МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ КОРПОРАЦИЯ

Достанова С.Х., Касымова Г.Т.

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Методические указания
к выполнению расчетно-графической части по дисциплине
«Численные методы в строительной механике»
для бакалавров и магистрантов специальности «Строительство»

Алматы 2012

УДК 539.3: 624.073.1.044

Составители: Достанова С.Х., Касымова Г.Т.

Расчет плоских рам методом конечных элементов: Методические указания к выполнению расчетно-графической части по дисциплине «Численные методы в строительной механике» для бакалавров и магистрантов специальности 5В072900 - «Строительство». – Алматы: КазГАСА, 2012. -51 с.

Методические указания служат руководством для выполнения семестровых работ по дисциплине «Численные методы в строительной механике» применяя метода конечных элементов.

Библиограф. 9 назв.

Рекомендовано к изданию методическим советом факультета общего строительства, протокол №3 от 22.12.2011 г.

Печатается по сводному плану издания Казахской головной архитектурно-строительной академии на 2011-2012 уч.год.

Рецензент: д.т.н., акад.проф. КазГАСА Байтурсынов Д.М.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основными понятиями в инженерной механике являются напряжения и деформации. Основная цель и задачи инженерной механики – изучение напряженно-деформированного состояния (НДС) в различных элементах конструкции, вызванные внешними воздействиями, как в состоянии равновесия, так и в состоянии движения.

Напряженно-деформированное состояние тела описывается с помощью математического аппарата в виде системы интегральных и дифференциальных уравнений в частных производных. Эти уравнения записаны на соответствующих гипотезах, решение этих уравнений должно удовлетворять физическим законам деформирования, статическим и кинематическим условиям на поверхности тела.

Для решения этих уравнений существует три направления:

1. Аналитический метод основан на непосредственном интегрировании или дифференцировании разрешающих уравнений. В силу сложности уравнений МДТТ аналитическое решение получено для ограниченного класса инженерных задач.

2. Полуаналитический метод основан на одновременном использовании аналитического и приближенного методов. Этот метод эффективен для многих прикладных задач, где нельзя получить аналитическое решение.

3. Численный метод является приближенным. В основном используется замена континуальной среды ее дискретным аналогом. В конечном итоге система дифференциальных уравнений трансформируется в систему линейных или нелинейных алгебраических уравнений, что, несомненно, упрощает поиск решения. К численным методам относятся метод конечных элементов, метод конечных разностей, метод граничных элементов и др.

Приближенные методы решения задач могут быть разбиты на две основные группы:

1. Вариационные методы, которые дают приближенные аналитические выражения искомой функции (функции перемещений или функции внутренних усилий).

2. Численные методы, которые дают значения искомой функции при трех или иных значениях аргумента.

К первой группе относятся вариационные методы Ритца, Бубнова-Галеркина, метод Треффца и др.

Ко второй группе относятся метод сеток и его более совершенная модификация – метод конечных элементов, а также ряд графических и полуграфических методов таких, как, например, метод прямых, метод коллокаций и другие.

Преимущество вариационных методов заключается в том, что задача сводится обычно к решению системы двух, трех, четырех уравнений, которые дают хорошие приближение к действительному состоянию сооружения. К их недостаткам можно отнести то, что возможности вариационных методов ограничены сложными контурами и сложными законами распределения внешней нагрузки, т.к. применение вариационных методов требует, чтобы было, хотя бы в приближенной форме, определено аналитическое выражение внешней нагрузки, деформированной упругой поверхности элемента и других условий задачи.

Численные методы, в сравнении с вариационными, имеют универсальный характер, т.к. не требуют аналитических выражений условий задачи. Однако численные методы обладают рядом недостатков. Так, для получения удовлетворительного решения они требуют нанесения на исследуемую область густой сетки или разбиения на достаточно большое число элементов, что неизбежно влечет за собой решение систем алгебраических уравнений с большим числом неизвестных, что становится возможным при наличии ЭВМ. Кроме того, численные методы часто приводят к неточности решений, особенно в местах приложения сосредоточенных сил, при наличии острых углов, подкреплений и т.д., т.е. там, где нарушается гладкость полей переменных.

Весьма существенным недостатком численных методов является то, что они не дают аналитического выражения искомой функции, следовательно, для определения параметров НДС в данной области приходится вычислять эти величины во всех узлах стыковки элементов, т.е. получить массу ненужной информации для тех областей, которые несущественны для оценки поведения системы.

С учетом развития современной вычислительной техники расчет сложных конструкций и сооружений связан с идеей применения хорошо разработанных процедур для расчета систем с высокой степенью статической неопределимости. Наиболее распространенным методом расчета является метод конечных элементов, который получил наибольшую популярность благодаря универсальности, простоте, доступности и многовариантности.

МКЭ основан на мысленном представлении сплошного тела в виде совокупности отдельных конечных элементов, взаимодействующих между собой в конечном числе точек, которые принято называть узлами. Система разбивается на простые конечные элементы, напряженно-деформированное состояние которых известно или исследуется заранее.

Для стержневой аппроксимации моделью континуального объекта является решетчатая стержневая система, жесткость стержней которой подбирается так, чтобы деформации выделенных конечных объемов сплошной среды и соответствующей части стержневой решетки были одинаковыми. МКЭ состоит в замене сплошного тела расчетной моделью, состоящей из отдельных конечных элементов, соединенных между собой в точках (узлах) шарнирами. При этом каждый элемент сохраняет физические свойства тела. Расчетная модель не является чисто физической, так как в ней не возникает эффекта концентрации напряжений в узлах за счет наложения на элемент заданного поля перемещений либо тензорного поля напряжений. Полученная модель рассчитывается одним из классических методов строительной механики: методом сил или методом перемещений.

При расчете пластин наибольшее распространение получили прямоугольные или треугольные конечные элементы. Дискретная модель лишь приближенно отражает поведение исходной системы.

Число степеней свободы КЭ, а, в конечном итоге, число неизвестных МКЭ определяется количеством наложенных в узлах дополнительных связей.

Условия равновесия и совместности деформаций выполняются только в узловых точках – точках соединения КЭ.

Все внешние силы считаются приложенными в узлах по направлению их возможных перемещений. Внеузловые нагрузки предварительно приводятся к узловым.

При реализации МКЭ наибольшее распространение получил метод перемещений, это объясняется простотой выбора основной системы, составления матрицы жесткости и формирования вектора внешней нагрузки.

1 Метод конечных элементов. Основные уравнения

Для решения задач строительной механики в основном используются два метода: метод сил и метод перемещений. Канонические уравнения записываются в следующей векторной форме:

Метод сил

$$L_\delta \vec{X} + \vec{\Delta}_p = 0 \qquad \vec{X} = -(L_\delta)^{-1}\vec{\Delta}_p \tag{1.1}$$

где $\vec{X}$ – вектор неизвестных сил, $\vec{\Delta}_p$ – вектор перемещений.

$$L_\delta = L_1^T B L_1,$$

где L_1 – единичная матрица, B – матрица податливости.

Уравнения (1) имеют кинематический смысл.

Метод перемещений

$$R\vec{Z} - \vec{P} = 0 \tag{1.2}$$

$\vec{Z}$ – вектор перемещений, R – матрица жесткости.

$$\vec{Z} = R^{-1}\vec{P},$$

где R^{-1} – обратная матрица.

Уравнения (1) и (2) описывают поведение любой стержневой системы при статических воздействиях.

1.1 Уравнения равновесия в векторной форме

Рассмотрим тело объемом V, ограниченного поверхностью S, находящееся под действием объемных сил P и поверхностной нагрузкой P_s. Для определения напряженно-деформированного состояния тела необходимо записать основные уравнения и зависимости.

Уравнения равновесия в векторной форме имеют вид (3):

$$A\vec{\sigma} + \vec{P} = 0,$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix},$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

где А – представляет собой оператор дифференцирования, σ – вектор напряжений, состоящий из компонентов нормальных и касательных напряжений в точке, Р – вектор внешней узловой нагрузки.

1.2 Уравнения непрерывности или совместности деформаций (зависимости Коши)

Связь между компонентами вектора деформаций и перемещений в векторной форме имеет следующий вид:

$$\vec{\varepsilon} = A^T \vec{Z}, \tag{1.4}$$

$\vec{\varepsilon}$ – вектор деформаций, $\vec{Z}$ – вектор перемещений.

$$\vec{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}, \qquad \vec{Z} = \{u \quad v \quad w\}^T = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ o & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

1.3 Физические уравнения

Физические уравнения связывают компоненты вектора деформаций с компонентами вектора напряжений. Для упругого тела эта связь представляет линейную зависимость (закон Гука). Для неупругого тела – нелинейную зависимость.

Обобщенный закон Гука для анизотропного тела, имеющего разные модули и коэффициент Пуассона по трем направлениям, имеет следующий вид:

$$\vec{\varepsilon} = B\vec{\sigma},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\mu_{xy}}{E_y} & -\frac{\mu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\mu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{zx}}{E_x} & -\frac{\mu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} \end{bmatrix}. \qquad (1.5)$$

В (1.5) матрица В характеризует механические свойства материала, которые определяются модулем упругости Е, модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона μ.

Частный случай – изотропное тело.

$$E_x = E_y = E_z = E, \quad G_{xy} = G_{yz} = G_{zx} = G,$$

$$\mu_{xy} = \mu_{xz} = \mu_{yx} = \mu_{yz} = \mu_{zy} = \mu_{zx} = \mu,$$

тогда матрица В упрощается и имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}.$$

1.4 Поверхностные условия

Пусть на части поверхности S_1 заданы напряжения (статические граничные условия), а на части поверхности S_2 заданы перемещения (кинематические граничные условия), тогда

а) статические граничные условия

$P_S = P_{S_1} = A_S\vec{\sigma}, \quad x, y, z \in S_1$;

б) кинематические граничные условия

$\vec{Z}_S = \vec{Z}_{S_2}, \quad x, y, z \in S_2$.

2 Постановка задачи по расчету плоской рамы методом конечных элементов

Например, задана плоская рама (рис. 2.1). Размеры стержней и жесткости стержней заданы (табл. 1). Необходимо выполнить следующее:

1. Составить матрицу жесткости R' для каждого стержня в локальной системе координат (x', y'). Ось x' совпадает с осью стержня, ось y' перпендикулярна оси x' (рис. 2.1).

2. Составить матрицу направляющих косинусов для каждого стержня $[C]$.

3. Составить матрицу, которая преобразует перемещения Z' в локальной системе координат (x', y') в перемещения $\vec{z}$ в глобальной системе координат (x, y), т.е.

$$\vec{Z}' = V\vec{Z},$$

$$V = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

4. Составить матрицу жесткости R для каждого стержня в глобальной системе координат

$$R = V^T R' V,$$

где V^T – транспонированная матрица.

5. Составить матрицу жесткости R в блочном виде

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ 0 & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ 0 & 0 & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}.$$

Степень свободы каждого узла в плоскости равна 3, поэтому общая степень свободы равна 12. Первый индекс указывает номер узла, в котором возникает блок реакций, второй индекс – номер узла, перемещением которого вызваны эти реакции.

6. Путем суммирования соответствующих элементов матриц жесткости отдельных стержней составить элементы общей матрицы R (рис. 2.1, рис. 2.2).

$$R_{11} = R^f_{HH}, \qquad R_{13} = 0, \qquad R_{14} = 0,$$
$$R_{12} = R^f_{HK}, \qquad R_{21} = R^f_{KH},$$
$$R_{22} = R^f_{KK} + R^j_{HH}, \qquad R_{24} = 0, \qquad R_{31} = 0,$$
$$R_{23} = R^j_{HK}, \qquad R_{32} = R^j_{KH}, \qquad R_{33} = R^j_{KK} + R^K_{HH},$$
$$R_{43} = R^K_{KH}, \qquad R_{44} = R^K_{KK}, \qquad R_{34} = R^K_{HK},$$
$$R^J_{HK} = (R^J_{KH})^T, \qquad R^K_{KH} = (R^K_{HK})^T.$$

7. Составить матрицу жесткости системы без учета продольных сил.

8. Составить основную систему метода перемещений и записать разрешающие уравнения:

$$R\vec{Z} - \vec{P} = 0,$$

где $\bar{Z}$ – вектор перемещений, R – матрица жесткости.

$$\vec{Z} = R^{-1}\vec{P},$$

R^{-1} – обратная матрица.

Это уравнение описывает поведение любой стержневой системы при статических воздействиях.

9. Составить вектор внешней узловой нагрузки P.

10. Определить вектор перемещений узловых точек Z.

11. Определить вектор внутренних усилий X.

12. Зарисовать эпюры внутренних усилий: изгибающих моментов M, поперечных сил Q, продольных сил N.

Примечания

На рис. 2.1 представлена расчетная схема заданной рамы. На рис. 2.2 представлена ориентация стержней. На рис. 2.3 показаны положительные направления концевых перемещений «i» стержня в общей и местной системах координат. На рис. 2.3а: Z_1, Z_4 – угловые перемещения; Z_2, Z_5 – перемещения в направлении оси X; Z_3, Z_6 – перемещения в направлении оси Y, аналогично на рис. 2.3б эти же перемещения в местной системе координат X', Y'.

