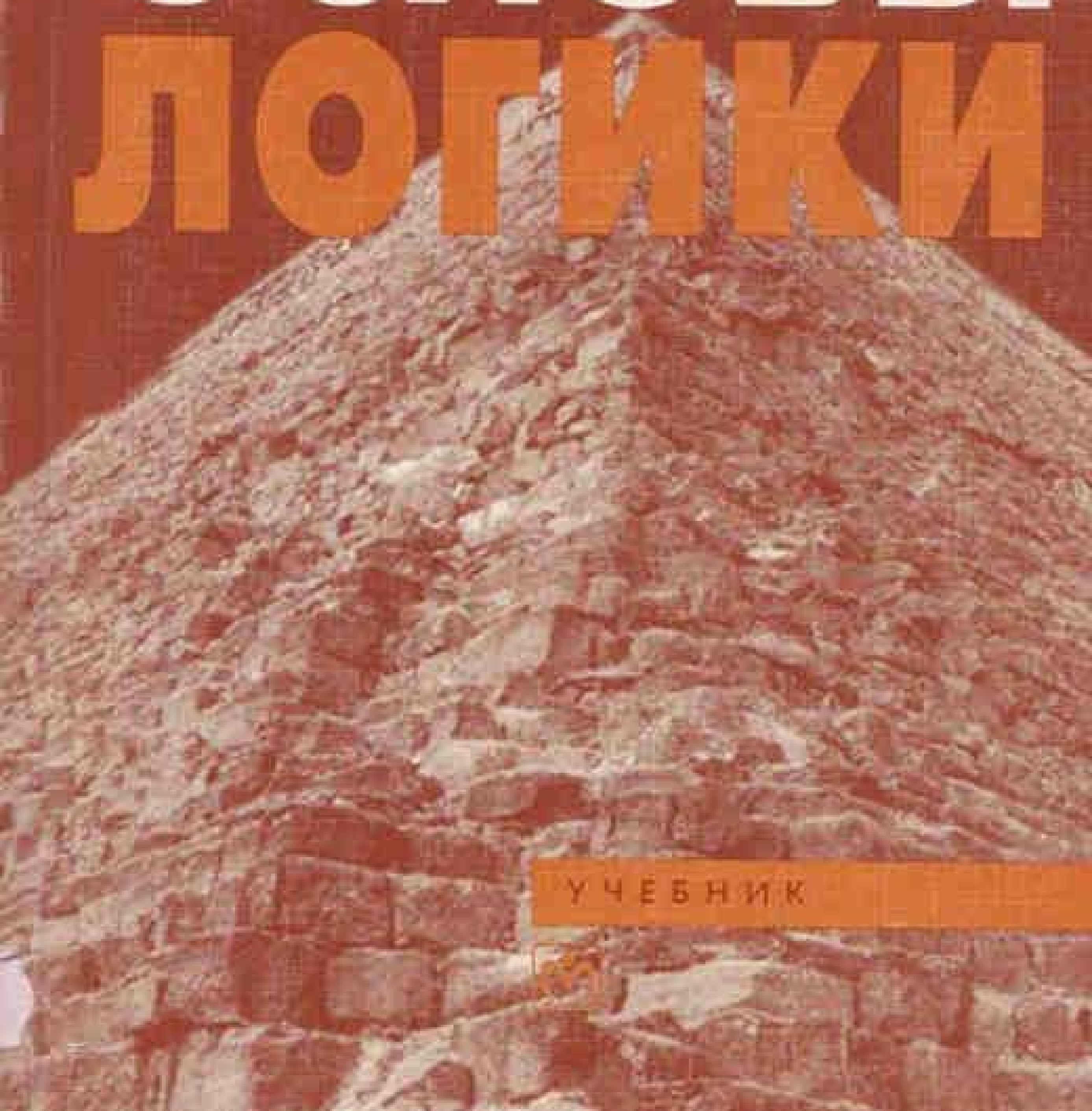
ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

В.А. БОЧАРОВ, В.И. МАРКИН

ОСНОВЫ ЛОГИКИ



УЧЕБНИК

СЕРИЯ «ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

В.А. БОЧАРОВ, В.И. МАРКИН

ОСНОВЫ ЛОГИКИ

Учебник

Рекомендовано
Министерством общего и профессионального образования
Российской Федерации в качестве учебника для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по гуманитарным
и естественно-научным специальностям

МОСКВА
ИНФРА-М
1998

УДК (075.8)16
ББК 87.4 я7
Б 87

Б 87 Бочаров В.А., Маркин В.И. Основы логики: Учебник. М.: ИНФРА-М, 1998.— 296 с.

ISBN 5-86225-595-8

Этот учебник представляет собой основное содержание курса лекций по логике, который авторы в течение ряда лет читали на философском и психологическом факультетах Московского университета им. М.В. Ломоносова.

Рекомендуется для студентам гуманитарных и естественных факультетов университетов, а также всем, желающим изучать логику самостоятельно или усовершенствоваться в ее знании.

ББК 87.4 я7

ISBN 5-86225-595-8

Бочаров Вячеслав Александрович
Маркин Владимир Ильич

Основы логики
Учебник

Корректор *Е.А. Морозова*
ЛР № 070824 от 21.01.93 г.

Подписано в печать 25.12.97 г.
Формат 60х90/16. Печать офсетная
Гарнитура «SchoolBook». Усл. печ. л. 18,5
Тираж 30000 экз. (2-й завод 6000 экз.)
Цена договорная. Заказ 1720

Издательский Дом "ИНФРА-М"
127214, Москва, Дмитровское шоссе, 107
Тел.: 485-70-63, 485-74-00

Отпечатано в типографии
издательства "Дом печати"
432601, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

ОТ АВТОРОВ

Предлагаемый вниманию читателей учебник представляет собой введение в проблематику современной логики, содержит изложение ее основных разделов. Знакомство с учебником позволит получить представление о предмете логики, природе и специфике логического знания, о наиболее известных логических теориях, а также о той методологической роли, которую играет логика в интеллектуальной познавательной деятельности человека.

Авторы ставили своей целью не только представить логику как теоретическую дисциплину, но и очертить круг практических познавательных задач, которые могут быть решены с ее использованием. Особый акцент в учебнике делается на формулировке критериев, норм и правил корректного осуществления различных мыслительных процедур, таких, как дедуктивное рассуждение, определение, классификация, формирование понятий и операции над ними, индукция, аналогия, выдвижение и проверка гипотез и т.д.

Описание и анализ перечисленных логических операций как раз и составляют основное содержание читаемых в высшей школе курсов логики. Однако в большинстве отечественных учебников по данной дисциплине формы и приемы познания рассматриваются традиционно, скорее с позиций здравого смысла, без должного учета результатов, полученных в современной логике, совершивших настоящую революцию в этой древнейшей области знания и сделавших логику подлинно теоретической наукой. Некоторые сведения о современной символической логике если и содержатся в указанных учебниках, то играют, как правило, роль своеобразного "довеска" к обширному материалу, излагаемому в духе стандартных гимназических курсов. Знакомство с этими учебниками может создать превратное представление о существовании некоего барьера, разделяющего "старую" и "новую" логику, ведь современный логический аппарат не используется в них по существу для обсуждения и решения проблем, представленных в традиционной логике.

При написании настоящей работы авторы стремились последовательно проводить линию на освещение всего комплекса логико-методологических проблем сквозь призму идей символической логики. Именно поэтому уже в первой главе нам показалось необходимым ввести наиболее фундаментальные понятия современной логики — понятия логической формы, логического закона, логического следования, формализованного языка, а затем на этой основе дать четкое представление о том, что представляют собой логические теории, как они строятся и какие задачи решают.

В последующих главах формулируется ряд логических теорий, составляющих каркас классической логики. Это классическая логика высказываний, классическая логика предикатов первого порядка и традиционная силлогистика (построение последней осуществляется в соответствии со стандартами, принятыми в современной логике). Именно с использованием аппарата этих теорий обсуждаются все логические вопросы как теоретического, так и прикладного характера.

Данный подход к изложению логической проблематики позволил не выделять в отдельные главы материал, посвященный логическому анализу естественного языка, суждениям (высказываниям) и аргументации. Указанные вопросы исследуются в рамках соответствующих логических теорий. Так, выделение семантических категорий языковых выражений проводится в главе III, посвященной логике предикатов, анализ сложных высказываний дается в главе II при построении логики высказываний, а анализ категорических высказываний — в главе V в рамках силлогистики. Различные виды прямых и непрямых способов аргументации представлены в главе II, моделирование дедуктивной аргументации осуществлено в главе IV, где формулируются натуральные исчисления высказываний и предикатов, а описание различных типов недедуктивной аргументации содержится в главе VIII, посвященной правдоподобным рассуждениям.

При изложении материала авторы старались не углубляться в разного рода теоретические тонкости, а выделили лишь тот теоретический минимум, который необходим для успешного решения практических задач. Поэтому в учебнике намеренно не затрагиваются проблемы метатеоретического характера, например вопрос о непротиворечивости и полноте логических теорий, отсутствуют их аксиоматические представления. Кроме того, здесь не представлены различные разделы неклассической логики, так как их изучение уместно в рамках более продвинутого курса логики.

Учебник ориентирован на круг читателей, для которых знакомство с логикой имеет не только общекультурное значение: знание и корректное использование строгих логических процедур является необходимым элементом их профессиональной деятельности. К этому кругу относятся будущие философы и психологи, а также студенты факультетов естественно-научного профиля.

Авторы выражают глубокую признательность руководителю Института логики, когнитологии и развития личности профессору В.А. Смирнову, который был инициатором написания учебника, своим постоянным вниманием и поддержкой стимулировал работу над ним. Мы выражаем также благодарность Е.В. Левенец, которая проделала огромную работу по подготовке учебника к публикации.

ГЛАВА I

ПРЕДМЕТ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛОГИКИ

§ 1. Логика как наука. Логика и язык. Основные формы и приемы рационального познания

Логика является одной из древнейших наук. Как стройная система знаний она сформировалась в IV веке до нашей эры в трудах выдающегося древнегреческого мыслителя Аристотеля. Логические трактаты Аристотеля ("Категории", "Об истолковании", "Аналитики" 1-я и 2-я, "Топика" и "О софистических опровержениях") были объединены его последователями под общим названием "Органон", которое можно перевести как "орудие" ("инструмент") познания.

В "Органоне" был заложен каркас логики как науки, сформулированы основные проблемы, решаемые в ней. Прежде всего, это проблема построения *теории правильных (дедуктивных) рассуждений,* позволяющих из истинных высказываний гарантированно получать истинные следствия. Аристотелем была создана исторически первая дедуктивная система — *силлогистика.*

Второй круг проблем — их обычно называют *логико-семиотическими* — связан с применением языка как средства познания мира и средства выражения мысли. К их числу относятся проблемы выделения категорий языковых выражений в зависимости от типов их значений, а также установления смыслов и условий истинности и ложности высказываний различных видов.

К третьей, *логико-методологической группе* проблем относится выработка правил осуществления таких познавательных процедур, как определение, классификация, объяснение, полемика, аналогия, и других, а также способов организации систем знания, например научных теорий.

Чем же был вызван интерес к логической проблематике и какие потребности общества и человека обусловили возникновение логики в столь раннюю эпоху развития цивилизации? Ведь перед человечеством в то время стояло множество проблем более важных с практической точки зрения — проблем, связанных с освоением окружающего мира.

Эпоха античности характеризуется возникновением и интенсивным развитием наук — математики, физики, астрономии, медицины, психологии и других. Появилась потребность осмыслить, что представляет собой процесс познания и вообще умственная деятельность. При этом было понимание того, что сама познавательная деятельность не может быть успешной и эффективной без создания и осознанного применения ее инструментария. Поэтому-то и возникла необходимость ответить на вопросы, в каких формах действительность воспроизводится в мышлении, каковы условия получения истинного знания, как правильно осуществлять те или иные познавательные операции. Особенно остро подобные вопросы вставали в точных науках, например в геометрии. Здесь особую значимость приобретают требования строгости определений и убедительности доказательств.

Логика как наука возникла в недрах древнегреческой философии, для которой характерна глубина и высокая степень разработанности философской проблематики. При исследовании феномена человеческого познания (а это одна из основных задач философии) перед философами встал вопрос о критериях правильности мыслительных процедур, то есть о том, какое мышление можно считать правильным. Кроме того, была осознана необходимость создания собственного философского "органона", место которого на долгое время как раз и заняла созданная Аристотелем логика.

Многие исследователи истории логики справедливо указывают, что непосредственно ее возникновение было связано с широким распространением в греческом обществе той эпохи интеллектуальных споров и дискуссий на весьма отвлеченные темы. В. Минто, например, отмечает, что логические сочинения Аристотеля "были назначены для усовершенствования его учеников в том специальном искусстве, в котором желал отличаться каждый молодой афинянин того времени, стремившийся к умственному превосходству... Действительно, эта логика была в своих различных частях рядом руководств для изучения модной тогда умственной игры — особого вида прений, диалектики, игры в вопросы и ответы, столь полно иллюстрированной в диалогах Платона и связанной с именем Сократа" (Минто В. Дедуктивная и индуктивная логика. М., 1896).

Роль логики в дискуссии, в процессе формирования убеждений очень велика. Она позволяет не только самому строить подлинно доказательную аргументацию, избегая при этом логических ошибок, но и находить ошибки, уловки и всякого рода софизмы в аргументациях оппонентов, отличать рациональное обоснование от апелляций к чувствам, верованиям и стереотипам.

За время, прошедшее с момента ее возникновения, логика обогатилась новыми разделами, например *индуктивной логикой*, основателями которой являются Ф. Бэкон и Дж. Милль; в ее рамках были построены многочисленные дедуктивные теории, для исследования логической проблематики разрабатывались новые методы.

Подлинную революцию в логике совершило применение алгебраических методов, аксиоматического метода, метода формализованных языков, исчислений и формальных семантик. Однако при всех новациях предмет логического анализа в основном остался прежним.

Для ответа на вопрос, что является предметом логики, сформулируем определение этой науки.

Логика — это нормативная наука о формах и приемах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка.

Чтобы был понятен смысл данного определения, необходимо разъяснить следующие вопросы. Что представляет собой *процесс познания*? Каковы его *ступени* и в чем специфика *интеллектуальной* познавательной деятельности? Что такое язык и какова его роль в познании? В каких *формах* отражается действительность в мышлении? Каковы основные логические приемы познания? И наконец, в чем состоит *нормативный* характер логики как науки?

Познание — это процесс отражения действительности в человеческом мозге, целью которого является получение адекватных знаний о мире. В процессе познания можно выделить две ступени: чувственную и рациональную (интеллектуальную).

На *чувственной ступени* мир познается посредством анализаторов (органов чувств). Основные формы такого познания — ощущения, восприятия и представления — являются чувственными образами конкретных предметов реального мира, результатами их воздействия на наши органы чувств.

Рациональное познание обладает рядом характеристик, отличающих его от чувственного. Особенностями рационального познания являются его *обобщенность* (на данной ступени мы познаем *общее* у разнородных предметов, *законы*, которым они подчиняются), *абстрактность* (человеческое мышление не только отражает реальный мир, но и творит собственный мир — мир абстрактных объектов), *активный* и *целенаправленный* характер. Но главная отличительная особенность интеллектуального познания состоит в том, что его инструментом служит *язык*, поэтому рациональное познание называют также вербальным (то есть словесным).

Язык — это знаковая система, предназначенная для фиксации, хранения, переработки и передачи информации.

Различают *естественные* и *искусственные* языки. Естественные языки возникли прежде всего как средство общения между людьми, их формирование и развитие представляют собой длительный исторический процесс и происходят в основном стихийно. Искусственные языки сознательно создаются человеком для решения определенных задач. К числу естественных относятся такие разговорные языки, как русский, английский, греческий и т.п. Примерами искусственных языков являются язык шахматной нотации (он предназначен для компактной записи шахматных партий), язык химических формул (с его помощью выражаются атомное строение веществ и ход химических реакций), язык дифференциального и интегрального исчисления в математике и т.д.

Всякий язык состоит из *знаков*. **Знаком называется материальный объект, который для некоторого интерпретатора (субъекта) выступает в качестве представителя какого-то другого предмета.**

Основная функция знака, как явствует из приведенного определения, состоит в том, что он *репрезентирует* (*представляет*) какой-то предмет для некоторого интерпретатора. Таким образом, ситуация употребления знака включает в себя три компоненты: 1) сам знак, 2) предмет, репрезентируемый знаком, 3) интерпретатора, использующего знак.

Языковыми знаками в естественных языках являются произнесенные вслух или написанные значимые слова и словосочетания, а в искусственных языках — значимые символы. Например, словосочетание "основатель логики" служит знаком Аристотеля, слово "старше" — знаком определенного возрастного отношения, символ "0-0" в шахматной нотации — знаком короткой рокировки, а символ "+" в языке арифметики — знаком операции сложения.

Репрезентируемые знаками предметы могут иметь различную природу. Термин "предмет" в логике употребляется предельно широко: "предметом" здесь называют все, о чем мы можем мыслить, все, что может стать объектом нашего рассмотрения — конкретные материальные индивиды, абстрактные объекты, свойства, отношения, функции, множества, процессы, явления, события, ситуации и т.п.

В качестве *интерпретатора* может выступать отдельное лицо, группа людей или человеческое сообщество.

Важнейшими характеристиками знаков являются *смыслы* и *значения*.

Значением знака (экстенсионалом) называется предмет, представляемый данным знаком.

Смыслом знака (интенсионалом) называют информацию о репрезентируемом предмете, которую содержит сам знак или которая связывается с этим знаком в процессе человеческого общения или познания.

Например, значением знака "число, которое является простым и четным" выступает число 2; именно оно обозначается данным словосочетанием. Смысл же этого знака — та информация, которую он содержит о числе 2, а именно сложный признак числа "быть простым и быть четным".

Некоторые знаки репрезентируют предметы, отсутствующие в той предметной области, о которой говорится в языковых контекстах, содержащих эти знаки. О таких знаках говорят, что они не имеют значения в данной предметной области, и называют их *пустыми* или *мнимыми* знаками.

Например, словосочетание "гора, которая выше Эвереста" не имеет значения в множестве гор нашей планеты; знак "нынешний король Франции" не имеет значения в множестве людей, живущих в настоящее время; знак "наибольшее натуральное число" является пустым относительно универсума натуральных чисел.

Если же знак репрезентирует предметы, имеющиеся в соответствующей предметной области, то его называют *непустым*.

Некоторые знаки не содержат сами по себе никакой информации о репрезентируемых предметах. О таких знаках говорят, что они лишены собственного смысла, и называют их *неописательными знаками*. Примерами неописательных знаков являются слова "студент", "столица", "ромб"; они лишь называют репрезентируемые предметы, но никак не характеризуют их, не указывают на их признаки.

Смысл подобным терминам может придаваться как бы внешним образом, например посредством явного определения, когда данным знакам сопоставляются *описательные* (то есть имеющие собственный смысл) термины: например, словосочетания "учащийся высшего или среднего специального учебного заведения", "главный административный центр некоторого государства", "четырехугольник с равными сторонами".

Язык как знаковая система может исследоваться в различных аспектах, с разных точек зрения. Выделяют три основных аспекта изучения языка: *синтаксический, семантический* и *прагматический*.

При синтаксическом подходе исследуются отношения между самими знаками, при этом отвлекаются от того, кто использует эти знаки и какие предметы они репрезентируют. Задачами синтаксического анализа языка являются, например, выделение простейших, элементарных знаков, правил образования сложных знаков и перехода от одних совокупностей знаков к другим.

Семантический аспект предполагает исследование отношений между знаками и репрезентируемыми ими предметами. При этом решается, в частности, задача выделения различных категорий языковых знаков в зависимости от типов их значений, а также от типов выражаемых этими знаками смыслов.

Прагматический анализ языка состоит в исследовании отношений между знаками и интерпретаторами, использующими эти знаки. Важнейшая задача, решаемая при данном подходе,— установление зависимости значения и смысла знака от тех или иных особенностей интерпретатора и, более широко, от особенностей внеязыкового контекста, сопутствующего употреблению данного знака.

Очевидно, что если объектом нашего исследования становится некоторый язык, то данное исследование должно вестись с использованием каких-то языковых средств, то есть в рамках какого-то языка. Поэтому в подобной ситуации существенным оказывается различение *объектного языка* и *метаязыка*.

Объектным языком называют тот язык, который является предметом исследования, а метаязыком — тот язык, с помощью которого изучается объектный язык. Например, в ситуации, когда тренер объясняет начинающему шахматисту правила записи шахматных партий, в качестве объектного языка выступает язык шахматной нотации, а в качестве метаязыка — разговорный язык, на котором ведется обучение.

Язык при использовании его в практической деятельности человека выполняет множество различных функций. Он служит, например, средством общения между людьми. В языке выражается внутренний мир человека, передаются его чувства, переживания, эмоции. Но главной для логики является *познавательная функция языка*. Именно с помощью языковых средств мы фиксируем информацию об окружающей действительности, именно в языке осуществляются различные интеллектуальные процедуры по переработке этой информации.

Основными *формами*, в которых фиксируются знания о мире в результате интеллектуальной познавательной деятельности, являются *понятия*, *суждения* и *теории*.

Понятие — это мысль, которая посредством указания на некоторый признак выделяет из универсума и собирает в класс (обобщает) все предметы, обладающие этим признаком. В языке понятия выражаются посредством универсалий — одной из разновидностей *описательных терминов*. Например, термин "четырехугольник с равными сторонами и равными углами" выражает понятие, выделяющее класс квадратов из универсума четырехугольников, а термин "вещество, молекулы которого состоят из одного атома, имеющего заполненную внешнюю электронную оболочку" — понятие, выделяющее множество инертных газов из универсума веществ.

Суждение — мысль, содержащая утверждение о наличии в действительности некоторого положения дел. Суждения выражаются в языке с помощью *повествовательных (декларативных) предложений*. Эти предложения могут выражать суждения о присущности или неприсущности свойств предметам ("Снег бел", "Сера не электропроводна"), о наличии или отсутствии отношений между предметами ("Петербург севернее Москвы", "Дездемона не любит Яго"), о связях между ситуациями ("Если вода нагрета до 100°С, то она кипит").

Следует иметь в виду, что одно и то же суждение может быть выражено в языке с помощью различных предложений. Например, одна и та же мысль передается в предложениях "Снег бел", "Снег относится к числу белых предметов", "Свойство белизны присуще снегу". С другой стороны, повествовательное предложение в различных ситуациях его употребления может иметь разные смыслы, то есть выражать разные суждения. К примеру, предложение "Ребенок родился здоровым" обычно констатирует нормальное состояние новорожденного человека, однако для президента США Трумэна телеграмма с данным текстом сообщала иную информацию — суждение об успешном испытании атомной бомбы.

Чтобы избежать указанной неоднозначности, множественности различных содержательных трактовок предложения, необходимо точно зафиксировать его смысл — ту информацию о действительности, которую предложение несет. В этом случае мы получим *высказывание* — предложение, выражающее определенное суждение, то есть выражающее мысль о наличии определенного положения дел.

Всякое высказывание может быть оценено как *истинное* или *ложное* ("истина" и "ложь" — возможные значения высказываний). Причем в классической логике эти термины трактуются следующим образом: **высказывание истинно тогда и только тогда, когда описываемое в нем положение дел имеет место в действительности, в противном случае оно ложно.** Например, высказывание "Медь электропроводна" истинно, поскольку свойство электропроводности присуще меди. Высказывание "Сера электропроводна" ложно, поскольку в действительности это свойство не присуще сере.

Еще одной формой отражения действительности на рациональной ступени познания, наряду с понятием и суждением, является *научная теория*. Теория представляет систему связанных между собой понятий и высказываний, относящихся к некоторой предметной области (в качестве такой области могут выступать множество чисел, множество точек, линий и плоскостей, множество живых организмов и т.д.). Главная задача теории — установление *закономерностей* функционирования объектов предметной области. Кроме того, теория может выступать как средство *объяснения* и *предсказания* явлений исследуемой области. Примерами теорий служат геометрия Евклида, механика Ньютона, специальная и общая теории относительности, теория эволюции Дарвина.

Одной из задач логики, как уже говорилось, является исследование *приемов* мышления — тех интеллектуальных процедур, которые осуществляются в процессе познавательной деятельности. К их числу относятся, например, определение, классификация, научное объяснение, выдвижение и проверка гипотез, постановка и решение задач и проблем, научная полемика. Однако центральное место в логических исследованиях занимает анализ такой познавательной операции, как *рассуждение*. Учение о правильных способах рассуждения — *дедуктивная логика* — является ядром логической науки с момента ее возникновения и до наших дней. Что же представляет собой рассуждение? В самом общем виде на этот вопрос можно ответить следующим образом.

Рассуждение — это процедура обоснования некоторого высказывания путем пошагового выведения его из других высказываний.

Простейшим видом рассуждения является *умозаключение*.

Умозаключение — это непосредственный переход от одного или нескольких высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ к высказыванию B.

Высказывания $A_1, A_2, ..., A_n$, из которых делается вывод, называются *посылками*, а высказывание B, которое выводится из посылок, называется *заключением*.

В качестве примера умозаключения приведем рассуждение, которое, согласно легенде, провел калиф Омар для обоснования необходимости сожжения Александрийской библиотеки:

> "Если ваши книги согласны с Кораном, то они излишни.
> Если же ваши книги не согласны с Кораном, то они вредны.
> Но вредные или излишние книги следует уничтожить.
> Поэтому ваши книги следует уничтожить".

В приведенном умозаключении первые три высказывания являются посылками, а четвертое — заключением.

В логике умозаключение принято формулировать следующим образом:

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n}{B},$$

где над чертой записываются посылки, под чертой — заключение, а сама черта выражает акт выведения заключения из посылок.

Умозаключение является простейшей разновидностью рассуждения потому, что обосновываемый тезис (его роль играет заключение B) непосредственно, как бы в один шаг выводится из посылок A_1, A_2, ..., A_n, которые можно рассматривать как аргументы в пользу тезиса.

Однако многие рассуждения имеют гораздо более сложную структуру. Так, в ходе рассуждения могут осуществляться несколько умозаключений, причем заключения одних могут стать посылками в других. Рассмотрим пример.

В одном английском городе было совершено ограбление банка. Подозрение пало на известных рецидивистов Смита, Джонса и Брауна. В ходе следствия выяснилось следующее. Джонс никогда не ходит на дело без Брауна. По крайней мере один из рецидивистов — Смит или Джонс — замешан в преступлении. У Брауна есть прочное алиби. Инспектор полиции, проводивший расследование, на основании этих данных предъявил обвинение Смиту.

При этом он мог рассуждать следующим образом. Данные, полученные в ходе расследования, свидетельствуют о том, что:

(1) Если Джонс замешан в преступлении, то в нем замешан и Браун (Джонс без Брауна на дело не ходит).
(2) Браун не замешан в преступлении (у него алиби).

Следовательно,

(3) Джонс не замешан в преступлении.

Но, согласно данным следствия,

(4) Смит или Джонс замешаны в преступлении.

Поэтому, с учетом непричастности к преступлению Джонса, можно сделать вывод:

(5) Смит замешан в преступлении.

В приведенном рассуждении осуществлены два умозаключения. В первом из них посылками являются высказывания (1) и (2), а заключением — высказывание (3). Во втором умозаключении посылками являются (3) и (4), а заключением — высказывание (5).

Иногда в ходе рассуждения для обоснования некоторого высказывания (назовем его C) применяются так называемые *непрямые способы аргументации*. В этом случае строятся вспомогательные рассуждения, в их состав вводятся дополнительные *допущения*, из которых стремятся получить следствия определенного рода (характер принимаемых допущений и искомых следствий обычно зависит от вида высказывания **С**). При успешном решении указанных задач вспомогательные рассуждения считаются завершенными, а в основной части рассуждения появляется высказывание **С**.

Примером непрямого способа аргументации являются широко распространенные *рассуждения от противного*. Их структура состоит в следующем. Для обоснования высказывания **В** принимается в качестве дополнительного допущения противоречащее ему высказывание "Неверно, что **В**", при этом из допущения и некоторого множества аргументов **Г** стремятся получить противоречие — высказывание "**D** и неверно, что **D**". При успешном осуществлении этого вспомогательного рассуждения считается, что допущение было ложным, а само **В** обосновано посредством аргументов **Г**.

Покажем, как мог инспектор полиции в рассмотренном примере прийти к выводу о виновности Смита, рассуждая от противного.

Примем сначала допущение о том, что

(1) Смит не замешан в преступлении.

Из этого допущения и установленного факта:

(2) Смит или Джонс замешаны в преступлении —

получим высказывание:

(3) Джонс замешан в преступлении.

Из него, а также из другого установленного в ходе следствия факта:

(4) Если Джонс замешан в преступлении, то и Браун замешан в нем —

получаем высказывание:

(5) Браун замешан в преступлении.

Однако следствием было установлено, что

(6) Браун не замешан в преступлении.

Таким образом, в рассуждении получено противоречие:

(7) Браун замешан и не замешан в преступлении.

Следовательно, допущение (1) ложно, а высказывание

(8) Смит замешан в преступлении

считается обоснованным из аргументов (2), (4) и (6).

Мы рассмотрели большинство вопросов, вставших при определении предмета логики. Осталось ответить только на вопрос, в чем состоит *нормативный* характер этой науки.

Формы и приемы интеллектуальной познавательной деятельности исследуются не только в логике, но и в других науках — психологии, психолингвистике, а также в особом разделе философии, называемом эпистемологией. В перечисленных науках процесс мышления исследуется главным образом в том виде, как он протекает в действительности. Их основная цель состоит в адекватном описании, обобщении и объяснении реальной практики осуществления познавательных процедур.

Логика же не ставит перед собой задачу ответить на вопросы, как человек мыслит на самом деле, почему он мыслит так, а не иначе, каковы особенности мышления различных групп населения (социальных, возрастных, национальных и т.п.). Поэтому такие имеющие широкое хождение выражения, как "женская логика", "логика ребенка", "логика классовой борьбы", к проблематике логики как науки никакого отношения не имеют.

Задача логики состоит в том, чтобы ответить на другой вопрос: как мы *должны* мыслить, если хотим достичь цели познавательного процесса — получить адекватные знания об исследуемых объектах? Логика, таким образом, является наукой *не о сущем, а о должном*, наукой *нормативной*. Она вырабатывает нормы, критерии правильности осуществления интеллектуальных процедур, формируя тем самым некий канон, стандарт, идеал, следование которому является необходимым условием успешного осуществления научной и вообще любой рациональной деятельности.

Реальная же практика мыслительных операций исследуется в логике с точки зрения ее соответствия или несоответствия законам и правилам этой науки. Иначе говоря, логик стремится не столько к тому, чтобы выяснить, как рассуждает тот или иной человек, как он образует понятия и пользуется ими, сколько к тому, чтобы установить, правильно ли он рассуждает, правильно ли он оперирует с понятиями.

Возникает вопрос: а каковы *критерии* правильности осуществления различных мыслительных операций? Какие рассуждения можно считать правильными? Каким требованиям должны удовлетворять определение, классификация, научная полемика и т.д.? На многие из этих вопросов вы найдете ответ в других разделах учебника. В данной же главе мы рассмотрим лишь вопрос о *критериях правильности умозаключений*, поскольку он связан с введением фундаментальных понятий логики — понятий *логической формы* и *логического следования*.

§ 2. Логическая форма. Отношение логического следования

В этом параграфе будет сформулирован *критерий правильности умозаключений*. Приступая к рассмотрению данной проблемы, необходимо иметь в виду следующее: вопрос о том, является ли некоторое умозаключение правильным или неправильным, нельзя смешивать с вопросом, какими — истинными или ложными — являются его посылки и заключение, то есть соответствуют ли действительности описываемые ими положения дел. Эти вопросы необходимо четко различать, поскольку тот или иной ответ на второй из них не всегда предопределяет ответ на первый.

Рассмотрим, например, умозаключение, приведенное в предыдущем параграфе.

(1)

Если ваши книги согласны с Кораном, то они излишни.
Если ваши книги не согласны с Кораном, то они вредны.
Если ваши книги излишни или вредны, то их следует уничтожить.

Ваши книги следует уничтожить.

В данном случае истинность посылок и заключения представляется весьма сомнительной. Однако из того, что какие-либо посылки и заключение ложны, нельзя сделать вывод о неправильности умозаключения (так же, конечно, как нельзя сделать вывод о том, что оно правильно). Рассмотрим другой пример:

(2)

А.П. Бородин занимался химией, или он сочинял музыку.
А.П. Бородин сочинял музыку, или он писал детективные романы.
Неверно, что А.П. Бородин писал детективные романы.

А.П. Бородин занимался химией.

В этом умозаключении и каждая из посылок, и заключение являются истинными. Однако лишь на этом основании нельзя утверждать, что данное умозаключение правильно, вопрос о его правильности или неправильности остается пока открытым.

Лишь в одном случае для оценки умозаключения достаточно знать значения его посылок и заключения. Если каждая из посылок истинна, а заключение ложно, то умозаключение заведомо неправильно. В этом случае оно не сохраняет истинность при выведении одного высказывания из других, а потому не может быть использовано в целях получения истинного знания.

Можно ли, например, определить, является ли правильным следующее умозаключение, установив значения его посылок и заключения?

(3)

М.Ю. Лермонтов жил в XVIII веке, или он жил в XIX веке.
М.Ю. Лермонтов жил в XIX веке, или он жил в XX веке.
Неверно, что М.Ю. Лермонтов жил в XX веке.

М.Ю. Лермонтов жил в XVIII веке.

Поскольку все три посылки здесь истинны, а заключение ложно, постольку приведенное умозаключение заведомо неправильно.

Возникает вопрос, каким же образом можно определить, являются ли правильными умозаключения при иных значениях посылок или заключения. Постараемся ответить на него сначала применительно к умозаключению (2). С этой целью сравним умозаключения (2) и (3). Очевидно, что содержания входящих в их состав высказываний различны: во-первых, у них разный предмет мысли (в одном случае речь идет о Бородине, в другом — о Лермонтове), во-вторых, различается информация о предмете мысли (в одном случае она касается рода деятельности, а в другом — времени жизни человека). Вместе с тем можно заметить, что существует определенное структурное соответствие высказываний, входящих в состав этих умозаключений, то есть что сам способ рассуждения в обоих случаях одинаков.

Совпадение структур умозаключений (2) и (3) можно продемонстрировать следующим образом. Заменим простые высказывания, входящие в состав посылок и заключения умозаключения (2), малыми буквами из середины латинского алфавита: например, высказывание "Бородин занимался химией" буквой **p**, "Бородин сочинял музыку" буквой **q**, "Бородин писал детективные романы" буквой **r**. В результате такой замены получим конфигурацию

(4)

$$\frac{\begin{array}{l}\text{p или q}\\ \text{q или r}\\ \text{Неверно, что r}\end{array}}{\text{p}}.$$

Точно такую же конфигурацию получим, если в умозаключении (3) заменим буквой **p** простое высказывание "Лермонтов жил в XVIII веке", буквой **q** высказывание "Лермонтов жил в XIX веке", буквой **r** высказывание "Лермонтов жил в XX веке". Таким образом, мы показали, что умозаключения (2) и (3) имеют одинаковую структуру или, как говорят, одинаковую *логическую форму*. Выражение (4) как раз и является логической формой этих умозаключений.

В данном случае логическая форма высказываний, входящих в умозаключение, выражает ту часть их содержаний, которая получается в результате *абстрагирования (отвлечения)* от содержания простых высказываний в их составе. Заменяя простые высказывания в некотором языковом контексте буквами (*параметрами*), мы как раз и абстрагируемся от того, что именно в них утверждается, какие положения дел они описывают. Однако не происходит абстрагирования от того, каким образом и с помощью каких союзов простые высказывания сочленяются в составе сложных. Кроме того, при данном способе выявления логической формы различные простые высказывания в языковом контексте заменяются различными параметрами, а одинаковые простые высказывания (везде, где они встречаются в данном контексте) — одинаковыми параметрами.

Вернемся теперь к анализу умозаключений (2) и (3). Мы установили, что они имеют одинаковую логическую форму — выражение (4), причем умозаключение (3) заведомо неправильное, так как все его посылки истинны, а заключение ложно. Это означает, что, применяя умозаключение формы (4), мы не имеем гарантии получения из истинных посылок обязательно истинного заключения. А раз в умозаключениях этой структуры можно в некоторых случаях из истинных высказываний получить ложное следствие, то данный способ рассуждения нельзя считать надежным и мы не можем утверждать, что его посылки действительно обосновывают заключение. Поэтому любое умозаключение, логическая форма которого представлена выражением (4), квалифицируют в логике как *неправильное* (независимо от того, какими — истинными или ложными — являются его посылки и заключение).

Следовательно, и умозаключение (2) также неправильно, несмотря на то что и посылки, и заключение в нем — истинные высказывания. Дело в том, что истинность его заключения *не обусловлена* истинностью посылок или, как говорят, из его посылок *не следует логически* заключение.

Итак, для того чтобы показать, что некоторое умозаключение неправильно, достаточно найти по крайней мере одно умозаключение той же логической формы, все посылки которого истинны, а заключение ложно. Тем самым мы выделили *критерий неправильности умозаключения*. Он может быть сформулирован следующим образом.

Умозаключение является неправильным, если и только если его логическая форма не гарантирует, что при истинных посылках мы обязательно получим истинное заключение, то есть существует умозаключение данной логической формы с истинными посылками и ложным заключением.

Теперь нетрудно сформулировать *критерий правильности умозаключений.*

Умозаключение является правильным, если и только если его логическая форма гарантирует, что при истинности посылок мы обязательно получим истинное заключение, то есть не существует умозаключения данной формы с истинными посылками и ложным заключением.

При выполнении указанного условия говорят также, что между посылками и заключением имеет место *отношение логического следования*, что заключение *логически следует* из посылок.

К числу правильных относится, например, умозаключение (1). Выявим его логическую форму. С этой целью заменим простые высказывания, входящие в состав его посылок и заключения, параметрами: высказывание "Ваши книги согласны с Кораном" — буквой p, "Ваши книги излишни" — буквой q, "Ваши книги вредны" — буквой r, "Ваши книги следует уничтожить" — буквой s. Получим в результате выражение

(5)

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Если } p\text{, то } q \\ \text{Если неверно, что } p\text{, то } r \\ \text{Если } q \text{ или } r\text{, то } s\end{array}}{s}\ .$$

Теперь, согласно сформулированному выше критерию, мы должны осуществить обратную процедуру (процедуру *интерпретации* параметров), которая состоит в замене букв p, q, r и s в выражении (5) произвольными простыми высказываниями. Осуществляя различные интерпретации параметров, мы обнаруживаем следующую закономерность: всегда, когда при указанной замене посылки оказываются одновременно истинными, заключение также будет истинным. Наличие данной закономерности как раз и свидетельствует о правильности всех умозаключений формы (5), о наличии логического следования между их посылками и заключениями.

Возникает вопрос, почему в правильном рассуждении (1) заключение оказалось ложным. Причина этого — наличие ложных высказываний (одного или нескольких) среди его посылок. Вообще ложное заключение может быть получено в результате умозаключения в одном из следующих случаев:

1) если все его посылки истинны, но само умозаключение неправильно,
2) если умозаключение правильно, но в нем имеется ложная посылка,
3) если имеется ложная посылка и само умозаключение неправильно.

Обратим внимание на тот факт, что в перечисленных случаях заключение может оказаться ложным, но может в принципе оказаться и истинным. Если же к истинным посылкам применяется правильное умозаключение, то *с логической неотвратимостью* будет получено истинное заключение.

Правильность умозаключения (1) и неправильность умозаключения (2) была обусловлена, по существу, особенностями их структуры, которые выражались в том, каким образом и с помощью каких союзов простые высказывания сочленялись в сложные в их посылках и заключениях. Действительно, при выявлении их логических форм мы абстрагировались от содержания простых высказываний. Однако при замене простых высказываний параметрами происходит отвлечение не только от того, какое положение дел они описывают, но также и от *внутренней структуры* этих высказываний. Вместе с тем в некоторых случаях невозможно решить вопрос о правильности или неправильности умозаключения без учета внутренней структуры простых высказываний, входящих в его состав. Рассмотрим в этой связи следующее умозаключение:

(6)

Некоторые граждане России являются христианами.
Всякий мусульманин не является христианином.

Некоторые мусульмане не являются гражданами России.

В этом случае посылки и заключение представляют собой три различных простых высказывания. Однако, несмотря на различия между собой, внутренние структуры этих высказываний связаны друг с другом: в заключении зафиксирован определенный тип отношения между двумя множествами (множеством мусульман и множеством российских граждан), а вывод о наличии данного отношения делается на основании зафиксированных в посылках отношений каждого из этих множеств к третьему множеству (множеству христиан). Для решения вопроса о правильности подобных выводов необходим учет внутренней структуры простых высказываний, а следовательно, использовавшийся ранее способ выявления логической формы здесь недостаточен. Итак, для того чтобы выяснить, являются ли правильными такого рода умозаключения, требуется *более глубокий уровень анализа их логических форм.*

Теперь при выявлении логической формы мы, как и ранее, будем отвлекаться от того, о каких именно объектах идет речь в высказываниях и что именно о них говорится. В то же время мы не должны, например, абстрагироваться от того, идет ли речь в высказывании обо всех или же о некоторых предметах какого-либо класса, содержит ли это высказывание утверждение или отрицание. Информация, которая будет утрачиваться при таком способе анализа, выражается посредством таких терминов, как "граждане России", "христиане", "мусульмане". Их называют *нелогическими терминами.* К числу же *логических* относят такие термины, как "всякий", "некоторый", "является" ("есть"), "не является" ("не есть"), а также "и", "или", "если... то", "неверно, что" и другие. При новом способе выявления логической формы отвлечения от смысла логических терминов не происходит, а нелогические термины заменяют параметрами, причем различные термины — различными параметрами, а одинаковые (везде, где они встречаются в умозаключении) — одинаковыми параметрами.

Попытаемся выявить логическую форму умозаключения (6). Для этого заменим нелогические термины в его составе параметрами (большими латинскими буквами), например, термин "гражданин России" буквой P, "христианин" — буквой Q, "мусульманин" — буквой S. Получим следующее выражение, которое как раз и является логической формой умозаключения (6):

(7)

Некоторый **P** есть **Q**
Всякий **S** не есть **Q**
____
Некоторый **S** не есть **P**

Теперь мы можем решить вопрос о правильности или неправильности умозаключения (6), при этом будут использованы те же, что и раньше, критерии правильности и неправильности, только применительно к более глубокому уровню анализа логической формы.

Умозаключение (6) является неправильным, поскольку параметры **P**, **Q** и **S** в составе его логической формы — выражения (7) — могут быть проинтерпретированы таким образом, что данное выражение превратится в умозаключение с истинными посылками и ложным заключением. Подставим, например, вместо буквы **P** термин "существа, живущие в воде", вместо **Q** — термин "теплокровные существа", а вместо **S** — "рыбы". Получим умозаключение:

(8)

Некоторые существа, живущие в воде, являются теплокровными.
Всякая рыба не является теплокровным существом.
____
Некоторые рыбы не являются существами, живущими в воде.

Очевидно, что посылки умозаключения (8) истинны, а его заключение ложно. Поэтому все умозаключения формы (7), в том числе и умозаключение (6), неправильны, из их посылок не следует логически их заключения.

В рассуждениях (6) и (8) содержатся нелогические термины одного и того же типа, *одинаковой категории*. Каждый из них репрезентирует (представляет) некоторое множество предметов (например, множество российских граждан или множество теплокровных существ). Такого рода нелогические термины иногда называют *общими*. Однако в умозаключениях могут содержаться нелогические термины *различных категорий*. Каким же образом осуществляется анализ умозаключений и выявление их логических форм в этом случае? Рассмотрим пример:

(9)

М. Тэтчер популярнее С. Рушди.
М. Тэтчер — британский политик.
С. Рушди — британский писатель.
____
Некоторые британские политики популярнее некоторых британских писателей.

В составе данного умозаключения содержатся нелогические термины трех типов. Во-первых, это общие термины "британский политик" и "британский писатель", которые репрезентируют множества предметов. Во-вторых, это термины "М. Тэтчер" и "С. Рушди", которые обозначают отдельные предметы (индивиды), их называют *единичными терминами* или *именами*. К третьему типу относится термин "популярнее" — *знак отношения* между предметами.

При выявлении логической формы данного языкового контекста все нелогические термины будут заменены буквами (параметрами). При этом, конечно же, утратится информация о том, каковы конкретно значения этих терминов, какие именно множества, индивиды или отношения они представляют. Однако информация о том, к какой *категории* относится каждый нелогический термин, каков *тип* его значения утрачиваться не должна. С этой целью каждой категории нелогических терминов сопоставляют особый сорт параметров. При выявлении логической формы произвольный нелогический термин разрешается замещать параметром лишь такого сорта, который соответствует категории этого термина.

Договоримся, например, что буквами **S**, **P**, **Q**, $\mathbf{S}_1$... можно замещать общие термины, буквами **a**, **b**, **c**, $\mathbf{a}_1$... — единичные термины, а символами **R**, $\mathbf{R}_1$...— знаки отношений. Тогда вместо терминов "британский политик" и "британский писатель" можно подставить, соответственно, параметры **S** и **P**, вместо терминов "М. Тэтчер" и "С. Рушди" — параметры **a** и **b**, вместо термина "популярнее" — символ **R**. При указанных заменах получим логическую форму умозаключения (9):

(10)

a находится в отношении **R** к **b**
a есть **S**
b есть **P**

Некоторые **S** находятся в отношении **R** к некоторым **P**

Умозаключения данной структуры являются правильными, между посылками и заключением в них имеет место отношение логического следования, поскольку, какие бы мы ни подставляли единичные термины вместо **a** и **b**, общие термины вместо **S** и **P**, знаки отношений вместо **R** в выражение (10), обязательно получится умозаключение с истинным заключением во всех случаях, когда его посылки окажутся истинными.

Подведем некоторые итоги. При формулировке критериев правильности и неправильности умозаключений нами были затронуты два фундаментальных понятия логики — *понятия логической формы и логического следования*. Постараемся теперь, обобщив сказанное выше, ввести эти понятия более строгим образом.

Логической формой некоторого языкового контекста называют выражение, фиксирующее ту часть содержания контекста, которая остается в результате отвлечения от конкретных содержаний нелогических терминов или же от содержаний простых высказываний, входящих в данный контекст.

Процедура отвлечения от содержаний нелогических терминов и простых высказываний осуществляется посредством замены указанных языковых выражений параметрами соответствующих категорий, причем одинаковые выражения заменяются одинаковыми параметрами, а различные — различными.

При выявлении логической формы контекста сохраняется информация *о типах значений* заменяемых выражений, а также о том, каким образом и с помощью каких логических терминов они сочленяются в этом контексте. Последнее как раз и имеют в виду, когда логическую форму контекста определяют как способ связи содержаний его частей.

Следует также уяснить, что логическую форму контекста можно выявить по-разному, с различной степенью глубины анализа. Способ выявления логической формы обусловлен, во-первых, тем, учитывается ли внутренняя структура простых высказываний, и, во-вторых, тем, какие выделяются категории нелогических терминов.

В качестве примера осуществим логический анализ на различных уровнях следующего высказывания:

"Иван сильнее Петра, и Петр умнее Ивана".

Если внутренняя структура простых высказываний, входящих в его состав, учитываться не будет, то логическая форма примет следующий вид:

p и q,

где параметр **p** подставлен вместо простого высказывания "Иван сильнее Петра", а параметр **q** вместо "Петр умнее Ивана".

При более глубоком анализе, когда структура простых высказываний принимается во внимание, заменяться параметрами будут не высказывания, а нелогические термины в их составе. Предположим, что выделены две категории нелогических терминов — общие (знаки множеств) и единичные (знаки индивидов). Тогда логическую форму рассматриваемого высказывания можно выразить так:

$$\text{a есть P и b есть Q,}$$

где параметрами **a** и **b** заменены единичные термины "Иван" и "Петр", а параметрами **P** и **Q** — общие термины "человек, который сильнее Петра" и "человек, который умнее Ивана", соответственно.

Если же наряду с общими и единичными терминами в качестве особой категории нелогических терминов выделяются знаки отношений, то логическая форма может быть выражена иным образом:

$$\text{a находится в отношении } R_1 \text{ к b и b находится в отношении } R_2 \text{ к a,}$$

где **a** и **b** подставлены вместо единичных терминов "Иван" и "Петр", а R_1 и R_2 — вместо знаков отношений "сильнее" и "умнее", соответственно.

Дадим теперь точное определение другого фундаментального понятия логики — понятия *логического следования*. Прежде всего отметим, что логическое следование представляет собой отношение между высказываниями по форме. Это означает, что для решения вопроса о наличии или отсутствии этого отношения между высказываниями необходимо выявить их логические формы. Более того, можно считать, что отношение логического следования имеет место не между определенными высказываниями естественного языка, а между их логическими формами. Пусть **B** есть логическая форма некоторого высказывания, а **Г** — множество логических форм каких-либо высказываний. Иначе говоря, **B** и элементы множества **Г** представляют собой не высказывания естественного языка, а выражения с параметрами, которые становятся высказываниями при интерпретациях входящих в них параметров, то есть при подстановках вместо параметров языковых выражений соответствующих категорий.

Из Г логически следует B, если и только если не существует такой интерпретации параметров, входящих в состав Г и B, при которой все выражения из Г принимают значение "истина", а B — значение "ложь".

Приведенное определение логического следования можно эквивалентным образом переформулировать так.

Из Г логически следует B, если и только если при любой интерпретации параметров в составе Г и B, при которой все выражения из Г принимают значение "истина", выражение B также примет значение "истина".

§ 3. Логические законы. Логические теории

Рассматривая вопрос о предмете той или иной науки, нельзя обойтись без выяснения специфики ее законов. Сказанное, конечно же, относится и к логике. Что же представляют собой логические законы?

Выше уже говорилось, что любое высказывание может быть оценено как истинное или ложное. Однако способы установления истинности или ложности высказываний разных типов могут существенно отличаться. В некоторых случаях значения высказываний устанавливают путем непосредственного обращения к действительности (так поступают, например, если хотят выяснить, истинны ли высказывания "Идет дождь", "Некоторые школьники остроумны"). В других случаях оценка высказываний осуществляется в рамках конкретных научных теорий (например, указанным образом поступают, устанавливая значение высказывания "Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой"). Однако для определенного класса высказываний вопрос об их истинности или ложности может быть решен с использованием *исключительно логических средств*, на основе анализа их логических форм.

В качестве примера покажем, как устанавливается в классической логике значение высказывания:

(1) "Идет дождь, или неверно, что идет дождь".

Заменяя параметром **p** простое высказывание "Идет дождь", получаем логическую форму высказывания (1):

(2) **p** или неверно, что **p**.

Это выражение содержит информацию о том, что в действительности имеет место какое-то из двух положений дел: (а) ситуация, описанная в **p**, (б) отсутствие такой ситуации. Данная информация основана на смысле логических терминов "или" и "неверно, что" и представляет собой общую часть содержаний высказываний формы (2).

Будем теперь осуществлять всевозможные интерпретации параметра **p** в (2), то есть подстановки вместо него произвольных простых высказываний. Очевидно, что при некоторых интерпретациях на месте **p** окажется истинное, а в остальных случаях — ложное высказывание. Если **p** проинтерпретировано как истинное высказывание, то будет иметь место положение дел (а) и форма

(2) превратится в истинное высказывание. Если же p проинтерпретировано как ложное высказывание, то будет иметь место положение дел (б) и форма (2) опять-таки преобразуется в истинное высказывание. Таким образом, любое высказывание указанной формы является истинным, в том числе и высказывание (1). Оно истинно независимо от того, что в действительности происходит, идет дождь или нет. Истинность высказывания (1) обусловлена его логической формой.

Высказывания, истинные в силу своей логической формы, называют *логически истинными*. Сами же логические формы таких высказываний — например, выражение (2) — называют *логическими законами*.

Логический закон — это такая логическая форма высказывания, которая принимает значение "истина" при любой интерпретации параметров, входящих в ее состав.

Помимо логически истинных существует еще один тип высказываний естественного языка, значения которых можно установить, основываясь только на анализе их логических форм. Это *логически ложные* высказывания. Их логические формы принимают значение "ложь" при любой интерпретации параметров в их составе. Пример такого высказывания:

(3) "Идет дождь, и неверно, что идет дождь".

