) должен находиться над одной из вершин (критической) линии влияния: над выпуклой, если отыскивается maxS, и вогнутой, если отыскивается minS (линия влияния при этом не должна быть перевернута). Условием, что груз и вершина действительно критические, является смена знака производной усилия при переходе грузом вершины: с *0 на *0, если отыскивается *1 мах*2, и с *1 на *2, если отыскивается *3 мах*3, и с *4, если *4, если *6 производная усилия определяется по формуле:

$$dS/dx = \sum (F_i \cdot \lg \alpha_i)$$

где F_i - сосредоточенный груз;

 a_i - угол наклона линии влияния в месте приложения сосредоточенного груза F_i .

Задача нахождения критического груза и критической вершины решается перебором возможных вариантов. Определение maxS и minS осуществляется по формуле влияния

$$S = \sum (F_i \cdot y_i),$$

где F_i - сосредоточенный груз;

 Y_i - ординаты линии влияния усилия S под сосредоточенными грузами, установленными в положение невыгодного загружения.

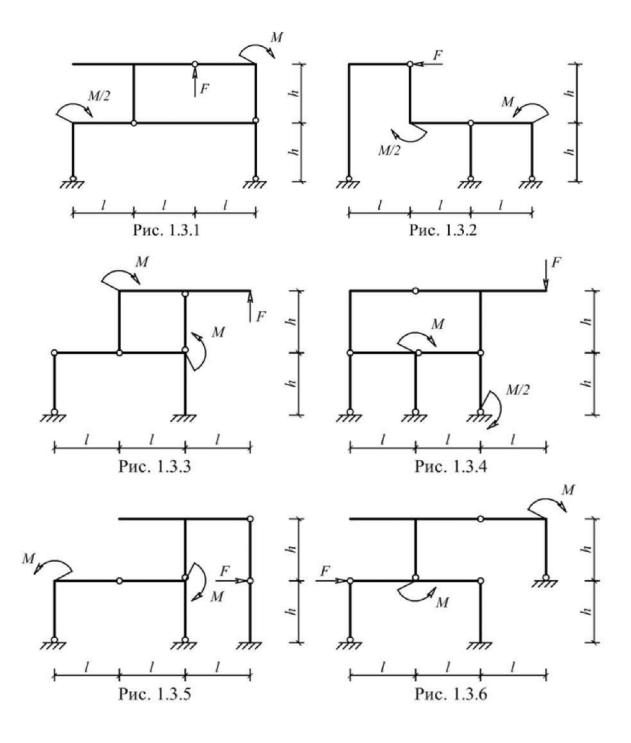
2. Расчет плоских рам. Формулировка задачи

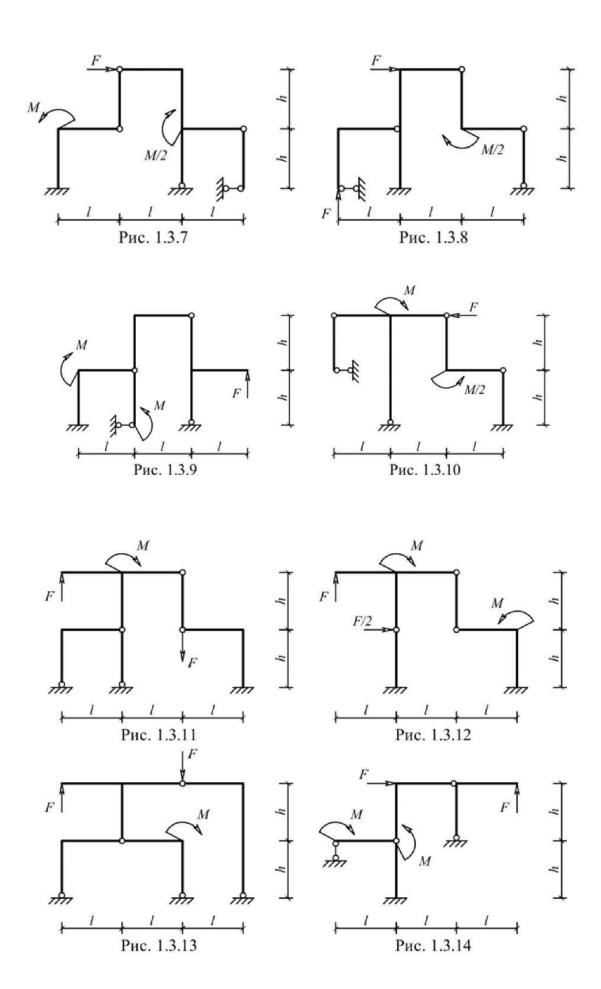
Для одной из рам, изображенных на рис. 1.3.1 - 1.3.25, требуется: выполнить кинематический анализ;