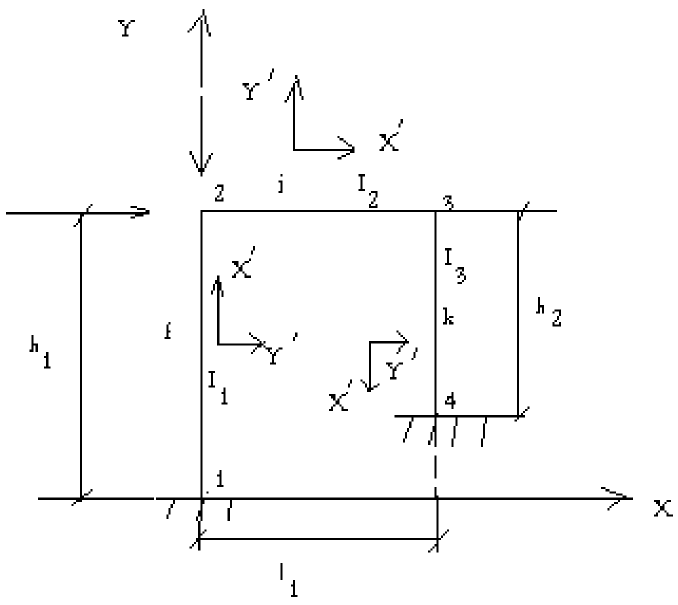


Рис. 2.1. Расчетная схема рамы: f, j, k – обозначения стержней; 1, 2, 3, 4 – номера узлов; X', Y' – локальная система координат; X, Y – глобальная система координат

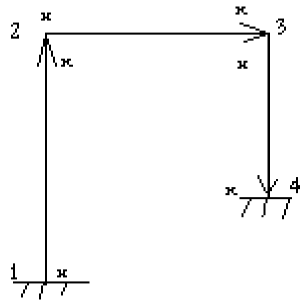


Рис. 2.2. Ориентация стержней: н – начало стержня; к – конец стержня

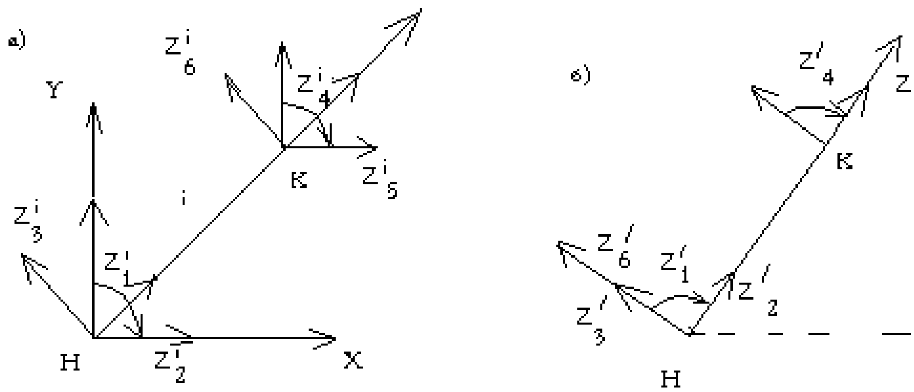


Рис. 2.3. Положительные направления концевых перемещений «i»
стержня: а) в общей X, Y системе координат;
б) в локальной системе координат X', Y'

На рис. 2.4 показаны положительные направления внутренних усилий. Рассмотрим произвольный стержень (ij). Его положение указано на рис. 2.4. Будем предполагать, что сосредоточенные нагрузки приложены только в узлах, а на отдельный стержень действуют лишь силы и моменты, приложенные к концевым сечениям. Начало координат совместим с началом стержня, общую систему координат – с горизонтальной и вертикальной осями, а местную – с осью стержня. На рис. 2.4а показаны усилия в местной системе координат, а на рис. 2.4б – в общей системе координат (индекс $н$ означает начало, а $к$ – конец стержня).

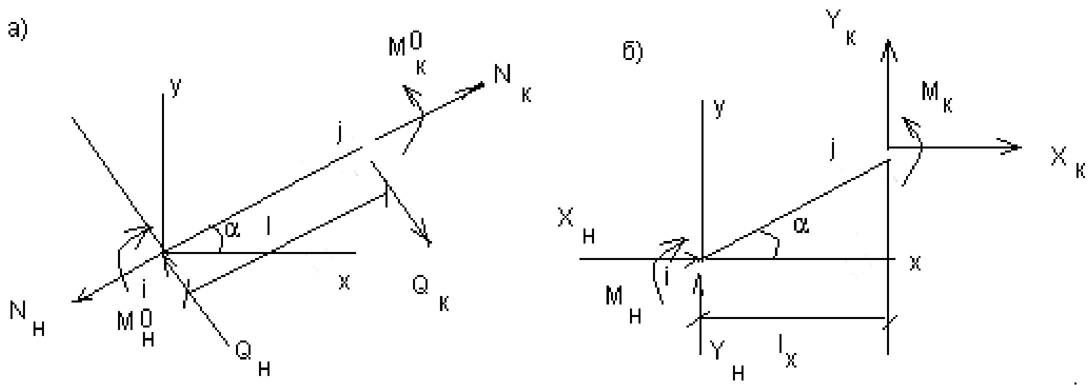


Рис. 2.4

В таблице 2.1 представлены размеры стержней заданной статически неопределимой рамы.

Таблица 2.1

№	h_1 м	h_2 м	L м	Размеры стержня f		Размеры стержня j		Размеры стержня к		№ двутавра
				b (м)	h (м)	b (м)	h (м)	b (м)	h (м)	
1	5	3,5	4	0,2	0,3	0,15	0,2	0,25	0,3	14
2	6	4	5,5	0,09	0,15	0,08	0,15	0,09	0,14	16
3	7	5	6	0,18	0,2	0,15	0,2	0,12	0,19	18
4	4	7,5	6,5	0,17	0,25	0,16	0,2	0,11	0,18	14Б
5	3	5,5	7,5	0,16	0,2	0,14	0,19	0,2	0,25	16Б
6	7	3,5	5,5	0,15	0,25	0,15	0,2	0,15	0,22	18Б
7	4	7	6	0,17	0,2	0,2	0,25	0,17	0,2	12
8	6	3	5,5	0,08	0,15	0,25	0,3	0,13	0,25	12Б

Поперечные сечения стержней представляют собой прямоугольники с размерами b, h (рис. 2.5) или двутавры с заданным номером сортамента.

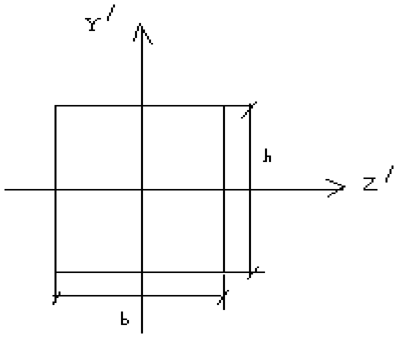


Рис. 2.5. Поперечное сечение стержня

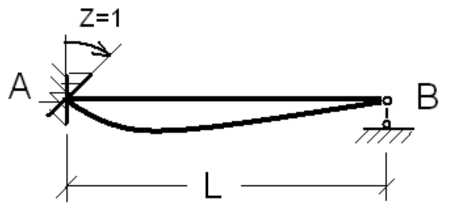
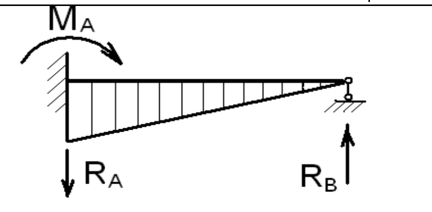
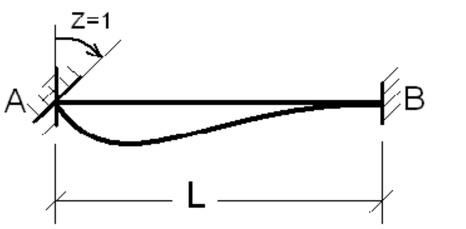
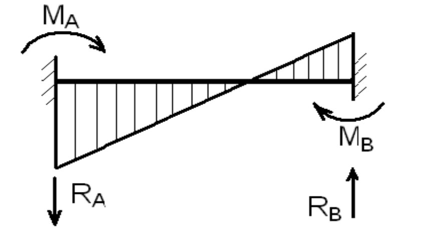
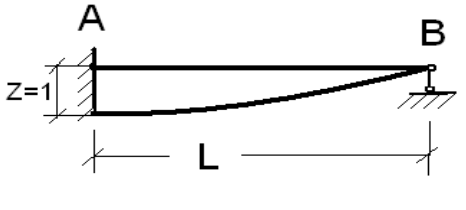
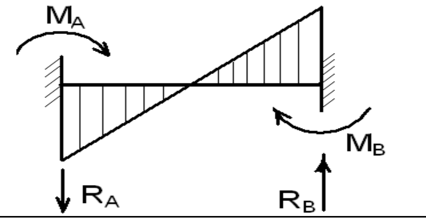
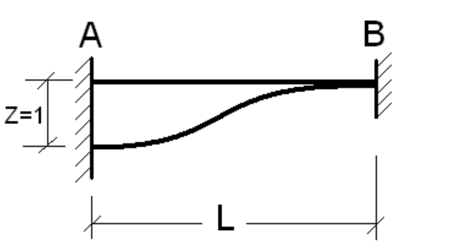
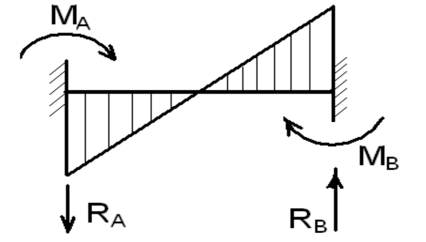
где A – площадь сечения; $E^f = E^j = E^k = E$ – модули упругости; $I = \frac{bh^3}{12}$ – момент инерции сечения.

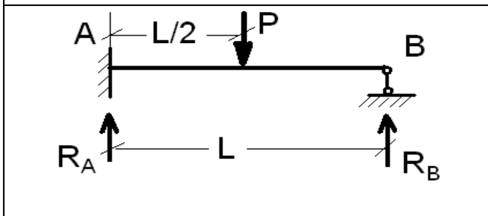
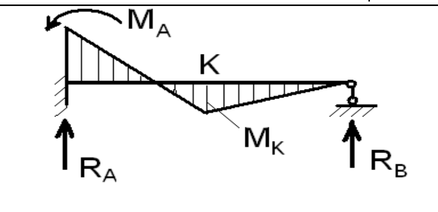
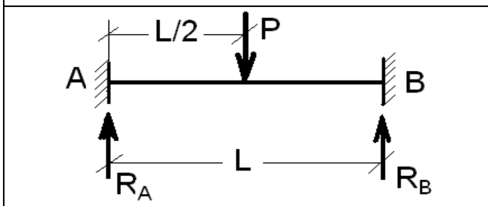
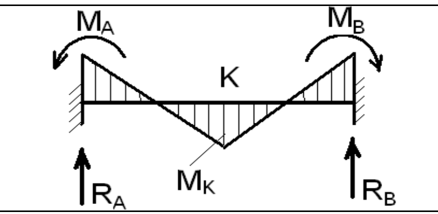
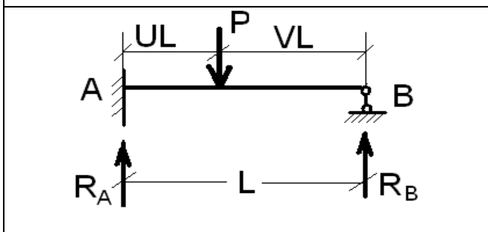
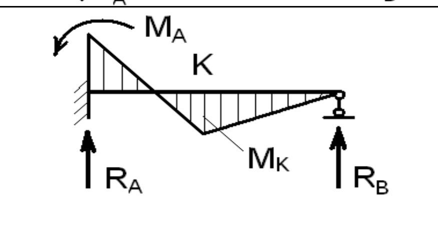
3 Составление матрицы жесткости отдельного стержня в локальной системе координат

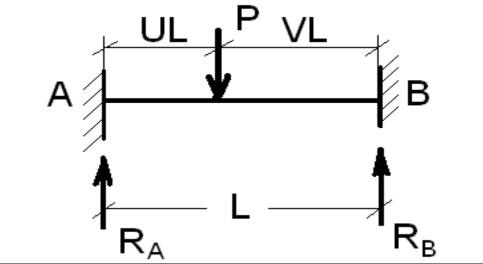
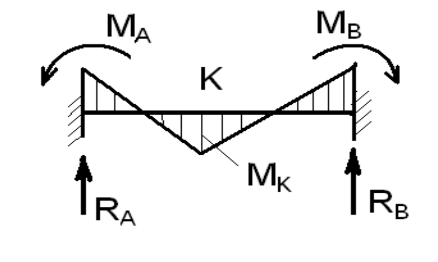
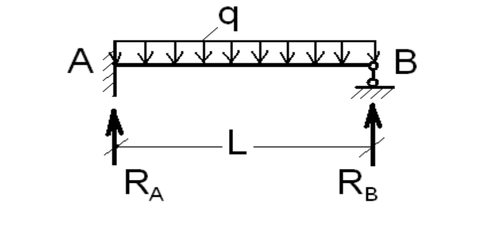
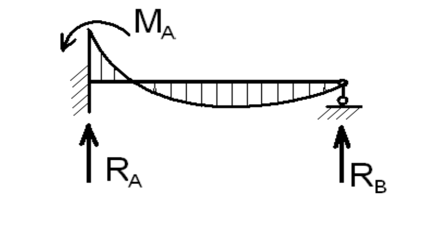
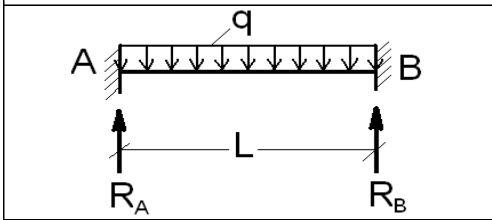
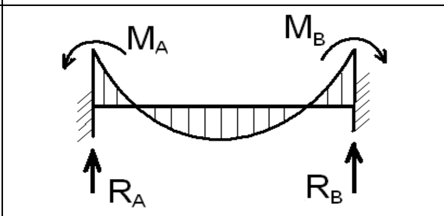
Для определения матрицы жесткости при изгибе для каждого стержня и для определения внешней узловой нагрузки используем следующую таблицу 3.1. При растяжении-сжатии элементом матрицы жесткости для каждого стержня является величина EA/L, где E – модуль упругости, A – площадь сечения, L – длина стержня. В табл. 3.1 величина EI представляет жесткость стержня на изгиб, где I – момент инерции сечения относительно главной центральной оси.