Его логической формой является выражение

(4) **p** и неверно, что **p**.

Очевидно, что в результате подстановки вместо параметра **p** в форму (4) произвольного высказывания обязательно получится ложное высказывание. Поэтому высказывание (3) ложно в силу своей логической формы.

Высказывания, которые не являются ни логически истинными, ни логически ложными, называют *логически недетерминированными*. Их значения невозможно установить, пользуясь исключительно логическими средствами, поскольку некоторые высказывания такой формы истинны, а некоторые ложны. Примером логически недетерминированного высказывания является

(5) "Идет дождь, или светит солнце".

Его логическая форма имеет вид

(6) **p** или **q**.

Если при интерпретации параметров **p** и **q** вместо какого-нибудь из них подставить истинное высказывание, то выражение (6) превратится в истинное высказывание. Если же и вместо **p**, и вместо **q** подставить ложные высказывания, то полученное выражение окажется ложным.

В предыдущем параграфе отмечалось, что логическая форма языкового контекста может выявляться с разной степенью глубины. Для успешного решения вопроса о том, является ли некоторое высказывание логически истинным, необходим адекватный уровень анализа при выявлении его формы. Поясним сказанное на примере. Рассмотрим высказывание

(7) "Всякий школьник не остроумен, или некоторые школьники остроумны".

Данное высказывание состоит из двух отличных друг от друга простых высказываний, которые связаны союзом "или". Поэтому если при выявлении его логической формы мы будем полностью абстрагироваться от содержаний простых высказываний, то получим выражение

(8) **p** или **q**,

где буквой **p** замещено высказывание "Всякий школьник не остроумен", а буквой **q** — "Некоторые школьники остроумны". Легко установить, что выражение (8) не относится к числу логических законов.

Выявим теперь логическую форму высказывания (7) иным способом, учитывая внутреннюю структуру простых высказываний. Замещая общие термины "школьник" и "остроумный человек" параметрами **S** и **P** соответственно, получим выражение

(9) Всякий **S** не есть **P** или некоторый **S** есть **P**.

Данное выражение является логическим законом, поскольку любое высказывание этой формы истинно. Следовательно, высказывание (7) логически истинно, но для установления данного факта потребовался достаточно глубокий уровень анализа его логической формы.

Понятие логического закона наряду с понятием логического следования является важнейшим в *дедуктивной логике*. Ведь к основным задачам, решаемым в рамках последней, относятся выделение и систематизация класса логических законов, а также форм правильных умозаключений (таких умозаключений, в которых заключения логически следуют из посылок). Попытаемся теперь ответить на вопрос, с помощью каких средств и методов решаются эти проблемы в современной логике.

Для достижения указанных целей создаются особые *логические теории*. Их построение осуществляется в специальных искусственных языках, которые называются *формализованными*. Формализованные языки предназначены для точного выражения логических форм высказываний естественного языка, без чего, как уже говорилось, невозможно выделить множества логических законов и форм правильных умозаключений.

В принципе логические формы высказываний можно было бы выражать и в обычном, естественном языке (как это делалось нами до сих пор), необходимо лишь дополнить его списками параметров, предназначенных для замещения простых высказываний или нелогических терминов различных категорий. Однако естественный язык обладает рядом особенностей, серьезно затрудняющих процедуру точного выражения логических форм.

Во-первых, в нем отсутствуют четкие синтаксические критерии правильности построения предложений, поэтому та же трудность возникает и относительно их логических форм.

Во-вторых, грамматическая структура высказываний не всегда соответствует их логической форме. Например, высказывания "Москва находится между Киевом и Нижним Новгородом" и "Москва находится южнее Мурманска и Архангельска" имеют сходную грамматическую структуру, однако их логические формы различны: первое высказывание является простым (в нем утверждается наличие отношения между тремя городами), второе же, по существу, является сложным и состоит из двух простых: "Москва южнее Мурманска" и "Москва южнее Архангельска".

В-третьих, выражения естественного языка многозначны и допускают различные трактовки. Например, выражение вида "A или B и C" (например, "Иванов или Петров и Сидоров сдали экзамен на «отлично»") может быть истолковано и как разделительное высказывание, части которого "A" и "B и C" связаны союзом "или", и как соединительное, в котором части "A или B" и "C" связаны союзом "и". Более того, сами логические союзы в различных контекстах естественного языка могут иметь разные смыслы. Например, союз "если... то" в высказывании "Если вода нагрета до 100°, то она кипит" выражает условную связь, а в высказывании "Если Волга впадает в Каспийское море, то Днепр — в Черное" условной связи не выражает.

Формализованные языки лишены указанных недостатков. В них имеются четкие и эффективные правила построения логических форм высказываний, причем каждое правильно построенное выражение этих языков имеет единственно возможную смысловую трактовку.

Приведем общую схему построения формализованного языка. Сначала задается его *алфавит* — совокупность простейших, исходных символов, из которых строятся выражения языка. В алфавит включаются:

1) *логические символы* — специальные знаки для логических терминов,
2) *нелогические символы* — параметры, предназначенные для замещения простых высказываний или нелогических терминов различных категорий,
3) *технические символы* (например, скобки).

Далее формулируются *правила образования* из исходных символов различных типов выражений данного языка. В частности, задается класс *формул*, посредством которых как раз и фиксируются логические формы высказываний.

Определения выражений всех типов в формализованных языках носят *эффективный характер*. Пользуясь этими определениями, мы можем, например, однозначно решить вопрос, относится ли некоторый символ к числу знаков алфавита, и если — да, то к какой категории, а для произвольной последовательности символов — является ли она правильно построенной формулой или нет.

В рамках формализованных языков строятся *логические теории*, которые решают следующие задачи:

1) выделяют во множестве формул языка класс формул, представляющих собой логические законы,
2) выделяют во множестве переходов

$$\frac{F_1, F_2, ..., F_n}{F}$$

(переходов от формул $F_1, F_2, ..., F_n$ к формуле F) класс таких переходов, которые являются формами правильных умозаключений, другими словами, в которых формула F логически следует из $F_1, F_2, ..., F_n$.

При решении указанных задач используют сформулированные ранее понятия логического закона и логического следования, которые являются *общими* для всех логических теорий. Однако в каждой отдельной теории происходит *конкретизация* этих понятий. Прежде всего для каждого вида нелогических символов алфавита задается класс их *допустимых интерпретаций*, то есть указывается, какого типа объекты могут быть сопоставлены в качестве значений нелогическим символам различных категорий в процессе интерпретации формул. Далее, для каждого вида правильно построенных выражений формализованного языка формулируются *правила приписывания им значений* при произвольной интерпретации нелогических символов в их составе. В частности, определяются *условия истинности и условия ложности формул* различных типов. При этом задается точный смысл логических символов из алфавита.

Законом логической теории является формула, принимающая значение "истина" при любых допустимых интерпретациях входящих в нее нелогических символов. Эти формулы называют также *тождественно-истинными* или *общезначимыми*.

Отношение логического следования определяется в рамках логической теории следующим образом: из формул F_1, F_2, ..., F_n *логически следует* формула F, если и только если при любой допустимой интерпретации нелогических символов, при которой формулы F_1, F_2, ..., F_n принимают значение "истина", формула F также примет значение "истина".

В настоящем учебнике мы рассмотрим три известные логические теории, составляющие основу так называемой *классической логики*, — классическую логику высказываний, классическую логику предикатов первого порядка и традиционную силлогистику.

ГЛАВА II

КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1. Пропозициональные связки

Первой логической теорией, которая будет рассмотрена, является *классическая логика высказываний*. При выявлении логических форм контекстов естественного языка в этой теории происходит абстрагирование от содержаний простых высказываний, от их внутренней структуры, а учитывается лишь то, с помощью каких союзов и в каком порядке простые высказывания сочленяются в сложные.

Данный уровень анализа логических форм предполагает, во-первых, наличие в формализованном языке нелогических символов только одного типа — параметров, которыми могут замещаться простые высказывания естественного языка. Эти параметры будем называть *пропозициональными переменными* и употреблять в качестве них символы — $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2 \ldots$. Во-вторых, все логические символы этого формализованного языка также принадлежат к одной категории, они образуют из одной или нескольких формул новую формулу, а их прототипы в естественном языке, например "и", "или", "если ..., то", являются союзами, образующими из одних высказываний другие, более сложные. Логические символы указанного типа будем называть *пропозициональными связками*.

Логика высказываний (пропозициональная логика) — это логическая теория, язык которой содержит один тип нелогических символов — пропозициональные переменные, а также один тип логических символов — пропозициональные связки.

Особенности языка логики высказываний определяют специфику ее законов, а также то, в каких случаях, согласно этой теории, из множества формул логически следует некоторая формула. Законами пропозициональной логики будут формы таких высказываний, логическая истинность которых обусловлена логическими свойствами содержащихся в них союзов и не зависит от свойств других логических терминов. Правильными с точки зрения логики высказываний являются лишь такие умозаключения, в которых наличие логического следования между посылками и заключениями обусловлено теми же факторами.

Прежде чем будет осуществлено систематическое построение языка логики высказываний, следует подробнее рассмотреть вопрос о том, какие логические символы имеются в его алфавите. Выше уже говорилось, что алфавит этого формализованного языка содержит некоторое множество пропозициональных связок, образующих из формул новые формулы.

Набор пропозициональных связок в алфавите языка логики высказываний может быть различным. Перечислим сначала наиболее употребимые связки и укажем их логический смысл.

Отрицание (будем использовать для него символ "¬") является *унарной* связкой, то есть из одной формулы образует другую, более сложную формулу: из произвольной формулы **A** формулу ¬**A**. Логическое содержание высказывания, имеющего форму ¬**A**, таково: в нем утверждается *отсутствие* положения дел, описываемого в **A**.

Сказанное означает, что если положение дел, описываемое в **A**, отсутствует (то есть если **A** ложно), то высказывание ¬**A** соответствует действительности (то есть ¬**A** истинно). Если же положение дел, описываемое в **A**, имеет место (то есть если **A** истинно), то утверждение ¬**A** не соответствует действительности (то есть ¬**A** ложно).

Указанный смысл имеет в естественном языке выражение "неверно, что". Присоединяя его к произвольному ложному высказыванию (например, "2>3"), мы получаем истинное высказывание ("Неверно, что 2>3"), а из истинного (например, "3>2") это выражение образует ложное высказывание ("Неверно, что 3>2"). Таким образом, знаку "¬" в естественном языке соответствует "неверно, что".

Конъюнкция (будем использовать для нее символ "&" является *бинарной* связкой, то есть она из двух формул образует новую, более сложную формулу: из произвольных формул **A** и **B** — формулу (**A** & **B**). В высказываниях вида (**A** & **B**) утверждается *одновременное наличие* двух положений дел — описываемого в **A** и описываемого в **B**.

Таким образом, если оба положения дел имеют место в действительности (то есть если и **A** и **B** истинны), то конъюнктивное высказывание (**A** & **B**) является истинным. Если же по крайней мере одно (а может, и оба) положение дел отсутствует (то есть если **A** или же **B** ложно), то утверждение (**A** & **B**) не соответствует действительности (то есть является ложным).

Формулировка конъюнктивных высказываний в естественном языке обычно осуществляется с помощью союза "и". Например, высказывание "2 — простое число, и 2 — четное число" истинно, так как обе его части — истинные высказывания. Ложными являются следующие высказывания: "3 — простое число, и 3 — четное число" (вторая его часть — ложное высказывание); "4 — простое число, и 4 — четное число" (первая его часть — ложное высказывание); "9 — простое число, и 9 — четное число" (обе его части ложны).

Следует, однако, иметь в виду, что не любое употребление союза "и" в контекстах естественного языка выражает указанный смысл — смысл связки &. Например, в высказывании "Мэри вышла замуж и родила ребенка" союз "и" выражает мысль не об одновременном наличии двух ситуаций, а о последовательной смене этих ситуаций во времени. Поэтому при выявлении логической формы подобных высказываний в языке пропозициональной логики мы не имеем права заменить союз "и" знаком &.

С другой стороны, смысл конъюнкции может в некоторых случаях адекватно выражаться в естественном языке с помощью других терминов: "а", "но", "как... так и", "а также" и т.п. Приведенное в § 3 предыдущей главы высказывание "Если Волга впадает в Каспийское море, то Днепр — в Черное" является конъюнктивным, поскольку в нем утверждается одновременное наличие двух ситуаций: впадение Волги в Каспийское море и впадение Днепра в Черное море. Конъюнктивная связка в данном случае передается с помощью союза "если... то".

Дизъюнкция (будем использовать для нее символ "$\vee$") — бинарная связка, образующая из произвольных формул **A** и **B** новую формулу ($A \vee B$). Высказывания данной логической формы выражают мысль о наличии *по крайней мере одного* из двух положений дел — описываемого в **A** или описываемого в **B**. При этом не исключается случай их одновременного наличия. Этой связке в естественном языке обычно соответствует союз "или".

Высказывание вида ($A \vee B$) истинно, если истинным является хотя бы одно высказывание — **A** или **B** (или же сразу оба). Если же оба высказывания — как **A**, так и **B** — одновременно ложны, то сложное высказывание ($A \vee B$) ложно. Например, высказывание "Петр ходит в 10-й класс или занимается спортом" истинно, если выполняется хотя бы одно из двух зафиксированных в нем условий. Если же на самом деле Петр не ходит в 10-й класс и не занимается спортом (то есть если обе части — ложные высказывания), то данное дизъюнктивное высказывание ложно.

В некоторых контекстах естественного языка союз "или" имеет иной смысл. Так, в высказывании "Храбрец или сидит в седле, иль тихо спит в сырой земле" выражается мысль о наличии *только одной* из двух ситуаций, то есть утверждается их альтернативность, невозможность одновременного осуществления этих положений дел. В этих случаях союз "или" не может быть заменен дизъюнкцией (символом "$\vee$"), ему будет соответствовать иная связка, которая называется строгой (или альтернативной) дизъюнкцией.

Строгая дизъюнкция (будем использовать для нее символ "$\veebar$") — бинарная логическая связка, образующая из формул A и B формулу ($A \veebar B$). Высказывание формы ($A \veebar B$) выражает утверждение о наличии *ровно одной* из двух ситуаций — описанной в A или описанной в B. Данное высказывание принимает значение "истина" в двух случаях: 1) когда A истинно, а B ложно, 2) когда A ложно, а B истинно (то есть когда A и B имеют различные значения). Если же значения A и B совпадают (то есть когда они одновременно истинны или одновременно ложны), то ($A \veebar B$) принимает значение "ложь".

Материальная импликация (будем использовать для нее символ "$\supset$") — бинарная связка, образующая из формул A и B формулу ($A \supset B$). В импликативных высказываниях этой формы утверждается, что в случае, когда имеет место положение дел, описываемое в A, имеет место также и положение дел, описываемое в B. Логическое содержание ($A \supset B$) можно эквивалентным образом переформулировать так: не имеет места ситуация, при которой положение дел, описываемое в A, наличествует, а положение дел, описываемое в B, отсутствует. Отсюда следует, что при истинном A и ложном B высказывание формы ($A \supset B$) ложно. В остальных же случаях оно истинно, то есть оно истинно, если: 1) A и B истинны, или 2) A ложно, а B истинно, или 3) A и B ложны.

В естественном языке термином, наиболее адекватно выражающим смысл материальной импликации, является союз "если... то". В высказываниях вида "Если A, то B", а также в формулах ($A \supset B$) выражение A называют *антецедентом*, а выражение B *консеквентом*. В предложениях естественного языка антецедент не всегда предшествует консеквенту. Например, антецедент высказывания "Большинство владельцев акций разоряется, если их курс падает" — его вторая часть, а консеквент — первая.

Союз "если... то" во многих случаях своего употребления несет и *дополнительную смысловую нагрузку* — выражает связь между положениями дел, при которой одно из них *обусловливает* другое. Например, в приведенном только что высказывании не просто указывается на отсутствие такой ситуации, что курс акций падает, а большинство их владельцев не разоряется, но также и на то, что разорение владельцев акций обусловлено фактом падения курса последних.

Материальная импликация широко употребляется в науке. Скажем, в математике признается истинным, что для произвольного числа верно, что если оно кратно 4, то оно кратно 2. А раз это верно для любого числа, то *истинными* окажутся импликативные высказывания об отдельных числах, например, о 8, 6, 5: "Если 8 кратно 4, то 8 кратно 2" (в нем и антецедент и консеквент истинны), "Если 6 кратно 4, то 6 кратно 2" (в нем антецедент ложен, а консеквент истинен). "Если 5 кратно 4, то 5 кратно 2" (в нем антецедент и консеквент ложны).

Материальная эквиваленция (будем использовать для нее символ "$\equiv$") — бинарная связка, образующая из формул A и B формулу $(A \equiv B)$. Высказывания вида $(A \equiv B)$ утверждают, что положения дел, описанные в A и B, либо одновременно имеют место, либо одновременно отсутствуют. Содержание такого рода высказываний можно выразить иначе: в них утверждается, что при наличии положения дел, описанного в A, имеет место также и положение дел, описанное в B, и наоборот, при наличии второго положения дел имеет место и первое. Высказывания вида $(A \equiv B)$ истинны в случаях, когда A и B одновременно истинны или же одновременно ложны, то есть когда их значения совпадают. Если же значения A и B различны, то $(A \equiv B)$ ложно. Связке "$\equiv$" в естественном языке соответствуют по смыслу союзы "если и только если", "тогда и только тогда, когда".

Перечисленные пропозициональные связки имеют одну важную особенность. Значения сложных выражений, образованных с их помощью, *зависят только от значений* тех выражений, из которых образованы сложные. Иначе говоря, для того, чтобы определить, являются ли высказывания вида $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \veebar B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ истинными или ложными, необходимо и достаточно знать, какими — истинными или ложными — являются их части A и B. Действительно, если высказывание A истинно, то $\neg A$ оказывается ложным; если же A ложно, то $\neg A$ будет истинным. Если известно, например, что A и B одновременно истинны, то высказывания вида $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ примут значение "истина", а $(A \veebar B)$ — значение "ложь".

Таким образом, зная значения A и B, можно *однозначно* установить значения выражений, образованных из них с помощью связок $\neg$, $\&$, $\vee$, $\veebar$, $\supset$, $\equiv$. Это позволяет рассматривать данные символы как *знаки функций* особого типа: возможными аргументами и значениями этих функций являются объекты "истина" и "ложь". Такие функции называют ***функциями истинности***, а пропозициональные связки, которые служат знаками этих функций,— *истинностно-функциональными*.

Существует бесконечное число функций истинности, хотя для каждого n число n-местных функций истинности (функций от n

аргументов) конечно и равно 2^{2^n}. Например, количество одноместных функций — 4, двухместных — 16, трехместных — 256.

Для большинства функций истинности в естественном языке нет выражений, которые бы их представляли. Однако имеется принципиальная возможность ввести собственный символ — пропозициональную связку — для произвольной функции указанного типа в алфавит формализованного языка.

Возникает вопрос, должны ли в алфавите языка логики высказываний содержаться *все* истинностно-функциональные связки. Оказывается, что необходимость в этом отсутствует. Дело в том, что одни функции истинности могут быть выражены с помощью других. Более того, имеются такие конечные наборы функций, посредством которых выразима любая функция истинности. Такие наборы называют *функционально полными*.

Одной из функционально полных систем является множество функций, представленных связками $\neg$, &, $\vee$ и $\supset$. Покажем, например, каким образом с их помощью можно выразить функции, соответствующие связкам $\underline{\vee}$ и $\equiv$. Логический смысл высказывания вида $(A \underline{\vee} B)$ можно равносильным образом передать посредством сложного высказывания $(A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$. Пользуясь условиями истинности и ложности высказываний, содержащих $\neg$, &, $\vee$, можно убедиться в том, что выражение вида $(A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$ примет значение "истина" только в двух случаях: 1) когда **A** истинно, а **B** ложно, 2) когда **A** ложно, а **B** истинно. Но в точности в тех же случаях истинно и высказывание вида $(A \underline{\vee} B)$. Таким образом, функция истинности, соответствующая строгой дизъюнкции, выразима посредством функций отрицания, конъюнкции и нестрогой дизъюнкции.

Логический смысл высказывания вида $(A \equiv B)$ равносилен смыслу выражения $(A \supset B) \& (B \supset A)$. Данные выражения принимают значение "истина" в одних и тех же случаях: 1) когда **A** и **B** истинны, 2) когда **A** и **B** ложны. Таким образом, функция эквиваленции выразима посредством функций конъюнкции и импликации.

Иногда в алфавит языка логики высказываний наряду с пропозициональными связками, подобными рассмотренным выше, включают другие логические знаки — "$\top$" (*символ логического закона, константа истинности*) и "$\perp$" (*символ противоречия, константа ложности*). Символу "$\top$" в естественном языке соответствует логически истинное высказывание, а символу "$\perp$" — логически ложное высказывание.

Знаки "$\top$" и "$\perp$" являются формулами языка логики высказываний, причем "$\top$" постоянно принимает значение "истина", а "$\perp$" значение "ложь". Указанные символы можно трактовать как *нульарные пропозициональные связки*, то есть как логические символы, образующие формулы из такого числа других формул, которое равно нулю. Можно считать также, что "$\top$" и "$\perp$" аналогично другим вышеперечисленным связкам являются знаками функций истинности, только функции, которые они представляют, являются *нульместными* (функциями, у которых нет аргументов).

Следует отметить, что не всякая пропозициональная связка (связка, образующая из некоторого числа формул новую формулу) является истинностно-функциональной. В естественном языке имеются такие сложные высказывания, значения которых не всегда можно установить, зная лишь значения высказываний в их составе. Например, для того, чтобы утверждать, что высказывание "Мэри вышла замуж и родила ребенка" истинно, недостаточно установить истинность высказываний "Мэри вышла замуж" и "Мэри родила ребенка", из которых оно образовано. Необходимо, кроме этого, убедиться в том, что положение дел, описанное в первом из них, предшествовало во времени положению дел, описанному во втором. Следовательно, пропозициональная связка, которая соответствует данному употреблению союза "и" (в смысле "а затем"), не является знаком функции истинности.

К числу истинностно-функциональных не относится также связка, выражающая условную связь между ситуациями (для этой связки используют обычно символ "$\to$" и называют ее релевантной или *номологической импликацией*). Высказывание вида ($A \to B$) истинно, если положение дел, описываемое в A, обусловливает наличие ситуации, описанной в B. Высказывание ($A \to B$) в отличие от ($A \supset B$) может оказаться ложным не только в случае, когда A истинно, а B ложно. Так, при истинных A ("3>2") и B ("Волга впадает в Каспийское море") высказывание ($A \to B$) ложно, хотя в других случаях, когда A и B истинны, ($A \to B$) может оказаться и истинным, например, если A есть высказывание "Медь — металл", а B — "Медь проводит электрический ток".

Еще один тип пропозициональных связок составляют *модальности*. Они выражаются в естественном языке такими оборотами, как "необходимо, что..." (для этой модальности используют обычно символ "$\Box$"), "возможно, что..." ("$\Diamond$"), "случайно, что..." ("∇") и т.п. Нетрудно убедиться в том, что модальности также не являются знаками функций истинности. Действительно, высказывания вида $\Box A$ могут оказаться как истинными, так и ложными при истинном A. Если же A ложно, то нельзя лишь на основании этого факта однозначно определить, является ли $\Diamond A$ истинным или ложным.

Та логическая теория, которая будет изложена в данной главе,— классическая логика высказываний — содержит в своем языке в качестве логических символов *только истинностно-функциональные связки*. Исследование свойств других видов пропозициональных связок (временных, модальных, релевантной импликации и др.) осуществляется в других логических теориях, которые называют *неклассическими логиками*.

§ 2. Язык классической логики высказываний

Приступим к систематическому построению языка классической логики высказываний. Прежде всего зададим его *алфавит* — совокупность исходных символов данного формализованного языка.

Множество *нелогических символов* составляет бесконечный список *пропозициональных переменных* p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, ... Эти символы, как уже говорилось, используются в качестве параметров простых высказываний при выявлении логических форм контекстов естественного языка.

Логическими символами данного языка являются *истинностно-функциональные пропозициональные связки*. В качестве исходных могут быть приняты различные наборы связок. Единственное требование, предъявляемое к указанным наборам,— следующее: система функций истинности, представленных этими связками, должна быть *функционально полной*, то есть с помощью функций данной системы должна быть выразима любая функция истинности. Договоримся использовать в качестве исходных логических символов связки $\neg$, &, $\vee$, $\supset$.

Техническими символами являются левая и правая круглые скобки: (,). Построение алфавита завершено.

Выражением языка классической логики высказываний будем называть любую последовательность знаков его алфавита. Некоторые из этих выражений являются *правильно построенными*, а некоторые не являются таковыми. Причем в языке пропозициональной логики имеется один тип правильно построенных выражений — *формулы*. Точное определение формулы задается следующим образом:

1. Всякая пропозициональная переменная является формулой.
2. Если A — формула, то $\neg$A также является формулой.
3. Если A и B — формулы, то выражения (A & B), (A $\vee$ B), (A $\supset$ B) также являются формулами.
4. Ничто иное не является формулой.

Формулы, указанные в п. 1 данного определения, называют *элементарными*, а в пп. 2 и 3 — *сложными*. Заметим, что если в алфавит языка введены логические символы $\top$ (константа истинности) или $\perp$ (константа ложности), то их также включают в класс формул, причем относят к числу элементарных формул.

Пользуясь определением формулы, можно для любого выражения языка в конечное число шагов решить вопрос о том, является оно формулой или нет.

Определим, например, является ли формулой выражение $(\neg p \supset (q \mathbin{\&} r))$. Оно имеет вид $(A \supset B)$, где A есть $\neg p$, а B — $(q \mathbin{\&} r)$. Согласно п. 3 определения, $(A \supset B)$ является формулой, если A и B формулы. Таким образом, наша задача сводится к решению двух подзадач: являются ли формулами $\neg p$ и $(q \mathbin{\&} r)$. Выражение $\neg p$ является формулой в соответствии с п. 2, поскольку оно имеет вид $\neg C$, где C есть p, а p — формула, согласно п. 1. Выражение $(q \mathbin{\&} r)$ также является формулой (в соответствии с п. 3), поскольку оно имеет вид $(D \mathbin{\&} E)$, где D есть q, а E есть r, которые являются формулами, согласно п. 1. Итак, выражение $(\neg p \supset (q \mathbin{\&} r))$ — формула.

Является ли формулой выражение $(p\ \neg q)$? Переменные p и q являются формулами. Следовательно, данное выражение имеет вид $(A\ \neg B)$, где A и B — формулы. Но выражения вида $(A\ \neg B)$ не предусмотрены пп. 1–3, поэтому, согласно п. 4, они не являются формулами.

Формула, входящая в состав некоторой формулы, называется ее подформулой. Например, подформулами $(\neg p \supset (q \mathbin{\&} r))$ являются p, q, r, $\neg p$, $(q \mathbin{\&} r)$, а также сама $(\neg p \supset (q \mathbin{\&} r))$, ведь, согласно определению подформулы, всякая формула является собственной подформулой.

В сложной формуле всегда можно выделить связку, которая называется ее *главным знаком*. В формулах вида $\neg A$ главным знаком является первое слева вхождение символа $\neg$. В формулах видов $(A \mathbin{\&} B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ главными знаками являются, соответственно, те вхождения символов $\&$, $\vee$, $\supset$, которые стоят между подформулами A и B. Например, в формуле $(\neg p \supset (q \mathbin{\&} r))$ главным является знак $\supset$. В формуле $((\neg p \supset q) \mathbin{\&} r)$ — знак $\&$, а в формуле $\neg(p \supset (q \mathbin{\&} r))$ — знак $\neg$.

Для того чтобы записи формул имели более компактный вид, примем *соглашение об опускании скобок*: если первым знаком формулы является левая скобка, а последним — правая, то эту пару скобок договоримся опускать. Тогда формула $(\neg p \supset (q \mathbin{\&} r))$ запишется как $\neg p \supset (q \mathbin{\&} r)$.

Завершив построение формализованного языка, покажем, каким образом в нем выражается логическая форма высказываний естественного языка. Поясним, как осуществляется данная процедура, на примере.

Выразим в языке пропозициональной логики форму сложного высказывания:

"Если спортсмен стал призером соревнований, но не выиграл их, то он занял второе либо третье место".

Прежде всего необходимо выделить простые высказывания, входящие в состав сложного. В нашем примере их четыре:

(1) Спортсмен стал призером соревнований.
(2) Спортсмен выиграл соревнования.
(3) Спортсмен занял второе место.
(4) Спортсмен занял третье место.

Каждому простому высказыванию сопоставляется собственная пропозициональная переменна, например, первому — p, второму — q, третьему — r, четвертому — s.

Далее выделяем логические термины, посредством которых простые высказывания сочленяются в сложные: "но", "не", "либо", "если... то". Теперь необходимо выяснить, какой смысл в данном высказывании выражает каждый логический термин, и сопоставить этому термину связку формализованного языка, имеющую аналогичный смысл. В нашем случае термину "но" по смыслу соответствует конъюнкция (&), термину "не" — отрицание (¬), термину "либо " — дизъюнкция (∨). Что же касается союза "если... то", то наиболее близкой ему по смыслу является материальная импликация (⊃). Однако, как уже говорилось, этот союз обычно выражает условную связь между положениями дел и не является истинностно-функциональным. Поэтому, заменяя "если... то" связкой "⊃", мы должны помнить, что в указанных случаях она выражает лишь *часть* логического содержания условного высказывания.

Наконец, необходимо установить порядок и способ сочленения простых высказываний в сложное посредством логических терминов. В нашем высказывании главным является союз "если... то", значит, его логическая форма должна быть импликативной формулой. Ее антецедент — конъюнктивная формула, первым членом которой будет p (этой переменной мы заменяем простое высказывание (1)), а вторым членом — отрицание q (этой переменной заменяется высказывание (2)). Итак, антецедент импликации имеет вид (p & ¬q). Ее консеквент — дизъюнктивная формула, членами которой являются переменные **r** и **s** (ими заменяются высказывания (3) и (4)). Итак, консеквент импликации имеет вид $(r \vee s)$. В целом логической формой рассматриваемого высказывания является формула $(p \& \neg q) \supset (r \vee s)$.

В контекстах естественного языка простые высказывания могут сочленяться с помощью таких логических союзов, которым не соответствует по смыслу никакая пропозициональная связка из алфавита построенного нами формализованного языка. Например, высказывание

"Ни днем, ни ночью пограничники не теряют бдительности"

содержит союз "ни... ни", у которого нет смыслового аналога в системе связок $\{\neg, \&, \vee, \supset\}$. Как же выявляется логическая форма в подобных случаях?

Для этого необходимо *переформулировать* сложное высказывание таким образом, чтобы оно выражало то же самое утверждение, но содержало при этом только такие союзы, которым соответствуют по смыслу какие-либо связки из алфавита. Например, приведенное выше высказывание можно, не изменяя его содержания, переформулировать так:

"Неверно, что днем пограничники теряют бдительность, и неверно, что ночью пограничники теряют бдительность".

Логическая форма данного высказывания имеет вид $(\neg p \& \neg q)$, где **p** подставлено вместо "Днем пограничники теряют бдительность", а **q** вместо "Ночью пограничники теряют бдительность".

Пропозициональная связка, адекватная по смыслу союзу "ни... ни..." естественного языка, может быть введена в язык классической пропозициональной логики *посредством определения через исходные связки алфавита*. Выражение вида "Ни **A**, ни **B**" содержит утверждение об отсутствии обеих ситуаций — описанной в **A** и описанной в **B**. Логическое содержание этого утверждения выразимо с помощью связок $\neg$ и $\&$ следующим образом: $(\neg A \& \neg B)$. Поэтому в формализованный язык можно ввести аналогичный союзу "ни... ни" символ, например, "$\downarrow$", приняв следующее определение:

$$(A \downarrow B) \leftrightharpoons (\neg A \& \neg B),$$

где знак "$\leftrightharpoons$" означает "равносильно по определению", а саму связку "$\downarrow$" называют *знаком Нико*.

Подобным же образом (то есть посредством определения через элементы системы { $\neg$, &, $\vee$, $\supset$ }) можно ввести в язык классической логики высказываний *любую связку, являющуюся знаком функции истинности*. Например, определения строгой дизъюнкции ($\underline{\vee}$) и эквиваленции ($\equiv$) имеют следующий вид:

$$(A \,\underline{\vee}\, B) \leftrightharpoons (A \,\&\, \neg B) \vee (\neg A \,\&\, B),$$
$$(A \equiv B) \leftrightharpoons (A \supset B) \,\&\, (B \supset A).$$

Нетрудно убедиться в том, что правые части этих определений имеют то же логическое содержание, что и их левые части.

Приняв в языке пропозициональной логики указанные определения, мы можем использовать в нем выражения вида $(A \downarrow B)$, $(A \,\underline{\vee}\, B)$, $(A \equiv B)$, но эти выражения должны рассматриваться *как сокращения* для формул $(\neg A \,\&\, \neg B)$, $(A \,\&\, \neg B) \vee (\neg A \,\&\, B)$, $(A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$ соответственно. С другой стороны, применяя эти определения, мы можем устранить связки $\downarrow$, $\underline{\vee}$, и $\equiv$. Выявим, например, логическую формулу высказывания:

"Треугольник не является прямоугольным, если и только если верно одно из двух: он либо остроугольный, либо тупоугольный".

Заменим простое высказывание "Треугольник является прямоугольным" параметром p, "Он остроугольный" параметром q, "Он тупоугольный" — r. Термину "не" соответствует по смыслу связка "$\neg$", термину "если и только если" — "связка" "$\equiv$", а термину "либо... либо" — связка "$\underline{\vee}$". Поэтому логическую форму данного высказывания можно представить так: $\neg p \equiv (q \,\underline{\vee}\, r)$. Покажем, каким образом можно устранить символы "$\equiv$" и "$\underline{\vee}$" из выражения. Согласно определению эквиваленции, данное выражение равносильно $(\neg p \supset (q \,\underline{\vee}\, r)) \,\&\, ((q \,\underline{\vee}\, r) \supset \neg p)$. Далее заменяем вхождения $(q \,\underline{\vee}\, r)$ согласно определению строгой дизъюнкции на $((q \,\&\, \neg r) \vee (\neg q \,\&\, r))$. В итоге получаем формулу:

$$(\neg p \supset ((q \,\&\, \neg r) \vee (\neg q \,\&\, r))) \,\&\, (((q \,\&\, \neg r) \vee (\neg q \,\&\, r)) \supset \neg p),$$

которая является логической формой анализируемого высказывания в языке с исходными связками $\neg$, &, $\vee$, $\supset$.

Задав язык классической логики высказываний, приступим к построению в его рамках самой этой логической теории — *классической логики высказываний*. При этом будем использовать метод, получивший название *метода таблиц истинности*.

§ 3. Таблицы истинности. Тождественно-истинные, тождественно-ложные и выполнимые формулы

Как и всякая логическая теория, логика высказываний решает две основные задачи: во-первых, выделяет среди класса формул множество своих законов и, во-вторых, устанавливает логические отношения (прежде всего отношение логического следования) между формулами формализованного языка.

Напомним, что законом логической теории является формула, принимающая значение "истина" при любой допустимой в данной теории интерпретации нелогических символов в ее составе. Поэтому построение логики высказываний следует начать с вопроса о том, каким образом могут интерпретироваться нелогические символы ее языка, то есть пропозициональные переменные (это единственный тип нелогических символов в языке пропозициональной логики).

Интерпретации пропозициональных переменных. Нелогические символы формализованных языков, как уже говорилось, являются параметрами некоторых выражений естественного языка. В частности, пропозициональные переменные — параметры простых высказываний.

Процедура интерпретации нелогических символов состоит в приписывании им значений. Тип значения каждого такого символа должен быть тем же самым, что и у соответствующих выражений естественного языка (то есть выражений, параметром которых является данный символ).

Поскольку каждое простое высказывание либо истинно, либо ложно, то их параметрам — пропозициональным переменным — могут приписываться в качестве значений только "истина" или "ложь". Итак, существует две допустимых интерпретации каждой отдельно взятой пропозициональной переменной: 1) интерпретация, сопоставляющая ей значение "истина", 2) интерпретация, сопоставляющая ей значение "ложь".

Понятие интерпретации пропозициональных переменных можно распространить на случай, когда значения приписываются не обязательно одной, а некоторому числу n различных пропозициональных переменных, например, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n$.

Допустимой интерпретацией переменных $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n$ является произвольный *набор их значений*, то есть любая последовательность $<\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n>$, где каждое α_i есть либо "истина" (сокращенно и), либо "ложь" (сокращенно л), причем α_1 есть значение переменной p_1, α_2 — значение p_2, ..., α_n — значение p_n.

Если последовательность $p_1, p_2, ..., p_n$ состоит из одной переменной (то есть если n = 1), то существует два набора значений: <и> и <л>. Компоненты этих одночленных последовательностей являются значениями p_1 при различных интерпретациях.

Если эта последовательность содержит две переменные (если n = 2), то наборами значений являются пары (всего их четыре):

<и,и>, <и,л>, <л,и> и <л,л>.

Первая компонента пары указывает на значение p_1, а вторая — на значение p_2 при данной интерпретации.

Если последовательность содержит три переменные, то наборами значений будут тройки (всего их восемь):

<и, и, и>, <и, и, л>, <и, л, и>, <и, л, л>,
<л, и, и>, <л, и, л>, <л, л, и>, <л, л, л>.

Первая компонента тройки указывает на значение p_1, вторая — на значение p_2, третья — на значение p_3 при данной интерпретации.

Допустимые интерпретации переменных $p_1, p_2, ..., p_n$ могут быть представлены в виде таблицы: в строчках записываются различные наборы значений этих переменных, а в столбиках тогда оказываются значения переменных при различных интерпретациях. Наборы значений удобно располагать в алфавитном порядке (как располагают слова в словаре). Составим подобные таблицы для одной, двух и трех переменных:

	p_1
1	и
2	л

	p_1	p_2
1	и	и
2	и	л
3	л	и
4	л	л

	p_1	p_2	p_3
1	и	и	и
2	и	и	л
3	и	л	и
4	и	л	л
5	л	и	и
6	л	и	л
7	л	л	и
8	л	л	л

Вообще, число всех возможных наборов значений n переменных равно 2^n. Например, число допустимых интерпретаций четырех переменных равно 16, пяти переменных — 32 и т.д.

Табличные определения пропозициональных связок. Следующий этап построения логической теории состоит в придании точных значений логическим символам алфавита. Напомним, что в нашем формализованном языке исходными логическими символами являются пропозициональные связки ¬, &, ∨, ⊃. Эти связки, как уже говорилось, можно рассматривать как знаки *функций истинности* — функций, аргументами и значениями которых являются "истина" или "ложь".

Придать значение пропозициональной связке (в классической логике высказываний) — означает сопоставить ей определенную функцию истинности.

Какие же функции следует сопоставить связкам ¬, &, ∨, ⊃? Для ответа на этот вопрос необходимо вспомнить, какое логическое содержание имеют высказывания формы ¬A, (A & B), (A ∨ B), (A ⊃ B), при каких условиях они истинны, а при каких — ложны. Эта проблема подробно рассматривалась в §1 данной главы.

Высказывание формы ¬A принимает значение "истина" в том случае, когда A ложно; если же A истинно, то ¬A принимает значение "ложь". Сказанное можно выразить посредством следующей таблицы:

A	**¬A**
и	л
л	и

В первом столбце указаны возможные значения формулы A (и и л), а во втором — значения, которые примет формула ¬A в соответствующих случаях. Данную таблицу можно рассматривать *как определение функции истинности*, представленной знаком отрицания. Эта функция объекту **и** сопоставляет объект **л**, а объекту **л** — объект **и**.

Высказывание формы (A & B) истинно, если оба высказывания — и A и B — истинны. Если же хотя бы одно из них ложно, то (A & B) примет значение "ложь". Выразим условия истинности и ложности конъюнктивных формул в таблице:

A	**B**	**A & B**
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

В первых двух столбцах указаны все возможные наборы значений формул А и В, а в третьем — значения, которые примет формула (А & В) в соответствующих случаях. Данная таблица определяет функцию истинности, представленную знаком конъюнкции, следующим образом: паре <и, и> эта функция сопоставляет объект и, а парам <и, л>, <л, и> и <л, л> — объект л.

Высказывание формы (А ∨ В) истинно, если по крайней мере одно из двух высказываний — А или В — является истинным. Если же оба они ложны, то (А ∨ В) примет значение "ложь". Исходя из этих условий истинности и ложности формул вида (А ∨ В), зададим табличное определение дизъюнкции:

А	В	А ∨ В
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Высказывание формы (А ⊃ В) ложно, если А истинно, а В ложно. В противном случае, то есть когда А ложно или В истинно, (А ⊃ В) примет значение "истина". Табличное определение импликации выглядит следующим образом:

А	В	А ⊃ В
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Алгоритм построения таблиц истинности. Зададим теперь алгоритм решения вопроса, при каких интерпретациях пропозициональных переменных произвольная формула языка принимает значение "истина", а при каких значение "ложь". Иначе говоря, предложим метод, позволяющий *вычислять* значение любой формулы при каждом наборе значений входящих в нее переменных. Чтобы решить указанную задачу, для данной формулы А строится *таблица истинности*. Ее построение осуществляется следующим образом:

1) Прежде всего выделяются все различные пропозициональные переменные, входящие в состав А.

2) В столбик выписываются все возможные наборы значений этих переменных.

3) В составе формулы А выделяются все подформулы (начиная от элементарных и кончая самой формулой А).

4) Вычисляется значение каждой подформулы при каждом наборе значений переменных.

Значения элементарных подформул — пропозициональных переменных — уже заданы пунктом 2. При вычислении значений сложных подформул используются табличные определения связок $\neg$, $\&$, $\vee$ и $\supset$. Причем сначала определяются значения подформул, содержащих одну пропозициональную связку, затем значения подформул, содержащих две пропозициональные связки, и т.д. Наконец, вычисляется значение подформулы с максимальным числом связок, то есть самой формулы А.

Построим в качестве примера таблицу истинности для формулы $(p \supset \neg p) \,\&\, (\neg p \supset p)$. В составе этой формулы содержится одна пропозициональная переменная — **р**. Имеется два набора значений **р**: <и> и <л>. Подформулами данной формулы являются **р**, $\neg p$, $(p \supset \neg p)$, $(\neg p \supset p)$ и, наконец, сама формула $(p \supset \neg p) \,\&\, (\neg p \supset p)$. Строим таблицу истинности согласно вышеописанному алгоритму:

p	$\neg p$	$(p \supset \neg p)$	$(\neg p \supset p)$	$(p \supset \neg p) \,\&\, (\neg p \supset p)$
и	л	л	и	л
л	и	и	л	л

В первом столбце таблицы указаны все допустимые интерпретации **р** — единственной переменной в нашей формуле. Значения $\neg p$ определяются построчно исходя из значений **р** по определению отрицания. Значения $(p \supset \neg p)$ устанавливаются по определению импликации исходя из значений **р** и $\neg p$ в каждой из строчек: в первой строке антецедент **р** истинен, а консеквент $\neg p$ ложен, поэтому $(p \supset \neg p)$ получает значение **л**, а во второй — антецедент ложен, а консеквент истинен, поэтому $(p \supset \neg p)$ принимает значение **и**. Значения $(\neg p \supset p)$ устанавливаются исходя из значений антецедента $\neg p$ и консеквента **р**: в первой строке антецедент ложен, а консеквент истинен, поэтому $(\neg p \supset p)$ примет значение **и**; во второй строке антецедент истинен, а консеквент ложен, поэтому $(\neg p \supset p)$ примет значение **л**. Значение всей формулы $(p \supset \neg p) \,\&\, (\neg p \supset p)$ вычисляется исходя из значений $(p \supset \neg p)$ и $(\neg p \supset p)$ по определению конъюнкции: в первой строке первый член конъюнкции ложен, а во второй ложен второй ее член, значит, в обеих строках формула $(p \supset \neg p) \,\&\, (\neg p \supset p)$ примет значение **л**.

Таблица для формулы А может быть построена более компактным образом: выписываются отдельно лишь элементарные подформулы А (для них задаются все возможные наборы значений), значения же сложных подформул указываются под их главными знаками в составе формулы А. Значения самой формулы А указываются под ее главным знаком, и данный столбец таблицы называется *результирующим*. Таблица для формулы $(p \supset \neg p) \& (\neg p \supset p)$ в более компактном виде выглядит следующим образом:

p	$(p \supset$	$\neg p)$	$\&$	$(\neg p$	$\supset p)$
и	л	л	л	л	и
л	и	и	л	и	л
(1)	(4)	(2)	(6)	(3)	(5)

В столбце (1) указаны возможные интерпретации переменной p, в столбцах (2) и (3) — значения, которые при этих интерпретациях принимает формула $\neg p$, в столбце (4) — значения $(p \supset \neg p)$, в столбце (5) — значения $(\neg p \supset p)$. Значения всей формулы $(p \supset \neg p) \& (\neg p \supset p)$ указаны в столбце (6), который и является результирующим.

Построим теперь таблицу истинности для формулы $\neg(p \& q) \supset (\neg p \vee \neg q)$, которая содержит две пропозициональные переменные.

p	q	$\neg($	$p \& q)$	$\supset$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
и	и	л	и	и	л	л	л
и	л	и	л	и	л	и	и
л	и	и	л	и	и	и	л
л	л	и	л	и	и	и	и
(1)	(2)	(6)	(3)	(8)	(4)	(7)	(5)

В столбцах (1) и (2) заданы все возможные наборы значений переменных p и q. Столбец (3), указывающий значения в каждом из этих наборов формулы $(p \& q)$, построен с использованием (1) и (2) по определению конъюнкции. Столбец (4) со значениями формулы $\neg p$ и столбец (5) со значениями $\neg q$ построены, соответственно, на основе (1) и (2) по определению отрицания. Столбец (6) со значениями формулы $\neg(p \& q)$ построен на основе (3) по определению отрицания. Столбец (7) со значениями формулы $(\neg p \vee \neg q)$ построен на основе (4) и (5) по определению дизъюнкции. Наконец, результирующий столбец (8) построен с использованием (6) и (7) по определению импликации.

Таким образом, формула $\neg(p \,\&\, q) \supset (\neg p \lor \neg q)$ принимает значение "истина" при любых наборах значений переменных **p** и **q**.

Завершим данную серию примеров построением таблицы истинности для формулы $\neg((p \,\&\, \neg q) \lor (q \supset r))$, содержащей три пропозициональные переменные. Число возможных интерпретаций трех переменных равно 2^3, то есть восьми, поэтому в таблице для указанной формулы будет восемь строк.

p	q	r	$\neg$((p &	$\neg$q)	$\lor$	(q	$\supset$ r))
и	и	и	л	л	л	и	и
и	и	л	и	л	л	л	л
и	л	и	л	и	и	и	и
и	л	л	л	и	и	и	и
л	и	и	л	л	л	и	и
л	и	л	и	л	л	л	л
л	л	и	л	л	и	и	и
л	л	л	л	л	и	и	и

Главным знаком рассматриваемой формулы является первое вхождение символа "$\neg$". Результирующий столбец таблицы расположен под этим знаком. Формула $\neg((p \,\&\, \neg q) \lor (q \supset r))$ принимает значение "истина" в следующих случаях: 1) когда **p** и **q** истинны, а **r** — ложно (вторая строка) и 2) когда **p** и **r** ложны, а **q** — истинно (шестая строка). При всех остальных интерпретациях **p**, **q**, **r** формула примет значение "ложь".

Законы классической логики высказываний. Используя метод построения таблиц истинности, можно эффективно решать вопрос о том, является ли какая-либо формула языка классической пропозициональной логики законом этой теории. Напомним, что законом некоторой логической теории называется формула, принимающая значение "истина" при любых интерпретациях (допустимых в этой теории) нелогических символов, входящих в состав данной формулы.

Законом классической логики высказываний является формула, принимающая значение "истина" при любых наборах значений входящих в нее пропозициональных переменных. Формулы данного типа называют также *тождественно-истинными*. В результирующем столбце таблицы для тождественно-истинной формулы в каждой строке имеем **и**. Примером тождественно-истинной формулы является $\neg(p \,\&\, q) \supset (\neg p \lor \neg q)$, таблица которой построена выше.

Утверждение "Формула A является тождественно-истинной" будем записывать сокращенно следующим образом: "$\models A$".

Помимо множества тождественно-истинных формул полезно также выделить еще два класса формул языка классической логики высказываний: класс *тождественно-ложных* и класс *выполнимых* формул.

Формула называется тождественно-ложной, если и только если она принимает значение "ложь" при любых наборах значений входящих в нее пропозициональных переменных (то есть во всех строчках таблицы истинности для этой формулы). Примером тождественно-ложной формулы является $(p \supset \neg p) \& (\neg p \supset p)$.

Формула называется выполнимой, если и только если она принимает значение "истина" по крайней мере при одном наборе значений входящих в нее пропозициональных переменных (то есть хотя бы в одной строке таблицы для этой формулы). Примером выполнимой формулы является $\neg((p \& \neg q) \vee (q \supset r))$.

Из последнего определения следует, что *всякая тождественно-истинная формула является выполнимой*, поскольку действительно существует набор значений, при котором она принимает значение "истина". Поэтому тождественно-истинная формула $\neg(p \& q) \supset (\neg p \vee \neg q)$ относится также и к классу выполнимых.

Теперь средствами классической пропозициональной логики можно определить, является ли произвольное высказывание естественного языка логически истинным, логически ложным или логически недетерминированным (определения этих терминов даны в §3 главы I). Для этого необходимо выразить логическую форму данного высказывания в языке пропозициональной логики и построить таблицу истинности для полученной формулы. Если во всех строках таблицы формула примет значение "истина", то исходное высказывание является *логически истинным* относительно данной теории. Если во всех строках формула примет значение "ложь", то высказывание *логически ложно*. Если же в некоторых строках формула примет значение "истина", а в некоторых — значение "ложь", то высказывание является *логически недетерминированным* относительно классической логики высказываний.

Например, высказывание "Если неверно, что Иванов знает английский и французский языки, то он не знает английского или не знает французского языка" имеет форму $\neg(p \& q) \supset (\neg p \vee \neg q)$, где p подставлена вместо высказывания "Иванов знает английский язык", а q — вместо "Иванов знает французский язык". Ранее было установлено, что эта формула является тождественно-истинной. Поэтому рассматриваемое высказывание логически истинно.

В завершение этого параграфа дадим табличные определения эквиваленции ($\equiv$), строгой дизъюнкции ($\veebar$) и знака Нико ($\downarrow$), которые не входят в число исходных пропозициональных связок языка. В предыдущем параграфе отмечалось, что выражение вида $(A \equiv B)$ является сокращением для формулы $(A \supset B) \& (B \supset A)$, выражение вида $(A \veebar B)$ — сокращением для $(A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$, а выражение вида $(A \downarrow B)$ — сокращением для $(\neg A \& \neg B)$. Поэтому для того, чтобы выяснить условия истинности и ложности $(A \equiv B)$, $(A \veebar B)$, $(A \downarrow B)$, необходимо построить таблицы для формул вида $(A \supset B) \& (B \supset A)$, $(A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$, $(\neg A \& \neg B)$ соответственно.

A	B	$(A \supset B) \& (B \supset A)$			$(A \& \neg B) \veebar (\neg A \& B)$					$\neg A \& \neg B$		
и	и	и	и	и	л	л	л	л	л	л	л	л
и	л	л	л	и	и	и	и	л	л	л	л	и
л	и	и	л	л	л	л	и	и	и	и	л	л
л	л	и	и	и	л	и	л	и	л	и	и	и

Перенеся результирующие столбцы под выражения $(A \equiv B)$, $(A \veebar B)$, $(A \downarrow B)$, получим табличные определения связок $\equiv$, $\veebar$ и $\downarrow$.

A	B	$A \equiv B$	$A \vee B$	$A \downarrow B$
и	и	и	л	л
и	л	л	и	л
л	и	л	и	л
л	л	и	л	и

Если в алфавит логики высказываний введены нульместные связки $\top$ (константа истинности) или $\perp$ (константа ложности), то при построении таблиц истинности формуле $\top$ во всех строках приписывается значение "истина", а формуле $\perp$ во всех строках значение "ложь".