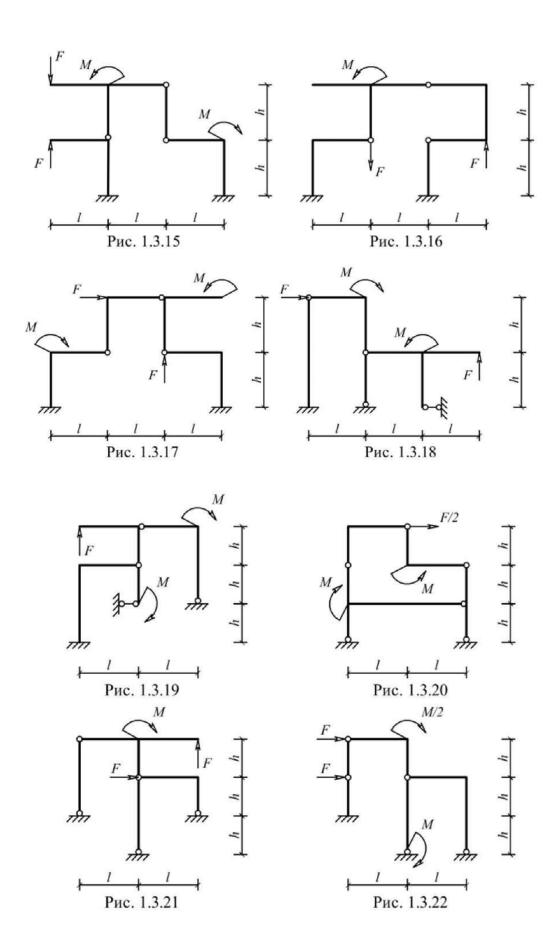
определить реакции в связях, включая силы взаимодействия в шарнирах; построить эпюры внутренних силовых факторов. Исходные данные для расчета принять из табл. 1.3

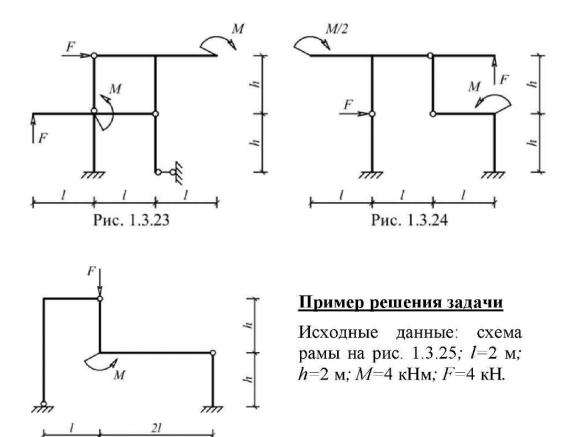
Таблица 1.3

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7
<i>l</i> , м	3	3	2	3	4	4	2
<i>h</i> , м	2	3	3	4	3	4	4
<i>F</i> , кН	3	4	5	5	4	5	6
M, к H м	5	4	6	4	6	5	8









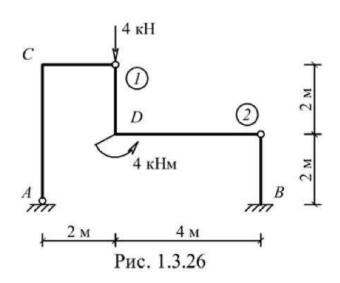
а) Кинематический анализ рамы

Рис. 1.3.25

1) Степень свободы системы

$$W = 3D - (2III + C) = 3 \cdot 3 - (2 \cdot 2 + 5) = 0.$$

2) Рама представляет собой неизменяемую фигуру (рис. 1.3.27), состоящую из трех дисков, соединенных между собой шарнирами А, 1 и 2, не лежащими на одной прямой. Следовательно, геометрическая неизменяемость рамной конструкции обеспечена.



б) Реакции в связях

Силы, обеспечивающие равновесие дисков рамы, показаны на рис. 1.3.28.