Таблица 3.1

Значения реакций в статически неопределимых балках

СХЕМЫ ЗАГРУЖЕНИЯ	ЭПЮРА МОМЕНТОВ И НАПРАВЛЕНИЯ РЕАКЦИЙ	ЗНАЧЕНИЯ РЕАКЦИЙ
		$M_A = \frac{3EI}{L^2}$ $R_B = R_A = \frac{3EI}{L}$
		$M_A = \frac{4EI}{L}$ $M_B = \frac{2EI}{L}$ $R_B = R_A = \frac{6EI}{L^2}$
		$M_A = \frac{3EI}{L^2}$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{L^3}$
		$M_B = M_A = \frac{6EI}{L^2}$ $R_A = R_B = \frac{12EI}{L^3}$

СХЕМЫ ЗАГРУЖЕНИЯ	ЭПЮРА МОМЕНТОВ И НАПРАВЛЕНИЯ РЕАКЦИЙ	ЗНАЧЕНИЯ РЕАКЦИЙ
		$M_A = \frac{3PL}{16}$ $M_K = \frac{5PL}{32}$ $R_A = \frac{11P}{16}$ $R_B = \frac{5P}{16}$
		$M_A = M_B = M_K = \frac{PL}{8}$ $R_A = R_B = P/2$
		$M_A = \frac{PL}{2}V(1-V^2)$ $M_K = \frac{PL}{2}U^2V(3-U)$ $R_A = \frac{PV}{2}(3-V^2)$ $R_B = \frac{PU^2}{2}(3-U)$

СХЕМЫ ЗАГРУЖЕНИЯ	ЭПЮРА МОМЕНТОВ И НАПРАВЛЕНИЯ РЕАКЦИЙ	ЗНАЧЕНИЯ РЕАКЦИЙ
		$M_A=UV^2PL$ $M_B=U^2VPL$ $M_K=2U^2V^2PL$ $R_A=V^2(1+2U)$ $R_B=U^2(1+2V)$
		$M_A=\frac{qL^2}{8}$ $R_A=\frac{5}{8}qL$ $R_B=\frac{3}{8}qL$
		$M_A=M_B=\frac{qL^2}{12}$ $R_A=R_B=\frac{qL}{2}$

1. Рассмотрим раму на рис. 2.1. Запишем матрицы податливости для каждого стержня в отдельности. С учетом продольных сил матрицы жесткости любого стержня в локальной системе координат x, y можно представить в виде (обозначение длины стержня L в дальнейшем заменено e):

$$R' = \begin{bmatrix} R'_{нн} & R'_{нк} \\ R'_{кн} & R'_{кк} \end{bmatrix},$$

$$R'_{нн} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{e} & 0 & -\frac{6EI}{e^2} \\ 0 & \frac{EA}{e} & 0 \\ -\frac{6EI}{e^2} & 0 & \frac{12EI}{e^3} \end{bmatrix}, \quad R'_{нк} = \begin{bmatrix} \frac{2EI}{e} & 0 & \frac{6EI}{e^2} \\ 0 & -\frac{EA}{e} & 0 \\ -\frac{6EI}{e^2} & 0 & -\frac{12EI}{e^3} \end{bmatrix},$$

$$R'_{кн} = \begin{bmatrix} \frac{2EI}{e} & 0 & -\frac{6EI}{e^2} \\ 0 & -\frac{EA}{e} & 0 \\ \frac{6EI}{e^2} & 0 & -\frac{12EI}{e^3} \end{bmatrix}, \quad R'_{кк} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{e} & 0 & -\frac{6EI}{e^2} \\ 0 & \frac{EA}{e} & 0 \\ \frac{6EI}{e^2} & 0 & \frac{12EI}{e^3} \end{bmatrix}. \qquad (3.1)$$

Для стержня *«f»* матрица жесткости в локальной системе координат:

$$(R')^{f}=\begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{h_1} & 0 & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{2EI_1}{h_1} & 0 & \frac{6EI_1}{h_1^2} \\ 0 & \frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{h_1} & 0 \\ -\frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \frac{12EI_1}{h_1^3} & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & -\frac{12EI_1}{h_1^3} \\ \frac{2EI_1}{h_1} & 0 & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{4EI_1}{h_1} & 0 & \frac{6EI_1}{h_1^2} \\ 0 & -\frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 & \frac{EA_1}{h_1} & 0 \\ \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & -\frac{12EI_1}{h_1^3} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \frac{12EI_1}{h_1^3} \end{bmatrix}. \qquad (3.2)$$

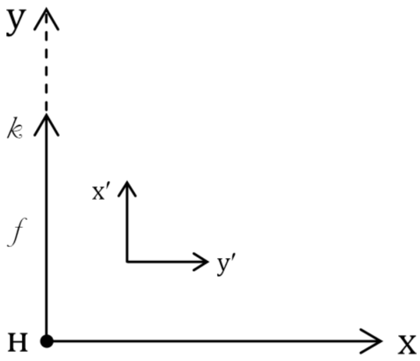
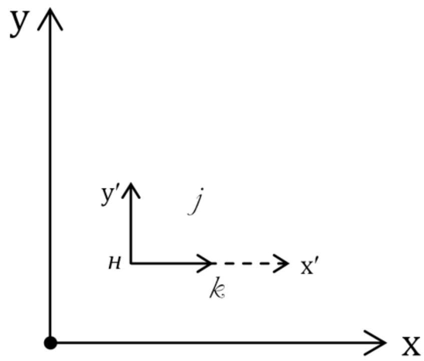
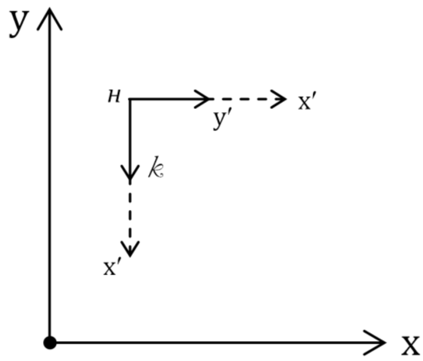
Для стержня *«j»* матрица жесткости в локальной системе координат:

$$(R')^{j}=\begin{bmatrix} \frac{4EI_2}{\text{в}_1} & 0 & -\frac{6EI_2}{\text{в}_1^2} & \frac{2EI_2}{\text{в}_1} & 0 & \frac{6EI_2}{\text{в}_1^2} \\ 0 & \frac{EA_2}{\text{в}_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{\text{в}_1} & 0 \\ -\frac{6EI_2}{\text{в}_1^2} & 0 & \frac{12EI_2}{\text{в}_1^3} & -\frac{6EI_2}{\text{в}_1^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{\text{в}_1^3} \\ \frac{2EI_2}{\text{в}_1} & 0 & -\frac{6EI_2}{\text{в}_1^2} & \frac{4EI_2}{\text{в}_1} & 0 & \frac{6EI_2}{\text{в}_1^2} \\ 0 & -\frac{EA_2}{\text{в}_1} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{\text{в}_1} & 0 \\ \frac{6EI_2}{\text{в}_1^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{\text{в}_1^3} & \frac{6EI_2}{\text{в}_1^2} & 0 & \frac{12EI_2}{\text{в}_1^3} \end{bmatrix}. \qquad (3.3)$$

Для стержня *«k»* матрица жесткости в локальной системе координат:

$$(R')^{k}=\begin{bmatrix} \frac{4EI_3}{h_3} & 0 & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{2EI_3}{h_3} & 0 & \frac{6EI_3}{h_3^2} \\ 0 & \frac{EA_3}{h_3} & 0 & 0 & -\frac{EA_3}{h_3} & 0 \\ -\frac{6EI_3}{h_3^2} & 0 & \frac{12EI_3}{h_3^3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & 0 & -\frac{12EI_3}{h_3^3} \\ \frac{2EI_3}{h_3} & 0 & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{4EI_3}{h_3} & 0 & \frac{6EI_3}{h_3^2} \\ 0 & -\frac{EA_3}{h_3} & 0 & 0 & \frac{EA_3}{h_3} & 0 \\ \frac{6EI_3}{h_3^2} & 0 & -\frac{12EI_3}{h_3^3} & \frac{6EI_3}{h_3^2} & 0 & \frac{12EI_3}{h_3^3} \end{bmatrix}. \qquad (3.4)$$

Составление матрицы направляющих косинусов *«C»* для стержней (рис. а-в)

 Рис. а	 Рис. б	 Рис. в
cos (x' x)=cos90^0=0 cos (x' y)=cos0^0=1 cos (y' x)=cos0^0=1 cos (y' y)=cos90^0=0 sin (x' x)=sin90^0=1	cos (x' x)=cos0^0=1 sin (x' y)=sin0^0=0	cos (x' x)=cos(-90^0)=0 cos (x' y)= cos180^0=-1 sin (x' y)=sin(-90^0)=-1 sin (x' y)=sin180^0=0

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&l&m\\0&-m&l\end{bmatrix},$$

$$C^f=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&\sin\alpha\\0&-\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}= \;=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}. \qquad (3.5)$$

$$C^j=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \qquad (3.6)$$

$$C^k=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}. \qquad (3.7)$$

Составление матрицы преобразовали *V* для каждого стержня

$$V^{(b)}=\begin{bmatrix}cf&0\\0&cf\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1&0\end{bmatrix},$$

$$V^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4 Составление матрицы жесткости отдельного стержня в глобальной системе координат

Составление матрицы жесткости для каждого стержня в общей системе координат *(x, y)*:

$$R = V^T \cdot R' \cdot V.$$

Рассмотрим каждый стержень в отдельности (рис. 2.1).

а. Стержень *«f»* (рис. 1.1)

$$R^f = (V^f)^T \cdot (R')^f \cdot V^f.$$

$$R^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{h_1} & 0 & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{2EI_1}{h_1} & 0 & \frac{6EI_1}{h_1^2} \\ 0 & \frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{h_1} & 0 \\ -\frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \frac{12EI_1}{h_1^3} & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & -\frac{12EI_1}{h_1^3} \\ \frac{2EI_1}{h_1} & 0 & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{4EI_1}{h_1} & 0 & \frac{6EI_1}{h_1^2} \\ 0 & -\frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 & \frac{EA_1}{h_1} & 0 \\ \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & -\frac{12EI_1}{h_1^3} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \frac{12EI_1}{h_1^3} \end{bmatrix}.$$

$$
\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \frac{2EI_1}{h_1} & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 \\ \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & 0 & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{h_1} \\ \frac{2EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \frac{4EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 \\ -\frac{6EI_1}{h_1^2} & -\frac{12EI_1}{h_1^3} & 0 & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \frac{EA_1}{h_1} \end{bmatrix}. \quad (4.1)
$$

б. Стержень *«j»* (рис. 1.1)

$$
R^j = \left(V^j\right)^T \cdot \left(R'\right)^j \cdot V^j
$$

$$
R^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{4EI_2}{e_1} & 0 & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{2EI_2}{e_1} & 0 & \frac{6EI_2}{e_1^2} \\ 0 & \frac{EA_2}{e_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{e_1} & 0 \\ -\frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & \frac{12EI_2}{e_1^3} & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{e_1^3} \\ \frac{2EI_2}{e_1} & 0 & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{4EI_2}{e_1} & 0 & \frac{6EI_2}{e_1^2} \\ 0 & -\frac{EA_2}{e_1} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{e_1} & 0 \\ \frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{e_1^3} & \frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & \frac{12EI_2}{e_1^3} \end{bmatrix} \cdot
$$

$$
\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_2}{e_1} & 0 & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{2EI_2}{e_1} & 0 & \frac{6EI_2}{e_1^2} \\ 0 & \frac{EA_2}{e_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{e_1} & 0 \\ -\frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & \frac{12EI_2}{e_1^3} & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{e_1^3} \\ \frac{2EI_2}{e_1} & 0 & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{4EI_2}{e_1} & 0 & \frac{6EI_2}{e_1^2} \\ 0 & -\frac{EA_2}{e_1} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{e_1} & 0 \\ \frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{e_1^3} & \frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & \frac{12EI_2}{e_1^3} \end{bmatrix}. \quad (4.2)
$$

в. Стержень *«k»* (рис. а)

$$
R^k = \left(V^k\right)^T \cdot \left(R'\right)^k \cdot V^k, \quad (4.3)
$$

$$R^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{4EI_з}{e_1} & 0 & -\frac{6EI_2}{h_з^2} & \frac{2EI_з}{h_з} & 0 & \frac{6EI_з}{h_з^2} \\ 0 & \frac{EA_з}{h_з} & 0 & 0 & -\frac{EA_з}{h_з} & 0 \\ -\frac{6EI_з}{h_з^2} & 0 & \frac{12EI_з}{h_з^3} & -\frac{6EI_з}{h_з^2} & 0 & -\frac{12EI_з}{h_з^3} \\ \frac{2EI_з}{h_з} & 0 & -\frac{6EI_з}{h_з^2} & \frac{4EI_з}{h_з} & 0 & \frac{6EI_з}{h_з^2} \\ 0 & -\frac{EA_з}{h_з} & 0 & 0 & \frac{EA_з}{h_з} & 0 \\ \frac{6EI_з}{h_з^2} & 0 & -\frac{12EI_з}{h_з^2} & \frac{6EI_з}{h_з^2} & 0 & \frac{12EI_з}{h_з^3} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_з}{h_з} & -\frac{6EI_з}{h_з^2} & 0 & \frac{2EI_з}{h_з} & -\frac{6EI_з}{h_з^2} & 0 \\ -\frac{6EI_з}{h_з^2} & \frac{12EI_з}{h_з^3} & 0 & -\frac{6EI_з}{h_з^2} & -\frac{12EI_з}{h_з^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_з}{h_з} & 0 & 0 & -\frac{EA_з}{h_з} \\ \frac{2EI_з}{h_з} & -\frac{6EI_з}{h_з^2} & 0 & \frac{4EI_з}{h_з} & \frac{6EI_з}{h_з^2} & 0 \\ \frac{6EI_з}{h_з^2} & -\frac{12EI_з}{h_з^3} & 0 & \frac{6EI_з}{h_з^2} & \frac{12EI_з}{h_з^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_з}{h_з} & 0 & 0 & \frac{EA_з}{h_з} \end{bmatrix}. \qquad (4.4)$$

5 Составление матрицы жесткости системы в блочном виде

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ 0 & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ 0 & 0 & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}. \qquad (5.1)$$

Общая матрица жесткости R получается путем суммирования соответствующих элементов матрицы жесткости отдельных стержней. Например, R_{11} – матрица жесткости 1 узла от его единичных смещений; R_{12} – матрица жесткости 1 узла от его единичных смещений 2 узла и т.д. Так как в узлах сходятся несколько стержней, то жесткость узла складывается из жесткостей примыкающих к этому узлу стержней.

$$\begin{bmatrix} R^f_{нн} & R^f_{нк} & 0 & 0 \\ R^f_{кн} & (R^f_{кк} + R^j_{нн}) & R^j_{нк} & 0 \\ 0 & R^j_{кн} & (R^f_{кк} + R^k_{нн}) & R^k_{нк} \\ 0 & 0 & R^k_{кн} & R^k_{кк} \end{bmatrix}. \qquad (5.2)$$

6 Составление полной матрицы жесткости системы

Учитывая (5.2), полная матрица жесткости в глобальной системе координат для рамы (рис. 2.1), имеет вид (6.1). Размерность матрицы R равна 12x12.

$$
\begin{bmatrix}
\frac{4EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \frac{2EI_1}{h_1} & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & 0 & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \left(\frac{4EI_1}{h_1}+\frac{4EI_2}{e_1}\right) & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{2EI_2}{e_1} & 0 & \frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{6EI_1}{h_1^2} & -\frac{12EI_1}{h_1^3} & 0 & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \left(\frac{12EI_1}{h_1^3}+\frac{EA_2}{e_1}\right) & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{EA_1}{h_1} & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & \left(\frac{EA_1}{h_1}+\frac{12EI_2}{e_1^3}\right) & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{e_1^3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{2EI_2}{e_1} & 0 & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & \left(\frac{4EI_2}{e_1}+\frac{4EI_3}{h_3}\right) & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{2EI_3}{h_3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{e_1} & 0 & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \left(\frac{EA_2}{e_1}+\frac{12EI_3}{h_3^3}\right) & 0 & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & -\frac{12EI_3}{h_3^3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{e_1^3} & \frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & \left(\frac{12EI_2}{e_1^3}+\frac{EA_3}{h_3}\right) & 0 & 0 & -\frac{EA_3}{h_3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{h_3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & 0 & \frac{4EI_3}{h_3} & \frac{6EI_3}{h_3^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{h_3^2} & -\frac{12EI_3}{h_3^3} & 0 & \frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{12EI_3}{h_3^3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_3}{h_3} & 0 & 0 & \frac{EA_3}{h_3}
\end{bmatrix}, \qquad (6.1)
$$

7 Составление матрицы жесткости без учета продольных сил

Полагаем:

$$\frac{EA_1}{h_1}=\frac{EA_2}{e_1}=\frac{EA_3}{h_2}=0 \quad .$$

Матрицы жесткости в глобальной системе координат (6.1) упрощается, выбрасываем нулевые строки и столбцы. Заданная рама имеет не 12 степеней свободы, а 8.