§ 4. Логические отношения между формулами

Наряду с выделением класса логических законов в рамках логических теорий решается еще одна задача — устанавливаются *логические отношения* (отношения по истинности и ложности) между формулами. При этом учитываются возможные совместные значения формул при различных интерпретациях нелогических символов в их составе.

Итак, чтобы установить отношения между формулами в рамках некоторой логической теории, необходимо определить, какие значения могут или же какие значения не могут принять эти формулы совместно при допустимых в данной теории интерпретациях нелогических символов, входящих в состав указанных формул.

В качестве *фундаментальных* логических отношений выделяют отношения *совместимости по истинности, совместимости по ложности* и *логического следования*.

Формулы некоторого множества формул Г называются совместимыми по истинности в некоторой логической теории Т, если и только если в Т существует интерпретация нелогических символов, входящих в указанные формулы, при которой каждая формула из Г принимает значение "истина".

В противном случае (то есть когда не существует интерпретации, при которой формулы из Г одновременно истинны) указанные формулы *несовместимы по истинности*.

Формулы из множества Г называются совместимыми по ложности в теории Т, если и только если в Т существует интерпретация нелогических символов, входящих в указанные формулы, при которой каждая формула из Г принимает значение "ложь".

В противном случае (то есть когда не существует интерпретации, при которой формулы из Г одновременно ложны) указанные формулы *несовместимы по ложности*.

Наибольшую важность представляет отношение логического следования, о котором уже шла речь ранее (см. § 2 главы I). Введем соответствующее понятие более строгим образом.

Из множества формул Г логически следует формула В в некоторой логической теории Т, если и только если в Т не существует интерпретации нелогических символов, входящих в Г и в В, при которой каждая формула из Г принимает значение "истина", а формула В — значение "ложь".

В противном случае (то есть когда существует интерпретация, при которой формулы из Г одновременно истинны, а В ложна) формула В *не следует логически* из Г.

Утверждение "Из множества формул Г логически следует формула В" записывают сокращенно следующим образом: "Г $\models$ В".

Итак, мы сформулировали определения основных логических отношений между формулами для произвольной логической теории. Рассмотрим далее вопрос о том, как практически можно установить эти отношения в рамках классической логики высказываний. В этой теории имеется *эффективная процедура*, позволяющая выяснять, являются ли формулы некоторого множества Г совместимыми по истинности, совместимыми по ложности, следует ли из них произвольная формула В, в случаях, когда Г содержит *конечное* число формул.

Установить отношения между конечным числом формул можно, предварительно построив для этих формул *совместную таблицу истинности*.

Алгоритм построения совместной таблицы для нескольких формул несложен. Прежде всего необходимо выделить пропозициональные переменные, которые входят в состав по крайней мере одной из этих формул. Затем следует задать все возможные наборы значений выделенных переменных (записав их в столбик в таблице). Затем описанным ранее способом вычисляют значения каждой из формул на каждом из заданных наборов.

Построим в качестве примера совместную таблицу для формул $p \lor q$, $p \supset r$ и $p \lor r$. Составим список переменных, входящих хотя бы одну из этих формул: p, q, r. Зададим все возможные наборы значений трех переменных (их число равно 8) и вычислим значения на этих наборах формул $p \lor q$, $q \supset r$, $p \lor r$. В результате получим следующую таблицу:

p	q	r	$p \lor q$	$q \supset r$	$p \lor r$
и	и	и	и	и	и
и	и	л	и	л	и
и	л	и	и	и	и
и	л	л	и	и	и
л	и	и	и	и	и
л	и	л	и	л	л
л	л	и	л	и	и
л	л	л	л	и	л

Построив совместную таблицу для формул, приступают к установлению логических отношений между ними. При этом используют те критерии совместимости по истинности, совместимости по ложности и логического следования, которые соответствуют сформулированным выше определениям указанных отношений.

Если в совместной таблице найдется по крайней мере одна строка, в которой каждая формула принимает значение **и**, то данные формулы *совместимы по истинности*. Если же строка, в которой формулы одновременно истинны, отсутствует, то они *несовместимы по истинности*.

Если в совместной таблице найдется по крайней мере одна строка, в которой каждая формула принимает значение л, то они *совместимы по ложности*. Если же строка, в которой формулы одновременно ложны, отсутствует, то они *несовместимы по ложности*.

Предположим, что нам необходимо выяснить, следует ли логически из формул A_1, A_2, ..., A_n формула B. Строим совместную таблицу для формул A_1, A_2, ..., A_n и B. Если в данной таблице *отсутствует* строка, в которой формулы A_1, A_2, ..., A_n одновременно истинны, а формула B ложна, то $A_1, A_2, ..., A_n \models B$. Если же такая строка *имеется*, то B не следует логически из A_1, A_2, ..., A_n.

Установим логические отношения между формулами $p \vee q$, $q \supset r$ и $p \vee r$. Для этого обратимся к совместной для них таблице, которая построена нами ранее. Формулы $p \vee q$, $q \supset r$, $p \vee r$ совместимы по истинности, поскольку в совместной таблице имеется строка — например, первая, — в которой каждая из них принимает значение и. Указанные формулы несовместимы по ложности, поскольку в таблице отсутствует строка, в которой они были бы одновременно ложными.

Формула $p \vee r$ логически следует из $p \vee q$ и $q \supset r$: $p \vee q, q \supset r \models p \vee r$, поскольку в совместной таблице нет строки, в которой $p \vee q$ и $q \supset r$ принимают значение и, а $p \vee r$ — значение л. Вместе с тем формула $p \vee q$ не следует логически из $q \supset r$ и $p \vee r$, поскольку в таблице имеется строка — а именно седьмая, — в которой $q \supset r$ и $p \vee r$ истинны, а $p \vee q$ ложна. Формула $q \supset r$ также не следует из формул $p \vee q$ и $p \vee r$, об этом свидетельствует вторая строка совместной таблицы.

Метод таблиц истинности может быть использован для проверки правильности умозаключений, осуществляемых в естественном языке. Для того чтобы проверить умозаключение средствами классической логики высказываний, необходимо выразить в языке этой теории логическую форму его посылок и заключения. Далее следует построить совместную таблицу истинности для полученных формул и с ее помощью ответить на вопрос, следует ли логическая форма заключения из логических форм посылок. Если логическое следование имеет место, то рассматриваемое умозаключение является правильным, в противном же случае оно неправильно.

В качестве примера проверим следующее умозаключение:

"Если данное тело движется равномерно и прямолинейно, то на него не действуют силы. Данное тело движется равномерно, но не прямолинейно. Следовательно, на него действуют силы".

Заменив переменной p простое высказывание "Данное тело движется равномерно", переменной q — "Данное тело движется прямолинейно", переменной r — "На данное тело действуют силы", получаем логическую форму этого умозаключения:

$$\frac{\begin{array}{l}(p \,\&\, q) \supset \neg r \\ p \,\&\, \neg q\end{array}}{r}.$$

Строим совместную таблицу для формул $(p \,\&\, q) \supset \neg r$, $p \,\&\, \neg q$ и r:

p	q	r	(p & q) ⊃ ¬r			p & ¬q		r
и	и	и	и	л	л	л	л	л
и	и	л	и	и	и	л	л	и
и	л	и	л	и	л	и	и	л
и	л	л	л	и	и	и	и	и
л	и	и	л	и	л	л	л	л
л	и	л	л	и	и	л	л	и
л	л	и	л	и	л	л	и	л
л	л	л	л	и	и	л	и	и

В третьей строке первые две формулы истинны, а третья ложна, поэтому из $(p \,\&\, q) \supset \neg r$ и $p \,\&\, \neg q$ не следует логически r. Следовательно, рассматриваемое умозаключение является неправильным.

Метод таблиц истинности позволяет решать и другие содержательные задачи, связанные с установлением логических отношений между формами высказываний естественного языка. Рассмотрим пример.

В ходе расследования дела об ограблении банка были получены показания трех свидетелей.
Показания первого из них таковы: "Либо Джонс, либо Браун (но не оба вместе) замешаны в преступлении".
Показания второго свидетеля: "Если Браун замешан в преступлении, то Смит не мог участвовать в нем".
Показания третьего свидетеля: "Джонс не замешан в преступлении, его совершил Смит".
Спрашивается: могут ли показания всех трех свидетелей быть правдивыми и могут ли они одновременно оказаться ошибочными?

Прежде всего выявляем логическую форму показаний свидетелей. Показания первого из них имеют вид $p \veebar q$, второго — $q \supset \neg r$, третьего — $\neg p \& r$, где p подставлена вместо высказывания "Джонс замешан в преступлении", q — вместо "Браун замешан в преступлении", r — вместо "Смит замешан в преступлении".

Для ответа на поставленные вопросы необходимо выяснить, совместимы ли по истинности и совместимы ли по ложности формулы $p \veebar q$, $q \supset \neg r$ и $\neg p \& r$. Строим для этих формул совместную таблицу:

p	q	r	$p \veebar q$	$q \supset \neg r$	$\neg p \& r$
и	и	и	л	л	л
и	и	л	л	и	л
и	л	и	и	и	л
и	л	л	и	и	л
л	и	и	и	л	и
л	и	л	и	и	л
л	л	и	л	и	и
л	л	л	л	и	л

Данные формулы несовместимы по истинности, поскольку в таблице отсутствует строка, в которой они одновременно принимали бы значение и. Вместе с тем в первой строке каждая из этих формул ложна, поэтому они совместимы по ложности. Следовательно, показания сразу всех трех свидетелей не могут быть правдивыми, но могут оказаться ошибочными.

На основе фундаментальных логических отношений — совместимости по истинности, совместимости по ложности и логического следования — могут быть определены другие типы отношений по истинности и ложности между формулами. Перечислим наиболее употребимые из них.

Отношение противоречия (контрадикторность). Формулы A и B находятся в отношении противоречия, если и только если они несовместимы по истинности и несовместимы по ложности.

Отношение противоположности (контрарность). Формулы A и B находятся в отношении противоположности, если и только если они несовместимы по истинности, но совместимы по ложности.

Отношение подпротивоположности (субконтрарность). Формулы A и B находятся в отношении подпротивоположности, если и только если они совместимы по истинности, но несовместимы по ложности.

Отношение логической эквивалентности. Формулы A и B логически эквивалентны, если и только если из A логически следует B и из В логически следует А. Из данного определения вытекает, что в каждой строке совместной таблицы обе логически эквивалентные формулы принимают одинаковые значения.

Отношение логического подчинения. Формула А логически подчиняется формуле В, если и только если из В логически следует А, но из А не следует логически В (то есть в совместной для А и В таблице отсутствует строка, в которой В истинна, а А ложна, но имеется строка с истинной А и ложной В).

Отношение логической независимости. Формулы А и В логически независимы, если и только если они совместимы по истинности и по ложности и не следуют друг из друга. Из данного определения вытекает, что в совместной таблице для логически независимых формул А и В имеются все возможные комбинации значений: есть строка, в которой они одновременно истинны, есть строка, в которой они одновременно ложны, есть строка, в которой А истинна, а В ложна, и, наконец, есть строка, в которой В истинна, а А ложна. Таблица истинности из предыдущего примера свидетельствует о том, что $q \supset \neg r$ и $\neg p \,\&\, r$ являются логически независимыми формулами.

Установим логические отношения между произвольными парами следующих формул: $p \,\&\, q$, $p \vee q$, $p \supset q$, $p \downarrow q$.

p	q	$p \,\&\, q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \downarrow q$
и	и	и	и	и	л
и	л	л	и	л	л
л	и	л	и	и	л
л	л	л	л	и	и

Формулы $p \vee q$ и $p \supset q$ логически подчиняются формуле $p \,\&\, q$, а $p \supset q$ — формуле $p \downarrow q$. Формулы $p \,\&\, q$ и $p \downarrow q$ находятся в отношении противоположности, формулы $p \vee q$ и $p \supset q$ — в отношении подпротивоположности, а формулы $p \vee q$ и $p \downarrow q$ противоречат друг другу.

§ 5. Основные законы и способы правильных рассуждений логики высказываний

В предыдущих параграфах был сформулирован эффективный метод, позволяющий в рамках логики высказываний осуществлять проверку умозаключений и решать вопрос о логической истинности высказываний. Однако при практическом использовании логики, то есть при осуществлении и анализе рассуждений в естественном языке, каждый раз применять процедуру построения таблиц истинности было бы делом громоздким. Поэтому имеет смысл выделить наиболее важные и часто встречающиеся в практике аргументации логические законы и способы правильных рассуждений. Владея этим минимумом логических средств, можно с успехом пользоваться им в процессе рассуждения, не опасаясь совершить логическую ошибку.

Выделим сначала наиболее известные законы логики высказываний. При этом будем указывать не сами тождественно-истинные формулы, а их типы или, как говорят, *схемы* тождественно-истинных формул. Что же представляют собой эти схемы?

Начнем с того, что законы логики высказываний обладают одной важной особенностью: если любую переменную в них везде, где она встречается, заменить некоторой формулой, то в результате снова получится тождественно-истинная формула.

Рассмотрим, например, формулу $\neg(p \ \& \ q) \supset (\neg p \lor \neg q)$. В §3 было показано, что она является законом логики высказываний. Заменив, скажем, переменную p формулой $p \lor q$, а переменную q — формулой $\neg r$, получим новую формулу $\neg((p \lor q) \ \& \ \neg r) \supset (\neg(p \lor q) \lor \neg\neg r)$. Нетрудно убедиться в том, что она, так же как и исходная формула, является законом логики высказываний.

Итак, если в тождественно-истинной формуле $\neg(p \ \& \ q) \supset (\neg p \lor \neg q)$ заменить все вхождения переменной p на произвольную формулу A, а все вхождения q на произвольную формулу B, то полученная формула вида $\neg(A \ \& \ B) \supset (\neg A \lor \neg B)$ также будет тождественно-истинной.

Рассмотрим теперь само выражение $\neg(A \ \& \ B) \supset (\neg A \lor \neg B)$. Оно не является формулой языка логики высказываний, так как символы A и B не содержатся в алфавите этого языка. Данные символы мы используем в метаязыке для обозначения произвольных формул объектного языка — языка пропозициональной логики. Иначе говоря, A и B выступают *метапеременными*, пробегающими по множеству формул. Поэтому $\neg(A \ \& \ B) \supset (\neg A \lor \neg B)$ является метаязыковым выражением, репрезентирующим класс формул со сходной структурой; элементами данного класса являются, например, следующие формулы объектного языка: $\neg(p \ \& \ q) \supset (\neg p \lor \neg q)$, $\neg((p \lor q) \ \& \ \neg r) \supset (\neg(p \lor q) \lor \neg\neg r)$, $\neg(q \ \& \ q) \supset (\neg q \lor \neg q)$ и т.п.

Выражения, содержащие метапеременные, пробегающие по формулам объектного языка и репрезентирующие классы формул этого языка, называют *схемами формул*. Если же схема формул репрезентирует такой класс, каждая формула которого является законом логической теории, то ее называют *схемой законов* данной теории. Метаязыковое выражение $\neg(A \ \& \ B) \supset (\neg A \lor \neg B)$ как раз и является одной из схем законов классической логики высказываний.

Приведем список наиболее важных схем тождественно-истинных формул.

1. *Закон тождества:*

$A \supset A.$

2. *Закон противоречия:*

$\neg(A \,\&\, \neg A).$

3. *Закон исключенного третьего:*

$A \vee \neg A.$

4. *Законы удаления &:*

$(A \,\&\, B) \supset A, \quad (A \,\&\, B) \supset B.$

5. *Законы введения ∨:*

$A \supset (A \vee B), \quad B \supset (A \vee B).$

6. *Законы коммутативности & и ∨:*

$(A \,\&\, B) \equiv (B \,\&\, A),$
$(A \vee B) \equiv (B \vee A).$

7. *Законы ассоциативности & и ∨:*

$((A \,\&\, B) \,\&\, C) \equiv (A \,\&\, (B \,\&\, C)),$
$((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C)).$

8. *Законы дистрибутивности & относительно ∨, и наоборот:*

$(A \,\&\, (B \vee C)) \equiv ((A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)),$
$(A \vee (B \,\&\, C)) \equiv ((A \vee B) \,\&\, (A \vee C)).$

9. *Законы поглощения:*

$(A \,\&\, (A \vee B)) \equiv A,$
$(A \vee (A \,\&\, B)) \equiv A.$

10. *Законы идемпотентности:*

$(A \,\&\, A) \equiv A,$
$(A \vee A) \equiv A.$

11. *Закон удаления истинного члена конъюнкции:*

$A \,\&\, \top \equiv A.$

12. *Закон удаления ложного члена дизъюнкции:*

$A \vee \bot \equiv A.$

13. *Закон утверждения консеквента:*

$A \supset (B \supset A).$

14. *Закон самодистрибутивности импликации:*

$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)).$

15. *Законы транзитивности импликации:*

$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)),$
$(A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B)).$

16. *Закон перестановочности антецедентов:*

$(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)).$

17. *Закон Пирса:*

$((A \supset B) \supset A) \supset A.$

18. *Закон импортации:*

$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \,\&\, B) \supset C).$

19. *Закон экспортации:*

$((A \,\&\, B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)).$

20. *Законы монотонности:*

$$(A \supset B) \supset ((A \,\&\, C) \supset (B \,\&\, C)),$$
$$(A \supset B) \supset ((A \vee C) \supset (B \vee C)).$$

21. *Законы введения &:*

$$A \supset (B \supset (A \,\&\, B)),$$
$$(A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset (B \,\&\, C))).$$

22. *Законы снятия и введения двойного отрицания:*

$$\neg\neg A \supset A, \qquad A \supset \neg\neg A.$$

23. *Закон отрицания антецедента:*

$$\neg A \supset (A \supset B).$$

24. *Законы введения ¬:*

$$(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A),$$
$$(A \supset \neg A) \supset \neg A.$$

25. *Закон контрапозиции:*

$$(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A).$$

26. *Закон обратной контрапозиции:*

$$(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B).$$

27. *Законы сложной контрапозиции:*

$$((A \,\&\, B) \supset C) \equiv ((A \,\&\, \neg C) \supset \neg B),$$
$$(A \supset (B \vee C)) \equiv (\neg B \supset (\neg A \vee C)).$$

28. *Закон удаления ⊥ ("из противоречия следует все что угодно"):*

$$\bot \supset A.$$

29. *Закон введения ⊤ ("логический закон следует из чего угодно"):*

$$A \supset \top.$$

30. *Законы де Моргана:*

$$\neg(A \,\&\, B) \equiv (\neg A \vee \neg B),$$
$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \,\&\, \neg B).$$

31. *Закон отрицания импликации:*

$$\neg(A \supset B) \equiv (A \,\&\, \neg B).$$

32. *Законы взаимовыразимости пропозициональных связок:*

$$(A \supset B) \equiv (\neg A \vee B),$$
$$(A \supset B) \equiv \neg(A \,\&\, \neg B),$$
$$(A \,\&\, B) \equiv \neg(A \supset \neg B),$$
$$(A \,\&\, B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B),$$
$$(A \vee B) \equiv \neg A \supset B,$$
$$(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \,\&\, \neg B),$$
$$(A \vee B) \equiv ((A \supset B) \supset B).$$

Укажем далее формы правильных умозаключений, наиболее употребимых в практике аргументации. Рассмотрим в этой связи несколько классов умозаключений и выделим в каждом из этих классов некоторые типы корректных рассуждений. При формулировке типов правильных умозаключений будем вновь использовать схемы формул языка логики высказываний.

1. *Условно-категорические умозаключения*. Это двухпосылочные умозаключения, которые содержат импликативную посылку, то есть посылку вида $A \supset B$. Другая же посылка, а также заключение может быть либо антецедентом (A), либо консеквентом (B) первой посылки, либо отрицанием того или другого ($\neg A$ или $\neg B$).

К числу правильных условно-категорических умозаключений относятся, например, умозаключения следующего типа:

$$\frac{A \supset B,\ A}{B}.$$

Данный способ рассуждения получил в средневековой логике название *modus ponens*, что означает "*утверждающий способ рассуждения*". Действительно, в умозаключении данного типа мы переходим от утверждения антецедента A импликативной посылки $A \supset B$ к утверждению ее консеквента B.

Примером применения *modus ponens* является следующее умозаключение:

"Если отмечается спад производства, то растет число безработных. Спад производства отмечается. Следовательно, число безработных растет".

Другим типом правильных условно-категорических умозаключений является так называемый *modus tollens* — "*отрицающий способ рассуждения*":

$$\frac{A \supset B,\ \neg B}{\neg A}.$$

В умозаключениях данной структуры осуществляется переход от отрицания консеквента ($\neg B$) импликативной посылки $A \supset B$ к отрицанию ее антецедента ($\neg A$), например:

"Если благородная цель оправдывает любые средства, то можно лишить человека жизни, если он смертельно болен и вы хотите укоротить его страдания. Но нельзя лишать человека жизни, даже когда он смертельно болен и вы хотите укоротить его страдания. Поэтому неверно, что благородная цель оправдывает любые средства".

Отметим, что не являются правильными следующие способы условно-категорических рассуждений:

$$\frac{A \supset B,\ B}{A}, \qquad \frac{A \supset B,\ \neg A}{\neg B}.$$

Действительно, при ложном A и истинном B посылки умозаключений этих типов оказываются одновременно истинными, а заключения — ложными. Поэтому, в общем случае, переход от утверждения консеквента к утверждению антецедента и переход от отрицания антецедента к отрицанию консеквента логически некорректны.

2. *Разделительно-категорические умозаключения*. Эти умозаключения также являются двухпосылочными, причем в них имеется дизъюнктивная посылка ($A \vee B$) или строго дизъюнктивная посылка ($A \veebar B$). Другая же посылка и заключение представляют собой какой-то из дизъюнктивных членов (A или B) или отрицание какого-то из дизъюнктивных членов ($\neg A$ или $\neg B$).

Одним из типов правильных разделительно-категорических умозаключений являются следующие способы рассуждения:

$$\frac{A \vee B,\ \neg A}{B}, \qquad \frac{A \vee B,\ \neg B}{A}.$$

Они получили название *modus tollendo ponens*, что означает "*отрицающе-утверждающий способ рассуждения*". Действительно, в умозаключениях данной структуры осуществляется переход от отрицания одного из членов дизъюнктивной посылки к утверждению другого ее члена. Заметим, что правильными являются также подобные умозаключения, в которых вместо дизъюнктивной имеется строго дизъюнктивная посылка — посылка вида $A \veebar B$.

Приведем пример использования *modus tollendo ponens* в естественных рассуждениях:

"Этот человек заблуждается сам или сознательно вводит в заблуждение других. Но сам этот человек не заблуждается. Следовательно, он сознательно вводит в заблуждение других".

Вместе с тем не относятся к числу корректных следующие типы разделительно-категорических умозаключений:

$$\frac{A \vee B,\ A}{\neg B}, \qquad \frac{A \vee B,\ B}{\neg A}.$$

Очевидно, что при истинных A и B посылки данных умозаключений одновременно истинны, а заключения — ложны.

Однако если дизъюнктивную посылку этих умозаключений заменить строго дизъюнктивной, то получим правильные способы рассуждения:

$$\frac{A \veebar B,\ A}{\neg B}, \qquad \frac{A \veebar B,\ B}{\neg A}.$$

Умозаключения подобного типа имеют название *modus ponendo tollens*, что означает "*утверждающе-отрицающий способ рассуждения*". В них осуществляется переход от утверждения одного из членов строго дизъюнктивной посылки к отрицанию другого ее члена, например:

"Шахматист К. примет участие только в одном из двух турниров: он либо выступит на турнире в Тилбурге, либо выступит на турнире в Линаресе. Известно, что К. принял приглашение принять участие в турнире в Линаресе. Следовательно, К. не выступит на турнире в Тилбурге".

3. *Условно-разделительные умозаключения*. Эти умозаключения содержат несколько импликативных посылок и одну дизъюнктивную посылку. Выделим некоторые типы правильных условно-разделительных умозаключений с двумя импликативными посылками. Такие умозаключения называют *дилеммами*:

$$\frac{A \supset C,\ B \supset C,\ A \vee B}{C}$$ — *простая конструктивная дилемма*,

$$\frac{A \supset C,\ B \supset D,\ A \vee B}{C \vee D}$$ — *сложная конструктивная дилемма*,

$$\frac{C \supset A,\ C \supset B,\ \neg A \vee \neg B}{\neg C}$$ — *простая деструктивная дилемма*,

$$\frac{C \supset A,\ D \supset B,\ \neg A \vee \neg B}{\neg C \vee \neg D}$$ — *сложная деструктивная дилемма*.

Пример простой конструктивной дилеммы:

"Если Н. упорен в достижении поставленной цели, то он способен овладеть логикой. Если у него есть склонность к строгому абстрактному мышлению, то он способен овладеть этой наукой. Известно, что Н. упорен в достижении поставленной цели или имеет склонность к строгому абстрактному мышлению. Следовательно, он способен овладеть логикой".

Пример сложной конструктивной дилеммы:

"Если президент подпишет законопроект, то он лишится поддержки профсоюзов. Если же президент наложит на данный законопроект вето, то он потеряет доверие предпринимателей. Ясно, что президент или подпишет законопроект, или наложит на него вето. Поэтому он лишится поддержки профсоюзов или же потеряет доверие предпринимателей".

Пример простой деструктивной дилеммы:

"Если ученый А. честолюбив, то он хочет защитить диссертацию. Если А. честолюбив, то он стремится продвинуться по службе. У А. нет желания защитить диссертацию или нет желания продвинуться по службе. Следовательно, ученый А. нечестолюбив".

Пример сложной деструктивной дилеммы:

"Если В. верит слухам о близком конце света, то он глуп. Если же В. сам распускает такие слухи, то он беспринципен. В. не глуп или не лишен принципов. Поэтому он не верит слухам о близком конце света или не распускает эти слухи сам".

Умозаключения, как говорилось в §1 главы I, являются простейшей разновидностью рассуждений. При осуществлении более сложных типов рассуждений наряду с умозаключениями применяются и иные, *непрямые способы аргументации*. Эти приемы используются в том случае, когда в ходе некоторого основного рассуждения строятся другие рассуждения, носящие вспомогательный характер.

Предположим, что целью основного рассуждения является обоснование некоторого тезиса А из некоторого множества аргументов Г. В ряде случаев решение данной задачи сводят к решению подзадач — к построению одного или нескольких вспомогательных рассуждений: к выведению высказывания B_1 из множества высказываний Δ_1, к выведению B_2 из Δ_2, ..., к выведению B_n из Δ_n. Если указанные подзадачи решены, то заключают о достижении основной цели рассуждения — о получении А из Г. При этом переходе как раз и используется непрямой способ аргументации.

Таким образом, **непрямой способ аргументации — это прием, позволяющий делать вывод об осуществлении некоторого основного рассуждения при осуществлении одного или нескольких вспомогательных рассуждений, то есть это переход следующего типа:**

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Из } \Delta_1 \text{ выведено } B_1\\ \text{Из } \Delta_2 \text{ выведено } B_2\\ \vdots\\ \text{Из } \Delta_n \text{ выведено } B_n\end{array}}{\text{Из } \Gamma_1 \text{ выведено } A}.$$

Возникает вопрос: какие из переходов такого рода являются надежными, правильными с логической точки зрения, а какие — нет, каков *критерий логической корректности непрямых способов аргументации*?

Непрямой способ аргументации является корректным, если и только если он гарантирует "сохранение" логического следования при переходе от вспомогательных рассуждений к основному, то есть обеспечивает наличие логического следования А из Г в том случае, когда B_1 следует из Δ_1, B_2 следует из Δ_2 ..., B_n следует из Δ_n. Чтобы продемонстрировать логическую корректность непрямого способа аргументации, нужно допустить, что $\Delta_1 \models B_1, \Delta_2 \models B_2, ..., \Delta_n \models B_n$, и показать, что при этом $\Gamma \models A$.

Выделим несколько видов непрямых способов аргументации, часто используемых в практике построения рассуждений, и докажем их логическую корректность.

1. *Рассуждение по правилу дедукции.* Данный способ аргументации применяется в том случае, когда целью основного рассуждения является обоснование посредством некоторого множества аргументов Г такого тезиса, который представляет собой импликативное высказывание вида $A \supset B$. В этом случае можно осуществить следующее вспомогательное рассуждение: принять в качестве допущения антецедент А данного импликативного высказывания, а затем вывести из Г и А его консеквент В. При решении указанной подзадачи заключают, что основной тезис $A \supset B$ обоснован посредством Г.

Метод непрямого рассуждения по правилу дедукции имеет таким образом, следующую структуру:

$$\frac{\text{Из } \Gamma \text{ и } A \text{ выведено } B}{\text{Из } \Gamma \text{ выведено } A \supset B}.$$

Приведем пример содержательного рассуждения, в котором используется данный непрямой способ аргументации:

"Докажем, что если число оканчивается на 0 и сумма его цифр кратна 3, то это число кратно 15. Допустим, что данное число оканчивается на 0 и сумма его цифр кратна 3. Известно, что если число оканчивается на 0, то оно кратно 5. Поэтому наше число кратно 5, ведь, согласно допущению, оно оканчивается на 0. Известно также, что если сумма цифр числа кратна 3, то и само это число кратно 3. Поэтому наше число кратно 3, ведь, согласно допущению, сумма его цифр кратна 3. Итак, наше число кратно

5 и 3. Но если число кратно 5 и 3, то оно кратно 15. Следовательно, наше число кратно 15. Таким образом, если число оканчивается на 0 и сумма его цифр кратна 3, то это число кратно 15".

Проанализируем ход данного рассуждения. В нем обосновывается истинность импликативного тезиса:

"Если число оканчивается на 0 и сумма его цифр кратна 3, то это число кратно 15".

В процессе рассуждения использованы следующие аргументы:

(*а*) "Если число оканчивается на 0, то это число кратно 5",
(*б*) "Если сумма цифр числа кратна 3, то само это число кратно 3",
(*в*) "Если число кратно 5 и 3, то оно кратно 15".

В качестве допущения в рассуждении принимается антецедент обосновываемого тезиса:

(*г*) "Число оканчивается на 0, и сумма его цифр кратна 3".

Далее из допущения (*г*) и аргументов (*а*) — (*в*) посредством цепочки умозаключений выводится консеквент тезиса:

(*д*) "Данное число кратно 15".

Затем, применяя метод рассуждения по правилу дедукции, заключаем, что наш импликативный тезис обоснован посредством аргументов (*а*) — (*в*).

Продемонстрируем теперь логическую корректность данного непрямого способа аргументации — покажем, что в случае наличия логического следования вида **Г, А** $\models$ **В** имеет место логическое следование вида **Г** $\models$ **А** $\supset$ **В**.

(1) Пусть Г, А $\models$ В.

Согласно определению логического следования, это означает:

(2) Не существует такой интерпретации пропозициональных переменных, при которой все формулы из Г истинны, **А** — истинна, а **В** — ложна.

Согласно условиям ложности импликативных формул:

(3) Выражение "A истинна, а B ложна" равносильно выражению "$A \supset B$ ложно".

Осуществим замену выражения "A истинна, а B ложна" в составе (2) на равносильное ему "$A \supset B$ ложно":

(4) Не существует интерпретации, при которой все формулы из Γ истинны, а $A \supset B$ — ложна.

Снова используем определение логического следования:

(5) $\Gamma \models A \supset B$.

Доказательство завершено.

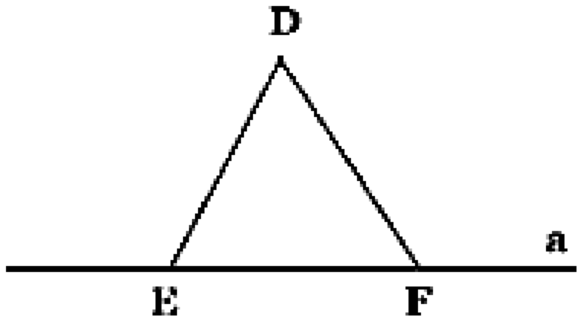
2. *Рассуждение от противного.* Данный метод рассуждения состоит в следующем: для обоснования некоторого тезиса A из множества аргументов Γ строят вспомогательное рассуждение, принимая в качестве допущения $\neg A$ и стремясь вывести из Γ и $\neg A$ противоречие. При решении данной подзадачи заключают, что тезис A обоснован посредством аргументов Γ. Таким образом, данный непрямой способ аргументации имеет следующую структуру:

$$\frac{\text{Из } \Gamma \text{ и } \neg A \text{ выведено } \bot}{\text{Из } \Gamma \text{ выведено } A}.$$

В качестве иллюстрации применения метода рассуждения от противного воспроизведем доказательство теоремы Евклидовой геометрии:

"Из точки, не лежащей на прямой, можно опустить на эту прямую не более одного перпендикуляра".

Предположим, что это утверждение неверно, и постараемся прийти к противоречию. Из нашего допущения вытекает, что из некоторой точки D можно опустить на некоторую прямую a более чем один перпендикуляр, например два различных перпендикуляра DE и DF:



По определению перпендикуляра, углы DEF и DFE равны 90°. Поскольку отрезки DE и DF не совпадают, угол EDF больше 0°. Следовательно, сумма внутренних углов треугольника DEF больше 180°. Но сумма внутренних углов любого треугольника в точности равна 180°. Таким образом, во вспомогательном рассуждении при допущении, что теорема неверна, получено противоречие. Поэтому теорема считается доказанной.

Обоснуем корректность способа рассуждения от противного, то есть покажем, что если **Г, ¬А ⊨ ⊥**, то **Г ⊨ А.**

(1) Пусть Г, ¬А ⊨ ⊥.

Согласно определению логического следования, это означает:

(2) Не существует интерпретации, при которой все формулы из **Г** истинны, **А** истинна, а ⊥ ложна.

Константа ложности ⊥ обладает следующим свойством:

(3) ⊥ ложна при любой интерпретации.

Из (2) и (3) следует:

(4) Не существует интерпретации, при которой все формулы из **Г** истинны и **¬А** истинна.

В силу условий истинности формул вида **¬А** имеем:

(5) Истинность **¬А** равносильна ложности **А.**

Заменим в составе (4) выражение "**¬А** истинна" равносильным ему "**А** ложна":

(6) Не существует интерпретации, при которой все формулы из **Г** истинны и **А** ложна.

Снова используем определение логического следования:

(7) $\Gamma \models A$.

Доказательство завершено.

3. *Рассуждение сведением к абсурду*. Этот непрямой способ аргументации сходен с только что рассмотренным. Если требуется с помощью аргументов Γ обосновать высказывание, главной связкой которого является отрицание, то есть высказывание вида ¬A, то в качестве допущения принимают A и стремятся в ходе вспомогательного рассуждения вывести противоречие. Переход от вспомогательного рассуждения к основному имеет следующий вид:

$$\frac{\text{Из } \Gamma \text{ и } A \text{ выведено } \perp}{\text{Из } \Gamma \text{ выведено } \neg A}.$$

Корректность данного способа аргументации доказывается аналогично методу рассуждения от противного.

Применим метод сведения к абсурду на практике. Представим себе сложное автоматическое устройство, которое состоит из механизмов P, Q, R, S и удовлетворяет следующим условиям:

(*а*) Если работает механизм P, то не работает механизм Q;
(*б*) Всегда работает по крайней мере один из механизмов Q или R;
(*в*) Если работает механизм S, то не работает механизм R.

Докажем, что в данном автоматическом устройстве механизмы P и S не могут работать одновременно. Причем допущение:

(*г*) Механизмы P и S работают одновременно.

Отсюда следует:

(*д*) Работает механизм P,
(*е*) Работает механизм S.

Из (*а*) и (*д*) по *modus ponens* получаем:

(*ж*) Не работает механизм Q.

Из (*б*) и (*ж*) по *modus tollendo ponens* имеем:

(*з*) Работает механизм R.

Но из (*в*) и (*е*) по *modus ponens* выводится:

(*и*) Не работает механизм R.

Наличие (*з*) и (*и*) свидетельствует о том, что мы получили

(*к*) Противоречие.

Цель вспомогательного рассуждения достигнута. Поэтому, согласно методу сведения к абсурду, можно утверждать, что тезис о невозможности одновременной работы механизмов P и S обоснован сведениями (*а*) — (*в*).

4. *Рассуждение разбором случаев*. Данный непрямой способ аргументации может быть применен в том случае, когда целью основного рассуждения является обоснование некоторого тезиса C посредством дизъюнктивного аргумента $A \vee B$, а также, возможно, и множества других аргументов Г. Задача по выведению C из Г и $A \vee B$ может быть сведена к двум подзадачам: 1) к выведению C из Г и допущения A — первого члена аргумента $A \vee B$, 2) к выведению C из Г и B — второго дизъюнктивного члена этого аргумента. Рассмотрев каждый из этих случаев и показав, что C может быть обосновано как при допущении A, так и при допущении B, заключают, что C обосновано посредством $A \vee B$ и Г. Таким образом, метод рассуждения разбором случаев имеет следующую структуру:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Из Г и A выведено C}\\ \text{Из Г и B выведено C}\end{array}}{\text{Из Г и } A \vee B \text{ выведено C}}.$$

Приведем пример использования данного непрямого способа аргументации. Формулировка знаменитого *парадокса лжеца* представляет собой не что иное, как рассуждение разбором случаев. Рассмотрим высказывание:

"Это высказывание ложно",

которое содержит информацию о собственной ложности. Обозначим его, например, символом D. Суть парадокса состоит теперь в том, что из предположения о наличии у высказывания D какого-либо истинностного значения ("истина" или "ложь") выводится противоречие ($\perp$).

Тезис $\perp$ выводится из дизъюнктивного аргумента "D истинно или D ложно" разбором случаев.

Случай 1. В качестве допущения принимаем первый дизъюнктивный член:

1) D истинно.

Отсюда следует, что утверждение, которое D содержит, соответствует действительности, но D содержит утверждение о собственной ложности, значит:

2) D ложно.

Поскольку ложность D означает, что оно не истинно, получаем:

3) D не истинно.

Утверждения (1) и (3) свидетельствуют о том, что нами получено противоречие:

4) $\perp$.

Случай 2. Теперь примем в качестве допущения второй дизъюнктивный член:

1) D ложно.

Это означает, что D содержит не соответствующее действительности утверждение о собственной ложности, поэтому:

2) D не ложно.

Мы снова пришли к противоречию:

3) $\perp$.

Итак, из первого дизъюнктивного члена "D истинно" получено $\perp$ и из второго дизъюнктивного члена "D ложно" получено $\perp$. Поэтому можно заключить, что из дизъюнктивного высказывания "D истинно или D ложно" выводится $\perp$ (противоречие).

Обоснуем корректность данного непрямого способа аргументации. Допустим:

(1) $\Gamma, A \models C$,
(2) $\Gamma, B \models C$.

Необходимо показать, что в таком случае $\Gamma, A \vee B \models C$. Будем рассуждать от противного. Предположим:

(3) Из Γ и $A \vee B$ не следует C.

Это означает:

(4) Существует интерпретация, при которой все формулы из Γ истинны, $A \vee B$ истинна, а C ложна.

Из (1), истинности формул Γ и ложности C вытекает:

(5) A ложна при данной интерпретации.

А из (2), истинности формул Γ и ложности C получаем:

(6) B ложна при данной интерпретации.

В силу условий ложности дизъюнктивных формул из (5) и (6) получаем:

(7) $A \vee B$ ложна при данной интерпретации.

Но, согласно (4):

(8) $A \vee B$ истинна при данной интерпретации.

Итак, допустив, что из Γ и $A \vee B$ не следует C, мы пришли к противоречию. Поэтому при наличии (1) и (2) имеем:

(9) $\Gamma, A \vee B \models C$.

На этом завершим рассмотрение непрямых способов аргументации.

ГЛАВА III

КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

§ 1. Язык логики предикатов

Рассмотренная в предыдущей главе классическая логика высказываний является весьма бедной логической теорией. С ее помощью выделяется сравнительно узкий класс логически истинных высказываний, в ее рамках можно обосновать правильность лишь достаточно ограниченного числа дедуктивных умозаключений.

Причиной указанной ограниченности классической логики высказываний являются недостаточные выразительные возможности ее языка. Действительно, решая в рамках логики высказываний вопросы о логической истинности высказываний, о правильности или неправильности умозаключений, мы отвлекаемся от внутренней структуры простых высказываний, заменяя их пропозициональными переменными. Однако во многих случаях логическая истинность высказывания и правильность умозаключения как раз и обусловливаются особенностями внутренней структуры простых высказываний.

Примером подобного логически истинного высказывания является высказывание

> "Всякий школьник не остроумен, или некоторые школьники остроумны",

анализ которого осуществлен в § 3 главы I.

В § 2 той же главы показано, что правильность умозаключения

М. Тэтчер популярнее С. Рушди
М. Тэтчер — британский политик
С. Рушди — британский писатель
___
Некоторые британские политики популярнее некоторых британских писателей

обусловлена особенностями внутренней структуры его посылок и заключения (которые являются простыми высказываниями) и также не может быть установлена средствами пропозициональной логики.

Адекватный логический анализ высказываний и умозаключений указанного типа может быть осуществлен лишь в рамках таких логических теорий, которые строятся с использованием формализованных языков с бо́льшими выразительными возможностями. Необходимо, чтобы данные языки позволяли выражать логические формы простых высказываний, раскрывая при этом их внутреннюю структуру — то есть указывая на то, какого типа логические и нелогические термины входят в состав высказываний и каким образом эти термины сочленяются между собой.

В данной главе будет рассмотрен один достаточно богатый формализованный язык — *язык логики предикатов первого порядка*. С помощью этого языка можно весьма детально выражать внутреннюю структуру простых высказываний. В рамках построенного формализованного языка будет сформулирована логическая теория — *классическая логика предикатов*, а далее мы покажем, каким образом с использованием этой теории можно проверять умозаключения и решать вопрос о логической истинности высказываний.

Построение любого формализованного языка начинается, как уже говорилось, с задания его *алфавита* — совокупности исходных символов, которые подразделяются обычно на *нелогические*, *логические* и *технические*.

Прежде чем вводить нелогические символы языка логики предикатов, необходимо выяснить, нелогические термины каких типов содержатся в простых высказываниях естественного языка. Ведь при выявлении внутренней структуры этих высказываний нелогическим терминам каждого типа, имеющимся в естественном языке, сопоставляется собственный тип символов формализованного языка.

Подразделение нелогических терминов естественного языка на категории может проводиться различным образом. При анализе контекстов естественного языка в логике предикатов выделяют три основных типа (категории) нелогических терминов: *имена*, *предметные функторы* и *предикаторы*.

Имена. Именем называется термин, обозначающий отдельный объект (индивид). Среди имен выделяют *простые* и *сложные*. *Простые имена* не содержат никакой информации об обозначаемых ими индивидах, являются как бы метками этих объектов. Поэтому их еще называют *именами-ярлыками* или же *собственными именами*. Примерами простых имен являются термины "Луна", "Москва", "Аристотель", "3". *Сложные имена* не только обозначают предмет, но и указывают на какие-либо его свойства, характеристики. Например, сложное имя "естественный спутник

Земли" не просто обозначает Луну, но и содержит определенную информацию об этом небесном теле: указывает на его естественное происхождение, а также на то, что оно вращается вокруг Земли. Другие примеры сложных имен — "столица России" (обозначает город Москву), "основатель логики и психологии" (обозначает Аристотеля), "число, получающееся в результате сложения 2 и 1" или "2 + 1" (обозначает число 3).

Предметные функторы. Наиболее распространенный вид функций — это так называемые *предметные функции*; их аргументами и значениями являются индивиды. Предметные функции различаются по *местности*: они бывают одноместными, двухместными, трехместными и т.д.

К предметным функциям относятся, например, арифметические операции над числами. Скажем, функция извлечения квадратного корня сопоставляет отдельным числам отдельные числа, например, индивиду 4 индивид 2, индивиду 9 индивид 3 и т.д. Данная операция представляет собой *функцию от одного аргумента*, или же *одноместную функцию*. Операция сложения является *двухместной предметной функцией*, она парам индивидов (чисел) сопоставляет некоторые индивиды (числа), например, паре аргументов 2 и 1 — число 3 (сумму 2 и 1), паре аргументов 2 и 2 — число 4 и т.д.

Вообще *n-местная предметная функция* сопоставляет *n*-кам индивидов (последовательностям, состоящим из *n* объектов) некоторые индивиды.

К разряду предметных функций относятся не только операции над числами. Например, функция, сопоставляющая каждому государству его столицу (России — Москву, Франции — Париж и т.д.), также является предметной, ведь она индивидам (государствам) сопоставляет индивиды (города). Указанная предметная функция — одноместная.

Двухместной предметной (но не числовой) функцией является функция, сопоставляющая парам населенных пунктов расстояние между ними (например, городам Москва и Санкт-Петербург — величину длины, равную 650 км).

Термины, с помощью которых в языке представляются предметные функции, называются предметными функторами. Например, функция извлечения квадратного корня представляется знаком "√", функция сложения — знаком "+", функция, сопоставляющая государству его столицу,— термином "столица", функция, сопоставляющая паре населенных пунктов величину протяженности между ними,— термином "расстояние от ... до ...". Указанные языковые выражения как раз и относятся к категории предметных функторов, причем знаки одноместных предметных функций ("√", "столица") являются одноместными, а знаки двухместных предметных функций ("+", "расстояние от ... до ...") — двухместными предметными функторами.

Вообще, *n-местный предметный функтор* — это знак *n*-местной предметной функции.

Предметные функторы играют в естественном языке определенную *синтаксическую* роль, с их помощью можно из одних выражений строить другие выражения языка. В частности, посредством присоединения предметного функтора к именам может быть получено новое, более сложное имя. Например, сочленяя предметный функтор "√" с именем "4", получаем сложное имя "√4" (его значением является число 2); сочленяя предметный функтор "столица" с именем "Россия", получаем сложное имя "столица России" (его значением является город Москва). Из имен "2" и "1" с помощью предметного функтора "+" можно образовать сложное имя "2+1" (знак числа 3), а из имен "Москва и "Санкт-Петербург" с помощью функтора "расстояние от ... до ..." — имя "расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга" (его значение — величина длины 650 км).

С помощью многоместных предметных функторов и имен можно также получать предметные функторы меньшей местности. Так, одноместную функцию, сопоставляющую каждому числу число, на 1 большее его (функцию прибавления 1), можно выразить в языке посредством "...+1", то есть сочленяя двухместный функтор "...+..." с именем 1. Аналогично из двухместного предметного функтора "расстояние от ... до ..." можно получить одноместный — "расстояние от Москвы до ...". Это выражение представляет одноместную функцию, сопоставляющую населенному пункту величину расстояния до него от Москвы.

Заметим, что имена могут трактоваться как *нульместные* предметные функторы — знаки функций, число аргументов которых равно 0, а значениями являются индивиды. Например, если термин "расстояние от ... до ..." — двухместный предметный функтор, а термин "расстояние от Москвы до ..." — одноместный предметный функтор, то имя "расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга" естественно рассматривать как нульместный предметный функтор.

Предикаторы. К третьему типу нелогических терминов относится знаки свойств и отношений, которые называют *предикаторами*, они представляют то, что может предицироваться предметам, то есть соотноситься с ними. Термины, представляющие свойства (например, "красный", "способный изучать логику", "электропроводный"), являются *одноместными* предикаторами. Термины, представляющие отношения между предметами (например, "больше", "севернее", "старше"), являются *многоместными* предикаторами.

Значениями предикаторов можно также считать *множества*, элементами которых являются либо отдельные предметы, либо последовательности (пары, тройки и т.д.) предметов.

В качестве значения одноместного предикатора, представляющего некоторое свойство, можно рассматривать множество индивидов, обладающих этим свойством. Например, значение предикатора "красный" — множество красных предметов, значение термина "электропроводный" — множество электропроводных веществ. С этой точки зрения такие термины, как "человек", "государство", "натуральное число", следует также отнести к одноместным предикаторам, поскольку их значениями являются множества индивидов (людей, государств, натуральных чисел). Указанные термины можно рассматривать и как знаки свойств (быть человеком, быть государством, быть натуральным числом).

Значением многоместного предикатора, представляющего некоторое отношение, можно считать множество, элементами которого являются последовательности (пары, тройки и т.д.) индивидов, находящихся в данном отношении. Например, значением предикатора "больше" является класс всех таких пар чисел, первое из которых больше второго (пара чисел <4, 2>, например, содержится в этом классе, а пара <2, 4> нет, ведь 4 больше 2, но 2 не больше 4). Значением предикатора "севернее" является класс всех таких пар географических точек, первая из которых севернее второй (пара <Санкт-Петербург, Москва> принадлежит этому множеству, а пара <Москва, Санкт-Петербург> — нет).

Если предикатор представляет множество *пар* индивидов, то это предикатор *двухместный*, если же элементами этого множества являются *тройки* индивидов, то он *трехместный*. Вообще **значением *n*-местного предикатора является некоторое множество *n*-ок индивидов (последовательностей, состоящих из *n* объектов).**

Синтаксическая роль, которую играют предикаторы в естественном языке, состоит в следующем: сочленяя их с именами, можно получать высказывания и предикаторы меньшей местности. Например, из одноместного предикатора "человек" и имени "Петр" можно образовать высказывание "Петр — человек". Из двухместного предикатора "севернее" и имени "Москва" получается одноместный предикатор (знак свойства) "севернее Москвы" (он репрезентирует множество индивидов — географических точек, расположенных севернее Москвы). А из этого одноместного предикатора и имени "Санкт-Петербург" образуется высказывание "Санкт-Петербург севернее Москвы". Сами высказывания естественно рассматривать как *нульместные предикаторы*.

Итак, мы выделили основные категории нелогических терминов естественного языка. Напомним также, что в состав простых высказываний могут входить и логические термины — *кванторы*: *квантор общности* ("всякий", "любой", "каждый" и т.п.) и *квантор существования* ("некоторый", "существует", "имеется" и т.п.). Выявляя логическую форму высказываний естественного языка, мы не должны отвлекаться от смысла кванторов, так же как и других логических терминов — пропозициональных связок.

Приступим теперь к заданию *алфавита языка логики предикатов*.

Нелогическими символами данного формализованного языка являются прежде всего параметры собственных нелогических терминов естественного языка, относящиеся к различным категориям,— параметры имен, предметных функторов и предикаторов.

Первую группу символов составляют *предметные (индивидные) константы* — параметры имен естественного языка. В качестве символов указанного типа будем использовать буквы **a**, **b**, **c**, **d** без индексов или с индексами (целыми положительными числами):

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1, \mathbf{a}_2 \ldots$$

При переводе выражений естественного языка на язык логики предикатов простые имена заменяются предметными константами, причем одинаковые имена — одинаковыми символами из данного списка, а различные — различными.

Вторую группу нелогических символов составляют *n-местные предметно-функциональные константы* ($n \geq 1$) — параметры *n*-местных предметных функторов естественного языка:

$$\mathbf{f}^n, \mathbf{g}^n, \mathbf{h}^n, \mathbf{f}_1{}^n, \mathbf{g}_1{}^n, \mathbf{h}_1{}^n, \mathbf{f}_2{}^n, \ldots$$

Верхний индекс указывает на местность константы. Одноместный предметный функтор "столица" может быть замещен, например, константой $\mathbf{f}^1$, а двухместный предметный функтор "расстояние от ... до ..." — параметром $\mathbf{g}^2$.

Третью группу составляют *n-местные предикаторные константы* ($n \geq 1$) — параметры предикаторов естественного языка:

$$\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}^n, \mathbf{R}^n, \mathbf{S}^n, \mathbf{P}_1{}^n, \mathbf{Q}_1{}^n, \mathbf{R}_1{}^n, \mathbf{S}_1{}^n, \mathbf{P}_2{}^n, \ldots$$

Верхний индекс опять-таки указывает на местность константы. Одноместный предикатор "человек" может быть замещен, например, предикаторной константой P^1, а двухместный предикатор "севернее" — параметром Q^2.

Иногда верхние индексы предметно-функциональных и предикаторных констант опускают. В этом случае запрещается использовать один и тот же символ в качестве параметров для предметных функторов и предикаторов различной местности.