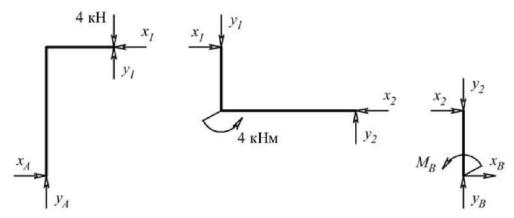


Рис. 1.3.28

Направление и величины реакций x_a , y_a , x_b , y_a , y_a , y_a , y_1 , y_2 , y_2 , найденных из 9-и уравнений равновесия (по три для каждого диска), показаны на рис. 1.3.29.

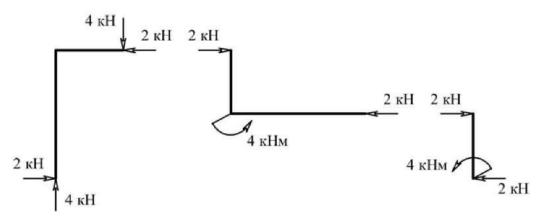


Рис. 1.3.29

в) Эпюры внутренних силовых факторов в дисках рамы Эпюры продольных сил (кН)

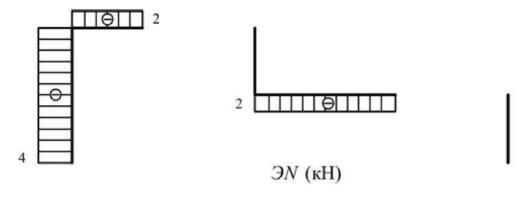
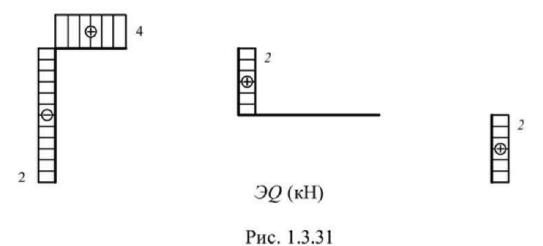
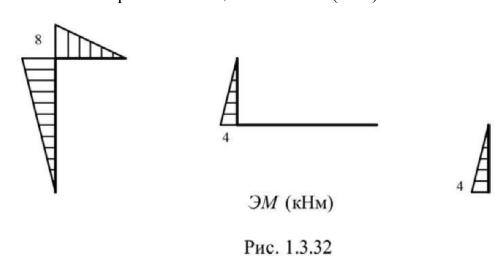


Рис. 1.3.30

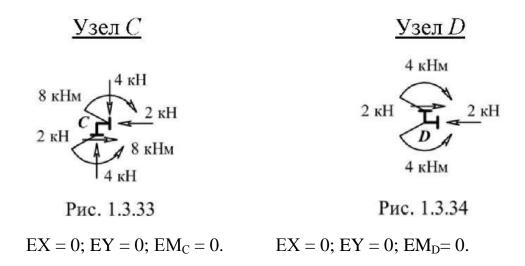
Эпюры поперечных сил (кН)



Эпюры изгибающих моментов (кНм)



г) Проверка равновесия жестких узлов СиD



Пояснения к решению задачи

- 1) Кинематический анализ производится с целью доказательства, что рассматриваемая рамная конструкция является статически определимой, т.е. она не имеет избыточных («лишних») связей и обеспечена ее геометрическая неизменяемость. Процедура анализа геометрической неизменяемости включает отыскание в раме связанных дисков, в совокупности образующих простейшие неизменяемые фигуры, к которым относятся:
- а) три диска, соединенных тремя не лежащими на одной прямой простыми шарнирами (см. рис. 1.3.27.);
- б) два диска, соединенные тремя простыми не параллельными и не пересекающимися в одной точке связями.

При этом земля рассматривается как неизменяемый и неподвижный диск.

При определении реакций в связях статически определимой рамы целесообразно воспользоваться наиболее общим подходом, заключающимся в том, что любая многодисковая статически определимая система может быть представлена в виде набора отдельных дисков с действующими на них внешними нагрузками и реакциями связей, обеспечивающих им равновесие в составе системы. В теории статически определимых систем доказано, что число независимых уравнений статики в точности равно числу реакций в связях, включая и силы взаимодействия в шарнирах, которые на смежные диски прикладываются в соответствии с законом Ньютона «действие равно противодействию», т.е. равными и противоположно направленными.