Матрицы жесткости для стержня *«f»* в локальной системе координат имеют вид:

$$(R')^f=\begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{h_1} & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{2EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} \\ -\frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & -\frac{12EI_1}{h_1^3} \\ \frac{2EI_1}{h_1} & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{4EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} \\ \frac{6EI_1}{h_1^2} & -\frac{12EI_1}{h_1^3} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

стержни *«j»*

$$(R')^j=\begin{bmatrix} \frac{4EI_2}{e_1} & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{2EI_2}{e_1} & \frac{6EI_2}{e_1^2} \\ -\frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{12EI_2}{e_1^3} & -\frac{6EI_1}{e_1^2} & -\frac{12EI_2}{e_1^3} \\ \frac{2EI_2}{e_1} & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{4EI_2}{e_1} & \frac{6EI_2}{e_1^2} \\ \frac{6EI_2}{e_1^2} & -\frac{12EI_2}{e_1^3} & \frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{12EI_2}{e_1^3} \end{bmatrix}. \tag{7.2}$$

Стержень *«k»*

$$(R')^k=\begin{bmatrix} \frac{4EI_3}{h_3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{2EI_3}{h_3} & \frac{6EI_3}{h_3^2} \\ -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{12EI_3}{h_3^3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & -\frac{12EI_3}{h_3^3} \\ \frac{2EI_3}{h_3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{4EI_3}{h_3} & \frac{6EI_3}{h_3^2} \\ \frac{6EI_3}{h_3^2} & -\frac{12EI_3}{h_3^3} & \frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{12EI_3}{h_3^3} \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

Матрицы стержня *«f»* в общей системе координат

$$R^f=\begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{2EI_1}{h_1} & -\frac{6EI_1}{h_1^2} \\ \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} \\ \frac{2EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{4EI_1}{h_1} & -\frac{6EI_1}{h_1^2} \\ -\frac{6EI_1}{h_1^2} & -\frac{12EI_1}{h_1^3} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} \end{bmatrix}, \tag{7.4}$$

стержень *«j»*

$$R^{j}=\begin{bmatrix} \frac{4EI_2}{\textit{в}_1} & -\frac{6EI_2}{\textit{в}_1^2} & \frac{2EI_2}{\textit{в}_1} & \frac{6EI_2}{\textit{в}_1^2} \\ -\frac{6EI_2}{\textit{в}_1^2} & \frac{12EI_2}{\textit{в}_1^3} & -\frac{6EI_1}{\textit{в}_1^2} & -\frac{12EI_2}{\textit{в}_1^3} \\ \frac{2EI_2}{\textit{в}_1} & -\frac{6EI_2}{\textit{в}_1^2} & \frac{4EI_2}{\textit{в}_1} & \frac{6EI_2}{\textit{в}_1^2} \\ \frac{6EI_2}{\textit{в}_1^2} & -\frac{12EI_2}{\textit{в}_1^3} & \frac{6EI_2}{\textit{в}_1^2} & \frac{12EI_2}{\textit{в}_1^3} \end{bmatrix}, \tag{7.5}$$

стержень *«k»*

$$R^{k}=\begin{bmatrix} \frac{4EI_3}{h_3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{2EI_3}{h_3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} \\ -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{12EI_3}{h_3^3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & -\frac{12EI_3}{h_3^3} \\ \frac{2EI_3}{h_3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{4EI_3}{h_3} & \frac{6EI_3}{h_3^2} \\ \frac{6EI_3}{h_3^2} & -\frac{12EI_3}{h_3^3} & \frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{12EI_3}{h_3^3} \end{bmatrix}. \tag{7.6}$$

Матрицы жесткости в виде:

$$\begin{bmatrix} R^{f}_{\text{нн}} & R^{f}_{\text{нк}} & 0 & 0 \\ R^{f}_{\text{кн}} & \left(R^{f}_{\text{кк}}+R^{j}_{\text{нн}}\right) & R^{j}_{\text{нк}} & 0 \\ 0 & R^{j}_{\text{кн}} & \left(R^{j}_{\text{кк}}+R^{k}_{\text{нн}}\right) & R^{k}_{\text{нк}} \\ 0 & 0 & R^{k}_{\text{кн}} & R^{k}_{\text{кк}} \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

В качестве закрепления материала по составлению матриц жесткости системы дополнительно предлагается составить матрицу жесткости системы в блочной форме для следующих схем (рис. 7.1).

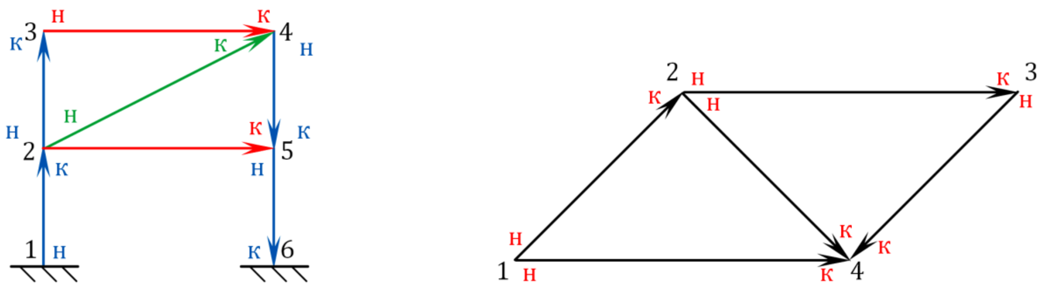


Рис. 7.1. Ориентация стержней: н – начало стержня, к – конец стержня

Без учета продольных сил матрица жесткости упрощается и имеет вид:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{4EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{2EI_1}{h_1} & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \left(\frac{4EI_1}{h_1}+\frac{4EI_2}{e_1}\right) & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{2EI_2}{e_1} & 0 & \frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & 0 \\
-\frac{6EI_1}{h_1^2} & -\frac{12E}{h_1^3} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \left(\frac{12EI_1}{h_1^3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & \left(\frac{2EI_2}{e_1^3}\right) & --\frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{e_1^3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{2EI_2}{e_1} & 0 & -\frac{6EI_2}{e_1^2} & \left(\frac{4EI_2}{e_1}+\frac{4EI_3}{h_3}\right) & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{6EI_2}{e_1^2} & \frac{2EI_3}{h_3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \left(\frac{12EI_3}{h_3^3}\right) & 0 & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & -\frac{12EI_3}{h_3^3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{e_1^3} & \frac{6EI_2}{e_1^2} & 0 & \left(\frac{12EI_2}{e_1^3}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{h_3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & 0 & \frac{4EI_3}{h_3} & \frac{6EI_3}{h_3^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{h_3^2} & -\frac{12EI_3}{h_3^3} & 0 & \frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{12EI_3}{h_3^3}
\end{bmatrix}
$$

Для 1-схемы (рис. 7.1) матрица жесткости в блочном виде с размерами блоков 3x3, так как с каждым узлом связано по 3 возможных перемещений (горизонтальное, вертикальное и поворот узла) имеет вид:

$$|R| = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & 0 \\ 0 & r_{32} & r_{33} & r_{34} & 0 & 0 \\ 0 & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & 0 \\ 0 & r_{52} & 0 & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{65} & r_{66} \end{vmatrix}.$$

Полная матрица жесткости имеет порядок, равный 18.

Для 2-схемы:

$$|R| = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{vmatrix}.$$

Полная матрица жесткости имеет порядок, равный 12.

Общая матрица жесткости получается путем суммирования соответствующих матриц жесткости отдельных элементов.

8 Примеры расчета статически неопределимых рам

Пример 1

Задана рама, указанная на рисунке 8.1. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, используя метод конечных элементов.

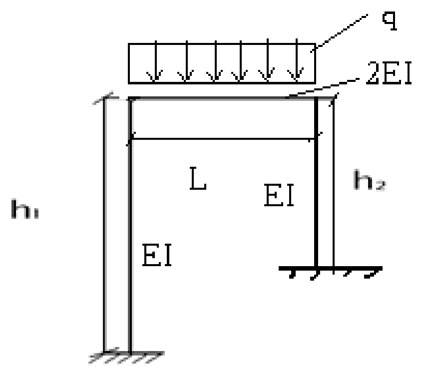


Рис. 8.1

Дано:

h_1 =4 м; h_2=2 м; L=4 м; q=1т/м.

Сечения стержней представляют собой двутавр: для стоек двутавр №16Б2, для ригеля №18Б1. По сортаменту геометрические характеристики сечений следующие:

двутавр №14Б2

$A_1 = A_c = 16{,}43 см^2 = 16{,}43*10^{-4} м^2$, $I_c = 540$ см^4, E = 210000 Мпа,

$(EA)_c = 34{,}5*10^6$ кг $= 34{,}5*10^3$ т;

$E\ I_c = 1134*10^2$ кгм^2 = 113,4 тм^2.

двутавр №16Б2

$A_2 = A_p = 19{,}58 см^2 = 19{,}58*10^{-4} м^2$, $I_p = 1063$ см^4, E = 210000 Мпа,

$(EA)_p = 19{,}58*10^6$ кг $=19{,}58*10^3$ т; $EI_p = 2126*10^2$ кгм^2 = 212,6 тм^2.

В дальнейшем для сокращения выкладок вводятся следующие упрощения:

$(EA)_c = 1$; $(EA)_p = 1{,}19$; $(EI)_c = 32{,}9\ A_c = 32{,}9$; $(EI)_p = 64{,}76$.

В результате данного упрощения, все полученные результаты необходимо в дальнейшем уменьшить на истинную величину жесткости стойки, равной $(EA)_c = 34{,}5*10^3$ т.

Решение

Рама статически неопределима 3 раза. При расчете методом перемещений необходимо определить степень кинематической неопределимости, которая определяется как сумма жестких узлов и количества независимых линейных смещений узлов. Эта величина равна 3. Необходимо построить грузовую эпюру изгибающих моментов в основной системе метода перемещений. Реактивные усилия в узлах представляют собой внешнюю узловую нагрузку.

Строим матрицу жесткости в глобальной системе координат, используя упрощения для физико-геометрических характеристик стержней системы.

$(EA)_c$=1; $(EA)_p$=1,19;

$(EI)_c$=32,9 A_c=32,9; $(EI)_p$=64,76.

Матрица жесткости в глобальной системе координат имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix}
32.9 & 12.34 & 0 & 16.45 & -12.34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
12.34 & 6.17 & 0 & 12.34 & 6.17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
16.45 & 12.34 & 0 & 97.66 & -12.34 & -24.3 & 32.38 & 0 & 24.3 & 0 & 0 & 0 \\
-12.34 & -6.17 & 0 & 12.3 & 6.765 & 0 & 0 & 0.595 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.25 & -24.3 & 0 & 12.39 & -24.3 & 0 & -12.14 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 32.38 & 0 & -24.3 & 130.56 & -43.35 & 24.3 & 32.9 & -49.35 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.595 & 0 & -49.35 & 49.945 & 0 & -49.35 & -46.35 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12.14 & 24.3 & 0 & 12.64 & 0 & 0 & -0.5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32.9 & -49.35 & 0 & 65.8 & 49.35 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49.35 & -49.35 & 0 & 49.35 & 49.35 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5
\end{bmatrix} \tag{8.1}$$

Матрица жесткости без учета продольных сил имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix}
32.9 & 12.34 & 16.45 & -12.34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
12.34 & 6.17 & 12.34 & 6.17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
16.45 & 12.34 & 97.66 & -12.34 & -24.3 & 32.38 & 0 & 24.3 & 0 & 0 \\
-12.34 & -6.17 & 12.3 & 6.17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -24.3 & 0 & 12.14 & -24.3 & 0 & -12.14 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 32.38 & 0 & -24.3 & 130.56 & -43.35 & 24.3 & 32.9 & -49.35 \\
0 & 0 & 0 & -0.595 & 0 & -49.35 & 49.35 & 0 & -49.35 & -46.35 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -12.14 & 24.3 & 0 & 12.14 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32.9 & -49.35 & 0 & 65.8 & 49.35 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49.35 & -49.35 & 0 & 49.35 & 49.35
\end{bmatrix} \qquad (8.2)$$

Так как заданная рама загружена только по ригелю, то заменяем распределенную нагрузку сосредоточенными силами, приложенными в узлах 2 и 3 (табл. 3.1). Используя табличные данные для статически неопределимых стержней, вектор внешней нагрузки имеет вид:

$$\vec{P} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\dfrac{qL}{2} \\ \dfrac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\dfrac{qL}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1{,}33 \\ 0 \\ -2 \\ 1{,}33 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} . \tag{8.3}$$

Вектор перемещений определяется из следующего уравнения:

$$R\vec{Z} - \vec{P} = 0,$$

где $\vec{Z}$ – вектор перемещений, R – матрица жесткости.

$$\vec{Z} = R^{-1}\vec{P},$$

R^{-1} – обратная матрица.

Вектор неизвестных внешних усилий определяется из следующего уравнения:

$$L_\delta \vec{X} + \vec{\Delta}_p = 0 \qquad \vec{X} = -(L_\delta)^{-1}\vec{\Delta}_p ,$$

$\vec{Z}$ – вектор неизвестных сил, $\vec{\Delta}_p$ – вектор перемещений.

$$L_\delta = L_1^T B L_1,$$

L_1 – обратная матрица, B – матрица податливости, B=R^{-1}, R – матрица жесткости системы.

В результате расчета по программе «Лира» получены следующие значения векторов перемещений узлов и внутренних усилий в стержнях заданной статически неопределимой рамы. Вектор перемещений имеет вид (8.4).

$$\vec{Z} = \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \varphi_2 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \varphi_3 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \varphi_4 \\ \Delta_{4x} \\ \Delta_{4y} \end{Vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5{,}355 \\ -3{,}9536 \\ -0{,}236 \\ 0{,}07 \\ -3{,}968 \\ -8{,}746 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Bigg| \quad . \tag{8.4}$$

Составляющие вектора (8.4) представляют собой компоненты перемещения в 4 узловых точках, которые следуют в следующем порядке: первый – угол поворота, последующие – 2 поступательные перемещения в направлении осей x, y. Первый индекс означает номер узла.