Помимо параметров нелогических терминов естественного языка в языке логики предикатов имеется еще одна группа нелогических символов. Это так называемые *предметные (индивидные) переменные*:

$$x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, \dots$$

Каждая предметная переменная может принимать различные значения из предметной области анализируемого контекста, то есть из множества индивидов, к которым относятся утверждения, содержащиеся в данном контексте. Предметные переменные используются в языке логики предикатов для формальной записи выражений, содержащих кванторы общности и существования.

Логические символы языка классической логики предикатов бывают двух типов. К первому относятся пропозициональные связки — знаки функций истинности. Выберем в качестве исходных связок $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$, которые составляют функционально полную систему. Ко второму типу относятся *кванторные символы*: $\forall$ — символ *квантора общности* (которому в естественном языке соответствует выражение "для всякого") и $\exists$ — символ *квантора существования* (ему соответствует термин "существует").

Техническими символами являются левая и правая скобки, а также запятая.

Построение алфавита языка логики предикатов завершено.

Следующий этап в построении формализованного языка — задание *правил построения* его выражений из символов алфавита. В языке логики предикатов имеются два типа правильно построенных выражений — *термы* и *формулы*.

Результатом символической записи имен (как простых, так и сложных) естественного языка являются термы, а результатом записи высказываний — формулы.

Определение терма:

1. Произвольная предметная константа является термом.
2. Произвольная предметная переменная является термом.
3. Если Ф — *n*-местная предметно-функциональная константа, а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, то выражение Ф $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом.
4. Ничто иное не является термом.

Выражения, указанные в пунктах 1 и 2 данного определения, называются *простыми термами*, а те, которые указаны в пункте 3,— *сложными термами*.

Символы a, b_1, c_3, например, относятся к числу термов, согласно п. 1 определения, а символы x_2, y, z_{10} являются термами, согласно п. 2. Символы f^1, P^2 и $\forall$ не являются термами, поскольку не относятся ни к числу предметных констант или предметных переменных, ни к числу выражений вида Ф $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Определим, является ли термом выражение $f^1(g^2(x, a))$. Данная последовательность знаков имеет вид Ф(t_1), где Ф есть f^1 — одноместная предметно-функциональная константа. Согласно п. 3, данное выражение есть терм, если t_1 (то есть $g^2(x, a)$) является термом. Выражение $g^2(x, a)$ имеет вид Ф(t_1, t_2), где Ф есть g^2 — двухместная предметно-функциональная константа, t_1 есть x — терм (согласно п. 2), t_2 есть a — терм (согласно п. 1). Поэтому, согласно п. 3, $g^2(x, a)$ является термом. Значит, и выражение $f^1(g^2(x, a))$ — терм.

Выражение $P^1(g^2(x, a))$ не является термом, поскольку оно начинается не с предметно-функциональной, а с предикаторной константы.

Выражение $h^2(g^2(x, a))$ не является термом, так как оно начинается с двухместной предметно-функциональной константы h^2, а в скобках после нее находится один терм $g^2(x, a)$, а не два терма, как того требует п. 3 определения.

Поясним на примерах, каким образом осуществляется перевод имен естественного языка на язык логики предикатов.

Пусть простому имени “4” соответствует предметная константа a, а простому имени “5” — константа b; одноместному предметному функтору “$\sqrt{}$” сопоставим одноместную предметно-функциональную константу f^1 (или просто f), а двухместному функтору “+” — двухместную предметно-функциональную константу g^2 (или просто g). Тогда при переводе на язык логики предикатов сложным именам будут соответствовать следующие термы:

имени "$\sqrt{4}$" — терм f(a),
имени "4 + 5" — терм g(a, b),
имени "5 + 4" — терм g(b, a),
имени "$\sqrt{4} + 5$" — терм g(f(a), b),
имени "$\sqrt{4 + 5}$" — терм f(g(a, b)),
имени "(4 + 4) + (5 + 5)" — терм g(g(a, a), g(b, b)).

Пусть теперь константа a сопоставлена простому имени "Москва", b — имени "Киев", c — "Россия", d — "Украина"; одноместному предметному функтору "столица" сопоставим символ f, а двухместному функтору "расстояние от ... до ..." — символ g. Тогда при переводе на язык логики предикатов сложным именам будут соответствовать следующие термы:

"столица России" — f(c),
"расстояние от Москвы до Киева" — g(a, b),
"расстояние от Москвы до столицы Украины" — g(a, f(d)),
"расстояние от столицы России до Киева" — g(f(c), b).

Определение формулы:

1. **Если П — n-местная предикаторная константа, а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, то выражение П($t_1, t_2, \ldots, t_n$) является формулой.**
2. **Если A — формула, то ¬A — формула.**
3. **Если A и B — формулы, то (A & B), (A ∨ B), (A ⊃ B) — формулы.**
4. **Если A — формула, а α — предметная переменная, то $\forall\alpha A$ и $\exists\alpha A$ являются формулами.**
5. **Ничто иное не является формулой.**

Формулы, задаваемые п. 1 данного определения, называют ***элементарными*** или ***атомарными***, а все остальные формулы — ***сложными*** или ***молекулярными***.

Элементарной формулой является, например, выражение $P^2(x, f^1(a))$, поскольку P^2 — двухместная предикаторная константа, а в скобках после нее находятся два терма — x и $f^1(a)$. Выражение $Q^1(x, f^1(a))$ не является формулой, так как константа Q^1 — одноместная и после нее в скобках должен стоять один, а не два терма. Выражение $P^2(x, Q^1(a))$ также не относится к числу формул, так как $Q^1(a)$ не есть терм.

Выражение $\forall x P^2(x, f^1(a))$ является формулой, согласно п. 4 определения, поскольку после кванторного символа $\forall$ находится предметная переменная x, а далее — формула $P^2(x, f^1(a))$. Выражение $\forall a P^2(x, f^1(a))$ не есть формула, поскольку после $\forall$ стоит не предметная переменная, а предметная константа a. Выражение $\forall x g^2(x, f^1(a))$ также не является формулой, так как после комплекса $\forall x$ находится терм $g^2(x, f^1(a))$, а не формула.

Поясним на примерах, каким образом осуществляется перевод высказываний естественного языка на язык логики предикатов. Начнем с высказываний, в которых содержатся утверждения об отдельных предметах и в состав которых не входят кванторные слова.

Простые высказывания, в которых утверждается наличие свойства у отдельного предмета, записываются в языке логики предикатов посредством формул вида $\Pi^1(t)$, где t есть терм, соответствующий имени предмета, а Π^1 — одноместная предикаторная константа, соответствующая знаку свойства.

Например, переводом высказывания "Ромео — юноша" может быть формула $P(a)$, где предметная константа a соответствует имени "Ромео", а одноместная предикаторная константа P — знаку свойства "юноша". Высказывание "Отец Ромео храбр" может быть записано в виде $Q(f(a))$, если одноместному предметному функтору "отец" сопоставить одноместную предметно-функциональную константу f, а знаку свойства "храбрый" — одноместную предикаторную константу Q.

Высказывания, в которых отрицается наличие свойства у отдельного предмета, переводятся на язык логики предикатов посредством формул вида $\neg\Pi^1(t)$. Например, переводом высказывания "Отец Ромео не является юношей" будет формула $\neg P(f(a))$.

Высказывания, в которых утверждается наличие отношения между двумя предметами, записываются в виде формул $\Pi^2(t_1, t_2)$, где Π^2 — двухместная предикаторная константа, соответствующая знаку двухместного отношения, а t_1 и t_2 — термы, соответствующие именам предметов.

Например, высказывание "Ромео любит Джульетту" может быть записано в виде $R(a, b)$, где R соответствует двухместному предикатору "любит", а a и b — именам "Ромео" и "Джульетта" соответственно. Переводом высказывания "Джульетта любит саму себя" будет формула $R(b, b)$, а переводом высказывания "Джульетта любит своего отца" — $R(b, f(b))$.

Высказывания, в которых отрицается наличие отношения между двумя предметами, выражаются с помощью формул вида

$\neg\Pi^2(t_1, t_2)$. Например, переводом высказывания "Отец Ромео не любит отца Джульетты" является $\neg R(f(a), f(b))$.

Вообще высказывания о наличии отношения между n предметами записываются в виде $\Pi^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где Π^n— n-местная предикаторная константа, соответствующая знаку n-местного отношения. Высказывания об отсутствии отношения между n предметами переводятся посредством формул вида $\neg\Pi^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Например, высказывание "Джульетта любит Ромео больше, чем своего отца" может быть записано в виде $R_1(b, a, f(b))$, где R_1 — трехместная предикаторная константа, соответствующая трехместному отношению "любит больше, чем".

Перейдем теперь к формальной записи высказываний, содержащих кванторы.

Высказывания, в которых говорится о существовании объекта, удовлетворяющего некоторому условию, записываются в языке логики предикатов посредством формул вида $\exists\alpha A(\alpha)$, где α — предикатная переменная, пробегающая по области объектов, о которых идет речь в высказывании, а $A(\alpha)$ — формула, выражающая утверждение о том, что α удовлетворяет условию A.

Например, высказывание "Кто-то является храбрым" может быть переведено формулой $\exists xQ(x)$, где Q — одноместная предикаторная константа, соответствующая предикатору "храбрый". Высказывание "Кто-то не является храбрым" может быть записано как $\exists x\neg Q(x)$. Высказывание "Кто-то любит Джульетту" переводится с помощью формулы $\exists xR(x, b)$, где R соответствует двухместному предикатору "любит", а b — имени "Джульетта". Высказывание "Джульетта любит кого-нибудь"может быть записано в виде $\exists xR(b, x)$, а высказывание "Кто-то не любит самого себя" — в виде $\exists x\neg R(x, x)$.

Высказывания, в которых утверждается, что условию A удовлетворяет любой объект предметной области, переводятся на язык логики предикатов формулами вида $\forall\alpha A(\alpha)$. Например, высказыванию "Все являются храбрецами" соответствует $\forall xQ(x)$, высказыванию "Всякий любит Джульетту" — $\forall xR(x, b)$, высказыванию "Никто не любит отца Ромео" — $\forall x\neg R(x, f(a))$, высказыванию "Отец Ромео не любит никого" — $\forall x\neg R(f(a), x)$.

Простые высказывания могут содержать в своем составе несколько кванторов. Поясним на примерах, каким образом осуществляются переводы на язык логики предикатов в подобных случаях.

Высказыванию "Каждый любит кого-нибудь" соответствует формула $\forall x\exists yR(x, y)$; высказыванию "Кто-то кого-то не любит" — формула $\exists x\exists y\neg R(x, y)$; высказыванию "Кто-то любит Ромео больше, чем кого-либо" — формула $\exists x\forall yR_1(x, a, y)$.

В состав каждого из рассмотренных ранее высказываний входит только один предикатор — "юноша", "храбрый", "любит" или "любит больше, чем". Однако простые высказывания могут содержать два, три и более предикатора. Каким же образом осуществляется их формальная запись?

Если подобное высказывание содержит квантор, то его переводом будет также формула вида $\exists\alpha A(\alpha)$ или $\forall\alpha A(\alpha)$ с той лишь разницей, что условие $A(\alpha)$ будет иметь более сложную структуру.

Начнем с формальной записи высказываний, содержащих два одноместных предикатора. Высказывание "Некоторый юноша храбр" может быть переведено на формальный язык посредством формулы $\exists x(P(x) \& Q(x))$, которая имеет следующий буквальный смысл (с учетом того, что константам P и Q соответствуют предикаторы "юноша" и "храбрый"): "Существует объект (человек), который является юношей и является храбрым". Этот смысл в точности соответствует смыслу исходного высказывания "Некоторый юноша храбр".

Высказывание "Всякий юноша храбр" может быть записано как $\forall x(P(x) \supset Q(x))$. Буквальный смысл этой формулы: "Для всякого объекта (человека) верно, что если он юноша, то он храбр" — также соответствует смыслу исходного высказывания.

Отрицательные высказывания "Некоторый юноша не храбр" и "Ни один юноша не храбр" могут быть переведены соответственно формулами $\exists x(P(x) \& \neg Q(x))$ и $\forall x(P(x) \supset \neg Q(x))$.

Рассмотрим теперь простые высказывания с одним одноместным и одним двухместным предикатором.

Например, переводом высказывания "Некоторый юноша любит Джульетту" будет формула $\exists x(P(x) \& R(x, b))$ — "Существует человек, такой, что он является юношей и любит Джульетту".

Переводом высказывания "Джульетта любит какого-то юношу" является формула $\exists x(P(x) \& R(b, x))$ — "Существует человек, такой, что он является юношей и Джульетта любит его".

Переводом высказывания "Каждый юноша любит Джульетту" является формула $\forall x(P(x) \supset R(x, b))$ — "Для всякого человека верно, что если он юноша, то он любит Джульетту".

Более трудными являются случаи, когда в состав высказываний об отношениях входят несколько одноместных предикаторов. Рассмотрим, например, высказывание "Всякий юноша любит какую-нибудь девушку". Как и раньше, предикаторам "юноша" и "любит" сопоставим константы P и R, а одноместному предикатору "девушка" сопоставим одноместную предикаторную константу S. Формальная запись нашего высказывания может иметь следующий вид: $\forall x(P(x) \supset \exists y(S(y) \& R(x, y)))$. Буквальный смысл этой записи с учетом принятых обозначений — "Для всякого человека x верно, что если он юноша, то существует человек y, такой что он девушка и x любит y" — в точности соответствует смыслу исходного высказывания.

Высказывание "Некоторые юноши любят всякую девушку" может быть выражено формулой $\exists x(P(x) \& \forall y(S(y) \supset R(x, y)))$ — "Существует человек x, такой, что он юноша, и для всякого человека y верно, что если y — девушка, то x любит y".

Переводом высказывания "Некоторые юноши не любят ни одной девушки" является формула $\exists x(P(x) \& \forall y(S(y) \supset \neg R(x, y)))$.

Приведем еще несколько достаточно трудных примеров формальной записи простых высказываний естественного языка:

"Всякий храбрец является юношей или девушкой" — $\forall x(Q(x) \supset (P(x) \vee S(x)))$;

"Всякая храбрая девушка не любит ни одного нехраброго юношу" — $\forall x((S(x) \& Q(x)) \supset \forall y((P(y) \& \neg Q(y)) \supset \neg R(x, y)))$;

"Всякий юноша любит некоторую девушку больше, чем ее отца" — $\forall x(P(x) \supset \exists y(S(y) \& R_1(x, y, f(y))))$;

"Некоторая девушка, отец которой храбр, любит его больше, чем некоторого нехраброго юношу" — $\exists x(S(x) \& Q(f(x)) \& \exists y((P(y) \& \neg Q(y)) \& R_1(x, f(x), y)))$.

Введем несколько *синтаксических* понятий, относящихся к языку логики предикатов.

Область действия квантора. В формулах вида $\forall \alpha A$ и $\exists \alpha A$ формула A называется областью действия квантора ($\forall$ или $\exists$) по переменной α.

Например, в формуле $\forall x(\exists y \neg P(x, y) \supset Q(y, z))$ областью действия квантора $\forall$ по переменной x является формула $\exists y \neg P(x, y) \supset Q(y,z)$, а областью действия квантора $\exists$ по y — формула $\neg P(x, y)$.

В произвольной формуле каждая предметная переменная встречается некоторое число раз (это число может быть равно 0, 1, 2 и т.д.). Иначе говоря, переменная имеет некоторое число *вхождений* в данную формулу. Например, в формулу $\forall x(\exists y \neg P(x, y) \supset Q(y, z))$ переменная x имеет два вхождения, y — три вхождения, z — одно вхождение, а остальные переменные — ни одного вхождения.

Свободные и связанные вхождения переменных. Вхождение предметной переменной в некоторую формулу называется связанным, если оно следует непосредственно за квантором или же находится в области действия квантора по данной переменной. В противном случае вхождение переменной называется свободным.

Например, в формуле, указанной выше, первые вхождения переменных x и y связаны, поскольку они следуют непосредственно за кванторами $\forall$ и $\exists$. Второе вхождение x находится в области действия квантора $\forall$ по x — в формуле $\exists y \neg P(x, y) \supset Q(y, z)$, а второе вхождение y расположено в области действия квантора $\exists$ по y — в формуле $\neg P(x, y)$; поэтому указанные вхождения являются связанными. Что же касается третьего вхождения переменной y и единственного вхождения z, то они являются свободными.

Свободные и связанные переменные. Предметная переменная называется свободной в некоторой формуле, если существует (по крайней мере одно) ее свободное вхождение в эту формулу. Переменная называется связанной в формуле, если существует (по крайней мере одно) ее связанное вхождение в эту формулу.

Например, в рассматриваемой формуле свободными являются переменные y и z, а связанными — переменные x и y.

Обратим внимание на то, что одна и та же переменная может быть и свободной, и связанной в некоторой формуле. В нашем примере такой переменной является y, которая имеет как свободное, так и связанное вхождение в указанную формулу.

Замкнутые термы. Терм, не содержащий в своем составе предметных переменных, называется замкнутым.

Замкнутые формулы. Формула называется замкнутой, если никакая предметная переменная не является в ней свободной.

Результатом перевода любого имени естественного языка на язык логики предикатов является именно замкнутый терм, а результатом перевода произвольного высказывания — замкнутая формула.

Сформулированный в этом параграфе язык логики предикатов называют *первопорядковым*. Смысл такого названия состоит в следующем: в данном языке разрешается связывать кванторами (квантифицировать) переменные единственного типа — предметные переменные, то есть переменные, возможными значениями которых являются предметы, индивиды.

Однако первопорядковый язык можно обогатить за счет введения других переменных, например предметно-функциональных (пробегающих по множеству предметных функций) и предикаторных (принимающих значения во множестве свойств и отношений). Разрешив квантификацию указанных переменных, мы получим *язык логики предикатов более высокого, чем первый, порядка*.

Языки данного типа имеют большие выразительные возможности по сравнению с первопорядковым. С их помощью можно выявлять логические формы высказываний, невыразимые в первопорядковом языке. Например, логическая форма высказывания "Некоторые свойства Земли присущи и Марсу" может быть выражена в языке более высокого порядка следующим образом: $\exists P(P(a) \& P(b))$, где P — предикаторная переменная, пробегающая по множеству свойств, а предметным константам a и b соответствуют имена "Земля" и "Марс".

Язык логики предикатов первого порядка может быть модифицирован и иным образом. В списке нелогических символов его алфавита сохраняются лишь предметные переменные. Вместо же предметных констант в язык вводят некоторое число конкретных имен, вместо предметно-функциональных констант — некоторое число предметных функторов, а вместо предикаторных констант — некоторое число предикаторов естественного языка. Правила образования термов и формул сохраняются с той лишь разницей, что там, где ранее речь шла о параметрах определенных типов, теперь имеются в виду нелогические термины естественного языка соответствующих категорий.

В результате указанной модификации получается так называемый *прикладной первопорядковый язык логики предикатов*. Этот язык не предназначен для выражения логических форм высказываний естественного языка, поскольку он содержит не параметры имен, предметных функторов и предикаторов, а сами эти термины. В рамках прикладного языка логики предикатов можно стандартным и точным образом представлять информацию, которую содержат высказывания естественного языка, так как повествовательные предложения, будучи переведенными в данный язык, приобретают жесткую логическую структуру и не допускают различных трактовок своего логического содержания.

Приведем примеры записи высказываний естественного языка в прикладном языке логики предикатов:

а) "Всякий человек смертен" — ∀x(Человек(x) ⊃ Смертен(x));

б) "Температура Солнца выше температуры Земли" —
Выше (Температура (Солнце), Температура (Земля));

в) "Всякий студент изучает какую-нибудь науку" —
∀x(Студент(x) ⊃ ∃y(Наука(y) & Изучает (x, y)));

г) "Квадрат любого четного числа больше 1"—
∀x(Четное число(x) ⊃ >(Квадрат (x), 1)).

Для языка логики предикатов характерно префиксное употребление предметно-функциональных символов в сложных термах и предикаторных символов в атомарных формулах. Иначе говоря, предметно-функциональный символ Φ^n располагается в начале терма $\Phi^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, а предикаторный символ Π^n располагается в начале формулы $\Pi^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. В естественном языке префиксное употребление предметных функторов и предикаторов встречается достаточно редко. Поэтому прикладной язык логики предикатов может быть приближен к естественному языку за счет отказа от обязательного префиксного использования предметно-функциональных и предикаторных знаков. Например, запись "Квадрат(t)" может быть заменена на более привычную — "t^2", запись "Четное число (t)" — на "t — четное число", запись "$>(t_1, t_2)$" — на "$t_1 > t_2$". Тогда перевод высказывания (г) будет выглядеть так:

$$\forall x(x \text{ — четное число} \supset x^2 > 1).$$

Приступим к формулировке в рамках построенного формализованного языка логической теории — *классической логики предикатов первого порядка*.

§ 2. Интерпретации и модели. Общезначимые формулы и логические отношения в логике предикатов

Первым этапом в построении любой логической теории является задание *класса допустимых интерпретаций нелогических символов* ее языка. Суть данной процедуры — указать, объекты каких типов могут быть сопоставлены в качестве значений нелогическим символам различных категорий. Например, в классической логике высказываний каждой пропозициональной переменной может быть сопоставлен только один из двух абстрактных объектов — "истина" или "ложь".

В логике предикатов процедуре интерпретации нелогических символов предшествует выбор некоторого непустого множества U, которое называют *областью интерпретации* или *универсумом рассмотрения (рассуждения)*.

Условие непустоты множества U (то есть наличие в нем по крайней мере одного элемента) является единственным требованием, предъявляемым к области интерпретации в классической логике предикатов. Таким образом, в этой теории в качестве универсума рассмотрения может выступать произвольное непустое множество (например, множество натуральных чисел, множество людей, множество городов, множество химических элементов).

Интерпретация нелогических символов в логике предикатов *релятивизируется* относительно некоторого наперед выбранного универсума U. В качестве значений этим символам могут сопоставляться лишь объекты, заданные каким-либо образом на множестве U.

Нелогические символы формализованного языка, построенного в предыдущем параграфе, можно подразделить на два класса. К первому относятся *константы* (предметные, предметно-функциональные и предикаторные). Они выступают в качестве параметров определенных терминов естественного языка и не могут связываться кванторами. Вторую группу составляют *переменные*, в первопорядковом языке имеется только один их тип — предметные переменные. Они могут связываться кванторами, а их свободные вхождения не являются с содержательной точки зрения параметрами конкретных имен, а выполняют скорее функцию неопределенных местоимений, которые можно заменять разными именами.

Отмеченные различия констант и переменных учитываются при задании процедуры интерпретации. Приписывание значений этим нелогическим символам осуществляется таким образом, что при фиксированной интерпретации констант допускается варьирование значений предметных переменных.

Приписывание значений нелогическим константам языка логики предикатов может быть осуществлено с помощью особой семантической функции I, которую будем называть *интерпретационной функцией*.

Функция I каждой нелогической константе сопоставляет некоторый объект, заданный на области интерпретации U, причем константам различных категорий должны сопоставляться объекты различных типов. Любая константа формализованного языка должна иметь тот же тип значения, что и выражение соответствующей категории естественного языка. Поэтому функция I задается таким образом, что значения предметных констант оказываются однотипными со значениями имен, значения предметно-функциональных констант — со значениями предметных функторов, а значения предикаторных констант — со значениями предикаторов.

Интерпретация предметных констант. Предметные константы, как уже говорилось, являются параметрами имен естественного языка. Значениями имен являются отдельные предметы, индивиды. Поэтому предметным константам в качестве значений также должны приписываться индивиды, но не любые, а те, которые содержатся в множестве U. Так, если U есть множество людей, то функция I может приписать в качестве значения предметной константе **a**, например, Аристотеля, а константе **b** — также Аристотеля или какого-либо другого человека, скажем, Сократа.

Таким образом, функция I сопоставляет каждой предметной константе произвольный элемент множества U, то есть $I(k) \in U$, где **k** — предметная константа, "$\in$" — знак принадлежности элемента множеству.

Интерпретация предикаторных констант. Предикаторные константы являются параметрами предикаторов естественного языка. В предыдущем параграфе отмечалось, что значениями предикаторов можно считать множества (классы) объектов, причем *элементами* множеств, представляемых одноместными предикаторами, являются индивиды, двухместными предикаторами — пары индивидов, трехместными предикаторами — тройки индивидов и т.д. Предикаторным константам в логике предикатов приписываются значения того же типа, только это приписывание релятивизируется относительно области интерпретации U.

Одноместной предикаторной константе функция I сопоставляет произвольное множество (возможно, пустое) элементов универсума U, то есть значением одноместной предикаторной константы является некоторое подмножество множества U.

Так, если U есть множество городов, то константе P^1 функция I может приписать, например, 1) пустое множество, 2) множество российских городов, 3) множество городов с населением более 1 млн. человек и даже 4) множество всех городов (ведь любое множество является подмножеством самого себя).

Двухместной предикаторной константе функция I сопоставляет произвольное множество пар, состоящих из элементов U. Множество всех пар, в состав которых входят элементы U, называют *второй декартовой степенью* (или *декартовым квадратом*) *множества* U и обозначают U^2.

Таким образом, значением двухместной предикаторной константы при интерпретации I является произвольное подмножество (возможно, пустое) множества U^2.

Если U есть множество городов, то константе Q^2 может быть сопоставлено, например, 1) множество таких пар городов, первый из которых расположен севернее второго, 2) множество таких пар городов, первый из которых превосходит по населению второй. Пара городов <Санкт-Петербург, Москва> принадлежит первому из указанных множеств, поскольку Санкт-Петербург действительно расположен севернее Москвы, но не принадлежит второму множеству, так как Санкт-Петербург не превосходит по населению Москву. Что же касается другой пары <Москва, Санкт-Петербург>, то она, наоборот, принадлежит второму множеству, но не принадлежит первому.

Трехместной предикаторной константе сопоставляется некоторое множество троек, состоящих из элементов области интерпретации U. Иначе говоря, значением такой константы является произвольное подмножество множества всех троек, составленных из элементов U. Указанное множество называют *третьей декартовой степенью множества* U и обозначают U^3.

Например, предикаторной константе R^3 в случае, если U – множество городов, может быть сопоставлено множество таких троек городов, первый из которых расположен между вторым и третьим. В состав данного множества войдет, скажем, тройка <Москва, Киев, Нижний Новгород>, поскольку Москва расположена между Киевом и Нижним Новгородом, но не войдет тройка <Киев, Москва, Нижний Новгород>, ведь Киев не расположен между Москвой и Нижним Новгородом.

В общем случае, каждой *n*-местной предикаторной константе Π^n функция I сопоставляет в качестве значения произвольное множество последовательностей, состоящих из *n* таких объектов, которые являются элементами универсума U. Иначе говоря, если посредством U^n обозначить множество всех *n*-членных последовательностей, составленных из элементов U (U^n называют *n-ной декартовой степенью множества* U), то функция I сопоставляет константе Π^n произвольное подмножество U^n, то есть $I(\Pi^n) \subseteq U^n$, где "$\subseteq$" — знак включения одного множества в другое. При этом полагается, что первая декартова степень U (то есть U^1) есть само множество U.

Интерпретация предметно-функциональных констант. Предметно-функциональные константы — это параметры предметных функторов естественного языка, последние репрезентируют (представляют) функции, аргументами и значениями которых являются индивиды (объекты, отличные от истинностных оценок — "истины" и "лжи").

При интерпретации предметно-функциональных констант в логике предикатов им также будут сопоставляться предметные функции соответствующей местности, только релятивизированные относительно универсума рассмотрения U. Аргументами и значениями указанных функций являются элементы множества U; такого рода функции принято называть *операциями, заданными на множестве* U.

Если в качестве универсума U выбрано множество натуральных чисел, то одноместной предметно-функциональной константе f^1 интерпретационная функция I может, например, сопоставить операцию возведения в квадрат, поскольку эта операция, во-первых, является одноместной и, во-вторых, ее можно задать на множестве натуральных чисел, ведь квадрат любого натурального числа сам является числом натуральным.

При том же универсуме двухместной предметно-функциональной константе g^2 может быть сопоставлена операция сложения, поскольку она является двухместной и сумма любых двух натуральных чисел есть натуральное число.

Итак, каждой n-местной предметно-функциональной константе $Ф^n$ интерпретационная функция I сопоставляет произвольную n-местную функцию, аргументами и значениями которой являются элементы множества U, то есть $I(Ф^n)$ есть n-местная операция, заданная на универсуме U.

Описание процедуры интерпретации нелогических констант языка логики предикатов завершено. Для ее осуществления необходимо выбрать некоторый универсум рассмотрения U и функцию I, сопоставляющую каждой константе значение в соответствии со сформулированными правилами. Пару <U, I>, задающую допустимую в классической логике предикатов интерпретацию нелогических констант, называют *моделью*.

Моделью называется любая пара <U, I>, такая, что U — непустое множество, а I — функция, удовлетворяющая следующим условиям: (1) $I(k) \in U$, (2) $I(П^n) \subseteq U^n$, (3) $I(Ф^n)$ есть n-местная операция, заданная на U (где k — произвольная предметная константа, $П^n$ — произвольная n-местная предикаторная константа, а $Ф^n$ — произвольная n-местная предметно-функциональная константа).

Приписывание значений предметным переменным задается независимо от интерпретации других нелогических символов (а именно нелогических констант) формализованного языка. Эта процедура также релятивизирована относительно универсума U.

Каждой предметной переменной в качестве значения приписывается произвольный элемент множества U.

Обратим внимание на то, что с конкретной моделью <U, I> можно связать множество приписываний значений предметным переменным. Это допускает возможность варьирования значений переменных при фиксированной интерпретации констант.

Следующий этап в построении логики предикатов — задание *правил, позволяющих устанавливать значения термов и формул* всевозможных типов. Эти значения обусловливаются выбором конкретной модели <U, I> и конкретного приписывания элементов U предметным переменным. Возможными значениями термов являются индивиды из области интерпретации U, а возможными значениями формул — объекты "истина" и "ложь". Данный факт свидетельствует о том, что термы являются аналогами имен, формулы — аналогами высказываний естественного языка.

Покажем сначала, как можно определить *значение произвольного терма* t *в некоторой модели* <U, I> *при некотором приписывании значений предметным переменным* φ. Будем употреблять запись "| t |" как сокращение выражения "значение t в модели <U, I> при приписывании φ".

Согласно определению терма (см. §1 данной главы), t является либо 1) некоторой предметной константой k, либо 2) некоторой предметной переменной α, либо 3) выражением вида Φ (t_1, t_2, ..., t_n), где Φ — n-местная предметно-функциональная константа, а t_1, t_2, ..., t_n — термы. Сформулируем правила установления значения терма t для каждого из этих трех случаев.

(Т1) Если терм t есть предметная константа k, то его значением в модели <U, I> при приписывании φ является тот индивид, который интерпретационная функция I сопоставляет константе k, то есть

$$| k | = I(k).$$

(Т2) Если терм t есть предметная переменная α, то его значением в <U, I> при приписывании φ является тот индивид, который приписывается переменной α посредством φ, то есть

$$|\alpha| = \varphi(\alpha).$$

(Т3) Пусть t есть сложный терм Φ^n (t_1, t_2, ..., t_n). Для того чтобы установить его значение в модели <U, I> при приписывании φ, необходимо, во-первых, выделить операцию, которую функция I сопоставляет предметно-функциональной константе Φ^n, то есть найти I(Φ^n); во-вторых, установить значения термов t_1, t_2, ..., t_n в той же модели при том же приписывании, то есть найти | t_1 |, | t_2 |, ..., | t_n |; и, в-третьих, применить операцию I(Φ^n) к аргументам | t_1 |, | t_2 |, ..., | t_n |. Результат применения данной операции к указанным объектам как раз и является значением терма Φ^n (t_1, t_2, ..., t_n) в модели <U, I> при приписывании φ. Таким образом,

$$| \Phi^n (t_1, t_2, ..., t_n) | = [I(\Phi^n)] (| t_1 |, | t_2 |, ..., | t_n |).$$

Приведем пример установления значений термов в конкретной модели и при конкретном приписывании значений предметным переменным. Пусть область интерпретации U есть множество целых положительных чисел. Пусть интерпретационная функция I сопоставляет предметной константе a число 2, одноместной предметно-функциональной константе f — операцию возведения в квадрат, а двухместной предметно-функциональной константе g — операцию сложения. Пусть также предметной переменной y приписывается значение 1, то есть $\varphi(y) = 1$. Определим, какими значениями в указанной модели <U, I> и при указанном приписывании φ обладают следующие термы: *(а)* a; *(б)* y; *(в)* f(a); *(г)* g(y, a); *(д)* f(g(y, a)); *(е)* g(f(a), y).

(а) Поскольку a — предметная константа, значением данного терма, согласно пункту (T1), является объект, сопоставленный функцией I константе a, то есть число 2. Итак, $|a| = I(a) = 2$.

(б) Поскольку y — предметная переменная, то значением данного терма, согласно пункту (T2), является значение, которое φ приписывает переменной y, то есть число 1. Таким образом, $|y| = \varphi(y) = 1$.

(в) Установим значение сложного терма f(a). Предметно-функциональной константе f в нашей модели сопоставлена операция возведения в квадрат; значением терма a, как было показано в примере *(а)*, является 2. Действуя в соответствии с пунктом (T3), мы должны применить операцию I(f) к аргументу $|a|$, то есть возвести в квадрат число 2. Полученное в результате этого число 4 является искомым значением терма f(a). Итак, $|f(a)| = [I(f)](|a|) = 2^2 = 4$.

(г) Установим значение сложного терма g (y, a). Предметно-функциональной константе g в нашей модели сопоставлена операция сложения. Значениями термов y и a, как было показано в примерах *(б)* и *(а)*, являются соответственно числа 1 и 2. Чтобы вычислить значение g(y, a), мы должны, согласно пункту (T3), применить операцию I(g) к аргументам $|y|$ и $|a|$, то есть сложить 1 и 2. В результате получим число 3, которое и является значением терма g(y, a). Таким образом, $|g(y, a)| = [I(g)](|y|, |a|) = 1+2 = 3$.

(д) Для того чтобы установить значение терма f(g(y, a)), необходимо применить операцию I(f), то есть операцию возведения в квадрат, к объекту $|g(y, a)|$. Но значением g(y, a), как было показано в примере *(г)*, является число 3. Поэтому возводим в квадрат число 3 и получаем число 9, которое и является значением терма f(g(y, a)).

(е) Для того чтобы установить значение терма g(f(a), y), необходимо сложить значения термов f(a), и y, то есть числа 4 и 1 (см. примеры *(в)* и *(б)*). Таким образом, значением g(f(a), y) является 4+1, то есть число 5.

Итак, мы показали, как определяются значения термов в конкретной модели и при конкретном приписывании значений предметным переменным. Теперь зададим правила, позволяющие устанавливать *значения формул в произвольной модели* <U, I> *при произвольном приписывании* φ. Возможными значениями формул, как было сказано выше, являются объекты "истина" и "ложь". Поэтому для решения поставленной задачи необходимо сформулировать *условия истинности и ложности формул* в <U, I> при φ.

В соответствии с определением формулы (см. § 1 данной главы) их можно разбить на три группы: это, во-первых, элементарные формулы — выражения вида $\Pi^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где Π^n — n-местная предикаторная константа, а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы; во-вторых, сложные формулы, главным знаком которых является пропозициональная связка, — это выражения видов $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$ и $(A \supset B)$, где A и B — формулы; и, в-третьих, сложные формулы, главным знаком которых является квантор, — это выражения видов $\forall\alpha A$ и $\exists\alpha A$, где α — предметная переменная, а A — формула.

Покажем, каким образом устанавливаются значения формул каждой из трех групп. В дальнейшем в качестве сокращения для выражения "значение формулы F в модели <U, I> при приписывании значений предметным переменным φ" будем использовать запись "$|F|$ при φ". В этой записи приписывание φ выделяется особо, поскольку при установлении истинности или ложности некоторых формул (а именно формул видов $\forall\alpha A$ и $\exists\alpha A$) приходится определять значения их подформул, варьируя приписывания значений предметным переменным. В то же время указанная процедура осуществляется в рамках одной и той же модели, поэтому в записи "$|F|$ при φ" опущены параметры U и I.

Договоримся также вместо термина "истина" писать "и", а вместо термина "ложь" — "л".

Условия истинности и ложности элементарных формул. Чтобы установить значение формулы $\Pi^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ в модели <U, I> при приписывании φ, необходимо, во-первых, выяснить, какое множество функция I сопоставляет предикаторной константе Π^n, то есть найти $I(\Pi^n)$; во-вторых, определить, какие значения принимают в данной модели при данном приписывании термы $t_1, t_2, \ldots, t_n$, то есть найти $|t_1|, |t_2|, \ldots, |t_n|$; и, наконец, установить является ли последовательность $<|t_1|, |t_2|, \ldots, |t_n|>$ элементом множества $I(\Pi^n)$. Если данная последовательность принадлежит указанному множеству, то формула $\Pi^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ принимает значение "истина", в противном случае оно примет значение "ложь".

(Ф1) $| \Pi^n(t_1, t_2, \ldots, t_n) |$ = и при φ, если и только если $<| t_1 |, | t_2 |, \ldots, | t_n |> \in I(\Pi^n)$.

$| \Pi^n(t_1, t_2, \ldots, t_n) |$ = л при φ, если и только если $<| t_1 |, | t_2 |, \ldots, | t_n |> \notin I(\Pi^n)$.

Для разъяснения данного определения рассмотрим конкретную модель <U, I> и конкретное приписывание предметным переменным φ, которые использовались ранее в примерах *(а)*—*(е)*. Договоримся, что одноместной предикаторной константе P интерпретационная функция I сопоставляет множество четных чисел, а двухместной предикаторной константе Q — множество таких пар целых положительных чисел, первое из которых больше второго.

Определим, какие значения в этом случае принимают элементарные формулы *(ж)* Q(f(a), y) и *(з)* P(g(y, a)).

(ж) Чтобы установить значение формулы Q(f(a), y) в данной модели при данном приписывании, необходимо, согласно (Ф1), ответить на вопрос, принадлежит ли пара $<| f(a) |, | y |>$ множеству I(Q). В примерах *(в)* и *(б)* было установлено, что значениями термов f(a) и y являются соответственно числа 4 и 1. В данной модели I(Q) есть множество таких пар чисел, первое из которых больше второго. Пара <4, 1> принадлежит этому множеству, так как 4 больше 1. Поэтому | Q(f(a),y) | = и при φ.

(з) Для установления значения формулы P(g(y, a)) следует выяснить, принадлежит ли значение терма g(y, a) множеству I(P). В примере *(г)* было показано, что | g(y, a) | = 3. В нашей модели I(P) есть множество четных чисел. Поскольку число 3 не принадлежит этому множеству, формула P(g(y, a)) примет значение "ложь" в <U, I> при φ.

Условия истинности и ложности формул, главным знаком которых является пропозициональная связка. Значения сложных формул видов ¬A, (A & B), (A ∨ B), (A ⊃ B) в произвольной модели при произвольном приписывании значений предметным переменным обусловлены тем, какие значения в той же модели при том же приписывании принимают их подформулы A и B. Таким образом, установив значения формул A и B в модели <U, I> при φ, мы можем однозначно определить, какими — истинными или ложными — в модели при этом приписывании являются формулы ¬A, (A & B), (A ∨ B), (A ⊃ B).

Сформулируем условия истинности и ложности формул указанных типов, опираясь на смысл пропозициональных связок ¬, &, ∨, ⊃, зафиксированный в предыдущей главе.

(Ф2) $|\neg A| =$ и при φ, если и только если $|A| =$ л при φ.
$|\neg A| =$ л при φ, если и только если $|A| =$ и при φ.

(Ф3) $|A \& B| =$ и при φ, если и только если $|A| =$ и и $|B| =$ и при φ.
$|A \& B| =$ л при φ, если и только если $|A| =$ л или $|B| =$ л при φ.

(Ф4) $|A \vee B| =$ и при φ, если и только если $|A| =$ и или $|B| =$ и при φ.
$|A \vee B| =$ л при φ, если и только если $|A| =$ л и $|B| =$ л при φ.

(Ф5) $|A \supset B| =$ и при φ, если и только если $|A| =$ л или $|B| =$ и при φ.
$|A \supset B| =$ л при φ, если и только если $|A| =$ и и $|B| =$ л при φ.

Покажем в качестве примера, каким образом в заданной выше конкретной модели <U, I> и при конкретном приписывании φ устанавливаются значения формул: *(и)* $Q(f(a), y) \vee P(g(y, a))$; *(к)* $\neg(Q(f(a), y) \vee P(g(y, a)))$; *(л)* $Q(f(a), y) \supset P(g(y, a))$.

(и) Для того чтобы установить значение дизъюнктивной формулы в модели <U, I> при φ, необходимо знать значение ее подформул $Q(f(a), y)$ и $P(g(y, a))$. В примере *(ж)* было показано, что $|Q(f(a), y))| =$ и при φ, а в примере *(з)* — что $|P(g(y, a))| =$ л при φ. Поскольку одна из двух формул принимает в <U, I> при φ значение "истина", постольку, согласно (Ф4), и вся дизъюнктивная формула истинна в этой модели при этом приписывании, то есть $|Q(f(a),y) \vee P(g(y, a))| =$ и при φ.

(к) Для того чтобы определить значение формулы $\neg(Q(f(a), y) \vee P(g(y, a)))$ в <U, I> при φ, нужно знать значение ее подформулы, стоящей за знаком отрицания. Как показано в примере *(и)*, эта подформула истинна в <U, I> при φ. Поэтому, согласно (Ф2), ее отрицание примет значение "ложь", то есть $|\neg(Q(f(a), y) \vee P(g(y, a)))| =$ л при φ.

(л) Установим значение в <U, I> при φ импликативной формулы $Q(f(a), y) \supset P(g(y, a))$. Ранее показано, что ее антецедент $Q(f(a), y)$ является здесь истинным, а консеквент $P(g(y, a))$ — ложным. Поэтому, согласно (Ф5), импликативная формула принимает значение "ложь", то есть $|Q(f(a), y) \supset P(g(y, a))| =$ л при φ.

Условия истинности и ложности формул, главным знаком которых является квантор. С содержательной точки зрения выражение вида $\forall\alpha A$ следует считать истинным, если каждый индивид предметной области удовлетворяет условию, выраженному в А. Если же в предметной области существует индивид, не удовлетворяющий данному условию, то $\forall\alpha A$ окажется ложным утверждением. Что же касается выражений вида $\exists\alpha B$, то их естественно считать истинными в том случае, когда существует индивид, удовлетворяющий выраженному в А условию, и ложными, если каждый индивид ему не удовлетворяет.

В логике предикатов условия истинности и ложности формул $\forall\alpha A$ и $\exists\alpha A$ в модели $<U, I>$ при φ определяются сходным образом. Для того чтобы установить значения этих формул, осуществляется перебор (просмотр) индивидов из универсума U. Он производится путем варьирования значения переменной α, то есть рассматриваются приписывания, сопоставляющие переменной α различные элементы U, но сохраняющие при этом значения других предметных переменных. Осуществляя разные приписывания подобного рода, устанавливают, какой — истинной или ложной — в каждом из этих случаев оказывается формула А.

Если А оказывается истинной, какой бы индивид из U мы ни приписывали переменной α (сохранив при этом значения других предметных переменных), то формула $\forall\alpha A$ примет значение "истина" в модели $<U, I>$ при исходном приписывании φ. Если же в U найдется индивид, при приписывании которого переменной α формула А окажется ложной, то $\forall\alpha A$ примет значение "ложь".

Если, приписав α хоть какой-нибудь элемент U (и сохранив при этом значения других предметных переменных), мы обнаружим, что формула А принимает значение "истина", то и формулу $\exists\alpha A$ следует считать истинной в модели $<U, I>$ при исходном φ. Если же А оказывается ложной, какой бы объект ни был приписан α, то $\exists\alpha A$ примет значение "ложь".

Дадим более строгую формулировку условий истинности и ложности произвольной формулы вида $\forall\alpha A$ и произвольной формулы вида $\exists\alpha A$. Пусть $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — список всех предметных переменных, содержащихся в формуле $\forall\alpha A$ (или в $\exists\alpha A$), и пусть φ приписывает α индивид u из U, а переменным $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — соответственно индивиды $u_1, u_2, \ldots, u_n$ из U.

(Ф6) $|\forall\alpha A| =$ и при φ, если и только если для любого $v \in U$ верно, что $|A| =$ и при приписывании переменной α значения v, а переменным $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ значений $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

$| \forall \alpha A | =$ л при φ, если и только если существует $v \in U$, такой, что $| A | =$ л при приписывании α значения v, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ значений $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Иначе говоря, формула $\forall \alpha A$ принимает значение "истина" в модели <U, I> при приписывании φ, когда ее подкванторная часть A истинна в данной модели при любом таком ψ, которое всем отличным от α переменным приписывает те же индивиды, что и φ. Если же найдется приписывание ψ указанного типа, при котором A в этой модели ложно, то формула $\forall \alpha A$ в <U, I> при φ примет значение "ложь".

(Ф7) $| \exists \alpha A | =$ и при φ, если и только если существует $v \in U$, такой, что $| A | =$ и при приписывании α значения v, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ значений $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

$| \exists \alpha A | =$ л при φ, если и только если для любого $v \in U$ верно, что $| A | =$ л при приписывании α значения v, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ значений $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Другими словами, формула $\exists \alpha A$ принимает в модели <U, I> при φ значение "истина", если ее подкванторная часть A истинна в этой модели при некотором приписывании ψ, сопоставляющем всем отличным от α переменным те же индивиды, что и φ. Если же при любом подобном приписывании A ложна, то формула $\exists \alpha A$ принимает в <U, I> при φ значение "ложь".

Анализ (Ф6) и (Ф7) свидетельствует, что исходное приписывание φ и те приписывания, о которых идет речь в правых частях данных определений, могут различаться лишь в том, какое значение они сопоставляют переменной α. Причем, для установления истинности или ложности формул $\forall \alpha A$ и $\exists \alpha A$ в модели <U, I> при приписывании φ несущественным оказывается, что именно это φ сопоставляет подкванторной переменной α. Вообще при определении значений формул логики предикатов существенно указать только те индивиды, которые приписываются свободным переменным, входящим в эти формулы.

В качестве примера установим в заданной ранее конкретной модели <U, I> и при конкретном приписывании φ значения формул *(м)* $\exists x P(x)$, *(н)* $\exists x Q(y, x)$, *(о)* $\forall x P(f(x))$, *(п)* $\forall x Q(g(x, a), y)$.

(м) Формула $\exists x P(x)$ не содержит свободных переменных. Чтобы определить ее значение в <U, I> при φ, необходимо, согласно (Ф7), выяснить, существует ли в универсуме U (то есть в множестве

целых положительных чисел) объект v, такой, что | P(x) | = и при приписывании переменной x значения v. Последнее, согласно (Ф1), имеет место тогда, когда v является элементом I(P), то есть в нашем случае множества четных чисел. Итак, мы должны установить, существует ли число v, которое является четным. Поскольку такое число действительно существует, | ∃xP(x) | = и при φ.

(н) Формула ∃xQ(y, x) содержит свободную переменную y, которой φ приписывает число 1. Выясним, существует ли целое положительное число v, такое, что | Q(y, x) | = и при приписывании переменной x значения v, а переменной y значения 1. С учетом того, что I(Q) есть множество таких пар чисел, первое из которых больше второго, а также в соответствии с (Ф1), нам следует установить, имеется ли целое положительное число v, такое, что 1 > v. Поскольку такого числа нет, то, согласно (Ф7), можно сделать вывод: | ∃xQ(y, x) | = л при φ.

(о) Чтобы установить значение в <U, I> при φ замкнутой формулы ∀xP(f(x)), необходимо, в соответствии с (Ф6), выяснить, для всякого ли объекта v из множества целых положительных чисел U верно, что | P(f(x)) | = и при приписывании x числа v. Последнее, согласно (Ф1), имеет место, если значение терма f(x) при этом приписывании является элементом I(P), то есть четным числом. Поскольку I сопоставляет f операцию возведения в квадрат, значением f(x) при приписывании x числа v является v^2. Итак, мы должны установить, для всякого ли целого положительного числа v верно, что v^2 является четным. Но данное утверждение неверно для некоторых чисел, например числа 1. Поэтому | ∀xP(f(x)) | = л при φ.

(п) Формула ∀xQ(g(x, a), y) содержит свободную переменную y, которой φ сопоставляет 1. Ответим на вопрос, для всякого ли целого положительного числа v верно, что | Q(g(x, a), y) | = и при приписывании переменной x числа v, а переменной y числа 1. Если мы учтем, какие значения в модели <U, I> принимают константы Q, g и a, то данный вопрос будет звучать так: для всякого ли целого положительного числа v верно, что v + 2 > 1? Так как ответ на этот вопрос является утвердительным, то, в соответствии с (Ф6), | ∀xQ(g(x, a), y) | = и при φ.

После того как сформулированы условия истинности и ложности формул, можно ввести понятие *закона классической логики предикатов.*

Напомним, что законом логической теории является формула, истинная при любых допустимых в этой теории интерпретациях нелогических символов, входящих в состав данной формулы.

В логике предикатов интерпретация нелогических символов осуществляется посредством выбора некоторой модели <U, I> и приписывания значений предметным переменным φ. Поэтому в данной теории понятие закона задается следующим образом:

Формула А является законом классической логики предикатов, если и только если А принимает значение "истина" в каждой модели и при любом приписывании значений предметным переменным.

Из данного определения следует, что А не является законом логики предикатов тогда и только тогда, когда существует модель и существует приписывание предметным переменным, при которых А принимает значение "ложь".

Законы классической логики предикатов называют также *общезначимыми формулами*. Утверждение "Формула А общезначима" записывают сокращенно так: "$\models$ A".

Примером общезначимой формулы является $\forall xP(x) \supset \exists xP(X)$. Покажем, что эта формула действительно является законом логики предикатов. Будем рассуждать от противного. Предположим, что формула $\forall xP(x) \supset \exists xP(x)$ необщезначима. Это означает, что существует модель <U, I> и приписывание φ, при которых $|\forall xP(X) \supset \exists xP(x)| =$ л. Тогда, согласно (Ф5), $|\forall xP(X)| =$ и и $\exists xP(X)| =$ л при φ. Истинность $\forall xP(x)$, согласно (Ф6), означает, что $|P(X)| =$ и при приписывании x любого индивида из U. Ложность $\exists xP(X)$, согласно (Ф7), означает, что $|P(x)| =$ л при приписывании x любого индивида из U. Припишем x произвольный элемент v универсума U. Получается, что, с одной стороны, $|P(x)| =$ и при приписывании x объекта v, а с другой стороны, $|P(x)| =$ л при этом приписывании. Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, допущение о необщезначимости формулы $\forall xP(x) \supset \exists xP(x)$ неверно и она действительно является законом логики предикатов.

Чтобы продемонстрировать необщезначимость некоторой формулы, достаточно найти модель <U, I> и приписывание φ, при которых эта формула примет значение "ложь". Покажем, например, что формула $\exists xP(x) \supset \forall xP(x)$ необщезначима. Рассмотрим в качестве области интерпретации U множество людей. Пусть интерпретационная функция I сопоставляет предикаторной константе P множество мужчин. Приписывание значений предметным переменным φ может быть произвольным, поскольку наша формула является замкнутой. Если переменной x приписать в качестве значения Сократа, то в модели <U, I> формула P(x) окажется истинной, ведь Сократ является мужчиной, то есть элементом I(P). Если же переменной x приписать в качестве значения жену Сократа — Ксантиппу, то P(x) окажется ложной формулой, так как Ксантиппа не является мужчиной. Таким образом, существует приписывание переменной x, при котором | P(x) | = и, откуда следует, что | ∃xP(x) | = и при произвольном φ. Вместе с тем имеется и другое приписывание x, при котором | P(x) | = л, а это означает, что | ∀xP(x) | = л при φ. Истинность ∃xP(x) и ложность ∀xP(x) в <U, I> при φ свидетельствует о том, что | ∃xP(x) ⊃ ∀xP(x) | = л при φ. Следовательно, данная формула необщезначима.

Наряду с понятием общезначимой формулы очень важным является понятие *выполнимой в классической логике предикатов формулы*.

Формула A языка логики предикатов является выполнимой, если и только если существуют модель и приписывание значений предметным переменным, при которых A принимает значение "истина".