<u>Примечание.</u> Сосредоточенные внешние силы, действующие на шарниры, можно приложить к любому из смежных дисков.

Определение внутренних силовых факторов в дисках производится методом сечений, суть которого состоит в следующем:

- а) разрезают диск на две части так, чтобы в разрез попало поперечное сечение, в котором отыскиваются внутренние силовые факторы;
- б) отбрасывают одну часть диска (любую), а ее действие заменяют усилиями $N,\ Q$ и M;
- в) для рассматриваемой части диска составляют три независимых уравнений равновесия, из которых определяются величины и направления внутренних силовых факторов.

Для проверки равновесия жестких узлов с построенных эпюр в сечениях, максимально приближенных к узлам, снимаются внутренние силовые факторы и с учетом знака усилия прикладываются к узлам. Проверяется выполнение

условий равновесия, при составлении которых необходимо учесть внешние сосредоточенные силы или моменты, непосредственно приложенных к узлу.

3. Расчет балочных ферм. Формулировка задачи

Для одной из балочных ферм, изображенных на рис. 1.4.1 - 1.4.25 требуется:

определить аналитически усилия в отмеченных стержнях от неподвижной нагрузки в виде сосредоточенных сил F, приложенных в каждом узле прямолинейного пояса фермы;

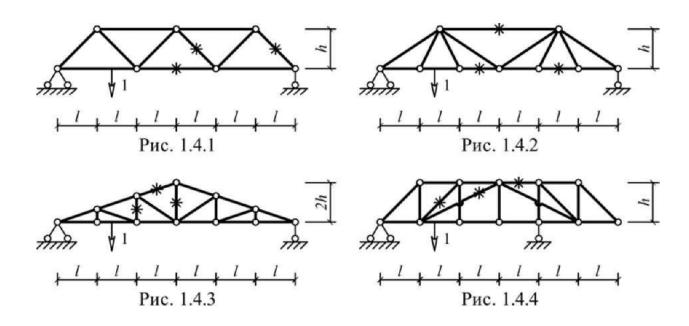
построить линии влияния усилий для отмеченных стержней при «езде» по прямолинейному поясу фермы;

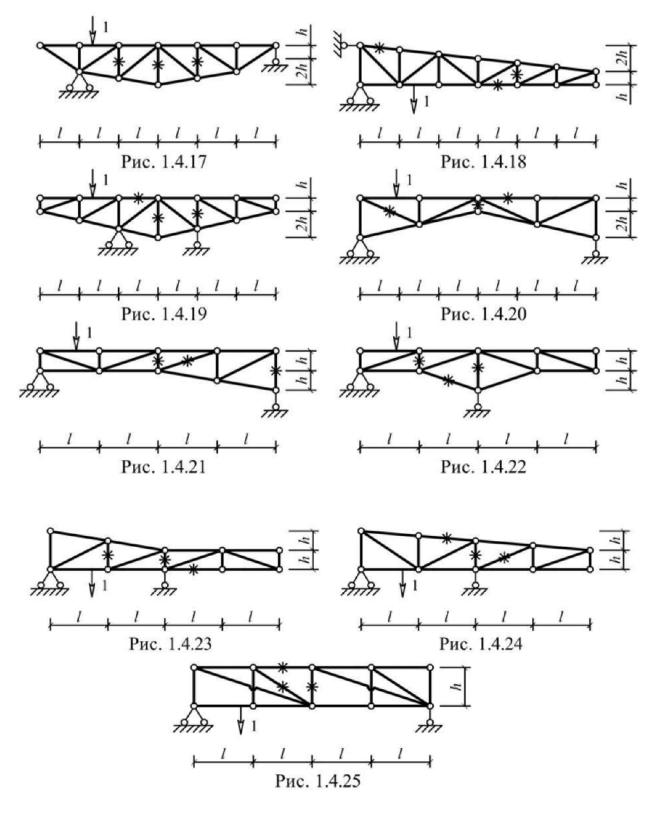
вычислить по линиям влияния усилия в отмеченных стержнях от сил F и результаты сравнить со значениями усилий, полученными аналитически.

Исходные данные для расчета принять из табл. 1.4.