Для описания структуры системы строим прямоугольную матрицу S_c, число строк которой равно числу узлов, а число столбцов – числу стержней. Любая строка при этом соответствует узлу, номер которого совпадает с номером строки, а любой столбец – элементу, имеющему номер, совпадающий с номером рассматриваемого столбца. Кроме того, за начало элемента будем принимать тот его конец, который примыкает к узлу с меньшим номером. Значащими элементами матрицы S_c являются числа 1 и -1. В каждом столбце отличны от нуля только два элемента: 1 располагается в той строке, номер которого совпадает с узлом, определяющим начало элемента, а -1 – в строке, соответствующий концу элемента. Для изображенной на рисунке 11 рамы матрица S_c имеет вид:

$$S_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Каждая строка показывает конец и начало сходящихся стержней в узле, например, вторая строка показывает, что во втором узле сходятся конец первого и начало второго стержней.

Связь между векторами узловых перемещений всех конечных элементов с перемещениями узлов имеет следующий вид:

$$\vec{V} = S_1^T \vec{Y}, \tag{8.5}$$

где S_1 – матрица равновесия, полученная из матрицы S_c заменой в последней элементов 1 на матрицы

$$E_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

элементов -1 на матрицы

$$E_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Нулевые элементы матрицы S_c заменяются на матрицы

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрица S_1 имеет 3m строк и 6s столбцов.

$$S_1 = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix},$$

$$S_1^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вектор перемещений узлов элементов имеет вид:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5{,}355 \\ -3{,}953 \\ -0{,}236 \\ 5{,}355 \\ -3{,}953 \\ -0{,}236 \\ 0{,}07 \\ -3{,}968 \\ -8{,}746 \\ 0{,}07 \\ -3{,}968 \\ -8{,}746 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Вектор усилий по всем стержням имеет вид (8.6).

$$\vec{X} = B \cdot \vec{V} = R^{-1} \cdot \vec{V} . \qquad (8.6)$$

Составляющие вектора (8.6) представляют собой компоненты внутренних усилий в начальной и конечной точках каждого стержня в отдельности, соответственно это силы в направлении оси x, y и изгибающие моменты. 1 индекс означает н – начало, к – конец стержня, второй индекс означает номер стержня.

$$\vec{X} = \begin{vmatrix} M_{H1} \\ X_{H1} \\ Y_{H1} \\ M_{K1} \\ X_{K1} \\ Y_{K1} \\ M_{H2} \\ X_{H2} \\ Y_{H2} \\ M_{K2} \\ X_{K2} \\ Y_{K2} \\ M_{H3} \\ X_{H3} \\ Y_{H3} \\ M_{K3} \\ X_{K3} \\ Y_{K3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,473 \\ 2,034 \\ 0,312 \\ 0,777 \\ -2,034 \\ 0,312 \\ -0,777 \\ -0,312 \\ 2,034 \\ -0,643 \\ -0,312 \\ -1,966 \\ 0,643 \\ -0,312 \\ -1,966 \\ 0,018 \\ -0,312 \\ -1,966 \end{vmatrix} .$$

Реакции опор в 1 и 4 узлах соответственно равны:

$$\vec{R} = \begin{vmatrix} -0,473 \\ 0,312 \\ -2,034 \\ -0,293 \\ -0,312 \\ -1,966 \end{vmatrix} .$$

Окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил представлены на рисунке 8.2.

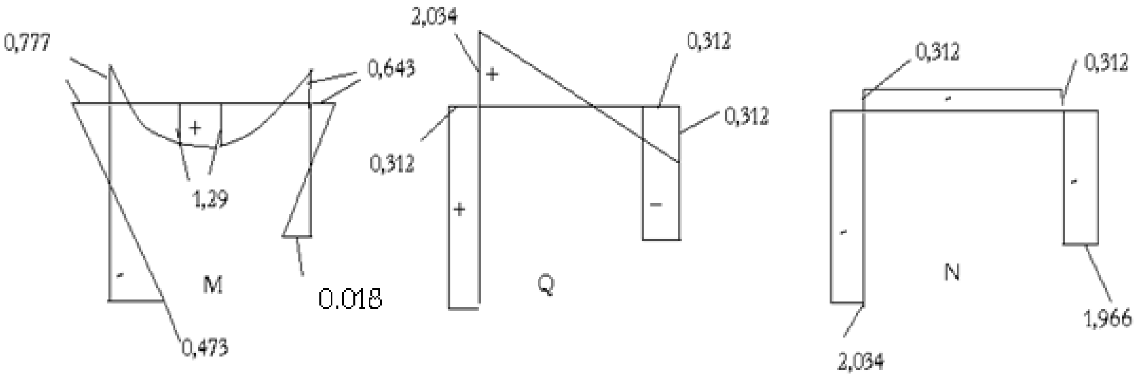


Рис. 8.2

Равновесие внешних сил удовлетворяется (рис. 8.3).

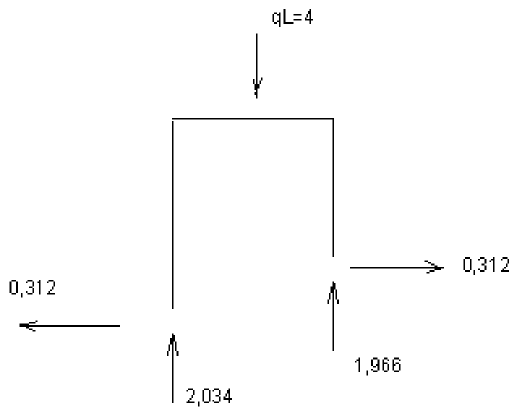
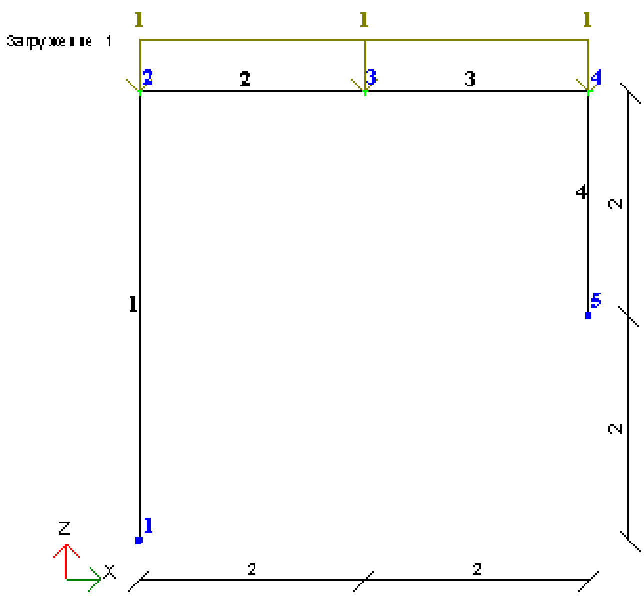


Рис. 8.3

На рисунках (8.4-8.6)представлены результаты численного расчета по программе «Лира». На рисунке 8.4 показана расчетная схема рамы. На рисунке 8.5 представлены мозаики линейных и углового перемещения, на рисунке 8.6 - эпюры и мозаики внутренних усилий.

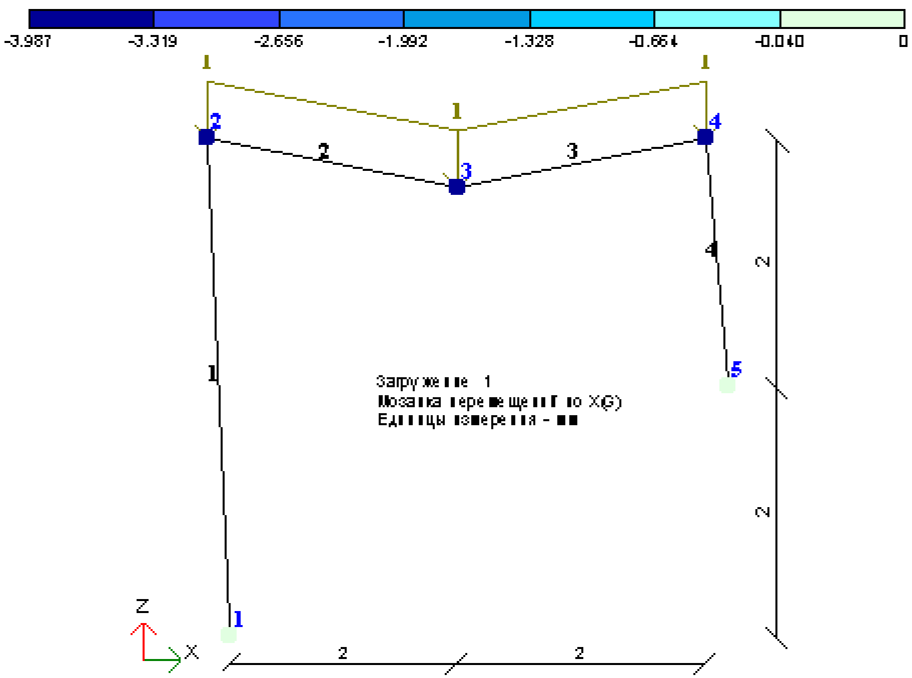


Данные расчета по программе Лира

Номер элемента	Сечение	Параметры
1, 4	Двутавр 14Б2	H1=4 м, H2=2 м, I=541 см4, A=16.43 см2, E=210000 Мпа
2, 3	Двутавр 18Б1	L=4 м, I=1063 см4, A=19.58 см2, E=210000 Мпа

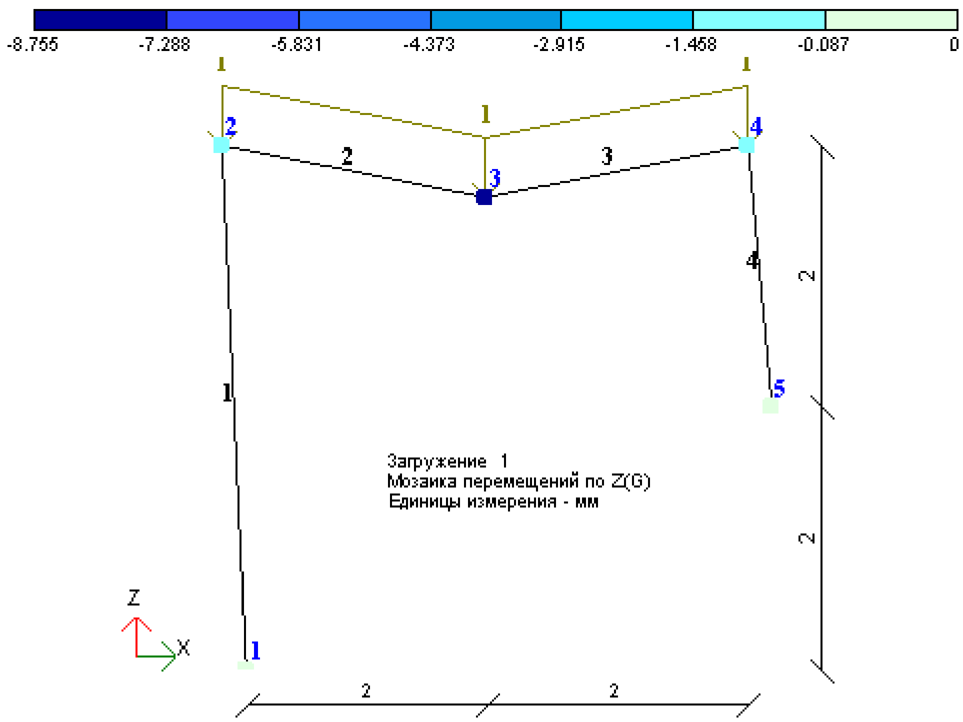
Рис. 8.4. Расчетная схема рамы

а)



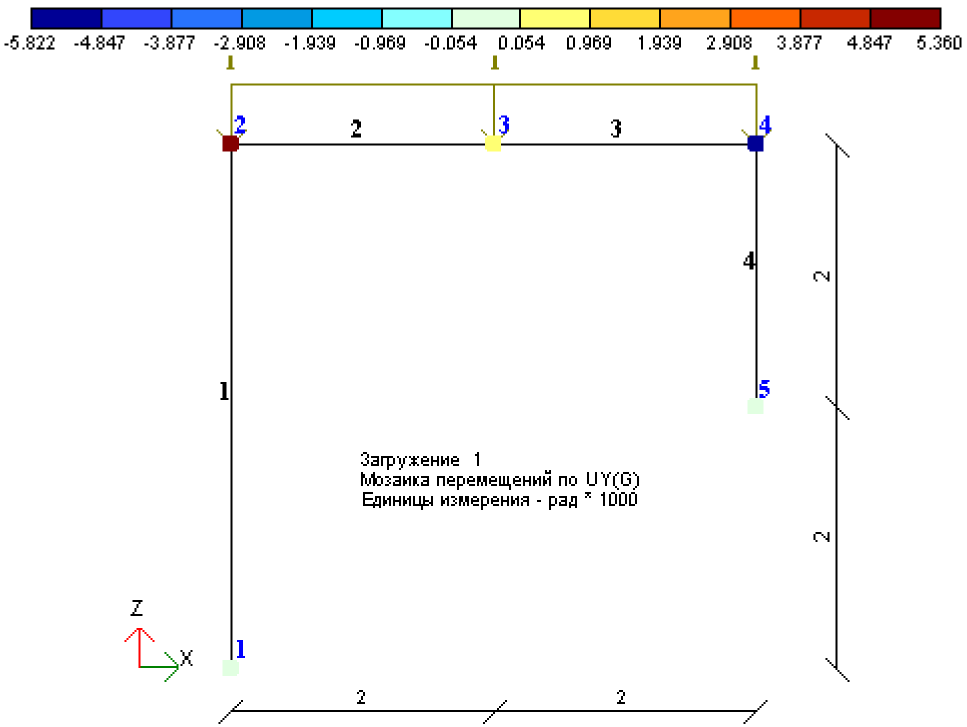
-3.987
-3.319
-2.656
-1.992
-1.328
-0.664
-0.040
0

б)



-8.755
-7.288
-5.831
-4.373
-2.915
-1.458
-0.087
0
Загружение 1
Мозаика перемещений по Z(G)
Единицы измерения - мм

в)