Покажем, например, что формула ∃xP(x) ⊃ ∀xP(x), необщезначимость которой была только что установлена, является выполнимой. Для этого достаточно указать конкретные модель <U, I> и приписывание φ, при которых она истинна. Пусть U снова является множеством людей, но пусть теперь I сопоставляет P пустое множество (например, множество людей, побывавших на Солнце), φ снова может быть произвольным. Ясно, что ни один человек не является элементом I(P), ведь у пустого множества нет элементов. Поэтому | P(x) | = л при приписывании x любого объекта из U. А из этого, согласно (Ф7), следует, что | ∃xP(x) | = л при φ. Но если антецедент импликативной формулы ложен, то, согласно (Ф5), сама эта формула истинна, то есть | ∃xP(x) ⊃ ∀xP(x) | = и при φ. Следовательно, рассматриваемая формула выполнима.

Из последнего определения вытекает, что формула является невыполнимой тогда и только тогда, когда она принимает значение "ложь" в каждой модели и при каждом приписывании значений предметным переменным.

В качестве примера покажем невыполнимость формулы ¬∃xP(x) & P(a). Будем рассуждать от противного. Предположим, что эта формула выполнима. Тогда существует модель <U, I> и приписывание φ, при которых она истинна. Поскольку наша формула является конъюнктивной, ее истинность, согласно (Ф3), означает, что | ∃xP(x) | = и и | P(a) | = и при φ. Истинность P(a), согласно (Ф1), говорит о том, что I(a) ∈ I(P). А истинность ¬∃xP(x) означает, согласно (Ф2), ложность ∃xP(x). Последнее, согласно (Ф7), свидетельствует, что | P(x) | = л при приписывании x любого элемента U, в частности и того, который функция I сопоставляет константе a. Итак, | P(x) | = л при приписывании x объекта I(a). Отсюда, в соответствии с (Ф1), следует, что I(a) ∉ I(P), что противоречит ранее полученному утверждению: $I(a) \in I(P)$. Поэтому допущение о выполнимости $\neg\exists xP(x)$ & $P(a)$ неверно, и эта формула невыполнима.

После того как введены понятия общезначимой и выполнимой формул, мы имеем возможность в рамках классической логики предикатов решать вопросы, являются ли высказывания естественного языка логически истинными, логически ложными и логически недетерминированными.

Для этого необходимо выразить логическую форму высказывания в языке логики предикатов и определить, общезначима ли полученная формула и является ли она выполнимой. Если указанная формула общезначима, то исходное высказывание естественного языка *логически истинно* относительно логики предикатов. Если полученная формула невыполнима, то соответствующее высказывание *логически ложно*. Если же данная формула выполнима, но необщезначима, то относительно логики предикатов исходное высказывание является *логически недетерминированным*.

Установим, например, какой статус в рамках логики предикатов имеют следующие высказывания:

(1) Если всякий храбр, то кто-то храбр,
(2) Если кто-то храбр, то всякий храбр,
(3) Не существует храбрецов, но Ромео храбр.

Сопоставим одноместному предикатору "храбрый" предикаторную константу **P**, а имени "Ромео" — предметную константу **a**.

В этом случае логической формой высказывания (1) будет формула $\forall xP(x) \supset \exists xP(x)$. Ранее было установлено, что она является общезначимой. Поэтому высказывание (1) логически истинно.

Логической формой высказывания (2) будет формула $\exists xP(x) \supset \forall xP(x)$. Выше было показано, что она необщезначима, но выполнима. Поэтому высказывание (2) логически недетерминированно.

Наконец, высказывание (3) является логически ложным, поскольку его логическая форма — $\neg\exists xP(x)$ & $P(a)$ — относится к числу невыполнимых формул.

Завершающим этапом в построении логической теории является определение различных типов *логических отношений между формулами* ее языка. Зададим в классической логике предикатов *фундаментальные* логические отношения — отношения *совместимости по истинности*, *совместимости по ложности* и *логического следования*. Пусть **Г** — произвольное непустое множество формул языка логики предикатов.

Формулы из Г совместимы по истинности, если и только если существуют модель и приписывание значений предметным переменным, при которых каждая формула из Г принимает значение "истина". В противном случае они несовместимы по истинности.

Формулы из Г совместимы по ложности, если и только если существует модель и приписывание значений предметным переменным, при которых каждая формула из Г принимает значение "ложь". В противном случае эти формулы несовместимы по ложности.

Из множества формул Г логически следует формула В ($Г \models B$), если и только если не существует модели и приписывания значений предметным переменным, при которых каждая формула из Г принимает значение "истина", а формула В — значение "ложь".

Покажем, например, что формулы $\exists xQ(x, y)$ и $\exists x\neg Q(x, y)$ совместимы по истинности. Для этого достаточно указать конкретную модель <U, I> и конкретное приписывание φ, при которых обе эти формулы истинны. Рассмотрим в качестве U множество городов. Пусть I сопоставляет двухместной предикаторной константе Q множество таких пар городов, первый из которых севернее второго. Пусть φ приписывает переменной y, свободной в указанных формулах, город Москву, а остальным переменным — произвольные города.

Рассмотрим теперь приписывание φ_1, которое y также сопоставляет Москву, а x — Мурманск. Поскольку Мурманск севернее Москвы, пара <Мурманск, Москва> содержится в I(Q) и, значит, $| Q(x, y) |$ = и при φ_1. А отсюда, согласно (Ф7), следует, что $| \exists xQ (x, y) |$ = и при φ. Рассмотрим теперь приписывание φ_2, которое y снова сопоставляет Москву, а x — Астрахань. Поскольку Астрахань не расположена севернее Москвы, пара <Астрахань, Москва> не содержится в I(Q), и $| Q(x, y) |$ = л при φ_2. Тогда, согласно (Ф2), $| \neg Q(x, y) |$ = и при φ_2, откуда по (Ф7) получаем: $| \exists x\neg Q(x, y) |$ = и при φ.

Таким образом, формулы $\exists xQ(x, y)$ и $\exists x\neg Q(x, y)$ в рассмотренной нами модели <U, I> и при приписывании φ одновременно принимают значение "истина". Следовательно, они совместимы по истинности.

С использованием тех же самых U, I и φ можно показать совместимость по ложности формул $\forall x\neg Q(x, y)$ и $\forall xQ(x, y)$. В предыдущем примере было установлено, что $| Q(x, y) |$ = и при φ_1. Отсюда по (Ф2) следует, что $|\neg Q(x, y) |$ = л при φ_1. Тогда, согласно (Ф6), $| \forall x\neg Q(x, y) |$ = л при φ. Кроме того, имеет место $| Q(x, y) |$ =

л при φ_2, откуда вытекает, что $|\forall xQ(x, y)| =$ л при φ. Таким образом, в данной модели, и при данном приписывании формулы $\forall x\neg Q(x, y)$ и $\forall xQ(x,y)$ одновременно ложны.

Формулы $\forall x\neg Q(x, y)$ и $\forall xQ(x, y)$ не являются вместе с тем совместимыми по истинности. Чтобы доказать это, будем рассуждать от противного. Допустим, что они совместимы по истинности. Это означает, что существует модель $<U, I>$ и приписывание φ, при которых обе формулы принимают значение "истина". Используя (Ф6), получаем, что $|\neg Q(x, y)| =$ и и $|Q(x, y)| =$ и при приписывании любого элемента U переменной x и объекта $\varphi(y)$ переменной y. Но из того, что $|\neg Q(x, y)| =$ и при данном приписывании, следует, что при нем $|Q(x, y)| =$ л. Налицо противоречие. Значит, исходные формулы по истинности несовместимы.

С помощью похожего рассуждения несложно доказать несовместимость по ложности формул $\exists xQ(x, y)$ и $\exists x\neg Q(x,y)$.

Подводя итог рассмотрению данных примеров, можно утверждать, что формулы $\forall x\neg Q(x,y)$ и $\forall xQ(x, y)$ находятся в отношении противоположности, поскольку они совместимы по ложности, но несовместимы по истинности, а формулы $\exists xQ(x,y)$ и $\exists x\neg Q(x, y)$ — в отношении подпротивоположности, так как они, наоборот, совместимы по истинности, но несовместимы по ложности.

Перейдем теперь к рассмотрению примеров установления отношения логического следования в логике предикатов. Покажем, что из формул P(a) и Q(a) логически следует $\exists x(P(x) \& Q(x))$. Допустим, что это не так. Тогда существует модель $<U, I>$ и приписывание φ, при которых формулы P(a) и Q(a) истинны, а $\exists x(P(x) \& Q(x))$ ложна. Истинность P(a) и Q(a), согласно (Ф1), означает, что $I(a) \in I(P)$ и $I(a) \in I(Q)$. Поэтому если переменной x приписать объект I(a), то $|P(x)| =$ и и $|Q(x)| =$ и. Отсюда, согласно (Ф3), вытекает, что $|P(x) \& Q(x)| =$ и при приписывании x значения I(a). Используя (Ф7), получаем, что $|\exists x(P(x) \& Q(x))| =$ и при φ. Но ранее было установлено, что $|\exists x(P(x) \& Q(x))| =$ л при φ. Налицо противоречие, свидетельствующее о неверности нашего допущения. Итак,

$$P(a), Q(a) \models \exists x(P(x) \& Q(x)).$$

Наличие отношения логического следования между указанными формулами свидетельствует о правильности всех умозаключений следующей формы:

$$\frac{P(a), Q(a)}{\exists x(P(x) \& Q(x))}.$$

Правильным, в частности, является такое умозаключение:

Отелло ревнив
Отелло простодушен

Некоторые ревнивые люди простодушны

Постараемся далее ответить на вопрос, является ли правильным другое умозаключение:

Существуют ревнивые люди
Существуют простодушные люди

Некоторые ревнивые люди простодушны

Для ответа на поставленный вопрос необходимо выявить логическую форму умозаключения и определить, следует ли логическая форма его заключения из логических форм посылок.

Последнее умозаключение имеет следующую форму:

$$\frac{\exists x P(x),\ \exists x Q(x)}{\exists x (P(x)\ \&\ Q(x))}.$$

Покажем, что из формул $\exists xP(x)$ и $\exists xQ(x)$ не следует логически формула $\exists x(P(x)\ \&\ Q(x))$. Для этого достаточно найти какую-нибудь модель <U, I> и приписывание φ, при которых $\exists xP(x)$ и $\exists xQ(x)$ примут значение "истина", а $\exists x(P(x)\ \&\ Q(x))$ — значение "ложь".

Рассмотрим в качестве универсума U множество животных. Пусть интерпретационная функция I сопоставляет константе P множество волков, а константе Q множество зайцев. Поскольку все анализируемые формулы замкнуты, приписывание φ выбирается произвольно. Формула $\exists xP(x)$ истинна в указанной модели <U, I> при φ, так как переменной x можно приписать в качестве значения животное (элемент U), которое является волком (то есть содержится в I(P)). Формула $\exists xQ(x)$ также истинна, поскольку x можно приписать в качестве значения зайца (то есть элемент I(Q)). Однако, какое бы животное мы ни приписали x, оно не может оказаться одновременно и волком и зайцем. То есть $|P(x)\ \&\ Q(x)|$ = л при приписывании x любого элемента U, что свидетельствует о ложности формулы $\exists x(P(x)\ \&\ Q(x))$ в <U, I> при φ.

Таким образом, формула $\exists x(P(x)\ \&\ Q(x))$ не следует логически из формул $\exists xP(x)$ и $\exists xQ(x)$, а значит, рассматриваемое умозаключение неправильно.

§ 3. Метод аналитических таблиц

В предыдущем параграфе были сформулированы понятия закона классической логики предикатов (общезначимой формулы) и логического следования в логике предикатов. Таким образом, были даны ответы на важнейшие для каждой логической теории вопросы: что является законом этой теории и что представляет собой отношение логического следования в ней.

Однако с практической точки зрения не менее важно получить ответ на другие вопросы: каким образом, с помощью какой процедуры можно показать, что некоторая формула A действительно является законом данной логической теории и что из формул A_1, A_2, ..., A_n в этой теории действительно следует формула B.

В некоторых логических теориях сами определения понятий логического закона и логического следования содержат указания на проверочную процедуру, позволяющую устанавливать, является ли произвольная формула языка данной теории ее законом и следует ли из каких-либо формул A_1, A_2, ..., A_n в этой теории формула B. Например, в классической логике высказываний (в том виде, как эта теория построена в главе II), чтобы выяснить, является ли формула A ее законом, необходимо, в соответствии с определением тождественно-истинной формулы, построить таблицу истинности для A и установить, принимает ли эта формула значение "истина" во всех строках данной таблицы. Для ответа на вопрос, следует ли формула B из формул A_1, A_2, ..., A_n в классической логике высказываний, необходимо, согласно определению логического следования в этой теории, построить совместную таблицу истинности для формул A_1, A_2, ..., A_n и B и установить, имеется ли в данной таблице строка, в которой A_1, A_2, ..., A_n принимают значение "истина", а B — значение "ложь".

Отметим, что процесс построения таблиц истинности является *алгоритмическим*. Поэтому проверить, является ли произвольная формула логики высказываний ее законом (а также имеет ли место отношение логического следования между A_1, A_2, ..., A_n и B), можно *в конечное число шагов*. Логические теории, законы которых могут быть установлены с помощью подобной эффективной процедуры, называются *разрешимыми*.

Логическая теория называется разрешимой, если существует эффективная процедура (алгоритм), позволяющая для любой формулы языка данной теории в конечное число шагов решать вопрос о том, является ли эта формула законом теории или нет.

Очевидно, что *классическая логика высказываний разрешима*, причем эффективный характер имеет та процедура, которая указана в определениях логического закона и логического следования при табличном построении этой теории.

Иначе обстоит дело с классической логикой предикатов. Определения закона этой теории и логического следования в ней не являются эффективными, то есть не содержат алгоритма решения вопросов об общезначимости произвольной формулы A и о наличии отношения следования между произвольными формулами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и B.

Действительно, для того чтобы установить общезначимость формулы A, в соответствии с определением общезначимой формулы, необходимо рассмотреть все модели и все возможные приписывания значений предметным переменным и убедиться, что в каждом случае A принимает значение "истина". Для того чтобы показать, что $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$, согласно определению логического следования, нужно рассмотреть все модели и все приписывания и удостовериться, что среди них нет таких, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ принимали бы значение "истина", а B — значение "ложь". Однако подобный перебор всех моделей и приписываний невозможен в силу того, что их число бесконечно (в отличие от числа строк любой таблицы истинности).

Более того, никакого алгоритма решения вопросов об общезначимости формул языка логики предикатов и о наличии между ними отношения логического следования не существует в принципе, то есть *классическая логика предикатов неразрешима*. Таким образом, решения указанных вопросов представляют собой творческую задачу.

Вместе с тем в современной логике разработан ряд методов, позволяющих упростить, сделать стандартной и, насколько это возможно, эффективной процедуру обоснования общезначимости формул и наличия следования между формулами языка логики предикатов. Один из них, получивший название *метода аналитических таблиц*, будет рассмотрен в данном параграфе.

Идея указанного метода состоит в том, что тезис об общезначимости формулы A и тезис о следовании формулы B из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обосновываются посредством *рассуждения от противного*. Так, для обоснования тезиса "$\models A$" (формула A истинна в каждой модели при каждом приписывании) показывают, что допущение ложности формулы A с необходимостью приводит к противоречию. Для обоснования тезиса "$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$" (не существует модели и приписывания, при которых $A_1, A_2, \ldots, A_n$ истинны, а B ложно) показывают, что допущение истинности $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и ложности B с необходимостью приводит к противоречию.

Рассуждение от противного, обосновывающее какой-либо из указанных тезисов, оформляется в виде некоторой последовательности шагов, которая образует *аналитическую таблицу*. Причем каждому шагу рассуждения соответствует некоторая строка этой таблицы.

Любая строка аналитической таблицы содержит один или несколько списков формул (различные списки формул будем разделять вертикальными линиями). Наличие какой-либо формулы C в некотором списке соответствует утверждению об истинности C, а наличие $\neg$C — утверждению о ложности C.

Первая строка таблицы, соответствующая первому шагу рассуждения от противного, содержит один список формул, выражающий исходное допущение данного рассуждения, то есть антитезис. Если тезисом является "$\models$ A", то этот список содержит единственную формулу — $\neg$A, выражающую допущение о ложности A. Если же тезисом является "$A_1, A_2, \dots, A_n \models B$", то список в первой строке таблицы состоит из формул $A_1, A_2, \dots, A_n, \neg B$, то есть выражает допущение об истинности $A_1, A_2, \dots, A_n$ и ложности B.

Переход от какой-либо строки аналитической таблицы (строки с номером n) к следующей строке (строке с номером $n + 1$) осуществляется с помощью точных формальных правил, которые называются *правилами редукции*. В основе правил редукции лежат логические смыслы пропозициональных связок &, $\vee$, $\supset$, $\neg$ и кванторов $\forall$, $\exists$. Данные правила выражают, по существу, условия истинности и ложности формул вида (A & B), ($A \vee B$), ($A \supset B$), $\neg$A, $\forall\alpha$A, $\exists\alpha$A, указывая на те следствия, которые могут быть получены из факта истинности или ложности формул приведенных типов. Каждое правило редукции позволяет заменять на n+1-м шаге какой-либо из списков формул в строке с номером n на один или два новых формульных списка.

Цель рассуждения от противного — показать, что исходное допущение (антитезис) с необходимостью приводит к противоречию. Поэтому задача, которая решается построением аналитической таблицы, состоит в получении такой строки, каждый формульный список которой содержит некоторую формулу C вместе с ее отрицанием $\neg$C, то есть одновременно утверждает как истинность, так и ложность C. При получении данного результата тезис об общезначимости формулы A или же о следовании B из $A_1, A_2, \dots, A_n$ считается обоснованным.

В целях простоты изложения применение метода аналитических таблиц будет ограничено замкнутыми формулами, то есть формулами, не содержащими свободных переменных. Иначе говоря, аналитические таблицы будут строиться для обоснования тезисов "$\models$ A" и "$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$" лишь в случаях, когда A, A_1, A_2, ..., A_n, B являются замкнутыми формулами. Это условие никоим образом не ограничивает возможность обоснования логической истинности высказываний естественного языка и демонстрации правильности умозаключений. Действительно, посылками и заключениями в умозаключениях являются высказывания, а логические формы высказываний в языке логики предикатов выражаются именно замкнутыми формулами.

Осуществим теперь строгую формулировку аналитико-табличной процедуры.

Правила редукции

Правило [&]. Предположим, что в строке с номером n в каком-либо из списков формул содержится формула A & B, то есть данный список имеет вид: Г, A & B, Δ, где Г — последовательность (возможно, пустая) формул, предшествующих A & B, а Δ — последовательность (возможно, пустая) формул, следующих за A & B.

Наличие A & B в данном списке выражает утверждение об истинности этой формулы. Как известно, конъюнктивная формула A & B истинна тогда и только тогда, когда истинными являются ее подформулы A и B. Поэтому можно заменить A & B в нашем списке на две формулы A и B. Правило [&] позволяет в строке с номером $n + 1$ поместить вместо списка Г, A & B, Δ новый список, Г, A, B, Δ, сохранив при этом все другие списки формул из строки с номером n. Сокращенная формулировка данного правила выглядит следующим образом:

$$[\&] \qquad \frac{\Gamma,\ A \ \&\ B,\ \Delta}{\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta.}.$$

Правило [¬&]. Пусть в некотором списке формул n-ной строки содержится ¬(A & B), то есть этот список имеет вид: Г, ¬(A & B), Δ. Формула ¬(A & B) выражает утверждение о ложности A & B. Напомним, что конъюнктивная формула ложна, если и только если A принимает значение "ложь" или B принимает значение "ложь". Иначе говоря, в случае ложности A & B имеем две возможности: 1) случай, когда ложно A, 2) случай, когда ложно B. Поэтому в строке с номером n+1 вместо списка Г, ¬(A & B), Δ помещаются два новых списка формул: Г, ¬A, Δ (он соответствует первому случаю) и Г, ¬B, Δ (он соответствует второму случаю):

$$[\neg\&] \quad \frac{\Gamma, \neg(A \,\&\, B), \Delta}{\Gamma, \neg A, \Delta \mid \Gamma, B, \Delta}.$$

Все другие формульные списки из строки n переносятся в строку $n+1$. То же самое происходит и при применении других правил редукции, поэтому данный прием в дальнейшем оговариваться не будет.

Правило [∨]. Наличие формулы $A \lor B$ в некотором списке формул строки n означает утверждение об истинности $A \lor B$. Данная формула истинна, если и только если A принимает значение "истина" или B принимает значение "истина". Поэтому в строке $n+1$ после применения правила [∨] должны быть рассмотрены обе эти возможности:

$$[\lor] \quad \frac{\Gamma, A \lor B, \Delta}{\Gamma, A, \Delta \mid \Gamma, B, \Delta}.$$

Правило [¬∨]. Наличие формулы $\neg(A \lor B)$ в некотором списке означает утверждение о ложности $A \lor B$. Данная формула ложна, если и только если как A, так и B принимают значение "ложь". Поэтому $\neg(A \lor B)$ может быть заменена формулами $\neg A$ и $\neg B$.

$$[\neg\lor] \quad \frac{\Gamma, \neg(A \lor B), \Delta}{\Gamma, \neg A, \neg B, \Delta}.$$

Правило [⊃]. Предположим, что в строке с номером n имеется список, содержащий импликативную формулу: $\Gamma, A \supset B, \Delta$. Формула $A \supset B$ истинна, если и только если имеет место по крайней мере один из двух случаев: 1) A принимает значение "ложь" или 2) B принимает значение "истина". Поэтому вместо списка $\Gamma, A \supset B, \Delta$ в строку $n+1$ помещаются два списка: $\Gamma, \neg A, \Delta$ (он соответствует случаю ложности A) и Γ, B, Δ (он соответствует случаю истинности B):

$$[\supset] \quad \frac{\Gamma, A \supset B, \Delta}{\Gamma, \neg A, \Delta \mid \Gamma, B, \Delta}.$$

Правило [¬⊃]. Пусть некоторый список формул включает формулу $\neg(A \supset B)$, то есть содержит утверждение о ложности $A \supset B$. Эта формула принимает значение "ложь", если и только если A истинно, а **B** — ложно. Поэтому формулу $\neg(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ можно заменить формулами **A** и $\neg\mathbf{B}$:

$$[\neg\supset] \qquad \frac{\Gamma,\ \neg(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}),\ \Delta}{\Gamma,\ \mathbf{A},\ \neg\mathbf{B},\ \Delta}.$$

Правило $[\neg\neg]$. Наличие формулы $\neg\neg\mathbf{A}$ в некотором списке означает утверждение о ложности $\neg\mathbf{A}$. Поскольку ложность $\neg\mathbf{A}$ равносильна истинности **A**, формула $\neg\neg\mathbf{A}$ может быть заменена на **A**:

$$[\neg\neg] \qquad \frac{\Gamma,\ \neg\neg\mathbf{A},\ \Delta}{\Gamma,\ \mathbf{A},\ \Delta}.$$

Правило $[\forall]$. Предположим, что в строке с номером n имеется список вида Γ, $\forall\alpha\mathbf{A}$, Δ. Наличие в нем формулы $\forall\alpha\mathbf{A}$ означает утверждение об истинности $\forall\alpha\mathbf{A}$. В соответствии с логическим смыслом квантора общности формула $\forall\alpha\mathbf{A}$ истинна, если и только если любой индивид предметной области удовлетворяет условию **A**. Поэтому в случае истинности $\forall\alpha\mathbf{A}$ истинной оказывается также любая формула вида $\mathbf{A}(\mathbf{t})$, которая является результатом замены всех свободных вхождений α в **A** на произвольный замкнутый терм **t**. Правило $[\forall]$ позволяет заменить список Γ, $\forall\alpha\mathbf{A}$, Δ на n+1-м шаге списком Γ, $\forall\alpha\mathbf{A}$, $\mathbf{A}(\mathbf{t})$, Δ для какого-то конкретного терма **t**. Формула $\forall\alpha\mathbf{A}$ сохраняется в указанном списке для того, чтобы в дальнейшем можно было повторным применением данного правила получать утверждения об истинности $\mathbf{A}(\mathbf{t}_1)$, $\mathbf{A}(\mathbf{t}_2)$, ... для термов, отличных от **t**. Итак, правило $[\forall]$ формулируется следующим образом:

$$[\forall] \qquad \frac{\Gamma,\ \forall\alpha\mathbf{A},\ \Delta}{\Gamma,\ \forall\alpha\mathbf{A},\ \mathbf{A}(\mathbf{t}),\ \Delta},$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ — результат замены всех свободных вхождений α в **A** на произвольный замкнутый терм **t**.

Правило $[\neg\forall]$. Пусть в строке с номером n имеется список формул вида Γ, $\neg\forall\alpha\mathbf{A}$, Δ. Этот список включает формулу $\neg\forall\alpha\mathbf{A}$, то есть содержит утверждение о ложности $\forall\alpha\mathbf{A}$. Ложность формулы $\forall\alpha\mathbf{A}$ означает существование объекта, не удовлетворяющего условию **A**. Введем в качестве имени этого объекта предметную константу **k**. Ясно, что, поскольку **k** не удовлетворяет условию **A**, формула **A(k)** — результат замены всех свободных вхождений α в **A** на **k** — оказывается ложной. Поэтому список **Г**, $\neg\forall\alpha$**A**, Δ может быть заменен на n+1-м шаге списком **Г**, ¬**A(k)**, Δ.

При этом требуют, чтобы константа **k** отсутствовала в списке **Г**, $\neg\forall\alpha$**A**, Δ. Содержательный смысл этого ограничения состоит в следующем. Если **k** входит в формулы указанного списка, то в принципе не исключается возможность того, что эти формулы содержат информацию об истинности **A(k)**. Тогда делать вывод, что именно объект **k** не удовлетворяет условию **A**, на основании того, что какой-то объект этому условию не удовлетворяет, было бы некорректно.

Таким образом, формулировка правила [¬∀] имеет следующий вид:

$$[\neg\forall] \qquad \frac{\Gamma,\ \neg\forall\alpha A,\ \Delta}{\Gamma,\ \neg A(k),\ \Delta},$$

где **A(k)** — результат замены всех свободных вхождений α в **A** на предметную константу **k**, которая не содержится в верхнем списке.

Правило [∃]. Пусть какой-то список формул включает формулу $\exists\alpha$**A**, то есть содержит утверждение об истинности $\exists\alpha$**A**. Согласно смыслу квантора ∃, истинность $\exists\alpha$**A** означает существование объекта, удовлетворяющего условию **A**. В качестве имени этого объекта вводится константа **k**. Ясно, что **A(k)** истинно в силу того, что **k** удовлетворяет условию **A**. Во избежание коллизий, подобных тем, которые возникали при формулировке правила [¬∀], требуют, чтобы **k** не содержалась в списке **Г**, $\exists\alpha$**A**, Δ. Правило [∃] позволяет заменить в этом списке формулу $\exists\alpha$**A** на **A(k)**:

$$[\exists] \qquad \frac{\Gamma,\ \exists\alpha A,\ \Delta}{\Gamma,\ A(k),\ \Delta},$$

где **A(k)** — результат замены всех свободных вхождений α в **A** на предметную константу **k**, которая не содержится в верхнем списке.

Правило [¬∃]. Предположим, что в строке с номером n имеется список формул **Г**, $\neg\exists\alpha$**A**, Δ. Наличие в нем формулы $\neg\exists\alpha$**A** говорит о ложности $\exists\alpha$**A**. Ложность формулы $\exists\alpha$**A** означает, что любой индивид предметной области не удовлетворяет условию **A**. Поэтому на $n+1$-м шаге мы можем пополнить рассматриваемый список формулой $\neg A(t)$, где t — произвольный замкнутый терм. При этом формула $\neg\exists\alpha A$ должна быть сохранена, чтобы имелась возможность в дальнейшем получать утверждения о ложности $A(t_1)$, $A(t_2)$, ... для термов, отличных от t.

$$[\neg\exists]\quad \frac{\Gamma,\ \neg\exists\alpha A,\ \Delta}{\Gamma,\ \neg\exists\alpha A,\ \neg A(t),\ \Delta},$$

где $A(t)$ — результат замены всех свободных вхождений α в A на произвольный замкнутый терм t.

Определение аналитической таблицы. Аналитической таблицей называется конечная или бесконечная последовательность строк I_1, I_2, ..., в которой каждая строка I_n содержит конечное число списков формул языка логики предикатов. Каждая последующая строка I_{n+1} получается из предшествующей I_n заменой какого-нибудь списка формул на один или два новых списка формул на основании некоторого правила редукции.

Понятие замкнутой аналитической таблицы. Список формул называется замкнутым, если в его составе имеется некоторая формула C и ее отрицание $\neg C$.

Аналитическая таблица называется замкнутой, если она содержит конечное число строк и каждый список формул, находящийся в последней строке таблицы, является замкнутым.

Критерии общезначимости формул и логического следования. Формула A общезначима ($\models A$), если и только если существует замкнутая аналитическая таблица, первая строка которой содержит единственный список формул, состоящий из одной формулы — формулы $\neg A$.

Из формул A_1, A_2, ..., A_n логически следует формула B (A_1, A_2, ..., $A_n \models B$), если и только если существует замкнутая аналитическая таблица, первая строка которой содержит единственный список формул, состоящий из формул A_1, A_2, ..., A_n, $\neg B$.

Точное описание аналитико-табличной процедуры завершено.

Прежде чем привести примеры построения аналитических таблиц, дадим ряд советов, облегчающих процесс обоснования указанным методом общезначимости формул и наличия между формулами отношения логического следования.

1. Правила редукции можно разделить на две группы. К первой относятся правила, применение которых не увеличивает числа

формульных списков в следующей строке таблицы; это правила [&], [¬∨], [¬⊃], [¬¬], [∀], [¬∀], [∃], [¬∃]. Ко второй группе относятся правила, применение которых увеличивает число формульных списков; это правила [¬&], [∨], [⊃]. Построение таблицы упростится, если правила второй группы применять только после того, как применены все возможные правила первой группы.

2. Среди правил первой группы в первую очередь следует применять так называемые *пропозициональные правила* — [&], [¬∨], [¬⊃], [¬¬], и только после этого применяются так называемые *кванторные правила* — [∀], [¬∀], [∃], [¬∃].

3. Среди кванторных правил сначала следует применять правила [¬∀] и [∃], которые требуют введения новых предметных констант, а затем — правила [∀] и [¬∃], не содержащие ограничений на терм t, подставляемый вместо подкванторной переменной. Причем в качестве t при применении правил [∀], [¬∃] к некоторому формульному списку следует выбирать какой-то из замкнутых термов, уже содержащихся в формулах этого списка, если таковые термы имеются. В противном случае в качестве t выбирается любой замкнутый терм.

Продемонстрируем сначала, каким образом применяются пропозициональные правила редукции. Обоснуем с использованием метода аналитических таблиц следующий тезис:

$$P(a) \vee Q(b),\ Q(b) \supset R(c) \models R(c) \vee P(a).$$

Первая строка таблицы содержит единственный список формул, выражающий антитезис — допущение об истинности первых двух формул и ложности третьей:

$$1.\ P(a) \vee Q(b),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg(R(c) \vee P(a)).$$

Первая формула списка имеет вид $A \vee B$, вторая — $A \supset B$, а третья — $\neg(A \vee B)$. Поэтому возможно применение одного из трех правил редукции — [∨], [⊃], [¬∨]. Поскольку применение правил [∨] и [⊃] приводит к увеличению числа формульных списков, а применение правила [¬∨] сохраняет их число, используем правило [¬∨]. Тогда вместо формулы $\neg(P(c) \vee P(a))$ во второй строке появятся две формулы — $\neg R(c)$ и $\neg P(a)$:

$$2.\ P(a) \vee Q(b),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a).$$

Применим теперь правило [∨]. В третьей строке возникнут тогда два формульных списка, причем $P(a)$ войдет в первый из них, а $Q(b)$ — во второй. Остальные формулы единственного списка строки 2 следует поместить в каждый из двух новых списков:

3. $P(a),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a) \mid Q(b),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a).$

Первый формульный список строки 3 является замкнутым, так как он содержит формулу $P(a)$ и ее отрицание $\neg P(a)$. Поэтому к данному списку нет необходимости применять в дальнейшем какие-либо правила редукции. В последующих строках таблицы он будет просто повторяться. Ко второму списку строки 3 можно применить лишь правило [$\supset$]. Тогда в строке 4 вместо данного списка образуется два новых списка, в одном из них будет помещена формула $\neg Q(b)$, а в другом — $R(c)$:

4.	$P(a),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a)$	$Q(b),\ \neg Q(b),\ \neg R(c),\ \neg P(a)$	$Q(b),\ R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a)$

Каждый из трех формульных списков строки 4 содержит некоторую формулу и ее отрицание: первый — $P(a)$ и $\neg P(a)$, второй — $Q(b)$ и $\neg Q(b)$, третий — $R(c)$ и $\neg R(c)$. Поэтому аналитическая таблица замкнута и исходный тезис считается обоснованным.

Общий вид построенной нами таблицы таков:

$$P(a) \vee Q(b),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg(R(c) \vee P(a))$$

——— [$\neg\vee$]

$$P(a) \vee Q(b),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a)$$

——— [$\vee$]

$$P(a),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a) \mid Q(b),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c)\ \neg P(a)$$

——— [$\supset$]

$P(a),\ Q(b) \supset R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a)$	$Q(b),\ \neg Q(b),\ \neg R(c),\ \neg P(a)$	$Q(b),\ R(c),\ \neg R(c),\ \neg P(a)$

Напротив горизонтальных линий, разделяющих строки таблицы, указаны правила редукции, применяемые при переходе от верхней строки к нижней.

Проиллюстрируем действие кванторных правил редукции на примере обоснования общезначимости формулы

$$\exists x \forall y R(x, y) \supset \forall y \exists x R(x, y).$$

В первую строку таблицы помещаем допущение о ложности указанной формулы:

$$1.\ \neg(\exists x\forall yR(x, y) \supset \forall y\exists xR(x, y)).$$

Поскольку единственная формула строки имеет вид $\neg(A \supset B)$, применяем правило [$\neg\supset$]:

$$2.\ \exists x\forall yR(x, y), \neg\forall y\exists xR(x, y).$$

Далее можно применить правило [$\exists$] либо правило [$\neg\forall$]. Каждое из них требует введения новой предметной константы, поэтому порядок их применения не существенен. Используем, например, правило [$\exists$]. Заменим свободные вхождения в $\forall yR(x, y)$ переменной x (стоящей за $\exists$ в формуле $\exists x\forall yR(x, y)$) на предметную константу a:

$$3.\ \forall yR(a, y), \neg\forall y\exists xR(x, y).$$

Теперь уже можно применить либо правило [$\forall$], либо [$\neg\forall$], но первое из них не требует введения новой константы. Поэтому применяем [$\neg\forall$]. Переменную y, стоящую за $\forall$ в формуле $\neg\forall y\exists xR(x, y)$, необходимо заменить константой, не встречающейся в единственном списке формул строки 3, то есть любой константой, кроме a. Заменим, например, y на b:

$$4.\ \forall yR(a, y), \neg\exists xR(x, b).$$

На следующем шаге можно использовать любое из правил [$\forall$] и [$\neg\exists$], так как они не требуют введения новых констант. Применим правило [$\forall$]. В результате должна сохраниться формула $\forall yR(a, y)$ и добавиться $R(a, t)$, где t — любой замкнутый терм. Поскольку в формульном списке строки 4 содержатся два замкнутых терма — константы a и b, какой-то из них нужно выбрать в качестве t. Нетрудно установить, что для достижения цели — получения в формульном списке формул вида C и $\neg C$ — в качестве t следует взять b:

$$5.\ \forall yR(a, y), R(a, b), \neg\exists xR(x, b).$$

Применим, наконец, правило [$\neg\exists$]. Тогда формула $\neg\exists xR(x,b)$ сохранится в списке и к нему добавится $\neg R(t, b)$, где t — произвольный замкнутый терм. Очевидно, что в качестве t следует взять константу a:

$$6.\ \forall y R(a, y),\ R(a, b),\ \neg\exists x R(x, b),\ \neg R(a, b).$$

Единственный формульный список строки 6 содержит формулу $R(a, b)$ вместе с ее отрицанием $\neg R(a, b)$, поэтому аналитическая таблица замкнута и формула $\exists x \forall y R(x, y) \supset \forall y \exists x R(x, y)$ общезначима.

Таким образом, построена следующая аналитическая таблица:

$$\begin{array}{ll}
\neg(\exists x \forall y R(x, y) \supset \forall y \exists x R(x, y)) & \\
\hline & [\neg\supset] \\
\exists x \forall y R(x, y),\ \neg\forall y \exists x R(x, y) & \\
\hline & [\exists] \\
\forall y R(a, y),\ \neg\forall y \exists x R(x, y) & \\
\hline & [\neg\forall] \\
\forall y R(a, y),\ \neg\exists x R(x, b) & \\
\hline & [\forall] \\
\forall y R(a, y),\ R(a, b),\ \neg\exists x R(x, b) & \\
\hline & [\neg\exists] \\
\forall y R(a, y),\ R(a, b),\ \neg\exists x R(x, b),\ \neg R(a, b) &
\end{array}$$

Итак, мы показали, как метод аналитических таблиц может применяться для обоснования общезначимости формул и наличия отношения логического следования. Возникает вопрос, может ли аналитико-табличная процедура быть использована для демонстрации необщезначимости формул и отсутствия логического следования между формулами.

В ряде случаев построенная аналитическая таблица может свидетельствовать о необщезначимости некоторой формулы A или о том, что из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не следует логически B. Это имеет место в том случае, когда первая строка таблицы включает единственный список, состоящий из формулы $\neg A$ (или из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B$), а сама таблица незамкнута, но содержит конечное число строк и к формульным спискам последней строки нельзя применить никакое правило редукции.

Рассмотрим в качестве примера аналитическую таблицу:

$$\frac{\neg(\exists x P(x) \supset \forall x P(x))}{\exists x P(x),\ \neg\forall x P(x)} [\neg\supset]$$

$$\frac{\exists x P(x),\ \neg\forall x P(x)}{P(a),\ \neg\forall x P(x)} [\exists]$$

$$\frac{P(a),\ \neg\forall x P(x)}{P(a),\ \neg P(b)} [\neg\forall]$$

Очевидно, что формульный список последней строки не содержит формул вида C и $\neg$C. Вместе с тем дальнейшее применение правил редукции невозможно. Поэтому, так как таблица начиналась с формулы $\neg(\exists x P(x) \supset \forall x P(x))$, она свидетельствует о необщезначимости формулы $\exists x P(x) \supset \forall x P(x)$.

Однако имеется и другая возможность. Аналитическая таблица, начинающаяся с формулы $\neg$A (или с формул $A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B$), на каждом шаге своего построения оказывается незамкнутой, но при этом остается возможность дальнейшего применения правил редукции. Указанная ситуация может возникнуть в силу специфики правил [$\forall$] и [$\neg\exists$], применение которых не устраняет из соответствующих списков формулы $\forall\alpha A$ и $\neg\exists\alpha A$ и поэтому может быть осуществлено многократно по отношению к одним и тем же формулам.

Подобная аналитическая таблица может получиться в двух случаях: 1) если она в принципе не может замкнуться, сколь долго бы мы ее ни строили, то есть когда A не является общезначимой формулой (или из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не следует B); 2) если таблица не замыкается по причине того, что тот, кто ее строит, неудачно использует правила [$\forall$] и [$\neg\exists$], а именно, применяя их, не находит нужной подстановки замкнутых термов. Напомним, что аналитико-табличная процедура не является алгоритмической, процесс выбора нужных подстановок термов вместо переменных носит творческий характер. Поэтому в описанной только что ситуации делать однозначный вывод о необщезначимости A (или отсутствии следования B из $A_1, A_2, \ldots, A_n$) нельзя.

Завершая рассмотрение классической логики предикатов первого порядка, приведем список схем наиболее важных законов этой логической теории — схем общезначимых формул.

1. *Законы удаления $\forall$ и введения $\exists$:*

$\forall\alpha A \supset A(t)$, $\qquad$ $A(t) \supset \exists\alpha A$,

где A(t) — результат замены всех свободных вхождений переменной α в формулу A на замкнутый терм t.

2. *Закон подчинения:*

$$\forall\alpha A \supset \exists\alpha A.$$

3. *Закон непустоты предметной области:*

$$\exists\alpha A \vee \exists\alpha\neg A.$$

4. *Законы пронесения и вынесения кванторов:*

$\forall\alpha(A \mathbin{\&} B) \equiv (\forall\alpha A \mathbin{\&} \forall\alpha B)$,
$\exists\alpha(A \mathbin{\&} B) \supset (\exists\alpha A \mathbin{\&} \exists\alpha B)$,
$\exists\alpha(A \mathbin{\&} B) \equiv (A \mathbin{\&} \exists\alpha B)$, если α не свободна в A,
$\exists\alpha(A \vee B) \equiv (\exists\alpha A \vee \exists\alpha B)$,
$(\forall\alpha A \vee \forall\alpha B) \supset \forall\alpha(A \vee B)$,
$\forall\alpha(A \vee B) \equiv (A \vee \forall\alpha B)$, если α не свободна в A,
$\forall\alpha(A \supset B) \supset (\forall\alpha A \supset \forall\alpha B)$,
$\forall\alpha(A \supset B) \equiv (A \supset \forall\alpha B)$, если α не свободна в A,
$\forall\alpha(A \supset B) \equiv (\exists\alpha A \supset B)$, если α не свободна в B,
$(\exists\alpha A \supset \exists\alpha B) \supset \exists\alpha(A \supset B)$,
$\exists\alpha(A \supset B) \equiv (A \supset \exists\alpha B)$, если α не свободна в A,
$\exists\alpha(A \supset B) \equiv (\forall\alpha A \supset B)$, если α не свободна в B,
$\exists\alpha(A \supset B) \equiv (\forall\alpha A \supset \exists\alpha B)$,
$(\exists\alpha A \supset \forall\alpha B) \supset \forall\alpha(A \supset B)$.

5. *Законы перестановки кванторов:*

$\forall\alpha\forall\beta A \equiv \forall\beta\forall\alpha A$,
$\exists\alpha\exists\beta A \equiv \exists\beta\exists\alpha A$,
$\exists\alpha\forall\beta A \supset \forall\beta\exists\alpha A$.

6. *Законы отрицания кванторов:*

$\neg\forall\alpha A \equiv \exists\alpha\neg A$,
$\neg\exists\alpha A \equiv \forall\alpha\neg A$.

7. *Законы взаимовыразимости кванторов:*

$\forall\alpha A \equiv \neg\exists\alpha\neg A$,
$\exists\alpha A \equiv \neg\forall\alpha\neg A$.

ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ ДЕДУКТИВНЫХ РАССУЖДЕНИЙ

§ 1. Классическое исчисление высказываний

Логику часто определяют как науку о рассуждениях. Действительно, исследование рассуждений, их видов и способов осуществления входит в число основных задач логики. Тем не менее рассмотренные до сих пор методы логического анализа касались проверки правильности или неправильности уже готовых рассуждений и не затрагивали вопроса о том, как они осуществляются. В данной главе будет описана процедура *дедуктивных рассуждений*. Кроме дедуктивных, существует еще одна разновидность рассуждений, называемых *правдоподобными*. Что представляют собой последние, обсуждается в главе VIII.

В общем случае под рассуждением понимают процедуру последовательного пошагового перехода от одних высказываний, принятых в качестве исходных, к другим высказываниям. Каждый шаг этого процесса осуществляется на основе некоторого правила, называемого *правилом вывода*. Последнее высказывание, полученное в данном процессе, называется *заключением* рассуждения. При этом к числу дедуктивных будем далее относить лишь те рассуждения, в которых между высказываниями, принятыми в качестве исходных, и заключением сохраняется отношение логического следования. Чтобы ответить теперь конкретно на вопрос, как строятся рассуждения дедуктивного типа, требуется развить некоторую специальную теорию — *теорию дедуктивных рассуждений*. Но перед этим кратко охарактеризуем основные виды *теорий*.

Дедукция является теоретическим способом познания окружающего нас мира. Поэтому процедуры дедукции используются в том случае, когда для получения некоторого нового знания недостаточно эмпирических познавательных приемов (наблюдений, экспериментов, измерений). В этом своем качестве дедукция широко используется уже в обыденной жизни: ведь мы часто пытаемся отстоять посредством того или иного рассуждения свою точку зрения, убедить в ее истинности своего собеседника, опровергнуть точку зрения оппонента и т.д., то есть пытаемся теоретически рассуждать. Однако наибольшее значение процедуры дедукции, как теоретического метода исследования имеют при построении научного (теоретического) знания.

В зависимости от степени проясненности (выявленности) дедуктивных связей между отдельными утверждениями (высказываниями) теорий различают несколько их типов. К первому типу относятся *содержательные теории*. В их составе дедукция если и используется, то лишь для связи некоторых отдельных положений теории. При этом исходные утверждения в рассуждениях представляют собой некоторые допущения, называемые *посылками*. Посылки не обязаны быть (и не всегда бывают) истинными, а потому любое предложение, которое дедуцируется с их использованием, считается не истинными, а *условно истинным*: заключительное предложение (заключение) истинно при условии, что посылки являются истинными. Подобный характер носят, например, рассуждения в обыденной жизни. Примерами содержательных теорий являются школьная арифметика, а также различного рода научные концепции, развиваемые в тех науках, в которых отсутствуют строго очерченные теории. Примерами логических содержательных теорий являются логики высказываний и предикатов, описанные в предыдущих главах.

Другой тип составляют *формализованные теории*. К их числу относятся теории, содержание которых взаимосвязанно и дедуктивно выводится из некоторых первоначально принятых исходных утверждений. Последние называются *аксиомами*, а сами теории носят название *аксиоматизированных теорий*. Примерами их являются: небесная механика Ньютона, теория относительности Эйнштейна, квантовая механика, геометрия Евклида. В отличие от геометрии Евклида, формализованной более 2 тысяч лет назад, арифметика вплоть до XX века развивалась как содержательная теория, и только на рубеже XIX—XX веков она была формализована итальянским математиком Пеано.

Так как аксиомы представляют собой истинные высказывания о некоторой предметной области, все другие положения, дедуцируемые из них, тоже считаются истинными.

Формализованные теории — это уже хорошо организованные теории. Однако их недостатком является то обстоятельство, что в них специально не выделяются средства дедукции, а потому многие дедуктивные шаги осуществляются на интуитивном уровне, что приводит, во-первых, к пропуску значительного числа шагов в рассуждениях, а во-вторых, к недостаточно четкой фиксации всех аксиом, необходимых для получения других положений. С этой точки зрения более совершенны *формальные теории* — теории, в которых оформляется (структурируется) не только само знание, но и средства его получения. К таким теориям относятся очень многие математические теории — теория множеств, формальная арифметика и другие.

Среди формальных особо можно выделить такие теории, содержание которых фиксируется на специально созданном символическом языке, а все допустимые преобразования (в том числе и рассуждения) строятся как преобразования одних последовательностей символов в другие их последовательности. Такого рода теории называются *исчислениями*. В данной главе как раз и будут построены две такие теории — *исчисление высказываний* и *исчисление предикатов первого порядка*.

И то и другое исчисления — это логические теории. Их задача — описание обычных процедур рассуждений, используемых в теоретической деятельности людей. Однако рассуждения, которые здесь будут строиться, не являются *содержательными*, так как они не представляют собой дедуцирования одних высказываний из других высказываний. Напротив, это будут *формальные рассуждения*, состоящие в выведении одних формул из других формул. Тем не менее каждое такое формальное рассуждение можно трактовать как *модель* различных содержательных рассуждений, имеющих ту же самую логическую структуру. Такая трактовка формальных рассуждений возможна благодаря тому, что формулы данных исчислений представляют собой *логические формы* высказываний.

Исчисления являются разновидностями формальных теорий. Однако ниже будут построены не аксиоматические, а так называемые *натуральные исчисления*. Последние будут содержать только правила вывода и не будут содержать аксиом. Такая переформулировка логических теорий позволяет снабдить каждого ученого, работающего в той или иной области конкретных наук, совокупностью правил, на основе которых можно осуществлять переход от одних содержательных утверждений (высказываний) к другим. А это чрезвычайно важно, ведь ученого, работающего в конкретной области знания, логика интересует прежде всего как наука, формулирующая законные правила преобразования одних высказываний в другие. С этой точки зрения в натуральных логических исчислениях более естественно (более натурально) излагается логическое содержание, необходимое для осуществления содержательных рассуждений.

Перейдем теперь к описанию *натурального исчисления высказываний*. С этой целью необходимо было бы прежде всего задать алфавит языка исчисления и определить в нем понятие правильно построенного выражения (формулы). Однако мы этого делать не будем, так как они полностью совпадут с алфавитом и понятием формулы логики высказываний и были уже введены в главе II. Такое совпадение не случайно. Фактически и в том и в другом случае имеют дело с одним и тем же языком. Но в логике высказываний строится содержательная (семантическая) теория, в которой формулируются понятия *логического закона* и *логического следования*. В исчислении же высказываний осуществляется попытка *формализации* данных понятий. С этой целью здесь вводятся синтаксические аналоги указанных понятий — понятие *теоремы* и понятие *выводимости*, а также вводятся дедуктивные принципы, позволяющие переходить от одних последовательностей символов к другим их последовательностям. И далее стараются показать, что, применяя дедуктивные принципы, можно любой логический закон получить в качестве теоремы исчисления, а в случае наличия логического следования $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ — можно обосновать выводимость выражения B из выражений $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если такой аппарат дедукции удается построить, то говорят, что осуществлена *формализация* содержательных понятий логического закона и логического следования.

Приступим к формулировке дедуктивных принципов исчисления — правил вывода. Предварительно укажем, что все правила вывода подразделяются на несколько основных типов. Они делятся на правила введения (будем помечать это индексом "в") и правила исключения (будем помечать это индексом "и") логических символов (констант). С другой стороны, все правила делятся на однопосылочные (над чертой пишется одна формула) и двухпосылочные (над чертой пишутся две формулы).

Правила вывода:

$\&_в$: $\dfrac{A, B}{A \& B}$ $\&_и$: $\dfrac{A \& B}{A}$, $\dfrac{A \& B}{B}$

$\vee_в$: $\dfrac{A}{A \vee B}$, $\dfrac{B}{A \vee B}$ $\vee_и$: $\dfrac{A \vee B, \neg A}{B}$

$\supset_в$: $\dfrac{B}{C \supset B}$, где C — последняя посылка $\supset_и$: $\dfrac{A \supset B, A}{B}$

$\neg_в$: $\dfrac{B, \neg B}{\neg C}$, где C — последняя посылка $\neg_и$: $\dfrac{\neg\neg A}{A}$

Каждое из правил вывода представляет собой формулировку *разрешения* нечто осуществить, а именно если даны формулы того вида, который указан выражениями, стоящими над чертой (*посылки правил*), то каждое правило разрешает записать после этого формулу того вида, который имеет выражение, стоящее под чертой (*заключение правила*).

Так, правило $\&_в$ (введение конъюнкции) является двухпосылочным. Оно позволяет, если даны произвольные две формулы **A** и **B**, объединить их в конъюнкцию — **A** & **B**. Пусть **A** будет формулой $(p \supset q)$, а **B** — $(r \vee \neg p)$, тогда, применяя к ним правило $\&_в$, можно получить формулу $(p \supset q) \& (r \vee \neg p)$.

Правила $\&_и$ (исключение конъюнкции) являются однопосылочными. Они позволяют, если дано конъюнктивное выражение вида **A** & **B**, выделить из него как *левый* член конъюнкции, так и *правый*. При применении сразу обоих правил конъюнкция "рассыпается" на составляющие ее члены.

Правила $\vee_в$ (введения дизъюнкции) являются тоже однопосылочными. Первое из них разрешает при наличии некоторой формулы **A** присоединить к ней дизъюнктивно *справа* любую (произвольную) формулу **B** и получить выражение вида **A** $\vee$ **B**. Например, пусть **A** — это формула $(p \supset q)$, тогда, применяя к ней рассматриваемое правило, можно получить любую формулу вида $(p \supset q) \vee$ **B**. Что это будет за конкретная формула, зависит от того, что взято в качестве формулы **B**. Правило же позволяет в качестве **B** брать любую (какую угодно) формулу. Аналогично второе правило разрешает при наличии некоторой формулы **B** присоединить к ней *слева* произвольную формулу **A** и получить выражение вида **A** $\vee$ **B**.