Табл. 1.4.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7
<i>l</i> , м	2	1	1,5	1,5	1	2	2,5
<i>h</i> , м	2	1,5	0,75	1,75	2	3	3
<i>F</i> , кН	5	7	9	10	8	6	4

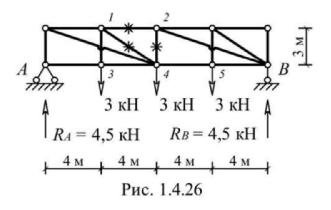




Пример решения задачи

Исходные данные: схема фермы на рис. 1.4.25; l=4 м; h=3 м; F=3 кН.

а) Аналитическое определение усилий в отмеченных стержнях от неподвижной нагрузки



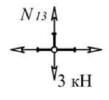
$$\Sigma M_4 = 0$$
 $N_{12} \cdot 3 + 4, 5 \cdot 8 - 3 \cdot 4 = 0 \implies$
 $N_{12} = -8 \text{ kH}$

$$\Sigma Y = 0$$

 $N_{24} + 4.5 - 3 - 3 = 0 \implies$
 $N_{24} = 1.5 \text{ kH}$

$$\Sigma Y = 0$$

$$-N_{14} \cdot \cos \alpha - N_{13} = 0 \implies N_{14} = -N_{13} / \cos \alpha$$



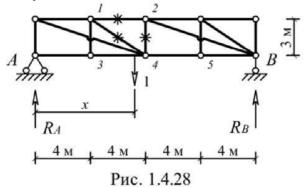
$$\frac{\Sigma Y = 0}{N_{13} - 3 = 0} \implies$$

$$N_{13} = 3 \text{ kH}$$

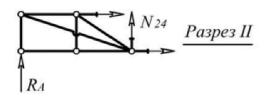
Рис. 1.4.27

$$N_{14} = -N_{13}/\cos\alpha = -3/(3/5) = -5 \text{ kH}.$$

б) Линии влияния усилий для отмеченных на схеме стержней



$$\Sigma M_4 = 0 \implies$$
 $N_{12} = -R_A \cdot (8/3)$
(уравнение правой ветви)



$$\Sigma Y = 0 \implies$$
 $N_{24} = -R_A$
(уравнение правой ветви)



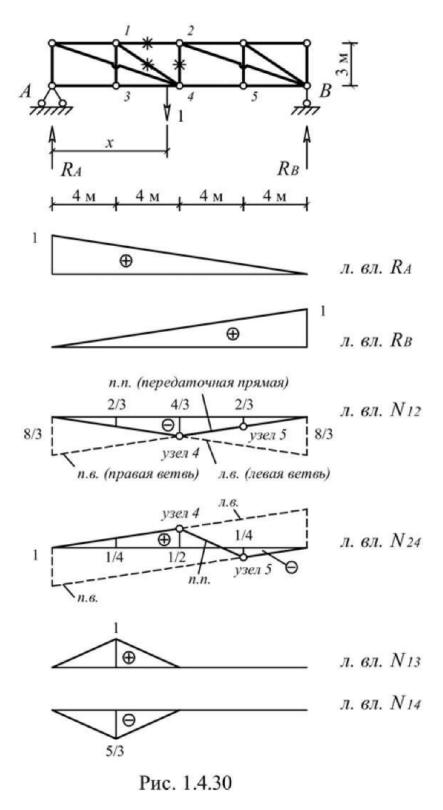


Рис. 1.4.29

в) Определение усилий в отмеченных стержнях по формуле влияния от сил F=3 кH.

$$N_{12} = (3) \cdot (-2/3) + (3) \cdot (-4/3) + (3) \cdot (-2/3) = -8 \text{ kH},$$

 $N_{24} = (3) \cdot (1/4) + (3) \cdot (1/2) + (3) \cdot (-1/4) = 1,5 \text{ kH},$
 $N_{13} = (3) \cdot (1) = 3 \text{ KH},$
 $N_{14} = (3) \cdot (-5/3) = -5 \text{ kH}.$



Пояснения к решению задачи

Аналитический способ нахождения усилий от неподвижной нагрузки требует рассмотрения равновесия отсеченной части фермы, содержащей определяемое усилие.