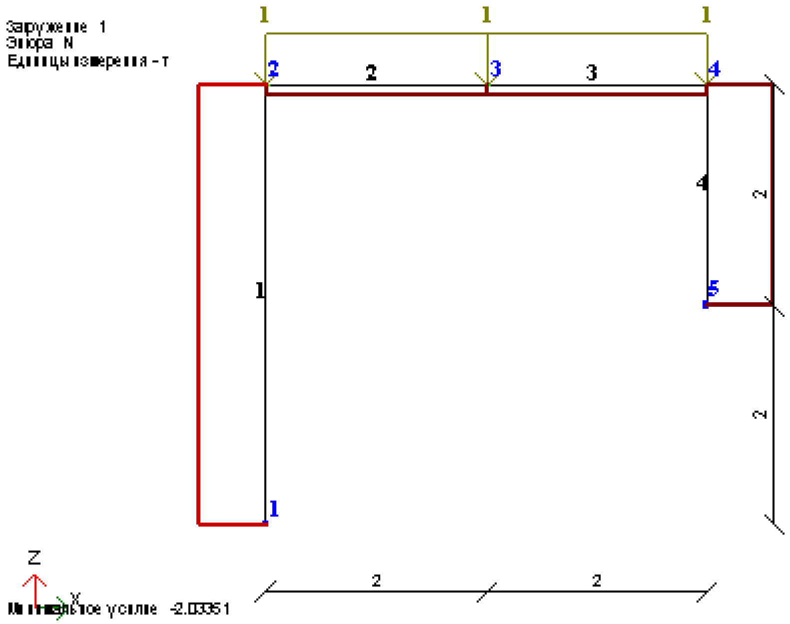
Перемещения узлов

№ узла	Перемещения					
	X (мм)	Y (мм)	Z (мм)	UX (рад*1000)	UY (рад*1000)	UZ (рад*1000)
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-3.953	0.000	-0.236	0.000	5.355	0.000
3	-3.968	0.000	-8.746	0.000	0.070	0.000
4	-3.983	0.000	-0.114	0.000	-5.816	0.000
5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

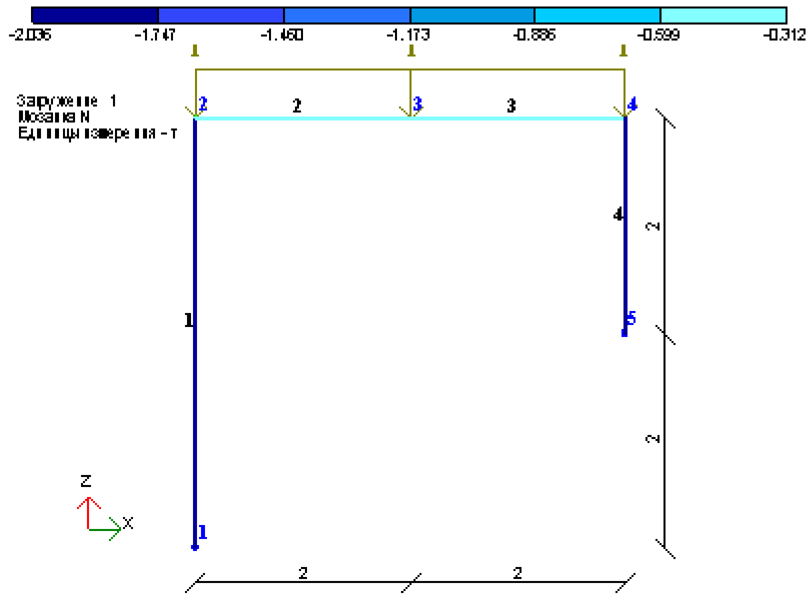
Рис. 8.5. Мозаики линейных и угловых перемещений
а, б – линейные перемещения по оси X и Z, соответственно; в – угловое перемещение вокруг оси OY

Таблица усилий (стержни)									
Усилия									
№ элемента	**№ сечения**	N (т)	My (т*м)	Qz (т)	**№ элемента**	**№ сечения**	N (т)	My (т*м)	Qz (т)
1	**1**	-2.034	-0.473	0.312	**3**	**1**	-0.312	1.290	0.034
1	**2**	-2.034	0.777	0.312	**3**	**2**	-0.312	-0.643	-1.966
2	**1**	-0.312	-0.777	2.034	**4**	**1**	-1.966	0.643	-0.312
2	**2**	-0.312	1.290	0.034	**4**	**2**	-1.966	0.018	-0.312

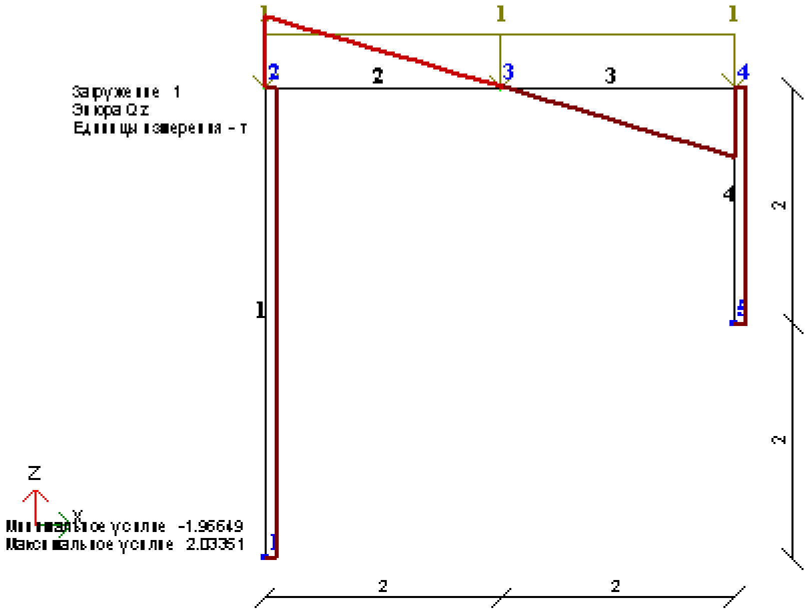
а)



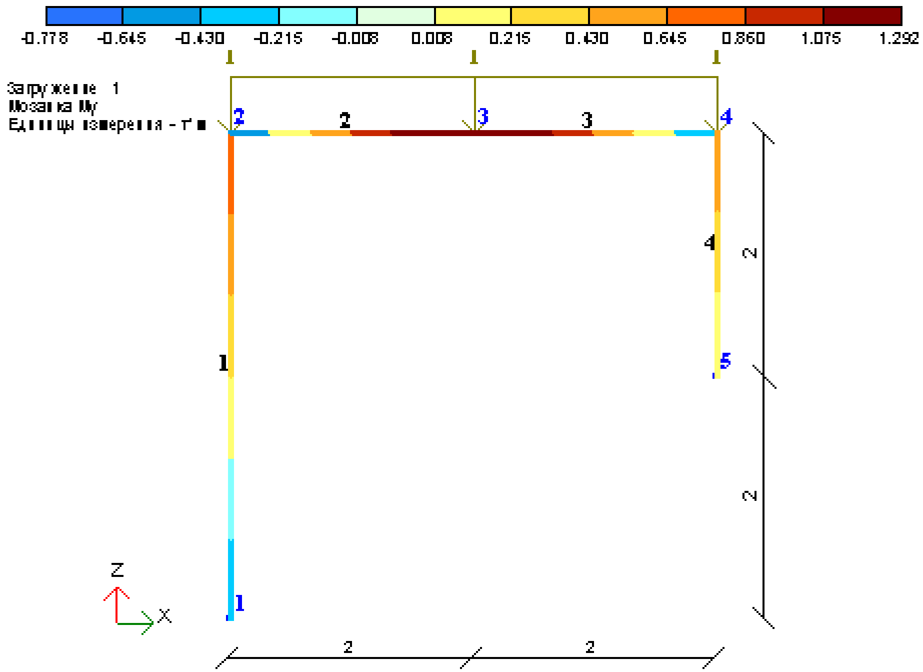
б)



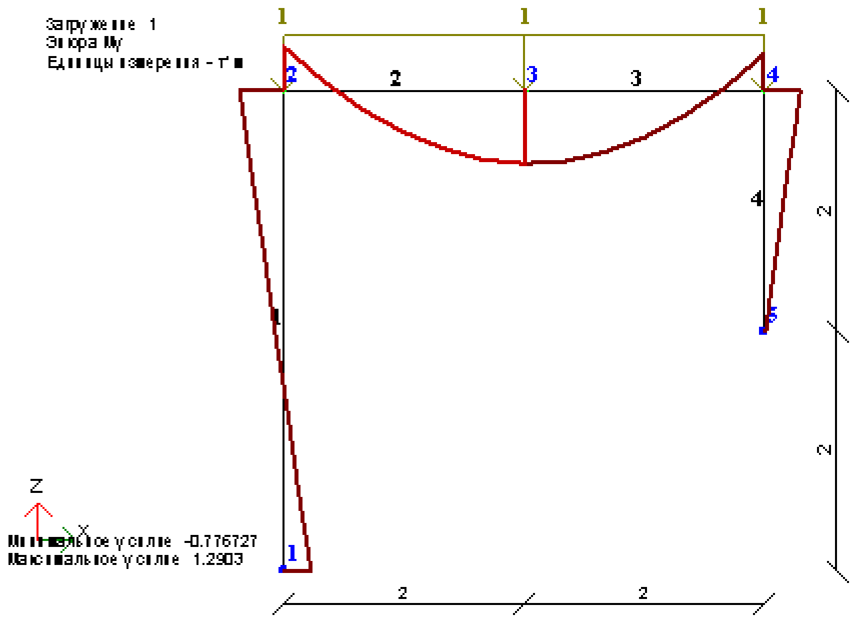
в)


Загружение 1
Эпюра Qz
Единицы измерения - т
Минимальное усилие -1.96649
Максимальное усилие 2.03351

г)


-0.778 -0.645 -0.430 -0.215 -0.008 0.008 0.215 0.430 0.645 0.860 1.075 1.292
Загружение 1
Мозаика My
Единицы измерения - т*м

д)



е)

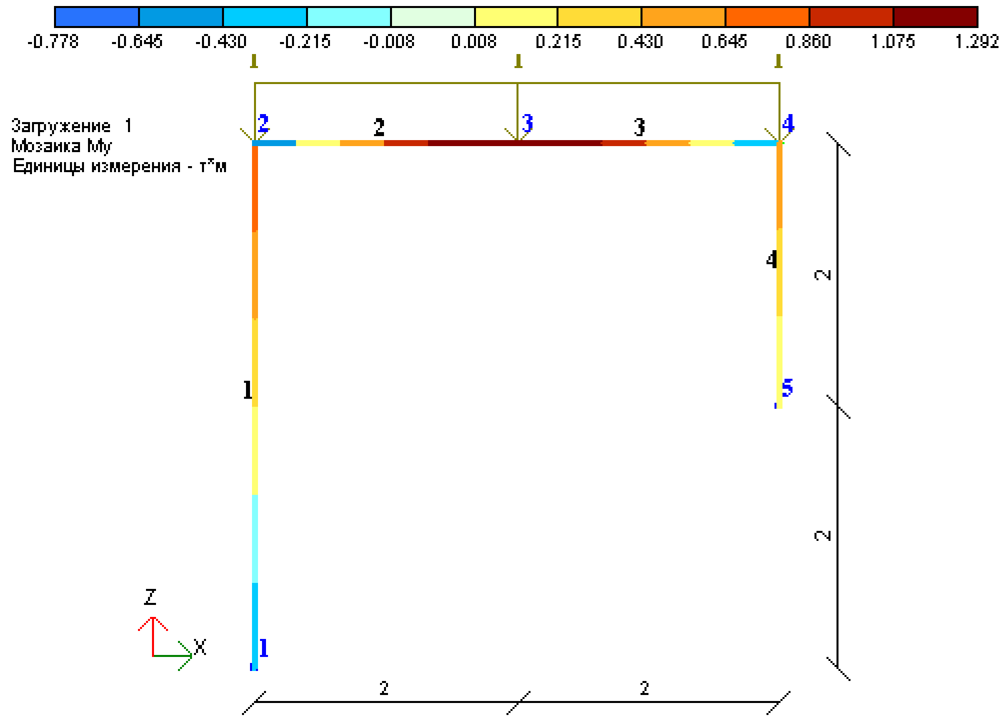


Рис. 8.6. Эпюры и мозаики внутренних усилий:
а, б – эпюра и мозаика продольной силы N; в, г – эпюра и мозаика поперечной силы Q;
д, е – эпюра и мозаика изгибающего момента M

Пример 2

Рассмотрим плоскую статически неопределимую раму (рис.8.7), находящуюся под действием внешней статической нагрузки (рис. 8.8).

На рисунках 8.7, 8.8 представлены размеры, геометрические характеристики сечений и внешняя неподвижная нагрузка, действующая на заданную раму. Представлены нумерация узлов и стержней заданной рамы. Количество узлов равно 6, а количество стержней равно 5.

Используя метод конечных элементов, необходимо определить перемещения узлов, внутренние усилия, построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Сделать деформационные и статические проверки.

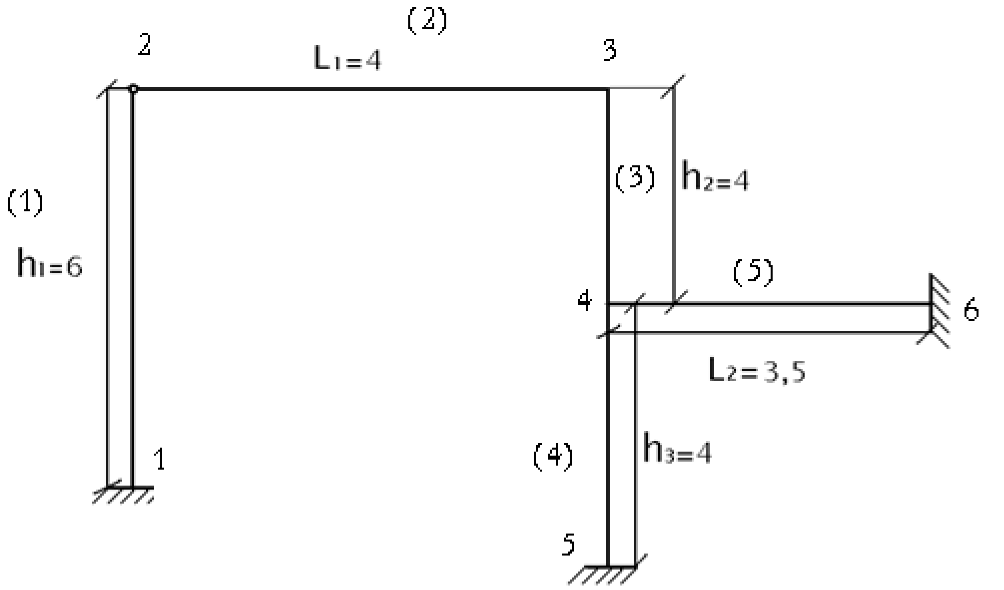


Рис. 8.7. Заданная система

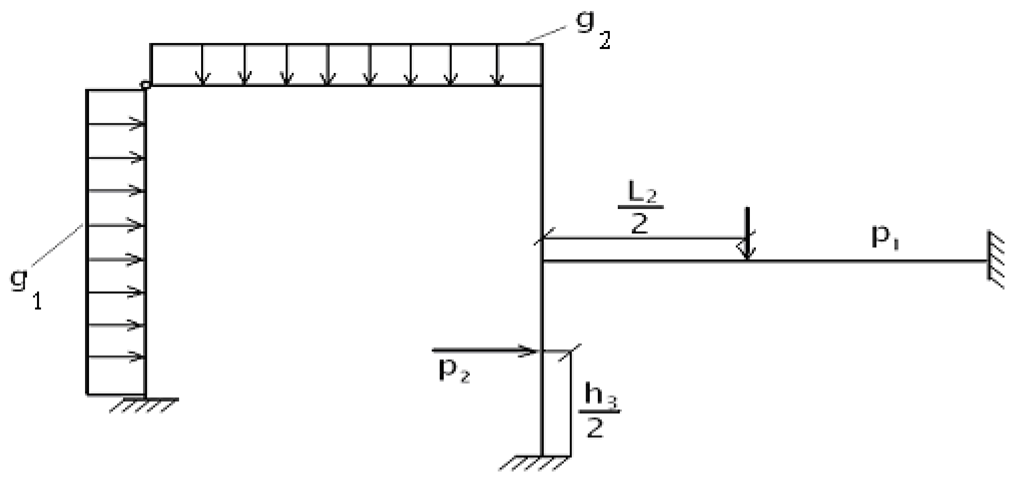


Рис. 8.8. Внешняя нагрузка

Заданы следующие параметры:
q_1=30 Кн/м, q_2=40 Кн/м, P_1=30 Кн, P_2=40 Кн, все стержни выполнены из одного материала, поэтому для простоты все жесткости выражены через одну

из жесткостей, принятую условно за единицу. Для дальнейшего упрощения задачи принимаем следующие значения жесткостей на изгиб и на растяжение: EI_1 =1,43, EI_2 =2, EI_3 =2, EI_4 =1, EI_5 =2, EA_1=0,43, EA_2= EA_3 = EA_5=0,6; EA_4=0,3. Если для 4 стержня (двутавр №14Б) EI_4=1134 Кнм^2, то полученные результаты необходимо уменьшить на величину 1134, размерность окончательных моментов выражается в Кнм, а усилий в Кн.