Правило $\vee_и$ (исключение дизъюнкции) является двухпосылочным. Действие по этому правилу состоит в том, что, имея дизъюнктивную формулу вида **A** $\vee$ **B** и имея формулу вида $\neg$**A**, которая является отрицанием (именно) *левого* члена дизъюнкции, нам разрешается перейти к формуле **B**, то есть выделить *правый* член дизъюнкции **A** $\vee$ **B**. Это хорошо известное правило *tollendo ponens*. Рассмотрим пример. Пусть **A** $\vee$ **B** есть формула $\neg p \vee (q \& r)$ и пусть $\neg$**A** есть формула $\neg\neg p$. Так как формула $\neg\neg p$ — это отрицание левого члена дизъюнкции **A** $\vee$ **B**, то по правилу $\vee_и$ можно получить формулу $(q \& r)$ — правый член данной дизъюнкции.

Правило $\supset_и$ (исключение импликации) тоже двухпосылочно. Как и предыдущее, оно позволяет отделить правый член (консеквент) импликации, но при других условиях, а именно если дана импликативная формула вида **A** $\supset$ **B** и дана формула **A**, совпадающая с антецедентом данной импликации. Это тоже хорошо известное правило *modus ponens*. Так, если $A \supset B$ — это формула $(p \supset q) \supset (q \,\&\, r)$ и A — это формула $(p \supset q)$, то по правилу $\supset_и$ можно получить формулу $(q \,\&\, r)$ — консеквент рассматриваемой импликации.

Правило $\neg_и$ (исключение отрицания) однопосылочно. Оно позволяет снимать два отрицания с любой формулы.

Особо остановимся на правилах $\supset_в$ (введение импликации) и $\neg_в$ (введение отрицания). Своеобразие этих правил состоит в том, что формула C в заключениях этих правил — не любое выражение, а последнее допущение (посылка) в некотором рассуждении. Таким образом, формулировка этих правил соотносит их с тем рассуждением, которое будет строиться.

Правило $\supset_в$ является однопосылочным. Оно позволяет по любой формуле B, содержащейся в рассуждении, перейти к импликации вида $C \supset B$, где на место антецедента ставится формула, которая в нашем рассуждении участвует в качестве последнего допущения, а на место консеквента помещается сама формула B.

Правило $\neg_в$ двухпосылочно и позволяет при обнаружении в рассуждении двух формул, противоречащих друг другу,— B и $\neg B$, перейти к формуле, которая является отрицанием последнего допущения,— $\neg C$.

При применении любого из правил необходимо иметь в виду, что логические константы, указанные в правилах, являются всегда главными знаками формул.

Посредством заданных правил можно строить формальные рассуждения двух видов — *выводы* и *доказательства*.

Выводом называется непустая конечная последовательность формул $C_1, C_2, \ldots, C_k$, удовлетворяющая условиям:

(1) каждая C_i есть либо посылка, либо получена из предыдущих формул по одному из правил вывода,

(2) если в выводе применялись правила $\supset_в$ или $\neg_в$, то все формулы, начиная с последней посылки и вплоть до результата применения данного правила, исключаются из дальнейших шагов построения вывода.

Последнее свойство (свойство исключенности некоторых формул из дальнейшего построения вывода) означает, что к данным формулам в дальнейших шагах уже нельзя более применять какие-либо правила. Эти формулы как бы "замораживаются" и изолируются в выводе. Для краткости будем их обозначать термином *исключенные формулы*, а ту посылку, которая при этом попадет в число исключенных формул, будем обозначать термином *исключенная посылка*. Тот факт, что некоторые формулы в выводе являются исключенными, будем обозначать вертикальной чертой. Как это конкретно делается, покажем далее на примерах.

Если дан вывод C_1, C_2, ..., C_k, то есть дана последовательность формул, удовлетворяющая условиям (1) и (2), и если неисключенными посылками являются формулы A_1, A_2, ..., A_n и последняя формула последовательности C_k графически совпадает с формулой B, то есть является формулой B, то про данную последовательность говорят, что она является выводом формулы B из посылок A_1, A_2, ..., A_n. Этот факт обозначается посредством записи $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$ (читается: "из посылок A_1, A_2, ..., A_n выводимо B"), где "$\vdash$" — *знак выводимости*.

Если множество формул Г содержит каждую из формул A_1, A_2, ..., A_n, то в логике принято считать, что последовательность формул C_1, C_2, ..., C_k является также и выводом формулы B из множества формул Г, что обозначается записью $\Gamma \vdash B$.

Доказательство есть вывод из пустого множества неисключенных посылок. Последняя формула в доказательстве называется доказанной формулой или теоремой.

Пусть имеется вывод C_1, C_2, ..., C_k, являющийся доказательством, и пусть C_k графически совпадает с формулой B. Будем тогда говорить, что данная последовательность есть доказательство формулы B. Этот факт обозначается посредством записи $\vdash B$ (читается: "B — теорема").

Выводы далее будем строить в виде последовательностей записанных друг под другом формул. Каждая формула такой последовательности нумеруется натуральными числами, которые используются в выводе как имена соответствующих формул. С каждой формулой связывается некоторая характеристика — ее анализ. Под анализом формулы имеется в виду указание того, на каком основании эта формула появилась в выводе. Напомним, что, согласно определению вывода, таких оснований может быть только два: либо формула является посылкой, либо она получена из предыдущих по некоторому правилу вывода.

Покажем теперь, что представляют собой вывод и доказательство на некоторых примерах. Допустим, что требуется обосновать метаутверждение о выводимости формулы r из посылок $p \supset q$, $q \supset r$ и p, то есть обосновать метаутверждение: $p \supset q, q \supset r, p \vdash r$. Для этого необходимо построить вывод, в котором последняя формула графически совпадала бы с формулой r, а посылками оказались бы в точности формулы $p \supset q$, $q \supset r$ и p. Такая последовательность может быть построена, ею является, например, следующая последовательность:

1. $p \supset q$ — пос.
2. $q \supset r$ — пос.

3. p — пос.
4. q — $\supset_и$, 1,3
5. r — $\supset_и$, 2,4

Действительно, из анализа этой последовательности видно, что она удовлетворяет условиям (1) и (2) понятия вывода, а потому является выводом. Далее, последняя формула графически совпадает с r, а неисключенными посылками являются в точности формулы $p \supset q$, $q \supset r$ и p. Таким образом построен вывод, существование которого как раз и обосновывает метаутверждение о выводимости: $p \supset q, q \supset r, p \vdash r$.

Рассмотрим теперь другую последовательность формул, обосновывающую метаутверждение о выводимости $\vdash (p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$, то есть метаутверждение о том, что формула, стоящая справа от знака выводимости, является теоремой. Такой последовательностью будет, например, следующая последовательность.

1. $p \supset q$ — пос.
2. $q \supset r$ — пос.
3. p — пос.
4. q — $\supset_и$, 1,3
5. r — $\supset_и$, 2,4
6. $(p \supset r)$ — $\supset_в$, 5
7. $(q \supset r) \supset (p \supset r)$ — $\supset_в$, 6
8. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ — $\supset_в$, 7

Анализ показывает, что последовательность удовлетворяет условиям (1) и (2) понятия вывода, а потому является выводом. Последняя формула графически совпадает с той формулой, которую необходимо было получить в заключении. Кроме того, все посылки исключены, а потому множество неисключенных посылок пусто. Поэтому данная последовательность является доказательством формулы $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$. Тем самым обосновано, что данная формула является теоремой.

При сравнении этой последовательности с предыдущей легко видеть, что первые 5 шагов у них одинаковы. Если бы доказательство формулы $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ было прервано на 5-м шаге, то, как и первом случае, обосновывалась бы лишь выводимость вида $p \supset q, q \supset r, p \vdash r$. Однако вывод был продолжен и мы перешли к 6-му шагу. На этом шаге применялось правило $\supset_в$ к формуле 5. Согласно этому правилу, разрешается получить формулу $C \supset B$, где C — последняя посылка, а B — 5-я формула. Именно такого вида формула и записана на 6-м шаге. В понятии вывода указано, что при применении правила $\supset_в$ из дальнейших шагов вывода исключаются все формулы, начиная с последней посылки и вплоть до результата применения этого правила, то есть в нашем случае с 3-й до 6-й формул. Этот факт отмечен в выводе чертой, начинающейся с 3-й формулы и оконченной на 5-й формуле.

Если бы вывод был "оборван" на 6-м шаге, то тем самым была бы обоснована выводимость вида $p \supset q, q \supset r \vdash p \supset r$. Но вывод был продолжен далее, и на 7-м шаге, применяя правило $\supset_в$ к 6-й формуле, вновь можно получить формулу $C \supset B$, где C — последняя посылка (теперь, после исключения из числа посылок формулы p, таковой стала формула $q \supset r$), а B — 6-я формула. При применении правила $\supset_в$ необходимо исключить из участия в дальнейших шагах вывода все формулы, начиная с последней посылки и вплоть до результата применения этого правила, то есть со 2-й до 7-й. Если бы вывод закончился на 7-м шаге, то была бы обоснована выводимость $p \supset q \vdash (q \supset r) \supset (p \supset r)$. На последнем, 8-м, шаге аналогичным образом, применяя $\supset_в$ к 7-й формуле, исключаем последнюю посылку и получаем обоснование выводимости из пустого множества посылок формулы $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$.

Одну и ту же выводимость можно обосновывать посредством различных последовательностей. Важно лишь одно, чтобы неисключенными посылками были те формулы, которые присутствуют в качестве посылок в метаутверждении о выводимости, а последняя формула в выводе графически совпала с заключением данного метаутверждения. Так, например, нижеследующая последовательность тоже является доказательством формулы $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$.

1. $p \supset q$ — пос.
2. $q \supset r$ — пос.
3. p — пос.
4. $\neg r$ — пос.
5. q — $\supset_и$, 1,3
6. r — $\supset_и$, 2,5
7. $\neg\neg r$ — $\neg_в$, 4,6
8. r — $\neg_и$, 7
9. $p \supset r$ — $\supset_в$, 8
10. $(q \supset r) \supset (p \supset r)$ — $\supset_в$, 9
11. $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ — $\supset_в$, 10

Данная последовательность отличается от предыдущей тем, что на 4-м шаге берется еще одна посылка — формула $\neg r$. Осуществляя шаги вывода, на 6-м шаге получили формулу r, которая противоречит 4-й формуле, то есть в выводе появились две формулы вида B и $\neg$B. Это позволяет применить к ним правило $\neg_в$. Согласно этому правилу, при наличии противоречия можно поместить в вывод формулу $\neg$C, где C — последняя посылка. Так как последней посылкой является 4-я формула — $\neg r$, то необходимо записать отрицание этой формулы, то есть записать формулу $\neg\neg r$. Именно эта формула и записана на 7-м шаге. Кроме того, при применении правила $\neg_в$, согласно понятию вывода, необходимо исключить из участия в дальнейших шагах все формулы, начиная с последней посылки и вплоть до результата применения этого правила, что и показано чертой. На 8-м шаге к 7-й формуле применялось правило $\neg_и$, которое позволяет снять два знака отрицания и получить формулу r. Дальнейшие шаги вывода в точности повторяют шаги предыдущего доказательства и состоят в последовательном исключении оставшихся посылок применением правила $\supset_в$.

Рассмотрим еще один пример доказательства. Попытаемся обосновать, что формула $(p \vee q) \supset (q \vee p)$ выводима из пустого множества неисключенных посылок. Обосновывающей будет следующая последовательность.

1. $p \vee q$ — пос.
2. $\neg (q \vee p)$ — пос.
3. $\neg p$ — пос.
4. q — $\vee_и$, 1,3
5. $q \vee p$ — $\vee_в$, 4
6. $\neg\neg p$ — $\neg_в$, 2, 5
7. p — $\neg_и$, 6
8. $q \vee p$ — $\vee_в$, 7
9. $\neg\neg(q \vee p)$ — $\neg_в$, 2,8
10. $q \vee p$ — $\neg_и$, 9
11. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$ — $\supset_в$, 10

Анализ показывает, что данная последовательность представляет собой доказательство формулы $(p \vee q) \supset (q \vee p)$. В доказательстве в качестве посылок были взяты формулы 1, 2, 3. Из этих формул на 5-м шаге была получена формула $q \vee p$, которая противоречит формуле 2. Последнее означает, что получено противоречие. Это позволяет применить правило $\neg_в$, согласно которому в выводе можно записать отрицание последней посылки. Тем самым получаем 6-ю формулу — $\neg\neg p$. При этом из дальнейших шагов вывода исключаются формулы, с 3-й по 5-ю. Действуя далее, на 8-м шаге вновь получаем формулу, противоречащую 2-й формуле. Это дает возможность по правилу $\neg_в$ исключить еще одну посылку. Продолжая вывод, на 11-м шаге применением правила $\supset_в$ исключаем последнюю посылку. Тем самым доказательство требуемого заключения завершено.

Построение выводов и доказательств является творческой задачей. Она состоит в нахождении нужной последовательности формул, если речь идет о формальном выводе, или нахождении нужной последовательности содержательных утверждений, если речь идет о построении содержательного вывода. В частности, творческой задачей является и поиск посылок, с которых начинается вывод в том случае, когда обосновывается метаутверждение о выводимости некоторой формулы из пустого их множества. Обычно указывают, что в качестве посылок можно брать любые формулы. И это действительно так, но с одной оговоркой: необходимо в дальнейших шагах вывода, применяя правила, суметь исключить из него все лишние посылки.

Чтобы выбор нужных для вывода посылок не был случайным и не носил характера простого перебора различных возможностей, можно сформулировать некоторые эвристические приемы, которые будем называть далее эвристиками. *Эвристика* — это то, что позволяет уменьшить число переборов.

Пусть посредством построения вывода требуется обосновать метаутверждение о выводимости вида:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash (C_1 \supset (C_2 \supset \ldots \supset (C_m \supset B) \ldots)).$$

Тогда в качестве посылок необходимо, конечно же, взять формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, которые уже предложены нам как посылки. Далее выбор дополнительных посылок осуществляется по следующим эвристикам.

1-я эвристика. Рассматривается формула, стоящая справа от знака выводимости и являющаяся целью вывода, то есть эту формулу требуется вывести из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если данная формула импликативная, то есть "распадается" на антецедент и консеквент, то антецедент данной импликации берется в качестве дополнительной посылки, а целью становится выведение консеквента. В нашем случае справа от знака "$\vdash$" стоит формула

$$(C_1 \supset^* (C_2 \supset \ldots \supset (C_m \supset B) \ldots)),$$

в которой для ясности ее структуры главный знак помечен звездочкой. Применяя теперь первую эвристику, заключаем, что к формулам $A_1, A_2, \ldots, A_n$ надо присоединить в качестве дополнительной посылки формулу C_1, а в качестве цели вывода взять формулу

$$(C_2 \supset^* \ldots \supset (C_m \supset B) \ldots),$$

в которой вновь для ясности ее структуры главный знак помечен звездочкой.

После этого вновь применяем 1-ю эвристику, но теперь уже к формуле $(C_2 \supset \ldots \supset (C_m \supset B) \ldots)$ и так продолжаем действовать до тех пор, пока целью нашей не станет формула, которая уже не имеет вида импликации. Пусть такой формулой будет **B**. Тогда можно попытаться осуществить выводимости вида:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, C_1, C_2, \ldots, C_m \vdash B.$$

Формула **B** в этом случае является *целью*, к которой надо стремиться при осуществлении вывода из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Если этой цели удается достигнуть, то, применяя последовательно правило $\supset_b$ для исключения дополнительных посылок, можно получить и обоснование вывода вида:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash (C_1 \supset (C_2 \supset \ldots \supset (C_m \supset B) \ldots)).$$

Вывод, в котором при выборе посылок использовалась не более чем 1-я эвристика, называется прямым выводом. Это означает, что под *прямым выводом* понимается любой вывод, в котором не применялось правило $\neg_в$. Отметим, что именно 1-я эвристика была применена для выбора дополнительных посылок при построении первого доказательства формулы $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$.

1-я эвристика является мощным средством упрощения процедуры поиска нужных посылок для вывода, однако она во многих случаях недостаточна. Поэтому ниже формулируется еще одна эвристика, которая применяется после применения 1-й эвристики.

2-я эвристика. Итак, последовательное применение 1-й эвристики позволило дойти до формулы **B**, которая уже не является импликативной формулой, и взять ее в качестве цели вывода. Именно эту формулу надо стремиться получить из посылок A_1, $A_2, \ldots, A_n, C_1, C_2, \ldots, C_m$. Если такой вывод не удается сделать, то в качестве еще одной дополнительной посылки следует взять отрицание формулы B. Общий список посылок в этом случае выглядит следующим образом:

$$A_1, A_2, \dots, A_n, C_1, C_2, \dots, C_m, \neg B.$$

Целью вывода теперь становится получение в его составе противоречия, то есть получения в выводе двух формул вида D и ¬D. Если это удается сделать, то, применяя правило $\neg_в$, можно получить в выводе формулу ¬¬B, исключив при этом дополнительную посылку ¬B. Применяя далее правило $\neg_и$, можно получить формулу B и тем самым обосновать выводимость:

$$A_1, A_2, \dots, A_n, C_1, C_2, \dots, C_m \vdash B.$$

После этого, применяя нужное число раз правило $\supset_в$, можно получить и требуемый вывод вида:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash (C_1 \supset (C_2 \supset \dots \supset (C_m \supset B) \dots)).$$

Вывод, в котором применяется правило $\neg_в$, называется косвенным выводом, или выводом от противного. Так, во втором приведенном выше примере обоснования утверждения $\vdash (p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ был как раз применен метод построения вывода от противного, основанный на использовании 2-й эвристики. Отметим, что в логике можно доказать утверждение, согласно которому все, что обосновывается посредством прямого вывода, может быть обосновано и посредством косвенного вывода.

К числу приведенных двух эвристик можно было бы добавить и ряд других эвристических приемов. Не расширяя, однако, значительно этот список, укажем лишь еще на одну эвристику. Она применяется после применения 1-й и 2-й эвристик и касается дизъюнктивных формул.

3-я эвристика. Если в выводе имеется дизъюнктивная формула $A \vee B$ (может быть, входящая в состав более сложного выражения), то имеются следующие варианты выбора частей этой формулы в качестве дополнительных посылок: или A, или B, или A и B, или ¬A, или ¬B, или ¬A и ¬B. В данном случае выбор дополнительных посылок неоднозначен и требует творческой проработки каждого из вариантов. Так как данная эвристика применяется после 2-й эвристики, целью вывода остается получение противоречия. Именно используя данную эвристику в примере с доказательством формулы $(p \vee q) \supset (q \vee p)$, мы выбрали в качестве 3-й посылки формулу ¬p.

Приведем еще несколько примеров выводов и доказательств с дополнительным указанием эвристик, которые применялись при выборе посылок.

$p \supset q,\ r \supset s \vdash (\neg q \vee \neg s) \supset (\neg p \vee \neg r)$

1. $p \supset q$ — пос.
2. $r \supset s$ — пос.
3. $\neg q \vee \neg s$ — пос. (эвристика 1)
4. $\neg(\neg p \vee \neg r)$ — пос. (эвристика 2)
5. $\neg p$ — пос. (эвристика 3 к формуле 4)
6. $\neg p \vee \neg r$ — $\vee_{\text{в}}$, 5
7. $\neg\neg p$ — $\neg_{\text{в}}$, 4, 6
8. p — $\neg_{\text{и}}$, 7
9. q — $\supset_{\text{и}}$, 1, 8
10. $\neg r$ — пос. (эвристика 3 к формуле 4)
11. $\neg p \vee \neg r$ — $\vee_{\text{в}}$, 10
12. $\neg\neg r$ — $\neg_{\text{в}}$, 4, 11
13. r — $\neg_{\text{и}}$, 12
14. s — $\supset_{\text{и}}$, 2, 13
15. $\neg q$ — пос. (эвристика 3 к формуле 3)
16. $\neg\neg q$ — $\neg_{\text{в}}$, 9, 15
17. $\neg s$ — $\vee_{\text{и}}$, 3, 16
18. $\neg\neg(\neg p \vee \neg r)$ — $\neg_{\text{в}}$, 14, 17
19. $\neg p \vee \neg r$ — $\neg_{\text{и}}$, 18
20. $(\neg q \vee \neg s) \supset (\neg p \vee \neg r)$ — $\supset_{\text{в}}$, 19

$\vdash p \supset p$

1. p — пос. (эвристика 1)
2. $p \supset p$ — $\supset_{\text{в}}$, 1

$\vdash (p \,\&\, q) \supset \neg(\neg p \vee \neg q)$

1. $p \,\&\, q$ — пос. (эвристика 1)
2. $\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$ — пос. (эвристика 2)
3. p — $\&_{\text{и}}$, 1
4. q — $\&_{\text{и}}$, 1
5. $\neg p \vee \neg q$ — $\neg_{\text{и}}$, 2
6. $\neg p$ — пос. (эвристика 3 к формуле 5)
7. $\neg\neg p$ — $\neg_{\text{в}}$, 3, 6
8. $\neg q$ — $\vee_{\text{и}}$, 5, 7
9. $\neg\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$ — $\neg_{\text{в}}$, 4, 8
10. $\neg(\neg p \vee \neg q)$ — $\neg_{\text{и}}$, 9
11. $(p \,\&\, q) \supset \neg(\neg p \vee \neg q)$ — $\supset_{\text{в}}$, 10

В последнем примере в качестве второй посылки можно было бы взять не формулу $\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$, а формулу $(\neg p \vee \neg q)$, что несколько сократило бы вывод. Вообще если после применения первой эвристики целью вывода стало получение формулы вида $\neg B$, то в качестве дополнительной посылки, берущейся по 2-й эвристике, можно взять не формулу $\neg\neg B$, а формулу B.

Используя табличный метод установления для формул пропозициональной логики отношения логического следования, можно показать, что в основе всех принятых в данном исчислении правил лежат отношения логического следования. Это означает, что, например, в основе правила $\&_в$: $A, B \vdash A \& B$ лежит отношение логического следования вида $A, B \models A \& B$, в основе правила $\supset_в$: $B \vdash C \supset B$ лежит отношение логического следования вида $B \models C \supset \supset B$ и т.д. Это говорит о том, что принятые в натуральном исчислении высказываний правила при содержательном их применении в конкретных науках гарантируют всегда получение истинных заключений, если выбранные посылки являются истинными утверждениями.

Вообще для построенного здесь исчисления можно обосновать следующее метаутверждение:

$A_1, \ldots, A_n \vdash B$ тогда и только тогда, когда $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Это говорит о том, что данное исчисление адекватно формализует содержательное отношение логического следования логики высказываний, а тем самым оно формализует и содержательное понятие логического закона. Таким образом, дедуктивные средства, используемые в исчислении, хорошо обоснованы, и мы можем им полностью доверять.

§ 2. Классическое исчисление предикатов первого порядка

Логические средства, используемые в исчислении высказываний для построения рассуждений, являются слишком бедными, чтобы с их помощью можно было описать все многообразие различных приемов, применяемых в процедурах дедукции в конкретных науках и повседневной жизни. Эти средства ограничены бедностью языка исчисления высказываний, в котором простые предложения трактуются как не имеющие внутренней структуры. С этой точки зрения язык исчисления предикатов обладает гораздо большими выразительными возможностями и позволяет анализировать и изучать такие рассуждения, которые зависят от внутренней структуры простых предложений.

Так как язык исчисления предикатов совпадает с языком логики предикатов, который был описан в предыдущей главе, перейдем сразу же к формулировке дедуктивной части исчисления.

В исчислении предикатов сохраняются все правила вывода исчисления высказываний, но к ним теперь надо присоединить новые правила, позволяющие оперировать с кванторами.

Кванторные правила вывода:

$$\forall_{в}: \quad \frac{A(\alpha/\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)}{\forall\alpha A(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)}, \qquad \text{где } \beta \text{ — абс. огр., } \gamma_1, \ldots, \gamma_n \text{ — огр.}$$

$$\forall_{и}: \quad \frac{\forall\alpha A(\alpha)}{A(\alpha/t)}$$

$$\exists_{в}: \quad \frac{A(\alpha/t)}{\exists\alpha A(\alpha)}$$

$$\exists_{и}: \quad \frac{\exists\alpha A(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)}{A(\alpha/\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)}, \qquad \text{где } \beta \text{ — абс. огр., } \gamma_1, \ldots, \gamma_n \text{ — огр.}$$

Для понимания этих правил требуется прежде всего разъяснить, что в их формулировке означает выражение вида $A(\alpha/t)$, а также частный случай этого выражения — $A(\alpha/\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$.

Под выражением $A(\alpha/t)$ имеется в виду результат правильной подстановки в формулу $A(\alpha)$ вместо всех свободных вхождений индивидной (предметной) переменной α терма t. Рассмотрим это на примере прикладного языка логики предикатов, в качестве которого будем использовать язык математики.

Пусть A(x) есть выражение $\exists y(x < y \,\&\, x = z)$. Переменная x в нем имеет два свободных вхождения. Пусть вместо x подставляется один из следующих термов: 5 — индивидная (предметная) константа, z — индивидная переменная, $(x + z)\cdot 5$ — сложный функциональный терм. Тогда выражение A(x/t) в каждом из этих случаев графически совпадает со следующими, соответственно, выражениями:

$A(x/5)$: $\exists y(5 < y \,\&\, 5 = z)$,

$A(x/z)$: $\exists y(z < y \,\&\, z = z)$,

$A(x/(x + z)\cdot 5)$: $\exists y((x + z)\cdot 5 < y \,\&\, (x + z)\cdot 5 = z)$.

Не каждая подстановка вида A (α/t) считается правильной. **Подстановка $A(\alpha/t)$ считается правильной, если ни одна переменная, входящая в терм t, не окажется связанной на местах, где терм t появился в результате подстановки.** Нарушение требования правильности подстановки ведет к некорректным с точки зрения семантики следствиям.

Действительно, пусть, как и ранее, A(x) графически совпадает с выражением $\exists y\ (x < y\ \&\ x = z)$. С семантической точки зрения оно является *выполнимым*, то есть при определенном приписывании значений индивидным переменным это утверждение может принять значение "истина". Допустим для определенности, что приписывание значений индивидным переменным осуществляется в универсуме натуральных чисел. Рассмотрим теперь результат следующей подстановки:

$$A(x/y + 2): \qquad \exists y(y^* + 2 < y\ \&\ y^* + 2 = z).$$

Здесь терм t содержал переменную y. После подстановки эта переменная оказалась связанной квантором существования на местах, где терм t появился в результате подстановки, что и помечено для ясности звездочкой. Рассматривая семантически выражение $\exists y(y + 2 < y\ \&\ y + 2 = z)$, легко установить, что оно является *всегда ложным* утверждением о натуральных числах. В самом деле, какие бы значения ни приписывались индивидным переменным на множестве натуральных чисел, не удается сделать выражение $y + 2 < y$ истинным. Поэтому первый член конъюнкции является всегда ложным, а в силу этого и вся конъюнкция должна быть таковой.

В данном случае подстановка оказалась семантически некорректной. Принять такого рода подстановки нельзя, так как они позволяли бы осуществлять переходы от истинных утверждений к ложным и логика как наука не могла бы в этом случае гарантировать, что при истинности посылок формулируемые в ней принципы рассуждений всегда ведут к истинным заключениям.

Выражение вида $A(\alpha/\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ является метаязыковой записью частного случая результата правильной подстановки в выражение $A(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ вместо всех свободных вхождений индивидной переменной α индивидной же переменной β.

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы обсудить смыслы правил $\forall_и$ и $\exists_в$.

Правило $\forall_и$ (исключение квантора общности) есть разрешение перейти от формулы вида $\forall\alpha A(\alpha)$ к формуле $A(\alpha/t)$. Чтобы осуществить это действие, надо устранить квантор общности, а в оставшейся формуле $A(\alpha)$ сделать правильную подстановку вместо всех свободных вхождений переменной α терма t. Так как в $A(\alpha)$ могут входить кванторы, при осуществлении подстановки надо следить, чтобы она была правильной. В противном случае можно от истинных утверждений перейти к ложным. Так, выражение прикладного языка логики предикатов $\forall x \exists y(x < y)$, где x и y трактуются как пробегающие по множеству натуральных чисел, утверждает об отсутствии в нем наибольшего числа и является истинным. Некорректно осуществляя правило $\forall_и$, можно от этого истинного утверждения перейти к ложному $\exists y(y < y)$. Здесь терм y оказался связанным квантором существования на том месте, где он был подставлен вместо переменной x.

Правило $\exists_в$ (введение квантора существования) разрешает от формулы $A(\alpha/t)$ перейти к формуле $\exists \alpha A(\alpha)$. Здесь опять-таки надо следить, чтобы посылка правила была результатом соответствующей правильной подстановки. Несоблюдение этого условия может, как и в других случаях, привести к ложному заключению. Действительно, возьмем выражение прикладного языка логики предикатов — $5 < y$. Применяя неправильно правило $\exists_в$, получаем ложное утверждение — $\exists y(y < y)$. Почему же так получилось? Дело заключается в том, что в данном применении правила $\exists_в$ выражение $5 < y$ трактовалось как якобы результат правильной подстановки в выражение $y < y$ терма 5 вместо переменной y. Но результатом такой подстановки должно быть выражение $5 < 5$, а не $5 < y$, так как подстановка всегда осуществляется вместо всех вхождений свободной индивидной переменной. Таким образом, выражение $5 < y$ нельзя понимать как $A(y/5)$, а потому и переход к $\exists y A(y)$ неправилен. С другой стороны, $5 < y$ можно понимать как $A(x/5)$, то есть как результат теперь уже правильной подстановки в $x < y$ вместо всех вхождений свободной переменной x терма 5. В этом случае, применяя правило $\exists_в$, получим $\exists x A(x)$, то есть $\exists x(x < y)$.

Остановимся теперь на смысле той информации, которая связывается с правилами $\forall_в$ и $\exists_и$ и выражается посредством сокращенных указаний: "β — абс. огр.; $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — огр.".

С семантической точки зрения свободные индивидные переменные, как об этом говорилось в предыдущей главе, трактуются как пробегающие по некоторой предметной области, универсуму рассуждения (рассмотрения) и принимающие любые значения на нем. Именно в этом и состоит главная роль свободных индивидных переменных. Однако в составе формул они не всегда выполняют эту роль, то есть не всегда могут рассматриваться как знаки, обозначающие любой (произвольный) объект универсума.

В том случае, когда свободная индивидная переменная в составе формулы трактуется как знак, обозначающий любой (произвольный) объект из универсума, про нее говорят, что она употреблена в этой формуле в *интерпретации всеобщности*. Например, в выражении x + y = y + x, представляющем собой закон перестановочности сложения, переменные x и y употреблены в интерпретации всеобщности, так как это соотношение истинно при любых значениях x и y. Другую ситуацию мы имеем в том случае, когда переменные входят в состав, например, математических уравнений. Так, в выражении x + 5 = 8 переменная x уже не используется в интерпретации всеобщности, так как не обозначает произвольный объект из универсума. Напротив, возможные значения для x строго фиксированы, то есть ограничены условием данного утверждения. В этом случае говорят, что переменная использована в *условной интерпретации*.

Рассмотрим еще один пример. Пусть дано выражение x + 5 < y. В составе этого выражения и переменная x, и переменная y употреблены в условной интерпретации. Выберем теперь для x некоторое значение. Пусть x обозначает, скажем, число 2. Выбор этого значения для x сразу же накладывает ограничения на выбор возможных значений для y. Действительно, переменная y не может теперь принять в качестве значений числа, меньше 8. Но выбор числа 2 как значения для x произволен. С таким же успехом мы могли бы выбрать в качестве значения для x число 263. Этот выбор сразу же по-новому ограничивает множество возможных значений для y. Теперь оно уже не может быть меньшим числа 269. Данные примеры показывают, что в случае условной интерпретации переменных *выбор* значения для одной переменной *ограничивает* выбор значений для других свободных переменных, входящих в выражение.

Рассмотрим теперь более внимательно правила $\forall_в$ и $\exists_и$. Начнем с последнего из них.

Правило $\exists_и$ (исключение квантора существования) разрешает перейти от формулы $\exists\alpha A(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ к формуле $A(\alpha/\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Смысл выражения $A(\alpha/\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_r)$ был объяснен выше, и останавливаться на этом не будем. Естественно, чтобы не допускать перехода от истинных утверждений к ложным, подстановка должна быть правильной.

Посылка правила — формула $\exists\alpha A(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — утверждает о наличии в универсуме некоторого объекта, удовлетворяющего условию $A(\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Тогда правило $\exists_и$ позволяет считать таковым объект, обозначенный свободной переменной β. Мы как бы говорим: "Если существует предмет, удовлетворяющий условию

A, то пусть им будет предмет β'. Тем самым осуществляется *выбор* такого значения для β, что утверждение $A(\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ истинно. Переменная β в этом случае берется в условной интерпретации, она *абсолютно ограничена* в том смысле, что должна теперь рассматриваться как имя какого-то вполне определенного объекта, удовлетворяющего условию $A(\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Но выбор значения для β *ограничивает* возможные значения для всех остальных свободных индивидных переменных $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Именно эта информация и фиксируется в правиле $\exists_и$ указанием на то, что β — абсолютно ограниченная переменная (абс. огр.), а $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — ограниченные переменные (огр.). При этом в правиле $\exists_и$ переменные $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — это свободные переменные, входящие в выражение $\exists\alpha A(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$.

В качестве примера применения $\exists_и$ возьмем выражение $\exists x(x + 5 = 8)$. Оно утверждает наличие в множестве натуральных чисел некоторого числа, удовлетворяющего условию $x + 5 = 8$. Пусть таким числом будет значение переменной y, тогда по правилу $\exists_и$ получаем выражение $y + 5 = 8$, где y является абсолютно ограниченной переменной, ибо y обозначает теперь выбранный нами объект из универсума (в данном случае он единственен). Рассмотрим выражение $\exists x(x + 5 < y)$. Выберем в универсуме некоторый объект, удовлетворяющий условию $x + 5 < y$, о существовании которого говорит выражение $\exists x(x + 5 < y)$. Пусть выбранный объект обозначается переменной x. Тогда, применяя правило $\exists_и$, можно получить выражение $x + 5 < y$, где переменная x — абсолютно ограниченная (является знаком выбранного объекта), а переменная y — ограниченная переменная.

Аналогичный смысл имеет и пометка "β — абс. огр.; $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — огр." в случае правила $\forall_в$ (введение квантора общности). Это правило разрешает перейти от формулы вида $A(\alpha/\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ к формуле вида $\forall\alpha A(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Рассмотрим этот переход более внимательно.

Здесь имеются две возможности. Формула вида $A(\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ может быть, во-первых, такова, что при некоторых фиксированных значениях $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ она будет принимать значение "истина" на выбранной области рассуждения при любом значении переменной β. Иначе говоря, переменная β при данных фиксированных значениях $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ входит в формулу в интерпретации всеобщности. В таком случае переход от этой формулы по правилу $\forall_в$ к формуле $\forall\alpha A(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ является вполне законным и не вызывает никаких сомнений. Во-вторых, формула $A(\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ может оказаться и таковой, что она при каких-то фиксированных значениях $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ на предметной области будет при некоторых значениях β принимать значение "ложь". Тогда выберем одно из таких значений для переменной β. Этот выбор делает переменную β абсолютно ограниченной переменной, а все остальные свободные переменные ограниченными. Формула $A(\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ является при таком выборе, конечно же, ложной. Но из ложного высказывания следует все что угодно, а потому, в частности, следует и выражение вида $\forall\alpha A(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Таким образом, и в данном случае обосновывается переход по правилу $\forall_в$.

Заметим, что в правиле $\forall_в$ переменные $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — это свободные переменные формулы $\forall\alpha A(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$.

Сформулируем теперь понятие вывода в исчислении предикатов.

Выводом в исчислении предикатов называется непустая конечная последовательность формул $C_1, \ldots, C_n$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) каждая C_i есть либо посылка, либо получена из предыдущих формул по одному из правил вывода,

(2) если в выводе применялись правила $\supset_в$ или $\neg_в$, то все формулы, начиная с последней посылки и вплоть до результата применения данного правила, исключаются из дальнейших шагов построения вывода,

(3) ни одна индивидная переменная в выводе не ограничивается абсолютно более одного раза,

(4) ни одна переменная не ограничивает в выводе сама себя.

Доказательство в исчислении предикатов есть вывод из пустого множества неисключенных посылок.

Завершенным выводом в исчислении предикатов называется вывод, в котором никакая переменная, абсолютно ограничивавшаяся в выводе, не встречается свободно ни в неисключенных посылках, ни в заключении.

Завершенное доказательство в исчислении предикатов есть завершенный вывод из пустого множества неисключенных посылок.

Среди этих четырех введенных понятий основным является понятие вывода. Как видно из определения, оно, в сравнении с соответствующим понятием в исчислении высказываний, обогащено еще двумя требованиями.

Первое из этих требований семантически понятно: ведь пометка об абсолютной ограниченности некоторой переменной означает, что в выводе она теперь становится знаком какого-то конкретного объекта, а потому второе ее абсолютное ограничение может указывать на то, что она стала знаком какого-то иного объекта. Такая ситуация может вести к противоречиям и должна быть запрещена.

Что касается второго дополнительного требования, то оно связано со следующими соображениями. В основе кванторных правил $\forall_{\text{и}}$ и $\exists_{\text{в}}$ лежат отношения логического следования. Для $\forall_{\text{и}}$ это означает, что переход от формулы $\forall\alpha A(\alpha)$ к $A(\alpha/t)$ оправдан тем, что имеет место логическое следование $\forall\alpha A(\alpha) \models A(\alpha/t)$, а для $\exists_{\text{в}}$ переход от $A(\alpha/t)$ к $\exists\alpha A(\alpha)$ оправдан наличием следования вида $A(\alpha/t) \models \exists\alpha A(\alpha)$.

Иначе обстоит дело с правилами $\forall_{\text{в}}$ и $\exists_{\text{и}}$. В их основе не лежит отношение логического следования, то есть в общем случае:

$$A(\alpha/\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \not\models \forall\alpha A(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \text{ и}$$
$$\exists\alpha A(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \not\models A(\alpha/\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

что легко может быть установлено методами, рассмотренными в предыдущей главе.

Несмотря на это, в исчислении предикатов все же принимаются эти правила, но, чтобы не допустить возможности выведения из истинных утверждений ложных заключений, необходимо каким-то образом "заблокировать" негативное влияние отсутствия логического следования. Это достигается двумя формальными условиями.

Первое формальное условие как раз и выражается пунктом 4 понятия вывода. Данный запрет позволяет, например, исключить возможность переходов вида: $y = y \models \forall x(x = y)$ и $\exists x(x < y) \models y < y$, то есть переходов от истинных (выполнимых) утверждений к ложным. Действительно, при таком переходе переменная y ограничивает сама себя. Надо только учитывать, что ситуация, когда переменная ограничивает сама себя, может возникнуть не только прямым образом, как это было в приведенных примерах, но и косвенно. Здесь имеется в виду то обстоятельство, что отношение "x ограничивает y" является транзитивным, то есть для него верно соотношение: "если α ограничивает β, а β ограничивает γ, то α ограничивает γ". Поэтому в выводе может возникнуть ситуация самоограничения некоторой переменной, скажем, переменной x, таким образом: в одном шаге вывода переменная x, будучи абсолютно ограниченной, ограничивает переменную y, а в другом шаге переменная y, будучи абсолютно ограниченной, ограничивает x. Тогда, по транзитивности, переменная x будет ограничивать сама себя.

Второе формальное условие состоит в различении понятия вывода и понятия завершенного вывода. Только при осуществлении завершенного вывода гарантируется, что между посылками и заключением имеет место отношение логического следования.

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров выводов и доказательств в исчислении предикатов, отметим, что при применении кванторных правил, согласно их формулировкам, можно как менять подкванторные индивидные переменные на новые переменные, так и не менять их.

В исчислении предикатов в полном объеме сохраняют свою силу три эвристики выбора посылок, сформулированные выше. Правда, к ним теперь присоединяется еще она эвристика.

4-я эвристика. После того как применением всех шагов по 1-й эвристике удалось дойти до формулы **B**, имеющей вид $\forall\alpha\mathbf{A}$ или $\exists\alpha\mathbf{A}$, можно далее продолжить выбор посылок из формулы **A** по эвристикам 1 и 2, не обращая внимания на кванторы.

Рассмотрим несколько примеров построения вывода и доказательства в исчислении предикатов. Попытаемся обосновать наличие выводимости вида:

$\exists x\forall yP(x, y) \vdash \forall y\exists xP(x, y)$

1. $\exists x\forall yP(x, y)$ — пос.
2. $\forall yP(x, y)$ — $\exists_и$, 1, x — абс. огр.
3. $P(x, y)$ — $\forall_и$, 2
4. $\exists xP(x, y)$ — $\exists_в$, 3
5. $\forall y\exists xP(x, y)$ — $\forall_в$, 4, y — абс. огр.

В данном формальном рассуждении были абсолютно ограничены переменные x и y, но так как они не входят свободно ни в посылку, ни в заключение, данное рассуждение представляет собой завершенный вывод и, следовательно, метаутверждение о выводимости обосновано.

Попытаемся обосновать метаутверждение $\forall x\exists yP(x, y) \vdash \exists y\forall xP(x, y)$.

1. $\forall x\exists yP(x, y)$ — пос.
2. $\exists yP(x, y)$ — $\forall_и$, 1
3. $P(x, z)$ — $\exists_и$, 2, z — абс.огр.; x — огр.
4. $\forall xP(x, z)$ — $\forall_в$, 3, x — абс. огр.; z — огр.

На этом шаге вывод должен быть "оборван", так как данная последовательность уже не удовлетворяет пункту (4) понятия вывода, согласно которому ни одна переменная не должна ограничивать сама себя. В нашем же случае на 3-м шаге z ограничивает x, на 4-м — x ограничивает z. Поэтому по транзитивности получается, что z ограничивает z. Обойти эту сложность не удается даже изменением переменной при применении правила $\exists_и$. И это не случайно, так как рассматриваемая выводимость вообще не может быть обоснована.

Покажем теперь на двух примерах, как действует эвристическое правило 4. С этой целью будем отмечать те эвристики, которые использовались при выборе посылок.

$$\vdash (\forall x(S(x) \supset P(x)) \,\&\, \forall x(P(x) \supset Q(x))) \supset \forall x(S(x) \supset Q(x))$$

1. $\forall x(S(x) \supset P(x)) \,\&\, \forall x(P(x) \supset Q(x))$ — пос. (эвристика 1)
2. $S(x)$ — пос. (эвристика 4)
3. $\forall x(S(x) \supset P(x))$ — $\&_и$, 1
4. $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ — $\&_и$, 1
5. $S(x) \supset P(x)$ — $\forall_и$, 3
6. $P(x)$ — $\supset_и$, 2, 5
7. $P(x) \supset Q(x)$ — $\forall_и$, 4
8. $Q(x)$ — $\supset_и$, 6,7
9. $S(x) \supset Q(x)$ — $\supset_в$, 8
10. $\forall x(S(x) \supset Q(x))$ — $\forall_в$, 9, x — абс. огр.
11. $(\forall x(S(x) \supset P(x)) \,\&\, \forall x(P(x) \supset Q(x))) \supset \forall x(S(x) \supset Q(x))$ — $\supset_в$, 10

Данный вывод является завершенным доказательством, а потому метаутверждение обосновано.

Рассмотрим теперь следующий пример:

$$\vdash \neg\exists x\, \neg P(x, y, a) \supset \forall x P(x, y, a)$$

1. $\neg\exists x\, \neg P(x, y, a)$ — пос. (эвристика 1)
2. $\neg P(x, y, a)$ — пос. (эвристика 4)
3. $\exists x\, \neg P(x, y, a)$ — $\exists_в$, 2
4. $\neg\neg P(x, y, a)$ — $\neg_в$, 1, 3
5. $P(x, y, a)$ — $\neg_и$, 4
6. $\forall x P(x, y, a)$ — $\forall_в$, 5, x — абс. огр.; y — огр.
7. $\neg\exists x\, \neg P(x, y, a) \supset \forall x P(x, y, a)$ — $\supset_в$, 6

Эта последовательность — завершенное доказательство, так как единственная абсолютно ограничивавшаяся в выводе переменная x не входит свободно в заключение (неисключенных посылок здесь нет, так как их множество пусто). Применение эвристики 4 к формуле $\forall x P(x, y, a)$ состояло в том, что было рассмотрено выражение $P(x, y, a)$, которое не имеет вида импликации, а потому по эвристике 2 для перехода к построению вывода от противного было взято в качестве посылки отрицание этой формулы.

Для построенного в данной главе натурального исчисления предикатов справедливо метаутверждение:

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B \text{ тогда и только тогда, когда } A_1, \ldots, A_n \models B,$$

что гарантирует корректность дедуктивных средств рассуждения, принятых в исчислении.

ГЛАВА V

СИЛЛОГИСТИКА

§ 1. Общие сведения о силлогистике

Силлогистика является исторически первой дедуктивной теорией. Построил ее основатель логики древнегреческий философ Аристотель. Непреходящее значение данной теории состоит в том, что она послужила образцом для создания других аксиоматических теорий. В частности, аксиоматическая система геометрии Евклида была создана последним в духе тех принципов построения и исследования дедуктивных систем знания, которые сформулировал Аристотель применительно к силлогистике. Кроме того, она отличается значительной простотой, элегантностью и кажущейся самоочевидностью устанавливаемых в ней логических законов, формулировка которых осуществляется почти на естественном языке без использования какой-либо сложной символики. Все это делает силлогистику наиболее простым и легко доступным средством приобщения учащихся к логическому знанию, а потому начиная с античности вплоть до настоящего времени изучение силлогистики является обязательным элементом логического образования.

На русский язык греческий термин "syllogismos" переводится как "сосчитывание", "вычисление", а потому производный от него термин "силлогистика" можно было бы перевести русским термином "исчисление".

В силлогистике исследуются различного рода логические отношения между *категорическими атрибутивными* высказываниями. К их числу относятся высказывания следующих логических форм:

1. Всякий S есть P — *общеутвердительные.*
2. Всякий S не есть P — *общеотрицательные.*
3. Некоторый S есть P — *частноутвердительные.*
4. Некоторый S не есть P — *частноотрицательные.*
5. a есть P — *единичноутвердительные.*
6. a не есть P — *единичноотрицательные.*

Термин "категорический" является производным от греческого "categoria", что можно перевести на русский язык как "сказывание". Соответственно, термин "категорический" можно было бы перевести как "без сомнений, окончательно, безапелляционно сказанный". В высказываниях отмеченного типа всегда утверждается или отрицается наличие у предметов некоторого *атрибута* (от лат. "attributum" — свойство). Поэтому данные выражения называются *атрибутивными*.

В составе высказываний этих форм выделяют *кванторные слова, предицирующие связки и термины*.

В каждом категорическом атрибутивном высказывании имеется два термина: *субъект* — термин, обозначающий те предметы, о которых в высказывании нечто утверждается или отрицается, и *предикат* — термин, обозначающий то, что предицируется, утверждается или отрицается, об этих предметах. В указанных логических формах высказываний местоположение субъекта показано знаками S и а, а местоположение предиката — знаком P. Так, в выражении "Сократ — мудрец" термин "Сократ" — это субъект, а термин "мудрец" — предикат. В выражении "Всякий человек, обучающийся в школе, изучает какую-нибудь науку" словосочетание "человек, обучающийся в школе" является субъектом, а словосочетание "изучает какую-нибудь науку" является предикатом.

По *количеству* атрибутивные категорические высказывания делятся на *единичные*, в которых признак предицируется отдельному предмету и субъектом которых является единичный термин (имя), и *множественные*, в которых признак предицируется предметам некоторого класса. Среди множественных выделяют *общие* и *частные* высказывания. К первым относятся высказывания, содержащие *квантор общности*, выражаемый словами "всякий", "любой", "каждый", "все" (для отрицательных высказываний часто используется словосочетание "ни один") и другими их синонимами. Ко вторым относятся высказывания, содержащие *квантор существования*, выражаемый словами "некоторый", "какой-либо", "некий" и др.

По *качеству* рассматриваемые высказывания делятся на *утвердительные*, указывающие на факт наличия свойства (в них присутствует *утвердительная предицирующая связка* "есть") и *отрицательные* (в них присутствует *отрицательная предицирующая связка* "не есть", которая предицирует отсутствие некоторого свойства у предметов). Иногда, в соответствии с правилами русской грамматики, связка "есть" заменяется знаком "тире", часто также вместо слова "есть" употребляется слово "является", зачастую связка вообще не выражается, а только подразумевается. Например, вместо "Человек есть разумный" говорят "Человек является разумным" или "Человек разумен".

В приведенных выше названиях категорических атрибутивных высказываний как раз и указываются их количественные и качественные характеристики. Как будет далее показано, единичные высказывания можно трактовать как высказывания общего характера, а потому они не будут играть самостоятельной роли в силлогистике. Итак, самостоятельную роль в силлогистике играют лишь высказывания первых четырех типов. В средние века высказывания этих последних типов получили специальные обозначения: предложения с логической формой "Всякий S есть P" стали называться высказываниями типа *a* (первая буква латинского слова "affirmo" — утверждаю); предложения с логической формой "Некоторый S есть P" стали называться высказываниями типа *i* (вторая гласная в том же слове); предложения вида "Всякий S не есть P" стали относить к высказываниям типа *e* (первая гласная буква в слове "nego" — отрицаю), а предложения вида "Некоторый S не есть P" — к высказываниям типа *o* (вторая гласная в слове "nego"). Эти обозначения оказались очень удобным средством сокращенного представления в языке категорических высказываний. Пользуясь ими, мы будем далее выражать логическую структуру первых четырех логических форм посредством следующих формул:

Всякий S есть P — S*a*P,
Всякий S не есть P — S*e*P,
Некоторый S есть P — S*i*P,
Некоторый S не есть P — S*o*P.

В настоящее время, кроме собственно силлогистики Аристотеля, в логике разработано большое количество других силлогистических теорий. Ниже будет рассмотрен тот вариант, который начиная с поздней античности и вплоть до настоящего времени постоянно воспроизводится в учебной литературе по логике. Этот вариант называется *традиционной силлогистикой*. Ее особенностью является наложение на термины категорических атрибутивных высказываний следующих ограничивающих условий: при их интерпретации на некотором универсуме они обязательно должны оказаться знаками таких свойств (классов), которые являются *непустыми* и *неуниверсальными*. Это означает, например, для свойства, обозначенного термином P, что в универсуме должен найтись хотя бы один предмет a, который обладает этим свойством, и для него верно утверждать, что "a есть P" (класс P непуст), и найдется хотя бы один предмет b, такой, что он не обладает этим свойством, то есть для него верно будет утверждать, что "b не есть P" (класс P не является универсальным).

Только что сказанное можно пояснить следующими схемами (см. рис.1).