Основой для построения линий влияния в стержнях фермы, в большинстве случаев, являются линии влияния опорных реакций, вид и значение ординат которых очевиден. Задача, как правило, сводится к нахождению связи внутрен-

него усилия с реакциями опор через законы равновесия и последующего перемасштабирования линий влияния реакций. В приведенном примере связь усилия в стержне 1-2 с реакцией Д4, когда груз находится справа от разреза I, определена из равенства нулю моментов относительно точки (узла) 4 для левой отсеченной части фермы. В результате получено уравнение правой ветви, а левая ветвь, как известно, пересекается с правой в точке, лежащей на одной вертикали с моментной точкой (узлом) 4. Для усилия в стержне 2-4 ветви линии влияния параллельны, поскольку связь с реакцией определяется уравнением равновесия Z7 = 0. Для построения линии влияния усилия в стержне 1—4 использована связь этого усилия с усилием в стержне 1—3 из равновесия узла 7, а линия влияния усилия в стержне 1—3 легко построить, если рассмотреть равновесие узла 3.

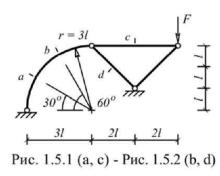
4. Расчет распорных и комбинированных систем. Формулировка задачи

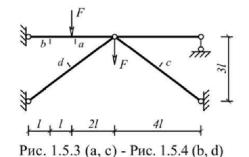
Для одной из стержневых систем, изображенных на рис. 1.5.1 - 1.5.24 требуется:

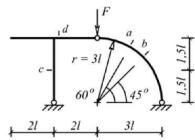
выполнить кинематический анализ; определить внутренние силовые факторы в указанных сечениях. Исходные данные для расчета принять из табл. 1.5.

Таблица 1.5

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7
<i>l</i> , м	2	1,5	2	1,75	2	3	3
F, к H	10	6	7	4	9	8	5







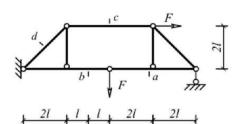
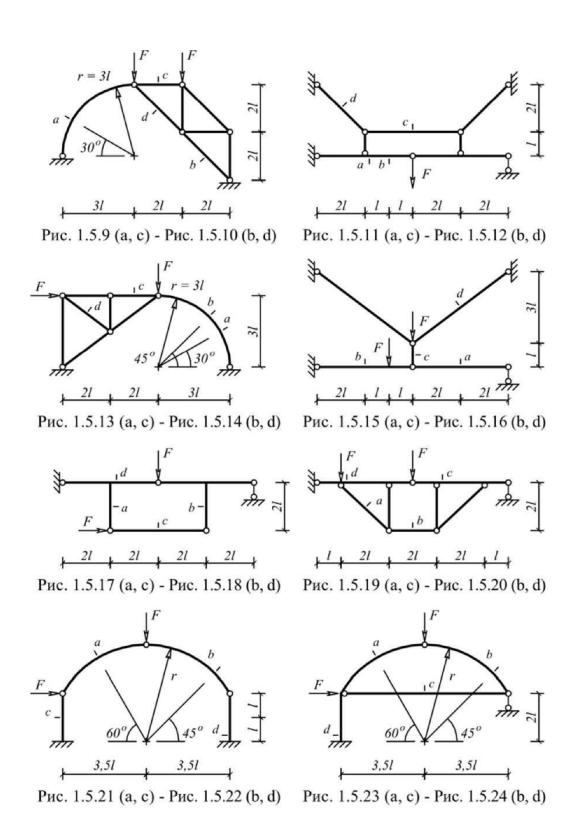


Рис. 1.5.5 (а, с) - Рис. 1.5.6 (b, d)

Рис. 1.5.7 (а, с) - Рис. 1.5.8 (b, d)



Пояснения к решению задачи

В распорных системах при вертикальной нагрузке возникают реакции (распор) в горизонтальных связях (затяжках, распорках и др.). Найдите реакции в связях.

Сложности возникают не только при определении реакций в связях, но и при доказательстве, что рассматриваемая конструктивная схема является статически определимой, т.е. кинематически неизменяемой, у которой степень свободы равна нулю.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Дарков А.В., Строительная механика.- СПб.: издательство «Лань», 2005.
- 2. Мельчаков А.П., Сборник задач по строительной механике.- Челябинск, 2004.
- 3. Анохин Н.Н., Строительная механика в примерах и задачах. М. Ассоциации строительных вузов. 2007.
- 4. Кривошапко С.Н., Строительная механика: лекции, семинары. М высшая школа, 2008.
- 5. Саргсян А.Е., Строительная механика. М. Высшая школа. 2000
- 6. Александров А.В., Строительная механика. М. Высшая школа. 2007