На рис. 8.9 показаны со штрихом локальные и без штриха глобальная системы координат (Х,У).

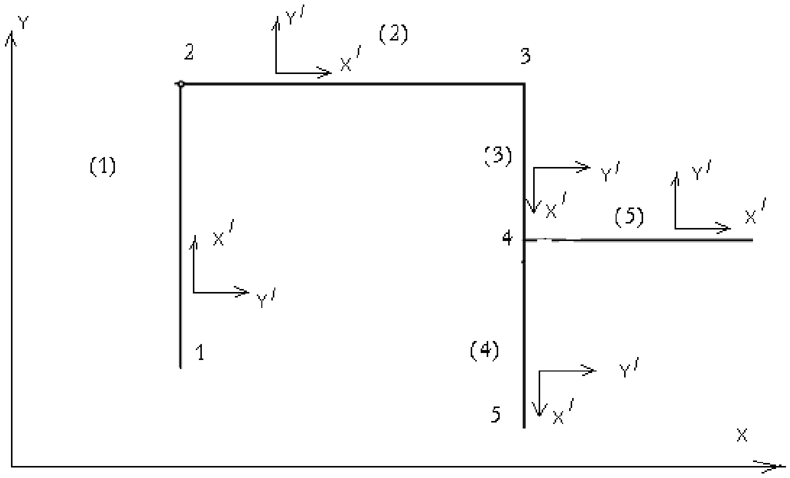


Рис. 8.9

Используя табличные данные (табл. 3.1), строим эпюры изгибающих моментов в основной системе метода перемещений, т.е. грузовую эпюру (рис.8.10). Определяем изгибающие моменты во всех узлах и узловые нагрузки (табл. 3.1), представленные на рисунке (рис.8.11).

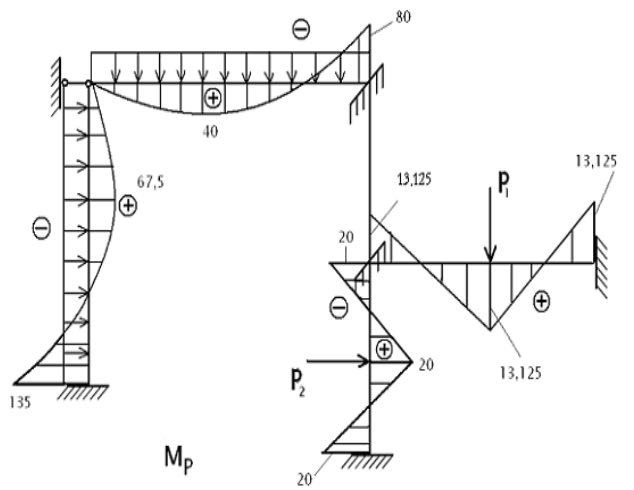


Рис. 8.10. Эпюра изгибающего момента в основной системе метода перемещений от внешней нагрузки

На рисунке 8.11 представлена внешняя узловая нагрузка:

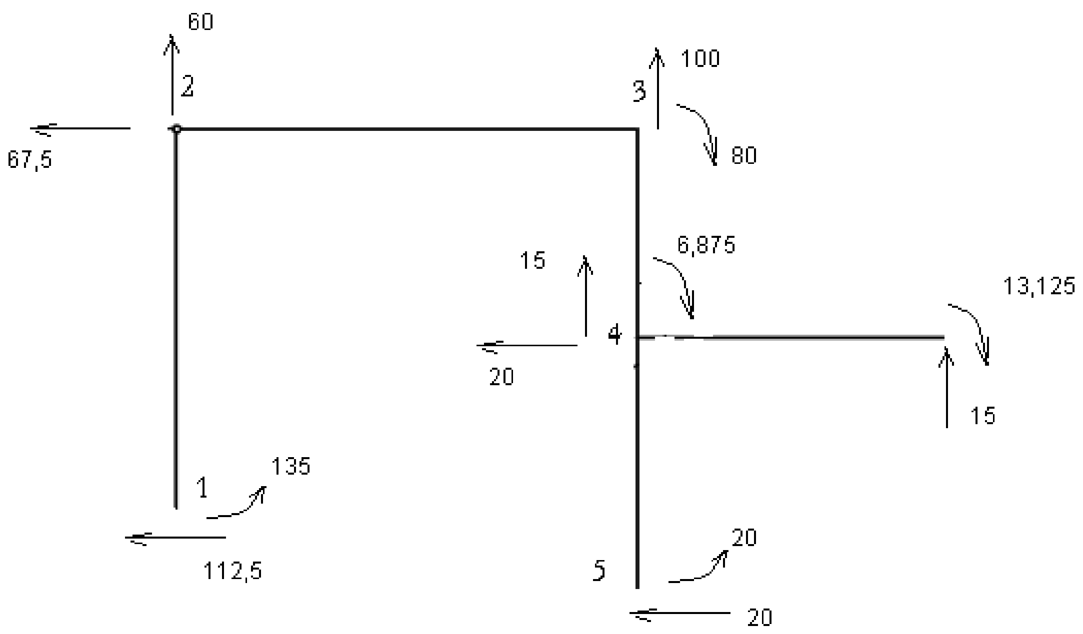


Рис. 8.11

Вектор внешней узловой нагрузки в глобальной системе координат имеет вид:

$$\vec{P} == \begin{vmatrix} \vec{M} \\ \vec{X} \\ \vec{Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -135 \\ -112{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ -67{,}5 \\ 60 \\ -80 \\ 0 \\ 100 \\ 6{,}875 \\ -20 \\ 15 \\ -20 \\ -20 \\ 0 \\ 13{,}125 \\ 0 \\ 15 \end{vmatrix}.$$

Матрицы жесткости в локальной системе координат для 5 стержней имеют следующий вид:

$$R^{(1)}=\begin{vmatrix} 0{,}953 & 0 & -0{,}238 & 0{,}476 & 0 & 0{,}238 \\ 0 & 0{,}07 & 0 & 0 & -0{,}07 & 0 \\ -0{,}238 & 0 & 0{,}079 & -0{,}238 & 0 & -0{,}079 \\ 0{,}476 & 0 & -0{,}238 & 0{,}953 & 0 & 0{,}238 \\ 0 & -0{,}07 & 0 & 0 & 0{,}07 & 0 \\ 0{,}238 & 0 & -0{,}079 & 0{,}238 & 0 & 0{,}079 \end{vmatrix},$$

$$R^{(2)}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -0{,}75 & 1 & 0 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}15 & 0 & 0 & -0{,}15 & 0 \\ -0{,}75 & 0 & 0{,}375 & -0{,}75 & 0 & -0{,}375 \\ 1 & 0 & -0{,}75 & 2 & 0 & 0{,}75 \\ 0 & -0{,}15 & 0 & 0 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}75 & 0 & -0{,}345 & 0{,}75 & 0 & 0{,}375 \end{vmatrix},$$

$$R^{(3)}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -0{,}75 & 1 & 0 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}15 & 0 & 0 & -0{,}15 & 0 \\ -0{,}75 & 0 & 0{,}375 & -0{,}75 & 0 & -0{,}375 \\ 1 & 0 & -0{,}75 & 2 & 0 & 0{,}75 \\ 0 & -0{,}15 & 0 & 0 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}75 & 0 & -0{,}345 & 0{,}75 & 0 & 0{,}375 \end{vmatrix},$$

$$R^{(4)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -0{,}375 & 0{,}5 & 0 & 0{,}375 \\ 0 & 0{,}075 & 0 & 0 & -0{,}075 & 0 \\ -0{,}375 & 0 & 0{,}1875 & -0{,}375 & 0 & -0{,}1875 \\ 0{,}5 & 0 & -0{,}375 & 1 & 0 & 0{,}375 \\ 0 & -0{,}075 & 0 & 0 & 0{,}075 & 0 \\ 0{,}375 & 0 & -0{,}1875 & 0{,}375 & 0 & 0{,}1875 \end{vmatrix},$$

$$R^{(5)}=\begin{vmatrix} 2{,}286 & 0 & -0{,}98 & 1{,}143 & 0 & 0{,}98 \\ 0 & 0{,}171 & 0 & 0 & -0{,}171 & 0 \\ -0{,}98 & 0 & 0{,}56 & -0{,}98 & 0 & -0{,}56 \\ 1{,}143 & 0 & -0{,}98 & 2{,}286 & 0 & 0{,}98 \\ 0 & -0{,}171 & 0 & 0 & 0{,}171 & 0 \\ 0{,}98 & 0 & -0{,}56 & 0{,}98 & 0 & 0{,}56 \end{vmatrix}.$$

Матрицы преобразования V для каждого стержня:

$$V^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad V^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad V^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$V^5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad V^4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрицы жесткости отдельного стержня в глобальной системе координат:

$$R_1 = (V^1)^T \cdot R^{(1)} \cdot V^1 = \begin{vmatrix} \frac{4EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \frac{2EI_1}{h_1} & -\frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 \\ \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & 0 & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_1}{h_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{h_1} \\ \frac{2EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \frac{4EI_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 \\ \frac{-6EI_1}{h_1^2} & \frac{-12EI_1}{h_1^3} & 0 & \frac{6EI_1}{h_1^2} & \frac{12EI_1}{h_1^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_1}{h_1} & \frac{6EI_1}{h_1^2} & 0 & \frac{EA_1}{h_1} \end{vmatrix},$$

$$R_2 = (V^2)^T \cdot R^{(2)} \cdot V^2 = \begin{vmatrix} \frac{4EI_2}{l_1} & 0 & -\frac{6EI_2}{l_1^2} & \frac{2EI_2}{l_1} & 0 & \frac{6EI_2}{l_1^2} \\ 0 & \frac{EA_2}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{l} & 0 \\ -\frac{6EI_2}{l_1^2} & 0 & \frac{12EI_2}{l_1^3} & -\frac{6EI_2}{l_1^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{l_1^3} \\ \frac{2EI_1}{h_1} & 0 & -\frac{6EI_2}{l_1^2} & \frac{4EI_2}{l_1} & 0 & \frac{6EI_2}{l_1^2} \\ 0 & \frac{-EA_2}{l_1} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{l_1} & 0 \\ \frac{6EI_2}{l_1^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{l_1^3} & \frac{6EI_2}{l_1^2} & 0 & \frac{12EI_2}{l_1^3} \end{vmatrix},$$

$$R_3 = (V^3)^T \cdot R^{(3)} \cdot V^3 = \begin{vmatrix} \frac{4EI_3}{h_3} & \frac{-6EI_3}{h_3^2} & 0 & \frac{2EI_3}{h_3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & 0 \\ -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{12EI_3}{h_3^3} & 0 & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{-12EI_3}{h_3^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_3}{h_3} & 0 & 0 & -\frac{EA_3}{h_3} \\ \frac{2EI_3}{h_3} & -\frac{6EI_3}{h_3^2} & 0 & \frac{4EI_3}{h_3} & \frac{6EI_3}{h_3^2} & 0 \\ \frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{-12EI_3}{h_3^3} & 0 & \frac{6EI_3}{h_3^2} & \frac{12EI_3}{h_3^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_3}{h_3} & 0 & 0 & \frac{EA_3}{h_3} \end{vmatrix},$$

$$R_4 = (V^4)^T \cdot R^{(4)} \cdot V^4 = \begin{vmatrix} \frac{4EI_4}{h_4} & \frac{-6EI_4}{h_4^2} & 0 & \frac{2EI_4}{h_4} & -\frac{6EI_4}{h_4^2} & 0 \\ -\frac{6EI_4}{h_4^2} & \frac{12EI_4}{h_4^3} & 0 & -\frac{6EI_4}{h_4^2} & \frac{-12EI_4}{h_4^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_4}{h_4} & 0 & 0 & -\frac{EA_4}{h_4} \\ \frac{2EI_4}{h_4} & -\frac{6EI_4}{h_4^2} & 0 & \frac{4EI_4}{h_4} & \frac{6EI_4}{h_4^2} & 0 \\ \frac{6EI_4}{h_4^2} & \frac{-12EI_4}{h_4^3} & 0 & \frac{6EI_4}{h_4^2} & \frac{12EI_4}{h_4^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_4}{h_4} & 0 & 0 & \frac{EA_4}{h_4} \end{vmatrix},$$

$$R_5 = (V^5)^T \cdot R^{(5)} \cdot V^5 = \begin{vmatrix} \frac{4EI_5}{l_5} & 0 & -\frac{6EI_5}{l_5^2} & \frac{2EI_5}{l_5} & 0 & \frac{6EI_5}{l_5^2} \\ 0 & \frac{EA_5}{l_5} & 0 & 0 & -\frac{EA_5}{l_5} & 0 \\ -\frac{6EI_5}{l_5^2} & 0 & \frac{12EI_5}{l_5^3} & -\frac{6EI_5}{l_5^2} & 0 & -\frac{12EI_5}{l_5^3} \\ \frac{2EI_5}{h_5} & 0 & -\frac{6EI_5}{l_5^2} & \frac{4EI_5}{l_5} & 0 & \frac{6EI_5}{l_5^2} \\ 0 & \frac{-EA_5}{l_5} & 0 & 0 & \frac{EA_5}{l_5} & 0 \\ \frac{6EI_5}{l_5^2} & 0 & -\frac{12EI_5}{l_5^3} & \frac{6EI_5}{l_5^2} & 0 & \frac{12EI_5}{l_5^3} \end{vmatrix}.$$