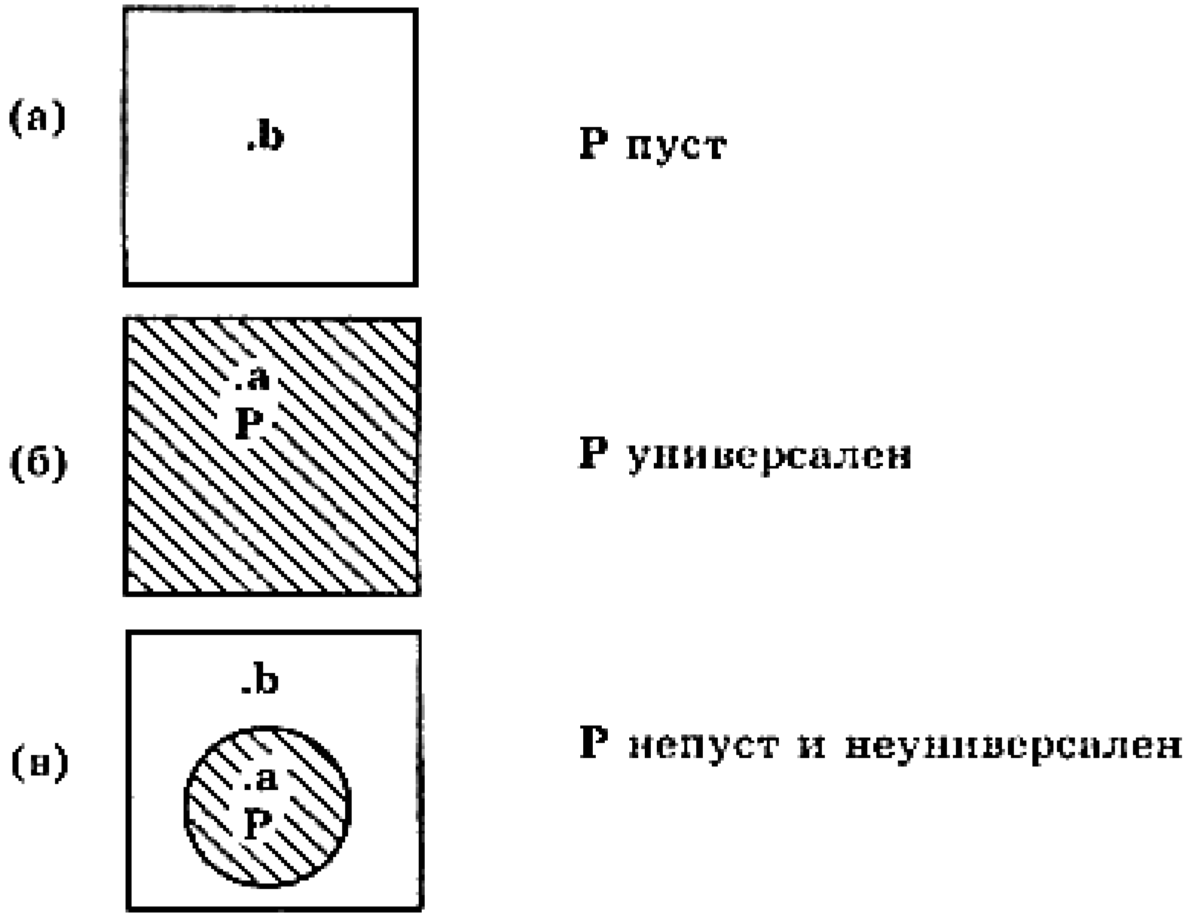


Рис. 1

На схемах квадратами обозначены *универсумы* — классы предметов, о которых мы собираемся рассуждать. Штриховкой обозначен класс предметов, обладающих свойством P, а точками обозначены сами предметы. На схеме (а) ничего не штрихуется, так как свойство P пусто и предметов, обладающих этим свойством, нет. В данном универсуме существуют только предметы, не обладающие свойством P, например предмет b. На схеме (б) штрихуется весь универсум, так как каждый предмет из этого универсума обладает свойством P (данное свойство универсально). На схеме (в) штрихуется лишь часть универсума, так как в нем имеются как предметы, обладающие свойством P (таковым является, например, предмет a), так и предметы, этим свойством не обладающие (предмет b). С учетом принятых в традиционной силлогистике ограничений схемы (а) и (б) далее не будут использоваться, то есть здесь законной считается лишь схема (в). Отметим, в частности, что в собственно *аристотелевской силлогистике* никаких ограничений на термины категорических атрибутивных высказываний не накладывается. Этим она существенно отличается от традиционной силлогистики.

Кроме того, различные силлогистические теории, могут отличаться друг от друга в зависимости от того, какого типа термины могут являться субъектами и предикатами атрибутивных категорических высказываний. В частности, в данной главе будут последовательно рассмотрены две силлогистические теории *позитивная традиционная силлогистика и негативная традиционная силлогистика*.

Позитивной силлогистикой называется теория дедукции из категорических высказываний, в которой не учитывается внутренняя структура терминов. Иначе говоря, каждый термин (субъект и предикат) трактуется как элементарное, простое выражение, неразложимое на составные части. С другой стороны, если в языке теории содержится единственный терминообразующий оператор — оператор *терминного отрицания*, позволяющий по любому термину построить новый термин, являющийся отрицанием исходного, то такая система относится к негативной силлогистике. Таким образом, в негативной силлогистике различаются два типа терминов — *положительные* и *отрицательные*. Другие виды силлогистик в данной главе рассматриваться не будут.

Описанные выше виды категорических атрибутивных высказываний относятся к числу простых. Но, применяя к ним логические операции, выражаемые пропозициональными связками, можно из простых высказываний строить сложные. Например, можно отрицать то или иное высказывание, строить из них конъюнктивные высказывания и т.д. Для более четкого понимания сказанного введем *алфавит силлогистики* и понятие *силлогистической формулы*.

В алфавит позитивной силлогистики входят следующие символы: S, P, M, S_1, ... — термины; &, $\vee$, $\supset$, $\neg$, *a*, *i*, *e*, *o* — логические термины (логические постоянные); а также скобки в качестве технических символов.

Понятие *силлогистической формулы позитивной силлогистики:*

1. Если β и γ — термины, то $\beta a \gamma$, $\beta i \gamma$, $\beta e \gamma$, $\beta o \gamma$ — силлогистические формулы.
2. Если A — силлогистическая формула, то $\neg$A — силлогистическая формула.
3. Если A и B — силлогистические формулы, то (A & B), (A $\vee$ B), (A $\supset$ B) — силлогистические формулы.
4. Ничто иное не есть силлогистическая формула.

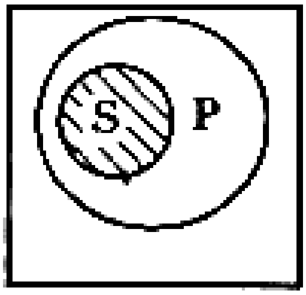
Условимся рассматривать далее выражения, задаваемые п. 1 данного определения, как простые сокращения соответствующих логических форм категорических атрибутивных высказываний. С учетом этого к числу простых силлогистических формул мы будем относить выражения вида "Всякий β есть γ", "Всякий β не есть γ", "Некоторый β есть γ", "Некоторый β не есть γ".

§ 2. Семантика традиционой силлогистики

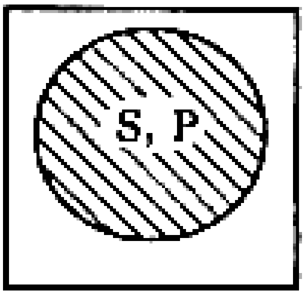
Как говорилось, в традиционной силлогистике не могут встречаться пустые термины, то есть термины типа "русалка", "человек, достигший центра Земли", "вечный двигатель" и т.д., а также универсальные термины. Например, если в качестве универсума берется класс людей, то в силлогистике нельзя использовать термин "разумное существо", ибо класс разумных существ совпадает с классом людей (является универсальным). Поэтому, чтобы последними терминами мы могли пользоваться и могли рассматривать предложение вида "Каждый человек является разумным существом", необходимо взять более широкий универсум, чем класс людей.

Допустим теперь, что исходя из тех или иных соображений выделен и определен некоторый универсум рассуждения U. В таком случае истинность категорических атрибутивных высказываний можно определить в традиционной силлогистике через выполнимость для субъектов и предикатов отношений, задаваемых некоторыми *модельными схемами*.

(1) Предложение "Всякий S есть P" истинно тогда и только тогда, когда классы S и P находятся в одном из следующих отношений:

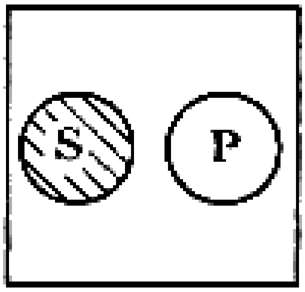


или

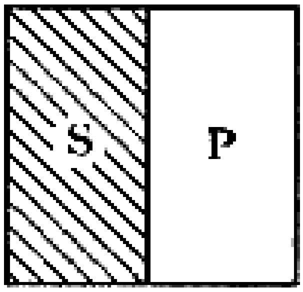


Например, субъект и предикат высказывания "Всякий студент является учащимся" находятся в отношении, задаваемом первой модельной схемой, а потому оно является истинным. Точно так же является истинным и предложение "Всякий квадрат — это равносторонний прямоугольник", так как субъект и предикат этого высказывания находятся в отношении, задаваемом второй модельной схемой.

(2) Предложение "Всякий S не есть P" истинно тогда и только тогда, когда классы S и P находятся в одном из следующих отношений:

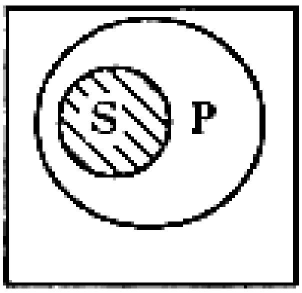


или

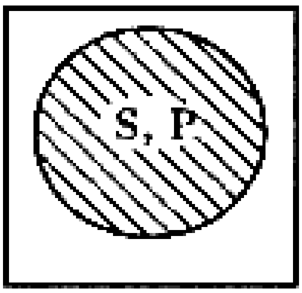


Примером истинного предложения, в котором субъект и предикат находятся в отношении, задаваемом первой модельной схемой, может служить предложение "Ни одно натуральное число не является иррациональным". Вторая модельная схема имеет место для субъекта и предиката предложения "Всякий юридически ненаказуемый поступок не есть преступление", а потому оно истинно.

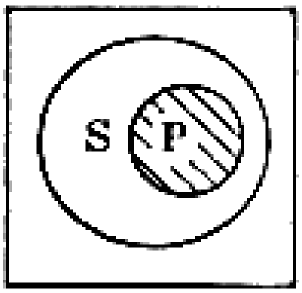
(3) Предложение "Некоторый S есть P" истинно тогда и только тогда, когда S и P находятся в одном из следующих отношений



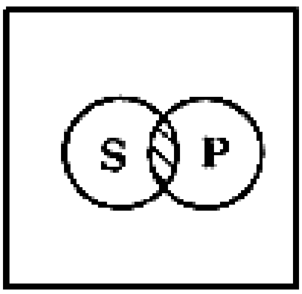
или



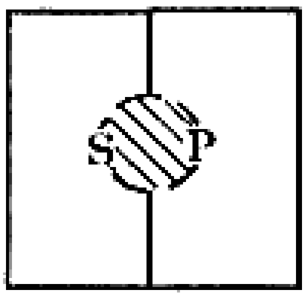
или



или

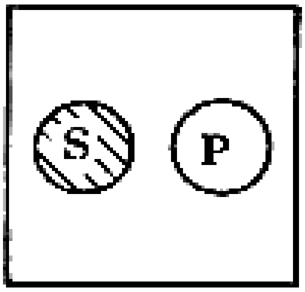


или

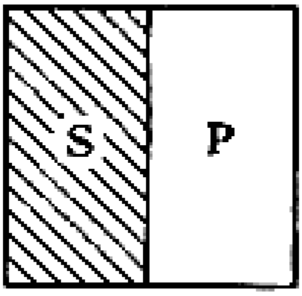


Примерами высказываний, субъекты и предикаты которых соответственно удовлетворяют каждой из данных модельных схем, будут: "Некоторый студент является учащимся", "Некоторый квадрат есть равносторонний прямоугольник", "Некоторый писатель является поэтом", "Некоторый учащийся — спортсмен", "Некоторое натуральное число, меньшее 100, является натуральным числом, большим 80".

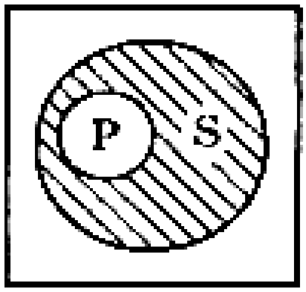
(4) Предложение "Некоторый S не есть P" истинно тогда и только тогда, когда классы S и P находятся в одном из следующих отношений:



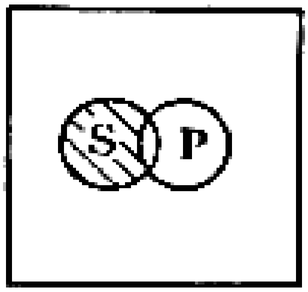
или



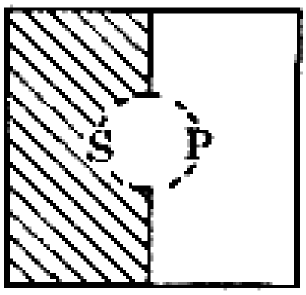
или



или



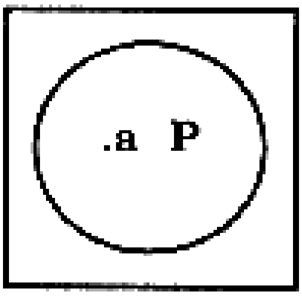
или



Примерами соответствующих высказываний для каждой модельной схемы будут высказывания: "Некоторое натуральное число не является иррациональным", "Некоторый юридически ненаказуемый поступок не есть преступление", "Некоторый писатель не является поэтом", "Некоторый учащийся не является спортсменом", "Некоторое натуральное число, меньшее 100, не является натуральным числом, большим 80".

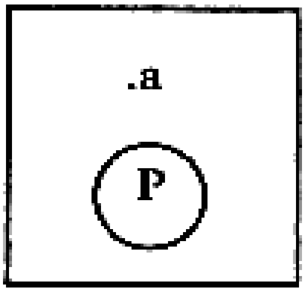
К пунктам (3) и (4) нужно сделать одно важное пояснение. В разговорной практике кванторное слово "некоторые" употребляется в двух различных смыслах: (а) "только некоторые" и (б) "по крайней мере некоторые". Употребляя, например, в выражении "Некоторые писатели — люди" это слово в первом смысле, мы вынуждены трактовать данное высказывание как ложное. Ведь в этом случае утверждается "Только некоторые писатели — люди", то есть предполагается существование таких писателей, которые людьми не являются. А так как таковых нет, ибо все писатели — люди, то наше утверждение — ложно. Таким образом, первый смысл употребления слова "некоторые" исключает те отношения между субъектом S и предикатом P, когда класс предметов, обладающих свойством S, полностью включается в класс (или полностью исключается из класса) предметов, обладающих свойством P. Однако в силлогистике принято употреблять слово "некоторые" не в первом, а во втором смысле — "по крайней мере некоторые", что означает: "утверждаемое или отрицаемое верно по крайней мере для одного предмета из класса S, а может быть, и для всех". Именно этим обстоятельством обусловлено то, что две модельные схемы, на которых считаются истинными высказывания типа a, сохраняются в качестве модельных схем и для высказываний типа i, а те модельные схемы, на которых истинны высказывания типа e, переносятся в качестве модельных схем истинности и для высказываний типа o.

(5) Предложение "а есть Р" истинно тогда и только тогда, когда между предметом, обозначенным термином "а", и классом Р существует следующее отношение:



то есть предмет а является элементом класса Р. Примерами таких высказываний будут "Д.И.Менделеев — химик", "2 — четное число", "Лондон — город" и т.д.

(6) Предложение "а не есть Р" истинно тогда и только тогда, когда между предметом, обозначенным термином "а", и классом Р существует следующее отношение:



то есть предмет а не является элементом класса Р. Примерами таких высказываний будут "5 не является четным числом", "Наполеон не является англичанином" и др.

В модельных схемах, участвовавших в определениях (1)—(6), некоторые классы штриховались. Этим приемом помечались "*объемы сказывания*", то есть множества тех предметов из класса S, для которых предицируемое в соответствующих предложениях наличие или отсутствие свойства Р оказывается выполненным. Пользуясь этой штриховкой, введем теперь одно очень важное семантическое понятие — понятие *распределенности терминов*.

Будем считать, что термин, входящий в состав категорического атрибутивного высказывания, распределен в нем, если и только если в каждой модельной схеме, которая является условием истинности высказываний этого типа, класс предметов, обозна-

ченный данным термином, полностью заштрихован или полностью незаштрихован. В противном случае будем говорить, что термин нераспределен.

Рассматривая теперь модельные схемы для высказываний типа *a*, *e*, *i* и *o* и помечая распределенные термины знаком "+", а нераспределенные — знаком "–", можно суммировать сказанное следующим списком:

Всякий S^+ есть P^-,
Всякий S^+ не есть P^+,
Некоторый S^- есть P^-,
Некоторый S^- не есть P^+.

Легко видеть, что субъекты всегда распределены в общих и нераспределены в частных высказываниях, в то время как предикаты всегда распределены в отрицательных и нераспределены в утвердительных высказываниях.

Что касается единичных высказываний, то для них в соответствующих модельных схемах ничто не штриховалось. И это понятно: ведь штриховкой помечались те предметы, подпадающие под субъект, для которых утверждение о наличии или отсутствии свойства **P** выполнено. Но в единичных высказываниях субъект единичен, на графической схеме он изображен точкой, а точку нельзя заштриховать. Тем не менее если отвлечься от этой чисто изобразительной трудности и считать, что каким-то образом точка оказалась заштрихованной, то вопрос о распределенности терминов для единичных высказываний должен решаться в полном согласии с вышеуказанным критерием следующим образом:

a^+ есть P^-,
a^+ не есть P^+.

Как видим, термины в единичных высказываниях распределены точно так же, как они распределены в соответствующих общих высказываниях. Это позволяет считать, что высказывания единичноутвердительные — аналоги общеутвердительных, а единичноотрицательные — аналоги общеотрицательных. Тем самым единичные утверждения не будут далее играть самостоятельной роли. Они всегда будут трактоваться как высказывания общие.

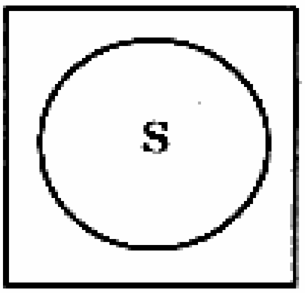
Теперь введем в силлогистику понятие *логического следования*. Пусть A_1, A_2, ..., A_n и **B** будут силлогистическими формулами. Будем говорить, что из посылок A_1, A_2, ..., A_n логически следует **B**, если и только если каждая модельная схема, на которой одновременно истинны все посылки A_1, A_2, ..., A_n, является модельной схемой, на которой истинно В. Наличие логического следования будем обозначать записью $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$.

В частном случае (следование из пустого множества посылок) будем называть В общезначимой формулой (законом силлогистики) и писать — $\models B$, если и только если В является истинной на любой модельной схеме.

§ 3. Законы силлогистики и непосредственные следования

Рассмотрим высказывания типа *a*, *e*, *i* и *o*, в которые входит ровно один термин. Последнее означает, что в этих высказываниях на местах субъектов и предикатов стоит один и тот же термин, например S. Учитывая определения условий истинности для данных высказываний (пункты (1)—(4)), можно построить следующую таблицу (см. табл. 1).

Таблица 1

модельные схемы	S*a*S	S*e*S	S*i*S	S*o*S
	и	л	и	л

Из таблицы видно, что выражения вида S*a*S и S*i*S истинны на любой модельной схеме (при одной переменной число всех возможных различных модельных схем равно в точности одной модельной схеме, которая и нарисована в таблице), а потому логическими законами будут следующие утверждения:

1. $\models$ Всякий S есть S — *закон силлогистического тождества для высказываний типа a.*
2. $\models$ Некоторый S есть S — *закон силлогистического тождества для высказываний типа i.*

Таким образом, логически истинными высказываниями будут, например, высказывания: “Всякий человек есть человек”, “Некоторый атом есть атом” и т.д.

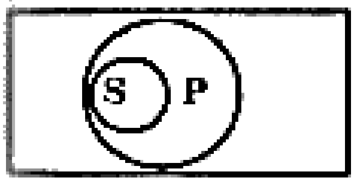
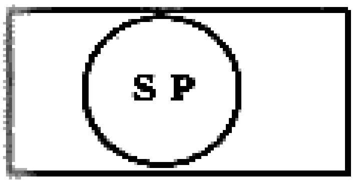
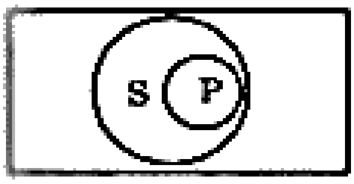
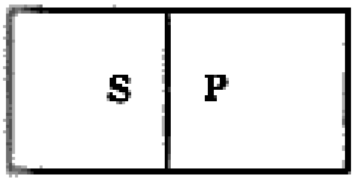
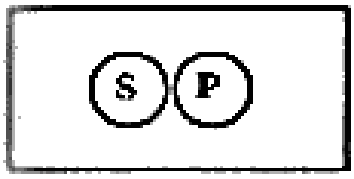
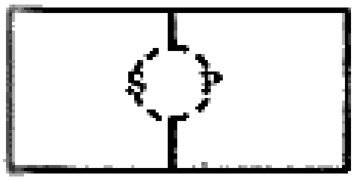
Наличие законов силлогистического тождества для высказываний типа a и i является характерной особенностью традиционной силлогистики. Именно посредством этих законов синтаксическим способом выражается условие о непустоте терминов, входящих в категорические высказывания.

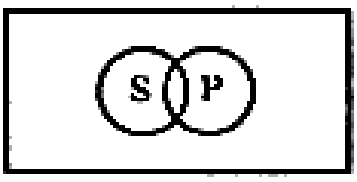
Если учесть, что "¬" — это операция отрицания, то из таблицы 1 видно, что общезначимыми должны быть и выражения вида:

3. $\models$ ¬Всякий S не есть S.
4. $\models$ ¬Некоторый S не есть S.

Перейдем к рассмотрению нетривиальных однопосылочных умозаключений из высказываний типа a, e, i и o, содержащих ровно два различных термина. В традиционной силлогистике для двух терминов существует в точности семь различных модельных схем. Представим тогда таблицей 2 условия истинности некоторых формул (см. табл. 2).

Таблица 2

модельные схемы	SaP	SeP	SiP	SoP		PaS	PeS	PiS	PoS
	1	2	3	4		5	6	7	8
	и	л	и	л		л	л	и	и
	и	л	и	л		и	л	и	л
	л	л	и	и		и	л	и	л
	л	и	л	и		л	и	л	и
	л	и	л	и		л	и	л	и
	л	л	и	и		л	л	и	и

	1	2	3	4		5	6	7	8
	л	л	и	и		л	л	и	и

подтаблица 1 подтаблица 2

Данная таблица содержит две подтаблицы (1 и 2), которые могут быть использованы для проверки двух типов *непосредственных умозаключений*, то есть умозаключений из одной посылки: подтаблица 1 — для проверки так называемых *умозаключений по логическому квадрату*, а подтаблица 2 — для проверки *обращения*. Рассмотрим эти типы умозаключений более внимательно.

Логический квадрат служит мнемоническим целям, способствуя запоминанию различных логических отношений, которые существуют между высказываниями типа *a*, *e*, *i* и *o* с одинаковым расположением терминов, то есть с одинаковыми субъектами и одинаковыми предикатами. Квадрат имеет следующий вид (см. рис. 2).

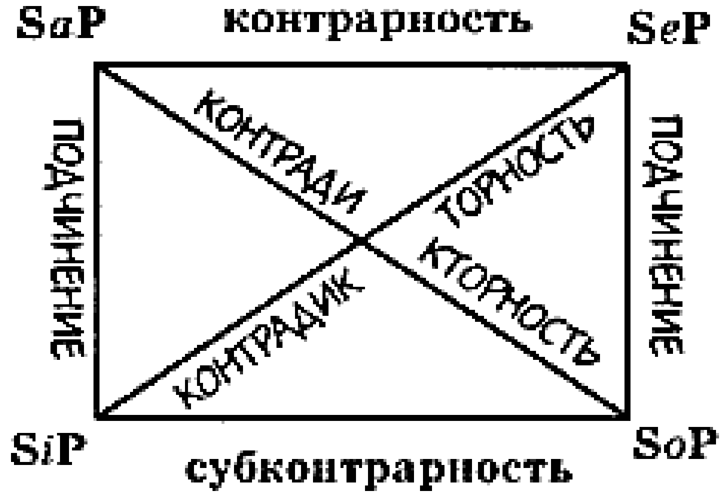


Рис. 2

К непосредственным умозаключениям по логическому квадрату относятся умозаключения вида:

$$\frac{A}{B}, \quad \frac{\neg A}{B}, \quad \frac{A}{\neg B}, \quad \frac{\neg A}{\neg B},$$

где A и B — различные простые категорические высказывания с одинаковыми субъектами и предикатами. Правильные умозаключения этого типа основаны на логических отношениях между **A** и **B**, которые зафиксированы в подтаблице 1.

Так, на рис. 2 показано, что между *a* и *i*, с одной стороны, *e* и *o* — с другой, имеет место отношение *подчинения*. Действительно, из подтаблицы 1 непосредственно усматривается, что отношение подчинения существует между высказывательными формами "Всякий **S** есть **P**" и "Некоторый **S** есть **P**" (столбцы 1 и 3), а также между "Всякий **S** не есть **P**" и "Некоторый **S** не есть **P**" (столбцы 2 и 4), что можно представить в форме:

5. Всякий **S** есть **P** $\models$ Некоторый **S** есть **P**.
6. Всякий **S** не есть **P** $\models$ Некоторый **S** не есть **P**.

Это позволяет обосновать и принять умозаключения следующих видов:

$$\frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}, \qquad \frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}},$$

а по контрапозиции — и умозаключения вида:

$$\frac{\neg\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\neg\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}, \qquad \frac{\neg\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}{\neg\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}.$$

Учитывая тот факт, что по контрапозиции всегда можно перейти от умозаключения вида **A** $\vdash$ **B** к умозаключению вида $\neg$**B** $\vdash$ $\neg$**A**, мы далее умозаключения, которые можно получить по контрапозиции, указывать не будем.

Таким образом, любое конкретное высказывание типа *i* выводится из высказывания типа *a* (высказывание типа *o* выводится из высказывания типа *e*). Например, из высказывания "Все учащиеся успешно сдали экзамены" выводится высказывание "Некоторые учащиеся успешно сдали экзамены", а из предложения "Каждый ученый не умеет читать" выводится предложение "Некоторые ученые не умеют читать".

Согласно логическому квадрату, между высказываниями *a* и *e* имеет место отношение *контрарности (противоположности)*, то есть они не могут быть одновременно истинными, хотя и могут быть одновременно ложными. Это прямо видно из рассмотрения столбцов 1 и 2 таблицы 2. Но тогда конъюнкция вида "Всякий **S** есть **P** & Всякий **S** не есть **P**" является ложным утверждением на каждой модельной схеме, и тем самым ее отрицание будет всегда истинным. Отсюда следует, что имеет место логический закон:

7. $\models$ ¬(Всякий S есть P & Всякий S не есть P) — *закон контрарного противоречия*,

что позволяет сразу же обосновать и принять умозаключение вида:

$$\frac{\text{Всякий S есть P}}{\neg\text{Всякий S не есть P}}.$$

Между *i* и *o* существует отношение *субконтрарности (подпротивоположности)*, то есть эти высказывания не могут быть одновременно ложными, хотя и могут быть одновременно истинными. Столбцы 3 и 4 подтаблицы 1 показывают, что это действительно так. Отсюда сразу получаем, что дизъюнкция этих двух высказываний на каждой из семи модельных схем принимает значение "истина", то есть имеет место логический закон:

8. $\models$ (Некоторый S есть P ∨ Некоторый S не есть P) — *закон субконтрарного исключенного третьего*.

Данный закон позволяет обосновать непосредственное умозаключение по логическому квадрату вида:

$$\frac{\neg\text{Некоторый S есть P}}{\text{Некоторый S не есть P}}.$$

На диагоналях квадрата расположены высказывания, находящиеся в отношении *контрадикторности (противоречия)*. Они не могут быть одновременно истинными и одновременно ложными (см. столбцы 1 и 4 (2 и 3)). Таким образом, имеем:

9. $\models$ ¬(Всякий S есть P & Некоторый S не есть P) — *закон противоречия для a* и *o*.
10. $\models$ ¬(Всякий S не есть P & Некоторый S есть P) — *закон противоречия для e* и *i*.
11. $\models$ (Всякий S есть P ∨ Некоторый S не есть P) — *закон исключенного третьего для a* и *o*.
12. $\models$ (Всякий S не есть P ∨ Некоторый S есть P) — *закон исключенного третьего для e* и *i*.

Это обосновывает умозаключения следующих видов:

$$\frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\neg\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}, \qquad \frac{\neg\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}},$$

$$\frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}{\neg\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}, \qquad \frac{\neg\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}.$$

Данные непосредственные умозаключения по логическому квадрату называются *диагональными соотношениями*. Они говорят о том, что выражения, стоящие над чертой и под чертой, являются эквивалентными, то есть несут одну и ту же информацию. Например, сказать: "Неверно, что все птицы улетают зимой на юг" — то же самое, что сказать "Некоторые птицы не улетают зимой на юг", а сказать: "Неверно, что некоторые писатели не люди" — то же самое, что сказать: "Все писатели — люди". Здесь одна и та же информация выражается предложениями различной формы.

Перейдем теперь к рассмотрению подтаблицы 2, которая позволяет проверить правильность умозаключений другого типа, называемых операцией *обращения*. Под обращением (conversio) понимается непосредственное умозаключение, в котором субъект заключения совпадает с предикатом посылки, а предикат заключения — с субъектом посылки. Различают два вида обращения: *чистое обращение* (*conversio simplex*) — когда количественная характеристика высказывания не изменяется, и *обращение с ограничением* (*conversio per accidens*) — когда количественная характеристика изменяется. Для высказываний *e* и *i* (см. столбцы 2 и 6 (3 и 7)) правильным является чистое обращение вида:

$$\frac{\text{Всякий } \mathbf{S} \text{ не есть } \mathbf{P}}{\text{Всякий } \mathbf{P} \text{ не есть } \mathbf{S}}, \qquad \frac{\text{Некоторый } \mathbf{S} \text{ есть } \mathbf{P}}{\text{Некоторый } \mathbf{P} \text{ есть } \mathbf{S}}.$$

Например, высказывание "Ни одно четное число не является иррациональным" логически эквивалентно высказыванию "Ни одно иррациональное число не является четным", а высказывание "Некоторые высокомерные люди — красавцы" эквивалентно высказыванию "Некоторые красавцы — высокомерные люди".

Для высказывания типа *a* правильным является только обращение с ограничением (см. столбцы 1 и 7):

$$\frac{\text{Всякий S есть P}}{\text{Некоторый P есть S}},$$

а переход от высказывания типа "Всякий S есть P" к высказыванию "Всякий P есть S" является неправильным. Например, от предложения "Все киты — млекопитающие" можно умозаключить только к предложению "Некоторые млекопитающие — киты".

Обращение с ограничением имеет место и для высказываний типа *e* (см. столбцы 2 и 8):

$$\frac{\text{Всякий S не есть P}}{\text{Некоторый P не есть S}}.$$

Высказывания типа *o* вообще не обращаются, так как любые их обращения неправильны, что легко устанавливается по таблице 2.

§ 4. Простой категорический силлогизм

Рассмотрим двухпосылочные умозаключения вида: $A_1, A_2 \vdash B$. Умозаключение, в котором от наличия некоторых отношений между терминами S и M и терминами P и M, фиксируемых в посылках, приходят к заключению о наличии определенного отношения между терминами S и P, называется простым категорическим силлогизмом.

Общий термин, содержащийся в A_1 и A_2, связывает посылки и опосредует следование из них заключения B. Поэтому умозаключения такого вида часто называются *опосредованными*.

Примером силлогизма является умозаключение:

Слово "бег" обозначает действие.
Слово "бег" — существительное.

Некоторые существительные обозначают действия.

В нем содержатся три высказывания: первые два являются посылками, а последнее — заключением. Общим термином служит словосочетание «слово "бег"», связывающее термины посылок — "существительное" и "обозначает действие".

Будем далее называть меньшим термином тот термин, который является субъектом заключения, а бóльшим тот, который является предикатом заключения. Термин же, являющийся общим для обеих посылок, будем называть средним термином.

Будем далее называть посылку, содержащую меньший термин, меньшей посылкой, а посылку, содержащую больший термин,— большей посылкой. Условимся также всегда помещать *бо́льшую* посылку на первое место, а под ней записывать *меньшую* посылку.

Приняв эти условия, можно все простые категорические силлогизмы разделить по так называемым *фигурам*. Каждая фигура — это множество простых категорических силлогизмов, имеющих одну и ту же структуру, определяемую расположением среднего термина в посылках (см. рис. 3).

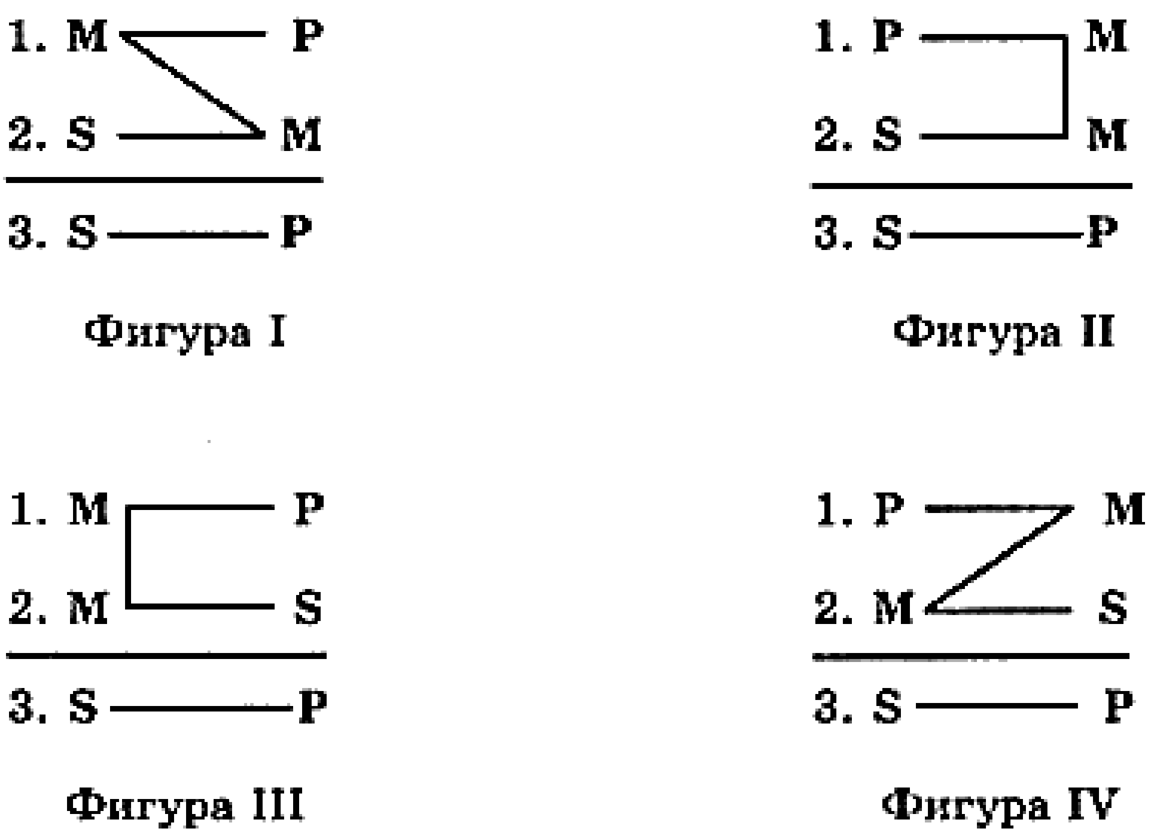


Рис. 3

Здесь цифрой 1 обозначается бо́льшая посылка, цифрой 2 — меньшая посылка, а цифрой 3 — заключение. Буква S обозначает меньший термин, буква P — больший, а буква M — средний термин. Очевидно, что средний термин можно расположить только указанными четырьмя способами, а потому существуют только четыре различные фигуры.

Если в фигуре указать тип высказываний, стоящих на местах посылок и заключения, то получим разновидность данной фигуры. Так, если взять I фигуру и положить, что большая посылка, меньшая посылка и заключение — это высказывания типа *a*, то получим силлогизм (разновидность) I фигуры:

1. Всякий M есть P
2. Всякий S есть M

---

3. Всякий S есть P

Такого рода разновидности фигур называются их *модусами*.

В каждой фигуре имеется 64 модуса (разновидностей фигур), а по всем четырем фигурам — 256. Однако не во всех из них заключение логически следует из посылок. Те модусы, для которых следование имеет место, называются правильными. Всего существует 24 правильных модуса. Все они в средневековье получили специальные названия. Так, приведенный выше модус I фигуры называется *Barbara* (иногда пишут *aaa*, указывая последовательно слева направо тип высказывания большей, меньшей посылок и заключения).

I фигура	II фигура
Barbara (aaa)	*Baroko (aoo)*
Celarent (eae)	*Cesare (eae)*
Darii (aii)	*Camestres (aee)*
Ferio (eio)	*Festino (eio)*
Barbari (aai)	*Camestrop (aeo)*
Celaront (eao)	*Cesaro (eao)*

III фигура	IV фигура
Bokardo (oao)	*Camenos (aeo)*
Disamis (iai)	*Dimaris (iai)*
Datisi (aii)	*Camenes (aee)*
Ferison (eio)	*Fresison (eio)*
Darapti (aai)	*Bramantip (aai)*
Felapton (eao)	*Fesapo (eao)*

Таблица 3

Для проверки правильности конкретных рассуждений, строящихся в форме простого категорического силлогизма, вовсе нет необходимости запоминать правильные модусы, знать их названия. Для этого можно воспользоваться семантическими условиями истинности категорических высказываний, задаваемых пунктами (1)–(4) § 2. Проверим, например, правильность рассуждения:

1. Ни одно ластоногое животное не есть рыба.
2. Все тюлени — ластоногие животные.

---

3. Ни один тюлень не является рыбой.

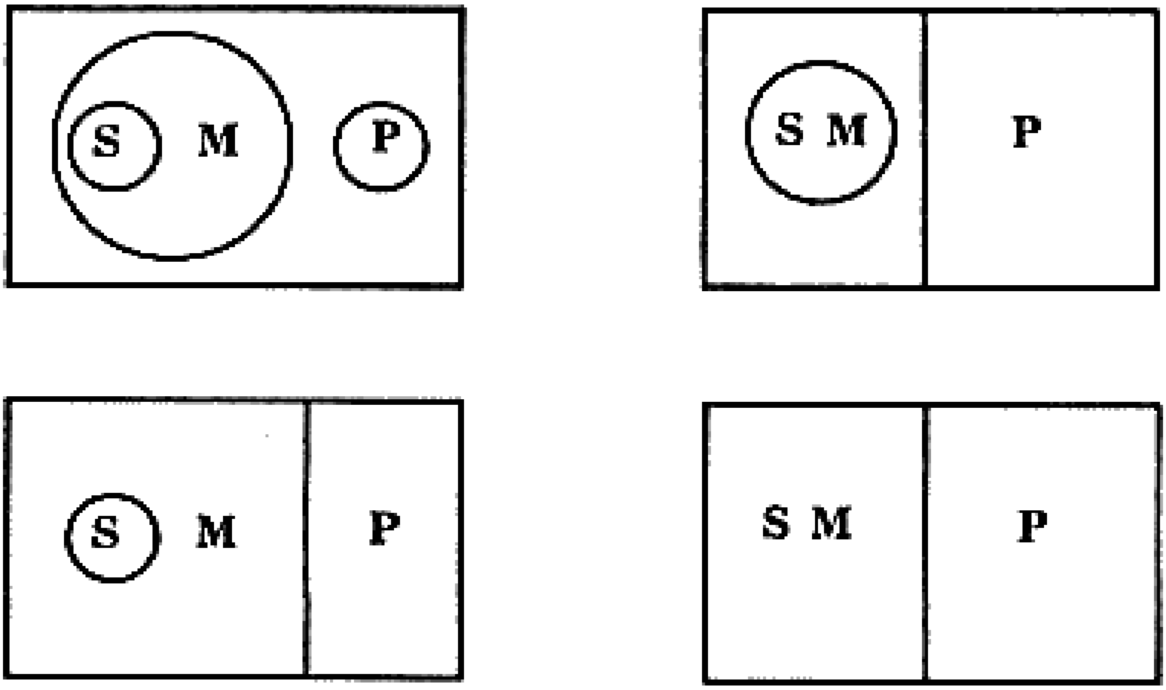
Это рассуждение осуществляется по модусу *Celarent* I фигуры, имеющему вид:

1. Ни один M не есть P
2. Всякий S есть M

---

3. Ни один S не есть P

Чтобы проверить его правильность, достаточно рассмотреть лишь такие модельные схемы, на которых посылки одновременно принимают значение "истина". Множество таких схем по трем переменным S, P и M состоит в точности из следующих четырех модельных схем:



На каждой из этих схем термины M и P, а также S и M находятся в таких отношениях друг к другу, что посылки "Ни один M не есть P" и "Всякий S есть M" оказываются одновременно истинными. Проверяя теперь, в каком отношении на этих схемах находятся термины S и P, обнаруживаем, что в каждой из них будет справедливо утверждать "Ни один S не есть P", что и обосновывает наличие указанного следования.

Обоснование модуса *Celarent* означает, что умозаключение данной формы правильно для любых непустых и неуниверсальных терминов **S**, **P** и **M**. Так, взяв в качестве **S** термин "правильный модус по I фигуре", в качестве **P** — "физический закон" и в качестве **M** — "силлогизм", можем утверждать, что так как предложения "Ни один силлогизм не является физическим законом" и "Любой правильный модус по I фигуре — это силлогизм" истинны, то по модусу *Celarent* обязательно должно быть истинным и предложение "Любой правильный модус по I фигуре не есть физический закон".

Модельные схемы позволяют не только устанавливать, но и опровергать наличие логического следования. Для этого необходимо сначала выявить логическую форму рассуждения, а затем указать хотя бы одну модельную схему, на которой посылки будут истинными, а заключение — ложным. Пусть проверяется рассуждение:

1. Некоторые вещества, ускоряющие химические реакции, не участвуют в реакции.
2. Все катализаторы являются веществами, ускоряющими химические реакции.

---

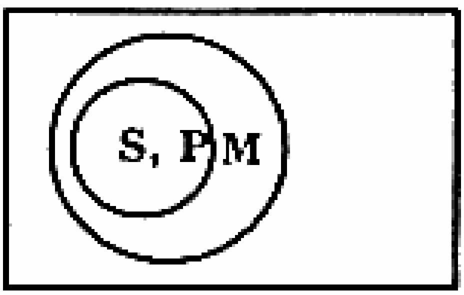
3. Все катализаторы не участвуют в реакции.

Положив, что **S** — это "катализаторы", **M** — "вещества, ускоряющие химические реакции", и **P** — "вещества, участвующие в химических реакциях", находим, что рассуждение имеет форму модуса *oae* I фигуры, то есть

1. Некоторый **M** не есть **P** (*o*)
2. Всякий **S** есть **M** (*a*)

---

3. Ни один **S** не есть **P** (*e*)



Приведенная сразу же под рассматриваемым силлогизмом модельная схема, как говорят в логике, "проваливает" данный модус, так как на этой схеме обе посылки силлогизма будут истинными, а заключение — ложным. На основе этой схемы можно построить интуитивно более наглядный контрпример данному рассуждению. Для этого необходимо так подобрать термины **S**, **P** и **M**, чтобы посылки оказались истинными, а заключение — заведомо ложным. В нашем случае в качестве таких терминов можно взять, например, "треугольник" (**M**), "равносторонний треугольник" (**P**) и "равноугольный треугольник" (**S**). Осуществляя теперь подстановку этих терминов в рассматриваемый *модус oae* I фигуры, получим умозаключение с истинными посылками:

1. Некоторый треугольник не является равносторонним.
2. Всякий равноугольный треугольник — треугольник.

и ложным заключением:

3. Всякий равноугольный треугольник не есть равносторонний треугольник.

Данное рассуждение показывает, что умозаключение вида

1. Некоторый **M** не есть **P** (*o*)
2. Всякий **S** есть **M** (*a*)

---

3. Ни один **S** не есть **P** (*e*)

не удовлетворяет отношению логического следования, так как имеются истинные посылки данного типа, при которых заключение оказывается ложным.

Семантический метод решения вопроса о правильности модусов сталкивается с той трудностью, что число возможных модельных схем отношений между терминами быстро растет с увеличением числа терминов. Если для случая одного термина существует ровно одна модельная схема, для двух различных терминов существует ровно семь различных модельных схем, то уже в случае трех различных терминов число всех отличных друг от друга модельных схем увеличивается почти до 200. Это делает необходимым нахождение более простых и не столь громоздких способов проверки правильности модусов простого категорического силлогизма.

Такой способ имеется. Он носит синтаксический характер и содержит перечень правил. Выполнение каждого правила является необходимым, а всех вместе — достаточным условием, чтобы считать некоторый модус правильным. Эти правила называются *общими правилами силлогизма* и подразделяются на *правила терминов и правила посылок*.

Модус простого категорического силлогизма является правильным, если и только если он удовлетворяет следующим условиям.

— Для терминов:

(1) Имеется посылка, в которой средний термин распределен.
(2) Если термин распределен в заключении, то он распределен и в посылке.

— Для посылок:

(3) Имеется утвердительная посылка.
(4) Если утвердительными являются обе посылки, то заключение — утвердительное высказывание.
(5) Если имеется отрицательная посылка, то заключение — отрицательное высказывание.

Эти правила позволяют при их использовании быстро и эффективно решать вопрос о правильности или неправильности модусов. Так, приводившийся пример модуса *oae* I фигуры нарушает условие (1) и (2) для терминов, а потому не является правильным модусом.

Иногда для отдельных фигур указывают специальные их свойства, которые выполняются для всех правильных модусов этих фигур. Однако они не являются критериями правильности. Эти свойства таковы: в любом правильном модусе по I фигуре бóльшая посылка — общее высказывание, а меньшая — утвердительная; в любом правильном модусе по II фигуре бóльшая посылка — общее высказывание, одна из посылок отрицательная; в любом правильном модусе по III фигуре меньшая посылка — утвердительное высказывание, а заключение — частное. Еще раз подчеркнем, что эти свойства не являются критериями правильности, так как существует большое количество неправильных модусов, которые обладают указанными свойствами.

§ 5. Негативная силлогистика

До сих пор рассматривалась позитивная традиционная силлогистика, в которой выполнялись все ограничительные условия, описанные в § 1. Переходя к негативной традиционной силлогистике, мы ослабим одно из требований, а именно будем интересоваться внутренней структурой терминов и будем теперь пользоваться не только примитивными, элементарными терминами вида S, P, M, но и сложными терминами, образованными из простых посредством их отрицания. В качестве знака отрицания терминов (терминного отрицания) будем использовать черту. Таким образом, в негативной (отрицательной) силлогистике у нас появятся новые термины вида -S, -P, -M, которые будут читаться: "не-S", "не-P", "не-M". Например, теперь наряду с положительными терминами "человек", "высокий человек", "человек, знающий все европейские языки", разрешается использовать и такие отрицательные термины, как "не-человек", "не-высокий человек", "человек, не-знающий все европейские языки" и т.д.

Особо подчеркнем различие между двумя видами отрицаний, выражаемых знаками "-" и "¬". Первое отрицание — это операция над терминами, позволяющая строить из одних терминов другие термины (отрицательные термины). Второе же отрицание — пропозициональное отрицание — это операция не над терминами, а над высказываниями. Она позволяет из некоторого высказывания строить новое (отрицательное) высказывание.

Введение отрицательных терминов расширяет виды категорических атрибутивных высказываний. Теперь наряду с высказыванием, например, вида "Всякий S есть P" у нас будут и высказывания вида "Всякий S есть -P", "Всякий -S есть P", "Всякий -S есть -P". Все эти новые виды будем относить к высказываниям типа *a*, то есть считать их общеутвердительными, но при этом будем добавлять пояснение — "с отрицательным предикатом", если речь идет о высказывании "Всякий S есть -P"; "с отрицательным субъектом", если речь идет о высказывании "Всякий -S есть P"; "с отрицательным субъектом и предикатом", если речь идет о высказывании "Всякий -S есть -P". Аналогично будем поступать и с категорическими атрибутивными высказываниями типов *e*, *i* и *o*.

Так как все новые выражения принадлежат к высказываниям типов *a*, *e*, *i* и *o*, для них по-прежнему сохраняются условия истинности, заданные в пунктах (1)–(4) § 2. Надо только учитывать, что с отрицательными терминами, скажем, -P, мы будем связывать теперь в точности те предметы из универсума, которые не обладают свойством P. На графических схемах этому будет соответствовать класс предметов, лежащих вне класса P, его принято называть *дополнением к* P *в универсуме* U (см. рис. 4).

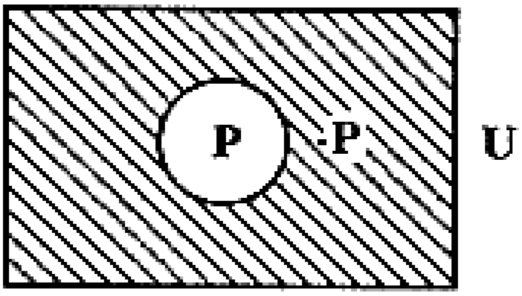
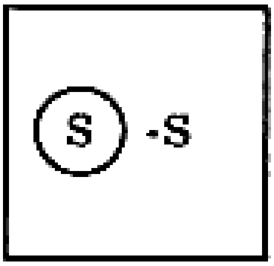
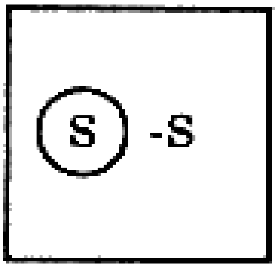
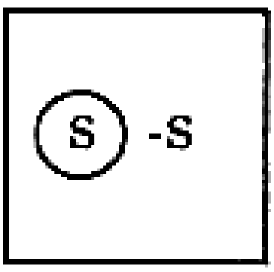


Рис. 4

На рисунке штриховкой показан класс тех предметов из универсума U, которые не обладают свойством P. Этот класс и считается обозначаемым отрицательным термином -P. Аналогично трактуются и все остальные отрицательные термины.

Какие же изменения произойдут в традиционной силлогистике, если добавлены отрицательные термины? Рассмотрим этот вопрос более внимательно. Остановимся прежде всего на простых высказываниях, содержащих ровно один термин (см. табл. 4).

Таблица 4

модельные схемы	S*a*-S	S*e*-S	S*i*-S	S*o*-S
	л	и	л	и
модельные схемы	-S*a*S	-S*e*S	-S*i*S	-S*o*S
	л	и	л	и
модельные схемы	-S*a*-S	-S*e*-S	-S*i*-S	-S*o*-S
	и	л	и	л

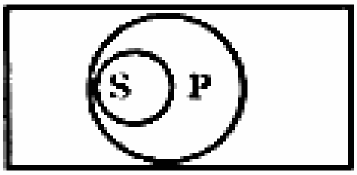
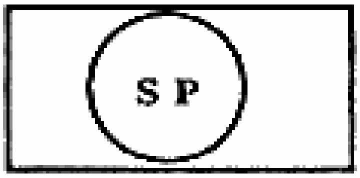
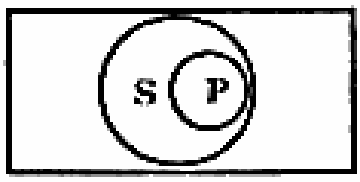
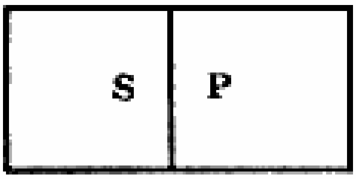
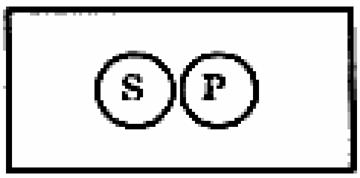
Из таблицы видно, что в негативной силлогистике появляются новые логические законы. К ним, например, относятся законы вида:

13. $\models$ ¬Всякий S есть -S.
14. $\models$ Всякий S не есть -S.
15. $\models$ ¬Некоторый S есть -S.
16. $\models$ Некоторый S не есть -S.

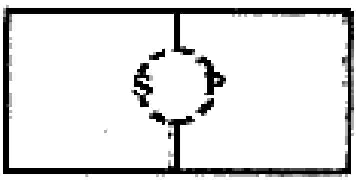
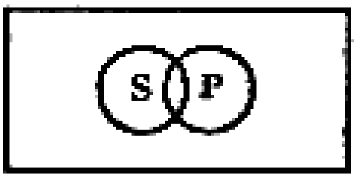
Поэтому логически истинными высказываниями будут высказывания "Неверно, что всякий человек есть не-человек", "Всякое существо, наделенное разумом, не есть существо, не наделенное разумом", "Неверно, что некоторое четное число есть нечетное число", "Некоторая планета не есть не-планета" и т.д.