Блочная матрица имеет следующий вид:

$$R = \begin{vmatrix} R_{\text{нн}}^{(1)} & R_{\text{нк}}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{\text{кн}}^{(1)} & (R_{\text{кк}}^{(1)} + R_{\text{нн}}^{(2)}) & R_{\text{нк}}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{\text{кн}}^{(2)} & (R_{\text{кк}}^{(2)} + R_{\text{нн}}^{(3)}) & R_{\text{нк}}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\text{кн}}^{(3)} & (R_{\text{кк}}^{(3)} + R_{\text{нн}}^{(4)} + R_{\text{нн}}^{(5)}) & R_{\text{нк}}^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{\text{кн}}^{(4)} & R_{\text{кк}}^{(4)} & R_{\text{нк}}^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{\text{кн}}^{(5)} & R_{\text{кк}}^{(5)} \end{vmatrix}.$$

Подставляя данные для заданной статически неопределимой рамы, получаем численные значения элементов блочной матрицы. Блочная матрица имеет следующий вид:

$$R=\left|\begin{array}{cccccccccccccccccc}
0{,}95 & 0 & -0{,}24 & 0{,}48 & 0 & 0{,}24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0{,}07 & 0 & 0 & -0{,}07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-0{,}23 & 0 & 0{,}08 & -0{,}24 & 0 & -0{,}08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0{,}47 & 0 & -0{,}24 & 2{,}95 & 0 & -0{,}51 & 1 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -0{,}07 & 0 & 0 & 0{,}22 & 0 & 0 & -0{,}15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0{,}24 & 0 & -0{,}08 & -0{,}51 & 0 & 0{,}45 & -0{,}75 & 0 & -0{,}38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0{,}75 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}15 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 & -0{,}15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0{,}75 & 0 & -0{,}37 & 0 & 0 & 0{,}75 & -0{,}75 & 0 & -0{,}38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0{,}75 & 5{,}29 & 0 & -0{,}61 & 0{,}5 & 0 & 0{,}38 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}15 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 & -0{,}08 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}75 & 0 & -0{,}38 & -0{,}61 & 0 & 1{,}12 & -0{,}38 & 0 & -0{,}19 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & -0{,}38 & 1 & 0 & 0{,}38 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}08 & 0 & 0 & 0{,}08 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}38 & 0 & -0{,}19 & 0{,}38 & 0 & 0{,}19 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}14 & 0 & -0{,}98 & 2{,}27 & 0 & 0{,}98\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}17 & 0 & 0 & 0{,}17 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}98 & 0 & -0{,}56 & 0{,}98 & 0 & 0{,}56
\end{array}\right|.$$

Вектор перемещений узлов заданной рамы имеет вид:

$$\vec{Z} = R^{-1} \cdot \vec{P} = \begin{vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{vmatrix}, \qquad Z_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \; Z_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 30{,}117 \\ 0 \end{vmatrix}, \qquad Z_3 = \begin{vmatrix} 294 \\ 30{,}1170 \\ 0 \end{vmatrix}, \; Z_4 = \begin{vmatrix} 34{,}85 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \; Z_5 = Z_6 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Определяем вектор узловых перемещений всех конечных элементов системы:

$$\vec{V} = S_1^T \vec{Y},$$

где S_1^T определяется аналогично примеру 1.

Вектор внутренних усилий узлов всех элементов заданной рамы имеет вид:

$$\vec{X} = -R \cdot \vec{V} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{vmatrix}, \qquad X_1 = \begin{vmatrix} M^1{}_н \\ X^1{}_н \\ У^1{}_н \\ M^1{}_к \\ X^1{}_к \\ У^1{}_к \end{vmatrix} . \quad . \quad . \quad X_5 = \begin{vmatrix} M^5{}_н \\ X^5{}_н \\ У^5{}_н \\ M^5{}_к \\ X^5{}_к \\ У^5{}_к \end{vmatrix},$$

где

$$X_1 = \begin{vmatrix} -170{,}16 \\ 118{,}36 \\ -48{,}66 \\ 0 \\ -61{,}64 \\ -48{,}66 \end{vmatrix}, \quad X_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ -61{,}64 \\ 48{,}66 \\ -125{,}37 \\ -61{,}64 \\ -111{,}34 \end{vmatrix}, \quad X_3 = \begin{vmatrix} 125{,}37 \\ 61{,}76 \\ -111{,}34 \\ -12`{,}21 \\ 61{,}76 \\ -111{,}36 \end{vmatrix}, \quad X_4 = \begin{vmatrix} -54{,}87 \\ -33{,}08 \\ -92{,}16 \\ -25{,}7 \\ 6{,}92 \\ -92{,}16 \end{vmatrix}, \quad X_5 = \begin{vmatrix} 66{,}34 \\ -94{,}84 \\ 19{,}18 \\ -53 \\ -94{,}84 \\ 49{,}7 \end{vmatrix}.$$

Окончательные эпюры внутренних усилий – изгибающих моментов, поперечных и продольных сил имеют следующий вид (рис. 8.12-8.14):

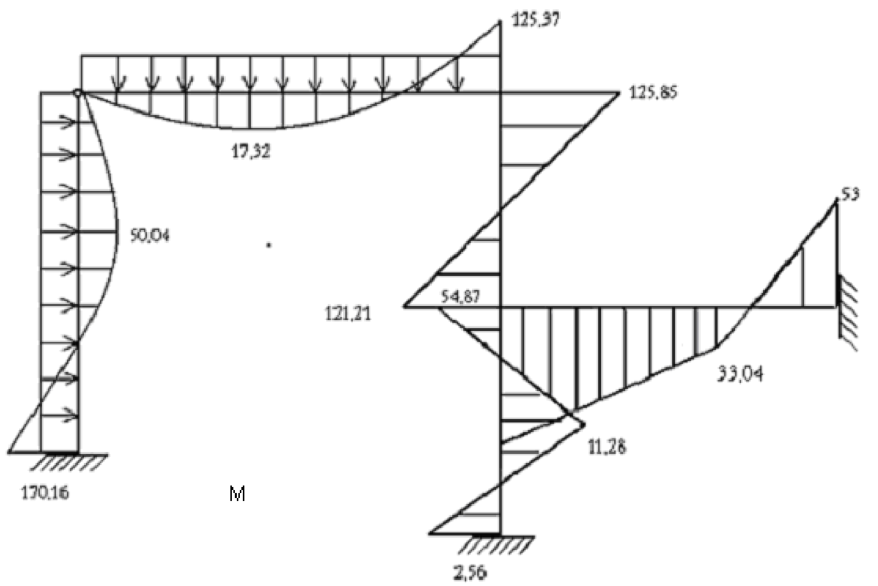


Рис. 8.12. Окончательная эпюра изгибающих моментов М [Кнм]

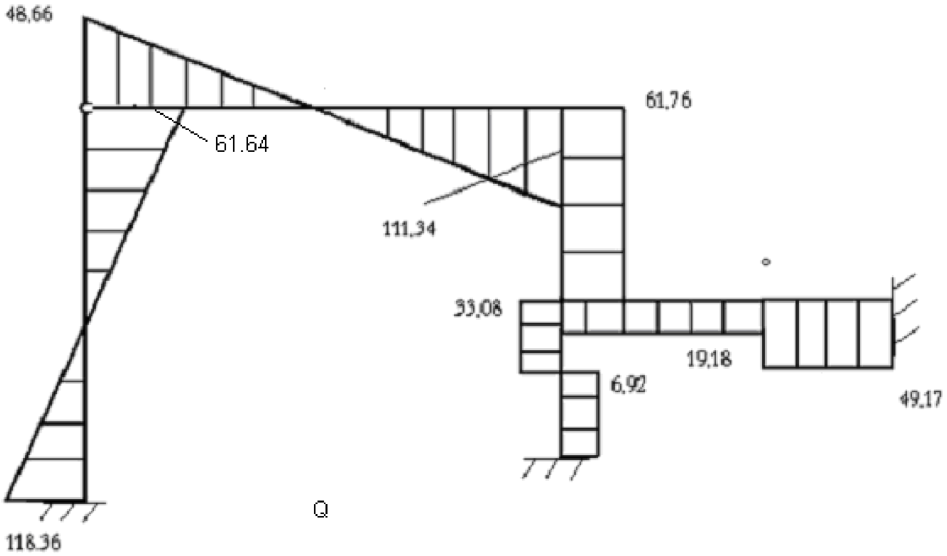


Рис. 8.13. Окончательная эпюра поперечных сил Q[Кн]

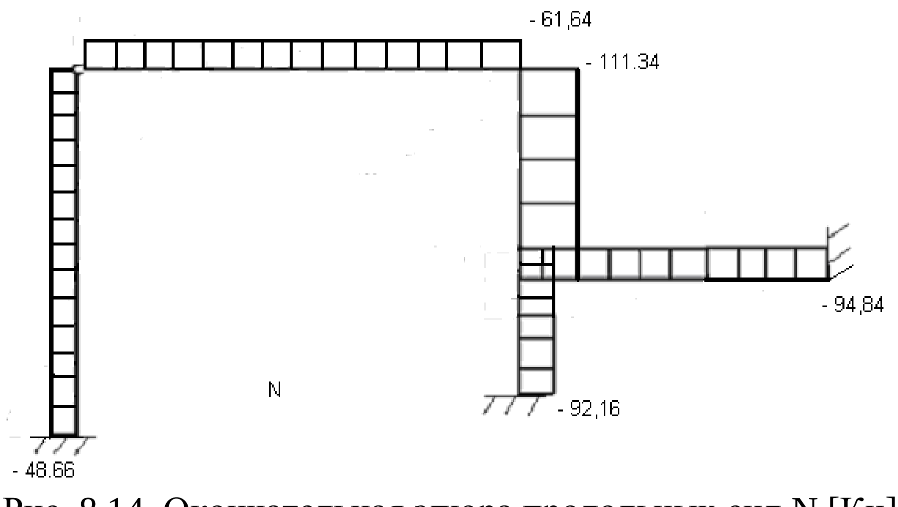


Рис. 8.14. Окончательная эпюра продольных сил N [Кн]

На рисунке 8.15 представлены реакции в опорах.

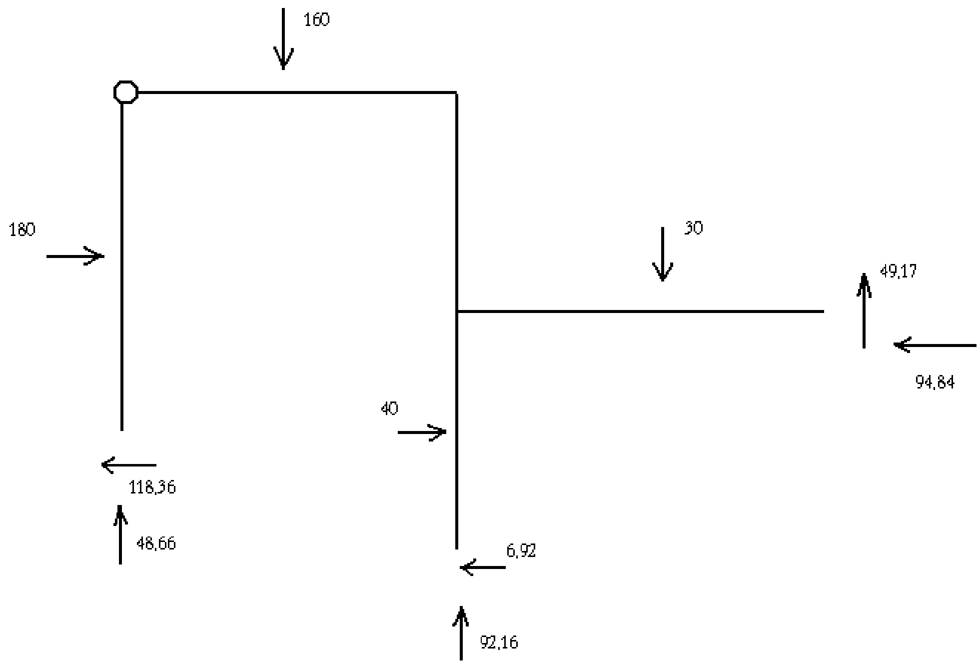


Рис. 8.15. Реакции опор и результирующие внешней нагрузки

Статические проверки:

$$\sum X = 180 - 118{,}36 - 6{,}92 - 94{,}84 + 40 = -0{,}12,$$
$$\sum Y = -160 + 48{,}66 - 30 + 92{,}16 + 49{,}17 = -0{,}01.$$

Полученные результаты вполне удовлетворительны, так как расхождения составляют меньше 5%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики. – М.: «Стройиздат», 1981. – 434 с.
2. Ильин В.П., Карпов В.В. и др. Численные методы решения задач строительной механики. – М.: «АСВ», 2005. – 425 с.
3. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. – М., «АСВ», ч.2. – 2005.
4. Зенкевич Щ. Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1975. –545 с.
5. Филин А.П. Матрицы в статике стержневых систем, – М.: «Стройиздат», 1972.
6. Кусаинов А.А., Булаткулов С.А., Кацин В.А., Мещеряков В.И. Статика, кинематика, динамика. Алматы, «Эверо», – 316 с.
7. Сливкер В.И. Строительная механика (Вариационные методы). – М.: «АСВ», 2005. – 736 с.
8. Достанова С.Х. Строительная механика. Учеб. Изд., Алматы, 2005г., 148 с.
9. Достанова С.Х., Касымова Г.Т. Құрылыс механикасының есептерін шығаруға арналған жетекшілік. Оқу нұскау. Алматы, ҚазБСҚА, 2011. – 121б.

Расчет плоских рам методом конечных элементов
Методические указания к выполнению расчетно-графической части по дисциплине «Численные методы в строительной механике»

Достанова С.Х., Касымова Г.Т.

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ РАМ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Редактор Есимханова А.Е.

Сводный план 2011-2012 уч.года, поз.№45.

Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Riso.
Усл.печ.л. Уч.-изд.л. Тираж 30 экз.
Заказ №
Цена договорная.

Издание Казахской головной архитектурно-строительной академии

Отпечатано в Издательском доме «Строительство и архитектура»
050043, г.Алматы, ул. К.Рыскулбекова, 28