Введение отрицательных терминов позволяет получить и новые виды непосредственных умозаключений для случая вхождения в простые высказывания различных терминов. Построим с этой целью таблицу 5 (см. табл. 5).

Таблица 5

модельные схемы	S*a*P	S*e*P	S*i*P	S*o*P	S*a*-P	S*e*-P	S*i*-P	S*o*-P
	1	2	3	4	5	6	7	8
	и	л	и	л	л	и	л	и
	и	л	и	л	л	и	л	и
	л	л	и	и	л	л	и	и
	л	и	л	и	и	л	и	л
	л	и	л	и	и	л	и	л

продолжение таблицы 5

	1	2	3	4	5	6	7	8
	л	л	и	и	л	л	и	и
	л	л	и	и	л	л	и	и

Из таблицы видно, что столбец 5 полностью совпадает со столбцом 2, столбец 6 — со столбцом 1, столбец 7 — со столбцом 4 и столбец 8 — со столбцом 3. Это говорит о наличии отношения *логической эквивалентности* между соответствующими высказываниями. Итак, имеют место следующие умозаключения:

Всякий S есть P -||- Всякий S не есть -P,
Всякий S не есть P -||- Всякий S есть -P,
Некоторый S есть P -||- Некоторый S не есть -P,
Некоторый S не есть P -||- Некоторый S есть -P,

называемые операциями *превращения (obversio)*, где знак "-||-" означает наличие выводимости в обе стороны. Под превращением понимается непосредственное умозаключение, в котором субъект заключения совпадает с субъектом посылки, а предикатом заключения является термин, противоречащий предикату посылки. Например, высказывание "Всякий человек разумен" по превращению эквивалентно высказыванию "Ни один человек не является не-разумным".

Используя две операции (обращение и превращение), в негативной силлогистике можно ввести еще некоторые операции.

Операция противопоставления предикату (контрапозиция предикату) получается последовательным применением к исходному высказыванию операции превращения и к полученному результату — операции обращения. Это приводит к следующим умозаключениям:

Всякий S есть P -||- Всякий -P не есть S,
Всякий S не есть P |- Некоторый -P есть S,
Некоторый S не есть P -||- Некоторый -P есть S.

При *противопоставлении предикату*, как видим, субъект S и предикат P меняются местами и термин P берется с отрицанием. Для высказываний типа *i* операция противопоставления предикату не выполняется, так как при превращении это выражение перейдет в высказывание типа *o*, а для последнего нет обращения. Иначе говоря, любое противопоставление предикату высказывания типа *i* является неправильным.

Примером противопоставления предикату будет переход от высказывания "Все люди — разумные существа" к высказыванию "Ни одно не-разумное существо не есть человек".

Операция противопоставления субъекту (контрапозиция субъекту) получается последовательным применением к исходному высказыванию операции обращения и к получившемуся результату — операции превращения. Это приводит к умозаключениям следующих видов:

Всякий S есть P $\vdash$ Некоторый P не есть -S,
Всякий S не есть P $\dashv\vdash$ Всякий P есть -S,
Некоторый S есть P $\dashv\vdash$ Некоторый P не есть -S.

Как видим, при *противопоставлении субъекту* предикат P и субъект S меняются местами и термин S берется с отрицанием. Для высказывания типа *o* операция противопоставления субъекту не выполняется, так как любое противопоставление субъекту этого высказывания неправильно.

Существует и еще одна операция, которая называется *операцией противопоставления субъекту и предикату*, ее можно также назвать *чистым противопоставлением (контрапозицией)*. Она осуществляется последовательным применением операции превращения, обращения и снова превращения. Это дает следующие умозаключения:

Всякий S есть P $\dashv\vdash$ Всякий -P есть -S,
Всякий S не есть P $\vdash$ Некоторый -P не есть -S,
Некоторый S не есть P $\dashv\vdash$ Некоторый -P не есть -S.

Например, мы можем перейти от высказывания "Все люди — разумные существа" к высказыванию "Все не-разумные существа суть не-люди".

Введение отрицательных терминов существенно обогащает и класс двухпосылочных следований, то есть класс категорических силлогизмов. Однако, в отличие от простого категорического силлогизма, в негативном категорическом силлогизме общие правила фигур перестают действовать. Так, в негативной силлогистике является правильным следующий модус:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Всякий M не есть P } (e)\\ \text{Всякий S не есть -M } (e)\end{array}}{\text{Некоторый S есть -P } (a)},$$

в котором нарушается правило (3) общих правил силлогизма. Это обстоятельство вновь ставит вопрос о критериях правильности рассуждений, осуществляемых в рамках теперь уже негативной силлогистики.

Эта задача может быть решена различным образом. Можно, например, построить аксиоматическую дедуктивную теорию негативной силлогистики и считать, что некоторый модус негативного категорического силлогизма обоснован, если он доказуем в данной аксиоматической теории. На такую возможность применительно к позитивной силлогистике обратил внимание уже Аристотель. Он взял в качестве исходных умозаключений (аксиом) модусы *Barbara*, *Celarent*, *Darii* и *Ferio* I фигуры, а все остальные модусы сводил к указанным. Его метод получения новых модусов был закодирован средневековыми логиками в их названиях (см. табл. 3). Первая заглавная буква в названии модуса указывает, к какому модусу I фигуры будет сводиться исследуемый силлогизм; буква "*s*", стоящая сразу после гласной, показывает, что высказывание, обозначенное этой гласной, должно быть подвергнуто чистому обращению; буква "*p*" в такой же позиции говорит, что соответствующее высказывание должно быть обращено с ограничением; буква "*m*" означает, что посылки силлогизма должны быть переставлены местами, то есть бóльшая посылка становится на место меньшей, и наоборот; буква "*k*" служит показателем того, что данный модус надо доказывать методом от противного.

Однако эта задача может быть решена и иным способом. Дело заключается в том, что негативная традиционная силлогистика является фрагментом логики предикатов, а именно логикой одноместных предикатов, ограниченной к тому же условием их непустоты и неуниверсальности. Поэтому можно поступить следующим образом: осуществить перевод категорических атрибутивных высказываний на язык логики предикатов, а далее применить методы, используемые в логике предикатов и исчислении предикатов.

Для негативной традиционной силлогистики перевод осуществляется в два этапа. Вначале осуществляется так называемый *фундаментальный перевод*. Он применяется к элементарным высказываниям типов *a*, *e*, *i* и *o* и имеет следующий вид:

$$S\mathit{a}P \to \forall x(S(x) \supset P(x)),$$
$$S\mathit{e}P \to \forall x(S(x) \supset \neg P(x)),$$
$$S\mathit{i}P \to \exists x(S(x) \,\&\, P(x)),$$
$$S\mathit{o}P \to \exists x(S(x) \,\&\, \neg P(x)).$$

При этом надо иметь в виду, что каждый отрицательный термин, скажем, "-*S*", переводится в исчисление предикатов формулой "$\neg S(x)$".

Затем к полученному результату применяется функция приписывания *пресуппозиций* (некоторых предварительных условий). В традиционной негативной силлогистике такими предварительными условиями являются требования, чтобы все термины были непустыми и неуниверсальными.

Выразим это более точно. Пусть **A** будет произвольным утверждением негативной традиционной силлогистики. Пусть **B** будет формулой исчисления предикатов, образованной из **A** с помощью *фундаментального перевода*. Пусть далее $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — список всех различных элементарных терминов, входящих в **A**. Обозначим через **A*** конъюнкцию вида $\exists xS_1(x) \,\&\, \exists xS_2(x) \,\&\, \ldots \,\&\, \exists xS_n(x)$. Данная конъюнкция выражает условие о непустоте всех терминов, входящих в **A**. Обозначим посредством **A**** конъюнкцию вида $\exists x\neg S_1(x) \,\&\, \exists x\neg S_2(x) \,\&\, \ldots \,\&\, \exists x\neg S_n(x)$. Эта конъюнкция выражает условие о неуниверсальности всех терминов, входящих в **A**. Тогда можно показать справедливость следующего утверждения: **A является общезначимым выражением традиционной негативной силлогистики тогда и только тогда, когда выражение (A* & A**) ⊃ B является общезначимой формулой логики предикатов (теоремой исчисления предикатов).**

Таким образом, проверять правильность силлогизмов можно и в рамках исчисления предикатов, и в рамках логики предикатов.

Покажем, как это можно делать, на примере приведенного выше модуса негативной силлогистики:

Всякий **M** не есть **P**
Всякий **S** не есть **-M**
———————————
Некоторый **S** есть **-P**

Так как в данный силлогизм входят три примитивных термина — **S**, **P** и **M**, то формула $\exists xS(x) \,\&\, \exists xP(x) \,\&\, \exists xM(x)$ выражает условие непустоты этих терминов, а формула $\exists x \neg S(x) \& \exists x \neg P(x) \& \exists x \neg M(x)$ выражает условие их неуниверсальности. Осуществим теперь фундаментальный перевод с языка силлогистики на язык исчисления предикатов посылок и заключения данного модуса. В результате получим следующие формулы: $\forall x(M(x) \supset \neg P(x))$ — перевод первой посылки, $\forall x(S(x) \supset \neg\neg M(x))$ — перевод второй посылки и $\exists x(S(x) \& \neg P(x))$ — перевод заключения. Таким образом, требуется обосновать метаутверждение о выводимости следующего вида:

$$\frac{\begin{array}{l}\exists x S(x) \& \exists x P(x) \& \exists x M(x), \\ \exists x \neg S(x) \& \exists x \neg P(x) \& \exists x \neg M(x), \\ \forall x(M(x) \supset \neg P(x)), \\ \forall x(S(x) \supset \neg\neg M(x))\end{array}}{\exists x(S(x) \& \neg P(x))}$$

Данное метаутверждение о выводимости можно обосновать, например, в натуральном исчислении предикатов с помощью соответствующего вывода.

1. $\exists x S(x) \& \exists x P(x) \& \exists x M(x)$ — пос.
2. $\exists x \neg S(x) \& \exists x \neg P(x) \& \exists x \neg M(x)$ — пос.
3. $\forall x(M(x) \supset \neg P(x))$ — пос.
4. $\forall x(S(x) \supset \neg\neg M(x))$ — пос.
5. $\exists x S(x)$ — $\&_{и}$, 1
6. $S(x)$ — $\exists_{и}$, 5, x — абс.огр.
7. $S(x) \supset \neg\neg M(x)$ — $\forall_{и}$, 4
8. $\neg\neg M(x)$ — $\supset_{и}$, 7, 6
9. $M(x)$ — $\neg_{и}$, 8
10. $M(x) \supset \neg P(x)$ — $\forall_{и}$, 3
11. $\neg P(x)$ — $\supset_{и}$, 10, 9
12. $S(x) \& \neg P(x)$ — $\&_{в}$, 6, 11
13. $\exists x(S(x) \& \neg P(x))$ — $\exists_{в}$, 12

Так как в данном выводе в посылках и заключении не встречается свободно переменная x, которая абсолютно ограничивалась, то вывод является завершенным и тем самым рассматриваемый модус негативной силлогистики обоснован.

Этот же самый результат можно получить и методом аналитических таблиц, что предоставляется проверить самим читателям.

§ 6. Энтимемы

Значение силлогистики состоит прежде всего в том, что исследуемые здесь формы рассуждений широко используются в повседневной практике, являются важным элементом построения аргументации в ходе различного рода *дискуссий*. Однако при практическом осуществлении некоторого *аргументационного процесса*, в ходе *полемики* обычно не пользуются развернутой (полной) формой силлогизма, когда точно указываются все аргументы в пользу какого-либо утверждения и затем скрупулезно демонстрируется, что данное утверждение является логическим следствием принятых аргументов. На самом деле в аргументации обычно используют некоторые сокращенные формы рассуждений (с пропуском некоторых посылок или заключения), называемые энтимемами. Иногда такие пропуски делаются намеренно, ибо недобросовестному спорщику не всегда бывает выгодно раскрывать подлинные свои цели и намерения, то есть раскрывать подлинные теоретические основания аргументации.

Энтимемы делятся на *корректные* и *некорректные*. В силлогистике энтимема считается корректной, если: (1) она может быть восстановлена до правильного модуса категорического силлогизма, (2) все посылки в восстановленном правильном модусе окажутся истинными утверждениями. Последнее требование вытекает из теории аргументации, которая является одной из важнейших составных частей логической прагматики. Согласно этой теории, аргументация считается корректной только при истинности аргументов.

Проверка энтимемы на ее корректность осуществляется с помощью некоторой процедуры, суть которой продемонстрируем на примере следующей аргументации. Допустим, что некто аргументирует таким образом. "Медь — металл,— говорит он,— так как медь — проводник". Спрашивается: можно ли принять эту аргументацию, или она является неверной?

Прежде всего, надо установить, что пропущено в аргументации: пропущено ли заключение или посылка (и какая именно). Для этого в энтимеме надо найти формальные показатели наличия следования. Таковыми являются слова и словосочетания "отсюда следует", "поэтому", "потому что", "ибо", "так как" и другие. Рассматривая с этой точки зрения нашу энтимему, устанавливаем, что некто пытается обосновать положение "медь — металл" ссылкой на то, что "медь — проводник". Это сразу же указывает на то, что высказывание "Медь — металл" — это заключение, где термин "медь" — меньший, а термин "металл" — больший термины. Но тогда предложение "Медь — проводник" — это меньшая посылка, где "проводник" средний термин. Итак, зафиксируем, что нам известно:

1.
2. Медь — проводник (*a*)
_____
3. Медь — металл (*a*),

1.
2. S —— M (*a*)
_____
3. S —— P (*a*)

Исходя из этой информации, теперь можно попытаться восстановить полный модус следующим образом: либо средний термин (М) поставить в большей посылке на место субъекта и идти к модусу I фигуры, либо средний термин поставить в большей посылке на место предиката и восстановить энтимему до модуса II фигуры, то есть

1. M —— P
2. S —— M (*a*)
_____
3. S —— P (*a*),

1. P —— M
2. S —— M (*a*)
_____
3. S —— P (*a*).

Но во II фигуре нет правильных модусов, имеющих в заключении высказывание типа *a*. Поэтому эта возможность отпадает и остается только первый вариант. Рассматривая этот случай, приходим к выводу, что большая посылка должна быть общеутвердительным высказыванием. Итак:

1. Всякий проводник — металл (*a*)
I
2. Медь — проводник (*a*)
_____
3. Медь — металл (*a*),

1. M —— P(*a*)
2. S —— M(*a*)
_____
3. S —— P(*a*)

Это модус *Barbara* I фигуры. Рассуждение, содержащееся в энтимеме, восстановлено до правильного силлогизма. Однако, исходя из логико-прагматических соображений, энтимему нельзя признать удовлетворительной, так как большая посылка в ней является ложной, а потому данную аргументацию нельзя признать корректной.

Рассмотрим следующий пример энтимемы: "Всякое преступление должно быть наказуемо, значит, и всякое воровство — преступление". Применяя к данной энтимеме указанную выше процедуру, приходим к выводу, что высказывание "Всякое воровство — преступление" является заключением аргументации, то есть тезисом, который некто хочет обосновать, а в качестве обосновывающего аргумента выдвигается положение: "Всякое преступление должно быть наказуемо". Из этого анализа вытекает, что меньшим термином (субъектом заключения) будет термин "воровство", а большим термином (предикатом заключения) — термин "преступление". В таком случае термин "должно быть наказуемо" является средним термином, а приведенный аргумент — это бо́льшая посылка. Зафиксируем теперь то, что нам известно:

1. Всякое преступление должно быть наказуемо (*a*)
2.
____,
3. Всякое воровство — преступление (*a*)

или то же самое в форме недостроенной фигуры силлогизма:

1. **P —— M** (*a*)
2.
________________,
3. **S —— P** (*a*)

Продолжая действовать далее, мы должны теперь попытаться восстановить энтимему до полного правильного модуса силлогизма одной из фигур. Очевидно, что термины **S** и **M** можно расположить в меньшей посылке только двумя способами:

1. **M** —— **P** (*a*)
2. **S** —— **M**
________________,
3. **S** —— **P** (*a*)

1. **P** —— **M** (*a*)
2. **M** —— **S**
________________,
3. **S** —— **P** (*a*)

где первое расположение среднего термина даст нам некоторый модус по II фигуре, а второе его расположение даст модус по IV фигуре. Но и во II, и в IV фигурах отсутствуют правильные модусы, у которых заключением было бы высказывание типа *a*. Таким образом, данную энтимему нельзя в принципе восстановить до правильного силлогизма, а потому она является некорректной. Воровство, конечно же, преступление, но обосновывать этот тезис следует иными аргументами.

ГЛАВА VI

ПОНЯТИЕ

§ 1. Общая характеристика понятий

Термины естественного языка (значимые слова или словосочетания, входящие в состав предложений, но сами таковыми не являющиеся) имеют две важнейшие характеристики: *значение* и *смысл*. Напомним, что под значением (экстенсионалом) термина понимают предмет, знаком которого данный термин является. В качестве этого объекта могут выступать индивиды, множества, события, процессы, свойства, отношения, функции и т.д. Под смыслом (интенсионалом) термина имеют в виду ту информацию о его значении, которую содержит сам термин или которая связывается с ним. В обыденной жизни мы не очень задумываемся о смысле терминов. Вполне достаточной оказывается та языковая интуиция, которая стихийно складывается у каждого человека в ходе овладения языком. Эта интуиция состоит в том, что со словами связываются некоторые представления, посредством которых осуществляется соотнесение слов с их значениями. Последние позволяют успешно пользоваться терминами языка и не путать предметы, обозначенные, скажем, словом "стул", с диванами, скамейками, табуретками, креслами и иными предметами, не являющимися стульями.

Однако в целом ряде случаев требуется особая точность, когда опора только на нашу интуицию может давать "сбои". Например, некто **a** заключил договор с **b** на покупку партии стульев и через некоторое время получил от **b** партию табуреток. Спрашивается, как они установят это расхождение, если **b** будет настаивать на том, что он прислал именно стулья? Чтобы такие коллизии не возникали, в самом тексте договора тем или иным способом стараются зафиксировать, о каком товаре идет речь, каковы его характеристики, то есть договариваются об одинаковой трактовке терминов.

Другой областью, где тоже важна четкая терминология, является юриспруденция (область судопроизводства). Здесь всегда необходимо знать, подпадают ли поступки а под ту или иную статью закона. Ведь от этого знания часто зависит судьба человека, а может быть, и его жизнь. Поэтому в соответствующих кодексах стараются однозначно зафиксировать используемую в судопроизводстве терминологию. В частности, пытаются четко указать, какие именно деяния могут быть квалифицированы соответствующей статьей, то есть какого рода поступки могут быть названы такими терминами, как "преступление", "небрежность", "халатность", "получение взятки", "хищение", "спекуляция" и др.

Столь же важное значение имеет точная терминология в научных исследованиях. Так, если в Евклидовой геометрии доказывается теорема "Сумма внутренних углов треугольника равна 2d", то для понимания этого утверждения надо предварительно знать, что имеется в виду под словами "треугольник", "внутренние углы", "сумма" и что за величина обозначена выражением "2d". Без такого знания мы не только не сможем доказать данное утверждение, но попросту не поймем его.

Необходимость принятия терминологических соглашений вытекает из факта многозначности слов естественного языка, проявляющегося при их интуитивном использовании. Ведь у разных людей может существовать разная интуиция. Употребляя одни и те же слова, но вкладывая в них разный смысл, мы теряем возможность правильно передавать другим свои мысли, желания, намерения и, наоборот, теряем способность понимать, что нам пытается сообщить собеседник. Именно в этом скрывается причина многих споров. Люди не соглашаются друг с другом не потому, что придерживаются разных мнений, а лишь потому, что по-разному употребляют одни и те же слова. В таких случаях говорят, что спор идет о словах.

Итак, существует насущная необходимость в однозначном понимании лексики языка. Но что значит понимать термин и как можно достичь однозначного понимания? Понимать термин — значит знать, какие именно предметы подпадают под него, то есть по любому предъявленному нам предмету уметь решать вопрос, можно ли данный предмет обозначить данным термином. Зная это, человек мысленно как бы собирает из совокупности всех предметов в точности те из них, которые обозначаются этим термином, то есть проводит мысленно границу между теми предметами, которые подпадают под него, и теми, которые под него не подпадают. Чтобы достичь однозначности, с термином соединяют обычно особую мысль, в которой как раз и раскрывается его понимание. Эта мысль называется *понятием*.

Понятие есть мысль, которая посредством указания на некоторый признак выделяет из универсума и собирает в класс (обобщает) предметы, обладающие этим признаком.

Например, мысль, выраженная словосочетанием "замкнутая геометрическая фигура, ограниченная тремя сторонами", является понятием, так как она позволяет мысленно собрать в один класс все геометрические фигуры, обладающие признаком "быть замкнутой и ограниченной тремя сторонами", и тем самым отличить их от всех иных геометрических фигур, не обладающих данным признаком. Эта мысль может быть соединена с термином "треугольник", и тогда она указывает на наше понимание этого термина. В этом случае говорят, что рассматриваемая мысль является понятием треугольника.

Необходимо не путать сам термин и понимание этого термина, его понятие. С одним и тем же термином могут связываться разные понятия. Так, с термином "человек" могут быть соединены такие, например, понятия человека: (1) "двуногое и бесперое существо" (Платон), (2) "животное, обладающее мягкой мочкой уха", (3) "политическое животное" (Аристотель), (4) "животное, способное производить орудия труда" (Б.Франклин), (5) "животное, обладающее членораздельной речью" и др.

Из примера видно, что понятия человека отличаются друг от друга использованием разных признаков для отделения класса людей от всех остальных предметов.

С синтаксической точки зрения понятия выражаются конструкцией вида:

$$\alpha A(\alpha),$$

которая называется *универсалией*. Читается эта конструкция следующим образом: "предмет α из универсума U, такой, что α обладает признаком $A(\alpha)$". Универсум U, по которому пробегает переменная α, называется *родом*, а признак $A(\alpha)$ — *видовым отличием*. Таким образом, всякое понятие выделяет в универсуме (роде) U те и только те предметы, которые обладают видовым отличием $A(\alpha)$. Графически это можно изобразить в виде следующей схемы (см. рис. 1).

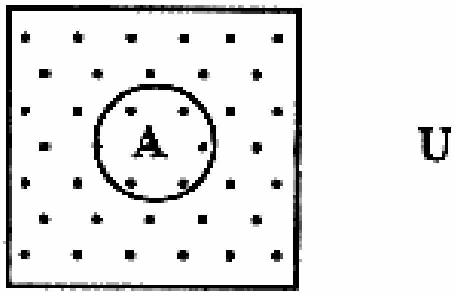


Рис. 1

На рисунке универсум (род) U изображен квадратом. Точками изображены предметы, входящие в U, а кружком, помеченным буквой "А", изображен класс предметов, который выделен из универсума посредством видового отличия $A(\alpha)$.

При формулировке понятий на естественном языке принято одновременно указывать и родовой признак, задающий род (универсум) U, и видовое отличие. Поэтому, чтобы записать понятие в форме универсалии, предварительно необходимо проанализировать выражение естественного языка и установить, что будет считаться родовым признаком, а что видовым. Например, если взять понятие человека, принадлежащее Аристотелю,— "политическое животное", то можно поступить двумя способами: либо считать, что термин "животное" указывает на род, в котором выделяется класс людей, и тогда видовым отличием является признак "быть политическим", либо полагать, что вся лингвистическая конструкция относится к видовому отличию, и тогда следует взять в качестве рода какой-то более широкий класс. Это может быть, например, класс организмов.

Попытаемся теперь, используя прикладной язык логики предикатов, записать данное понятие в форме универсалии с учетом каждого из указанных подходов:

1-й вариант — $x\exists y$(Полис(y) & Гражд.(x, y)),

читается: "предмет x из рода животных, такой, что существует y, являющийся полисом (городом-государством) и x гражданин y";

2-й вариант — x(Живот.(x) & $\exists y$(Полис(y) & Гражд. (x, y))),

читается: "предмет x из рода организмов, такой, что x является животным и существует y, являющийся полисом, и x гражданин y".

Обе формулировки выражают одно и то же понятие человека. Но чтобы ликвидировать возможность недоразумений, будем далее при рассмотрении каких-то совокупностей понятий всегда полагать, что у них один и тот же род.

В связи с данным примером обратим внимание на следующее обстоятельство. В аристотелевском понятии человека свойство "быть политическим" являлось весьма туманным, а потому его требовалось каким-то образом уточнить, что и было сделано указанием на существование y — полисной структуры организации греческих государств — и отношения x в качестве гражданина к этому y. Свойство "быть политическим" в его точном аристотелевском смысле тем самым оказалось сложным свойством.

И еще одна важная особенность демонстрируется приведенным примером. При записи понятий был использован квантор существования для связывания переменной y в выражении "Полис(y) & Гражд.(x, y)". Это обусловлено требованием к построению универсалий. Выражение $\alpha A(\alpha)$ считается правильно построенным, если в видовом отличии $A(\alpha)$ свободными являются в точности те переменные, которые входят в выражение α. Если же это условие не выполнено, то универсалия $\alpha A(\alpha)$ считается неправильно построенным выражением.

С семантической точки зрения каждое понятие обладает двумя важнейшими характеристиками — *содержанием* и *объемом*.

Содержание представляет собой интенсиональную характеристику понятия. **Содержанием понятия, выраженного универсалией $\alpha A(\alpha)$, называется признак $A(\alpha)$, на основании которого обобщаются и выделяются предметы в данном понятии.**

Экстенсиональной характеристикой понятия является его объем. **Объемом понятия, выраженного универсалией $\alpha A(\alpha)$, называется класс всех тех предметов из универсума, которые обладают признаком $A(\alpha)$.** Это множество будем представлять в языке выражением $W\alpha A(\alpha)$, которое читается: "множество тех предметов α из универсума U, для которых верно $A(\alpha)$".

Можно считать, что *значением универсалии* $\alpha A(\alpha)$ как языкового выражения особого типа является $W\alpha A(\alpha)$ — объем соответствующего понятия, а *смыслом универсалии* — содержание этого понятия, то есть признак $A(\alpha)$. Сказанное можно представить в виде семантического треугольника (см. рис. 2).

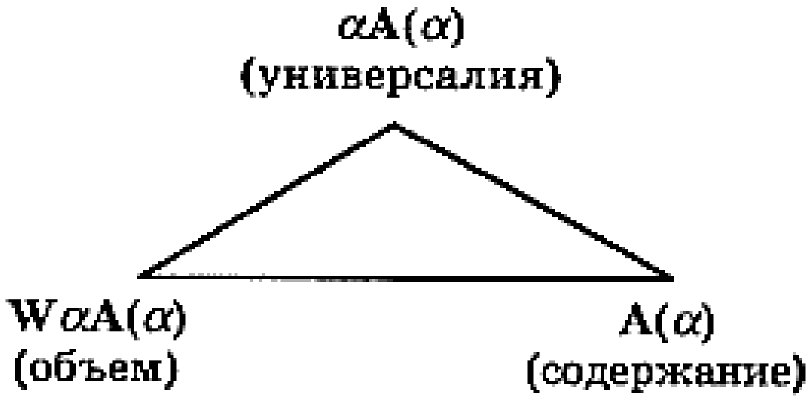


Рис. 2

Будем далее те предметы, которые входят в объемы понятий, называть *элементами* их объемов.

Для любого понятия $\alpha A(\alpha)$ тот факт, что некоторый предмет u из универсума U подпадает под это понятие, будем обозначать записью

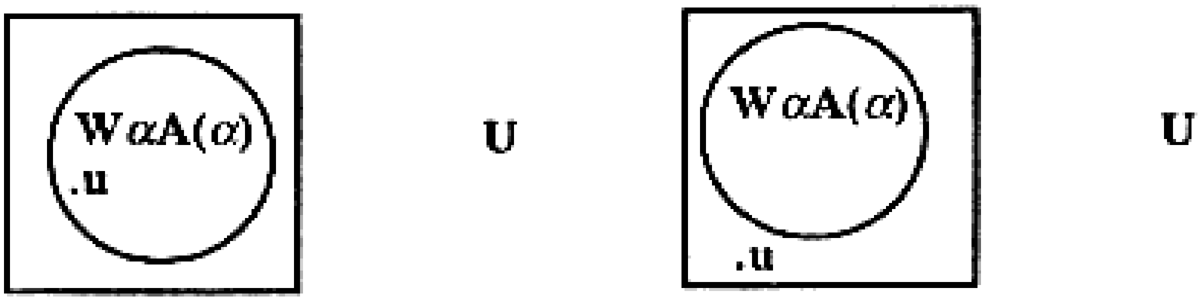
$$u \in W\alpha A(\alpha),$$

читается: "u является элементом $W\alpha A(\alpha)$". Если же u не подпадает под понятие $\alpha A(\alpha)$, то будем записывать это в виде:

$$u \notin W\alpha A(\alpha),$$

что читается: "u не является элементом $W\alpha A(\alpha)$".

Графически эти два факта изображаются схемами (a) и (b) на рис. 3.



(a) (b)

Рис. 3

§ 2. Виды понятий

При выделении видов понятий можно учитывать различные их особенности. Можно учитывать лингвистическую структуру соответствующей универсалии, или семантические характеристики, или их гносеологическое значение и т.п. Далее будут указаны лишь такие виды понятий, которые выделяются по их основным логическим особенностям.

I. С *семантической* точки зрения понятия можно делить по их *объемной характеристике* и *типу элементов*, входящих в их объемы.

1. По объему понятия делятся на *пустые* и *непустые*. Последние делятся в свою очередь на *единичные* и *общие*. Кроме того, понятия можно подразделить по объему на *универсальные* и *неуниверсальные*. Рассмотрим эти виды понятий.

(a) **Пустые понятия — это понятия, в объеме которых нет ни одного элемента.** Например, мысль, выраженная словосочетанием "человек, побывавший на Марсе", является пустым понятием, так как нет ни одного объекта, который бы обладал признаком "быть человеком, побывавшим на Марсе". Естественно, это понятие перестанет быть пустым, после того как люди совершат космическое путешествие на Марс. Пустыми являются понятия “наибольшее натуральное число”, “нынешний король Франции”, “среда, колебание которой представляет собой распространение света”. Последнее понятие раскрывает смысл, который в науке долгое время соотносили термину “эфир”.

Необходимо различать понятия, пустота которых обусловлена разными причинами. Понятие может, например, быть пустым в силу стечения обстоятельств, когда фактический ход истории не позволил осуществиться некоторому событию, хотя при других условиях это событие могло бы произойти и тогда данное понятие было бы непустым. Таковым является понятие “найденный А.С.Пушкиным клад древних монет”. Другой причиной пустоты может быть невозможность существования предметов со свойством $A(\alpha)$, вытекающая из законов природы. Примерами таких пустых понятий являются понятия вечного двигателя, металла, не проводящего электрический ток, бессмертного человека и т.д.

Относительно многих понятий, фигурирующих в науке, до сих пор не известно, пусты они или нет. Таковым является понятие “нечетное совершенное число” (совершенным называется число, сумма делителей которого, отличных от него самого, равна этому числу). Четные совершенные числа известны: это, например, число 6. Но прошло уже несколько тысячелетий, а ученые до сих пор не выяснили, имеются ли нечетные совершенные числа. Другим примером является понятие “элементарная частица, движущаяся со скоростью, большей скорости света”. Ученые даже придумали название для таких частиц — “тахионы”. Но вот имеются ли они в нашем мире — это пока неизвестно.

Понятия, пустота которых обусловлена указанными выше двумя причинами, называются *фактически пустыми*. Но понятия могут быть пусты не только по фактическим основаниям, но и в силу законов логики. У последних видовое отличие $A(\alpha)$ является самопротиворечивым, то есть представляет собой логическое противоречие, как, например, у понятия некруглого круга. Такие понятия называются *логически пустыми*.

Если $\alpha A(\alpha)$ — пустое понятие, независимо от того, фактически или логически оно пусто, то $W\alpha A(\alpha)=\varnothing$, где “$\varnothing$” — знак пустого множества.

(б) К единичным относятся те понятия, в объеме которых содержится ровно один элемент. Например, понятие “древнегреческий философ, выпивший по решению афинского суда яд цикуты” содержит в своем объеме ровно один предмет, которым является Сократ, понятие «автор романа “Евгений Онегин”» содержит в объеме только лишь А.С.Пушкина, а понятие “простое четное число” содержит в качестве элемента лишь число 2.

Единичные понятия следует отличать от имен. С помощью имен мы выделяем некоторый предмет из универсума U. Понятия же, как об этом говорилось выше, не только выделяют предметы из универсума, но и обобщают (собирают) их в класс. А потому экстенсионалом имен является некоторый предмет u, который они именуют, экстенсионалом же единичных понятий (универсалий) является не сам предмет u, а одноэлементное множество { u }, а это разные объекты.

Про некоторое отдельно взятое выражение естественного языка часто трудно бывает сказать — имя это или универсалия. Так, словосочетание «автор романа "Евгений Онегин"» можно трактовать и как имя, и как универсалию. Различить эти два варианта возможно лишь в конкретных контекстах употребления данного выражения.

(в) **К общим относятся понятия, в объеме которых содержится более чем один элемент.** Такими понятиями являются понятия "человек, умеющий играть на скрипке", "учащийся в высшем учебном заведении", "спортсмен, завоевавший первое место на Олимпийских играх" и т.д.

(г) **К числу универсальных относятся понятия, объемы которых совпадают с универсумом (родом) данного понятия.** Строго говоря, такие понятия не несут никакой дополнительной информации об объектах универсума. В универсуме (роде) квадратов таким понятием будет, например, понятие "квадрат, у которого все стороны равны". Здесь видовое отличие — "равенство всех сторон" — присуще всем квадратам, а потому эта характеристика не добавляет ничего нового к знанию о квадратах.

Если $\alpha A(\alpha)$ — универсальное понятие, то $W\alpha A(\alpha) = U$, где U — род данного понятия.

2. Прежде чем перейти к рассмотрению видов понятий по типам обобщаемых предметов, необходимо остановиться на том, что такое *предмет* и какие бывают их типы.

В логике термин "предмет" понимается очень широко. Собственно говоря, предмет — это все, что может стать объектом исследования, о чем мы можем нечто утверждать или отрицать, то есть все то, что может быть предметом нашей мысли. Если поставить вопрос так: а что не может быть предметом мысли, то ответ будет таков — в мире нет ничего, что не могло бы мыслиться человеком. Человек может сделать предметом своей мысли буквально все — начиная от пустоты, ничто и кончая своей собственной мыслью, которую он тоже может подвергнуть исследованию. Итак, предмет — это все что угодно. Однако некоторые предметы мы далее будем трактовать как *индивиды*, другие же как упорядоченные *n-ки индивидов* $<u_1, u_2, \ldots, u_n>$, где $n>1$, либо как *свойства*, присущие этим индивидам, либо как некоторые *отношения*, в которых находятся индивиды, либо как *собрания (классы)* индивидов или *n*-ок индивидов, либо как предметные функции (*предметно-функциональные характеристики*) индивидов. Это и есть основные типы предметов.

Словесно описать, что имеют в виду, когда употребляют термин "индивид", невозможно. Но если все-таки попытаться это сделать, то можно было бы индивид охарактеризовать как некоторую единичность, некоторую целостность, которую мы тем или иным способом выделяем во внешней действительности или во внутреннем (духовном) мире человека. Индивид — это то, что обладает самостоятельным существованием или по крайней мере мы ему приписываем такую самосущность. В этом смысле *n*-ки, свойства, отношения, множества и предметно-функциональные характеристики не являются самосущими предметами, так как это всегда *n*-ки чего-то, свойства, принадлежащие чему-то, отношения, существующие между чем-то, классы и предметно-функциональные характеристики каких-то индивидов или *n*-ок индивидов.

Конечно, приведенное только что описание не является удовлетворительным, ведь понятие индивида фундаментально, несводимо к более простым и может быть разъяснено только на примерах. Индивидами (индивидуальными предметами) являются отдельные столы, дома, планеты, города, машины, элементарные частицы, галактики, особи животного и растительного мира. Сюда же относятся *абстрактные* и *идеальные* предметы: различного рода числа, геометрические фигуры, инерциальные системы отсчета, меридианы и параллели, пространственные и временные точки, математические структуры и т.д. В число индивидов попадут и различного рода мифологические и литературные персонажи.

Итак, в зависимости от того, какие типы предметов обобщаются в понятиях, они делятся на следующие виды.

(а) *Понятия об индивидах*. В этом случае "α" есть некоторая индивидная (предметная) переменная, скажем, x, и структура понятия будет иметь вид

$$xA(x),$$

читается: "$x \in U$, такой, что $A(x)$". Все вышеприведенные примеры понятий были как раз этого вида.

(б) *Понятия об n-ках предметов*. В этом случае "α" есть упорядоченная *n*-ка индивидных переменных, скажем, $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$, где $n>1$, а структура понятия имеет вид

$$<x_1, x_2, \ldots, x_n> A(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

читается: "n-ка индивидов $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$, где $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, \ldots, x_n \in U_n$, такая, что $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$".

Пусть x и y пробегают по универсуму натуральных чисел, тогда универсалия $<x, y> (x < y)$ выражает понятие о парах $<x, y>$ натуральных чисел, находящихся в отношении "меньше". В объем этого понятия $W<x, y> (x < y)$ войдут те и только те пары, у которых первая компонента меньше второй: $<1, 2>$, $<3, 7>$, $<100, 101>$ и т.д. Пусть переменные x, y и z принимают значения в множестве людей, тогда понятие $<x, y> \exists z$(Предок (z, x) & Предок (z, y)) задает смысл термина "родственники", которому соответствует простое понятие $<x, y>$ Родственник (x, y). Пусть x и y принимают значения из класса городов, а z — из множества величин длин, выраженных в километрах (этот универсум есть множество величин — в данном случае множество натуральных чисел с размерностью в километрах). Тогда элементами объема понятия $<x, y, z>$ (расстояние между (x, y) = z) будут тройки $<u_1, u_2, u_3>$, где u_1 и u_2 — города, а u_3 — величина расстояния между ними. Пусть x и y принимают значения из класса людей. Тогда выражение $<x, y>$ (Мужч.(x) & Родитель. (x, y)) есть понятие о таких парах людей, первый из которых является отцом второго.

(в) *Понятия о свойствах*. В этом случае роль переменной "α" выполняет одноместный предикаторный символ, скажем, **P**, и понятие имеет вид

$$PA(P).$$

Читается данное выражение следующим образом: "свойство **P**, заданное на множестве **U**, такое, что верно $A(P)$".

Например, универсалия $P\forall x$(Металл(x) $\supset$ P(x)) есть понятие о свойствах, присущих всем металлам. В объем $WP\forall x$(Металл (x) $\supset$ P(x)) этого понятия войдут такие свойства металлов, как их электропроводность, теплопроводность, и другие общие для всех металлов свойства; универсалия $P\exists xP(x)$, где x принимает значения из множества планет Солнечной системы, задает понятие о свойствах, которые присущи хотя бы одной планете этой системы. В объем $WP\exists xP(x)$ этого понятия войдут свойства "движение вокруг Солнца по эллиптической орбите", "наличие массы", "наличие атмосферы", "наличие жизни" и др.

(г) *Понятия об отношениях*. В этом случае роль переменной "α" выполняет n-местный предикаторный символ, скажем, R^n, где $n > 1$. Структура понятия примет вид

$$R^n A(R^n),$$

читается: "отношение R^n, заданное на универсуме всевозможных n-ок $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$, где $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, ..., $x_n \in U_n$, такое, что верно $A(R^n)$".

Например, универсалия $R\forall xR(x, x)$, где x пробегает по множеству натуральных чисел, задает понятие о двухместных отношениях, удовлетворяющих условию $\forall xR(x, x)$. В объем $WR\forall xR(x,x)$ войдут отношения "≥", "=" и др. Для них верно "$x \geq x$", "$x = x$" для любых натуральных чисел. Пусть x, y и z пробегают по множеству людей, тогда универсалия вида $R\forall x\forall y(R(x, y) \equiv \exists z$(Предок (z, x) & Предок (z, y))) задает понятие о некотором двухместном отношении. В объем этого понятия в качестве элемента войдет ровно одно двухместное отношение — "быть родственниками". Таким образом, данное понятие будет по объему единичным. Универсалия RR(6, 3) есть понятие о всех двухместных отношениях между числами 6 и 3. Таковыми будут: "быть больше", "делиться на" и др. Пусть R есть двухместное отношение, заданное на множестве пар людей. Тогда универсалия $R\forall x\forall y(R(x, y) \equiv$ (Мужч.(x) & Родитель. (x, y))) есть понятие об отношении, выражаемом в русском языке термином "отец" в контекстах вида "x отец y".

(д) *Понятия о предметно-функциональных характеристиках индивидов*. В этом случае роль переменной "α" выполняет n-местный предметно-функциональный символ, скажем, f^n, где $n > 0$. Структура понятия имеет теперь вид

$$f^n A(f^n),$$

читается: "n-местная предметная функция, заданная на универсуме всех n-ок $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$, где $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, ..., $x_n \in U_n$ и принимающая значение в универсуме U_{n+1}, такая, что $A(f^n)$".

Пусть f — это одноместная функция, заданная на небесных телах, а a — планета Земля и переменная z пробегает по универсуму всевозможных величин (действительные числа с различной размерностью), тогда универсалия $f\exists z(f(a) = z)$ есть понятие о предметно-функциональных характеристиках Земли. В объем этого понятия $Wf\exists z(f(a)=z)$ войдут такие, например, предметно-функциональные характеристики, как "масса", "температура", "объем" и др.

Пусть f — одноместная функция, заданная на множестве людей, x и y пробегают тоже по множеству людей. Тогда универсалия вида $f\forall x\exists y\ (f(x) = y \equiv$ (Мужч.(x) & Родитель.(x, y))) есть понятие об одноместной предметной функции, выражаемой в русском языке термином "отец" в контекстах вида "отец х-а".

(е) *Понятия о множествах*. В этом случае "α" есть переменная для множеств, скажем, V. Структура понятия принимает вид

$$VA(V).$$

Читается: "множество V, заданное на универсуме U, такое, что A(V)".

Например, пусть U — множество натуральных чисел. Тогда универсалия $V(2 \in V)$ есть понятие о всех тех множествах натуральных чисел, элементом которых является число 2. В объем $WV(2 \in V)$ данного понятия войдут следующие множества: {2} — одноэлементное множество, содержащее только число 2; всевозможные двухэлементные множества, один из элементов которых — число 2, а другой элемент — любое другое натуральное число; множество всех натуральных чисел и т.д. Пусть V задано на множестве людей. Тогда выражение $V\forall x(x \in V \supset$ Человек$(x))$ есть понятие о всех подмножествах, которые содержатся в множестве людей. В объем этого понятия войдут такие множества, как "множество учащихся", "множество преподавателей", "множество русских" и т.д. При тех же условиях рассмотрим универсалию $V_1(V_1 = WV_2\forall x(x \in V_2 \supset$ Человек $(x)))$. Она задает понятие, в объем которого войдет ровно одно множество, а именно множество всех тех множеств, которые содержатся в классе людей, то есть единственным элементом объема этого понятия будет в точности то множество, которое являлось объемом предыдущего понятия.

В логике рассмотренные виды понятий часто группируются, а тем самым по типу обобщаемых предметов выделяются еще некоторые их виды.

Все понятия делят на *конкретные* и *абстрактные*. Конкретными считаются понятия, элементами объема которых являются индивиды, *n*-ки индивидов или множества индивидов. Все остальные понятия относят к числу абстрактных.

Здесь следует особо оговорить, что к конкретным понятиям относятся любые понятия об индивидах, даже если элементами их объема являются абстрактные предметы, как, например, числа. Важно лишь одно — рассматриваем ли мы числа как индивиды. При таком понимании чисел понятие о них считается конкретным. Однако числа иногда трактуются по-иному — как некоторые свойства. При данной трактовке формулируется иное понятие о числах, которое уже будет абстрактным.

По типу обобщаемых предметов в логике выделяют еще два вида понятий — *собирательные* и *несобирательные*. К собирательным относят понятия, элементами объема которых являются множества (не обязательно — множества индивидов). К числу несобирательных относятся все остальные виды понятий.

Вопрос о собирательных понятиях рассмотрим на примерах конкретных собирательных понятий. Конкретные собирательные понятия обычно имеют следующую структуру:

$$V(V = WyB(y) \mathbin{\&} A(V)),$$

где A(V) — это свойство, присущее всей совокупности, взятой как единое целое, а не свойство элементов, входящих в WyB(y).

Такими являются понятия библиотеки, леса, коллектива, армии, дивизии, Солнечной системы и др. Например, универсалия V(V = WyКнига(y) & ∃z(Помещ.(z) & Хранится в (V, z))) является понятием библиотеки, а выражение вида V(V = WyКнига(y) & ∃z(Помещ.(z) & Хранится в (V, z)) & ∀v(Человек(v) ⊃ Может пользов. (v, V)))) является понятием публичной библиотеки.

II. С точки зрения синтаксической структуры универсалий, посредством которых в языке выражается содержание понятий, последние делятся на *простые* и *сложные*, *положительные* и *отрицательные*, *относительные* и *безотносительные*.

1. К простым относятся те понятия, содержание которых выражается элементарными формулами логики предикатов, то есть формулами вида П(α), где П — предикаторная константа. Например, (а) xЧеловек(x) — "x из класса животных, такой, что x является человеком", (б) xЧетное(x) — "x из класса чисел, такой, что x является четным", (в) xТреугольник(x) — "x из класса геометрических фигур, такой, что x — треугольник".

К сложным относятся те понятия, содержание которых выражается сложными формулами логики предикатов, то есть формулами A(α), в состав которых входят логические константы. Например, (а′) x(Живот.(x) & ∃y(Ор. труда(y) & Спос.сделать(x, y))) — животное, способное производить орудия труда, (б′) x(Число(x) & Делит(2, x)) — число, делящееся на 2, (в′) x(Геом.фиг.(x) & Замкн.(x) & число стор.(x) = 3) — замкнутая геометрическая фигура, ограниченная 3 сторонами. Напомним: поскольку признаки "быть животным", "быть числом", "быть геометрической фигурой" вошли в видовые отличия указанных понятий, переменная x должна пробегать в каждом случае по более широкому классу предметов.

Простым понятиям (а), (б), (в) могут быть сопоставлены соответственно сложные понятия (а′), (б′), (в′). Тем самым с простыми понятиями связывается содержание сложных понятий. Что означает такое сопоставление, будет объяснено в следующей главе.

Среди простых можно выделить такие понятия, которым нельзя в явной форме сопоставить сложные понятия, так как предметы, входящие в их объемы, не удается описать какими-либо сложными признаками, отличными от признака исходных понятий. Эти предметы можно лишь указать с помощью примеров, предъявления экземпляров. Такого рода понятия играют значительную роль в познавательном процессе, так как лежат в основе нашего знания о мире. Именно с их помощью задается содержание других понятий, поэтому они называются *фундаментальными понятиями*. К их числу относятся понятия: "xМножество (x)", "xИндивид(x)", "xТочка(x)", "xПлоскость(x)", "xПрямая(x)" и т.д.

Используя последние три понятия, в геометрии задают все остальные понятия — понятие геометрической фигуры, угла, треугольника, квадрата, катета и др. В физике фундаментальными являются понятия массы, времени и длины, посредством которых выражаются остальные физические величины.

2. По характеру видового отличия $A(\alpha)$ понятия подразделяют на *положительные* и *отрицательные*.

Положительные — это такие понятия, в содержании $A(\alpha)$ которых нет знака логического отрицания "$\neg$". Все примеры понятий, приводившиеся выше, были именно такого типа.

К отрицательным же относятся те понятия, в содержании которых используется знак негации — "$\neg$". Например, выражение <x, y>$\forall$z(Принадл.(z, x) $\equiv$ Принадл.(z, y)) $\vee$ $\neg\exists$z(Принадл.(z, x) & Принадл.(z, y)), где x и y пробегают по множеству прямых, лежащих в одной плоскости, а z — по множеству точек этой плоскости, является отрицательным понятием о параллельных прямых, лежащих в этой плоскости.

3. Понятия об индивидах делятся на *безотносительные* и *относительные*.

Известно, что по любому n-местному признаку (отношению) $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ можно образовать новый признак меньшей местности. Для этого достаточно подставить вместо некоторой свободной переменной константу либо связать ее каким-либо квантором. Уменьшая таким образом местность исходного признака, можно получить в результате признак вида $A(\alpha_i)$, где единственной свободной переменной будет α_i. Получившееся выражение задает уже некоторый одноместный признак, образованный из n-местного отношения. Но одноместные признаки — это свойства предметов, а потому такого рода признаки будем называть "свойствами, образованными от отношений", или более просто — *реляционными свойствами* (от слова "реляция" — отношение).

Относительными являются те понятия, в которых признак $A(\alpha)$ представляет собой реляционное свойство. Таким будут, например, понятие человека, заданное выражением "животное, способное производить орудия труда", и понятие треугольника, заданное выражением "замкнутая геометрическая фигура, ограниченная тремя сторонами".

Безотносительными являются понятия, видовое отличие которых — $A(\alpha)$ — не является реляционным свойством. Примером может служить платоновское понятие человека как двуногого и бесперого существа.

Наконец, среди относительных понятий можно выделить пары понятий, которые называются *соотносительными понятиями*. К их числу принадлежат понятия, образованные за счет использования двухместного отношения, причем данное отношение таково, что в языке существуют специальные термины С и В для обозначения, соответственно, предметов α, находящихся в отношении $A(\alpha, \beta)$, и предметов β, находящихся в отношении $A(\alpha, \beta)$. В этом случае понятие о предметах С задается универсалией "$\alpha \exists \beta A(\alpha, \beta)$", а понятие о предметах В — универсалией "$\beta \exists \alpha A(\alpha, \beta)$". Сами понятия С и В считаются при этом соотнесенными, так как каждое из них предполагает другое.

Возьмем, например, двухместное отношение "Обучает (x, y)" и образуем понятие о первой компоненте пары — x∃yОбучает(x, y). Это понятие задает смысл термина "учитель". Сформулируем теперь понятие о второй компоненте — "y∃xОбучает(x, y)". Это понятие задает смысл термина "ученик". Таким образом, понятия "учитель" и "ученик" являются взаимно соотнесенными. Произнося термин "учитель", мы предполагаем наличие ученика, а произнося термин "ученик", предполагаем наличие учителя.

Соотнесенными понятиями будут понятия "раб" и "рабовладелец", "начальник" и "подчиненный", "делимое" и "делитель" и др.

§ 3. Булевы операции над понятиями и отношения между понятиями

В математике исследуются различные операции, выполняемые над числами: их можно складывать, делить, вычитать, умножать, возводить в степень, извлекать корни и т.д. Точно так же и в логике исследуются различные операции над высказываниями, понятиями и теориями. Причем операции над понятиями бывают двух видов: операции с объемами понятий и операции с их содержаниями. Эти два типа операций, как будет показано далее, являются тесно взаимосвязанными. Операции, к описанию которых мы приступаем, называются *булевыми операциями* — по имени английского логика Дж.Буля, построившего особую алгебру логики, получившую в его честь название *Булевой алгебры*.

Допустим, что даны два понятия $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$. Условимся, что род у этих понятий является одним и тем же. Возьмем объемы данных понятий — $W\alpha A(\alpha)$ и $W\alpha B(\alpha)$. Тогда с этими объемами можно осуществить следующие операции: их можно *пересечь* (эта операция обозначается знаком "$\cap$"), *объединить* (эта операция обозначается знаком "$\cup$"), *вычесть один объем из другого* (эта операция обозначается "\"), осуществить операцию, которая называется "*взятие дополнения*" (эта операция обозначается штрихом "′"). Продемонстрируем, что означают данные операции на конкретном примере двух понятий — "хУчащийся(х)" и "хСпортсмен(х)", у которых общим родом является класс людей.

Пересечь два множества, представляющих объемы понятий $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$,— это значит образовать объем нового понятия, элементами которого будут те и только те предметы, которые одновременно обладают как признаком $A(\alpha)$, так и признаком $B(\alpha)$, то есть обладают признаком $(A(\alpha) \,\&\, B(\alpha))$:

$$W\alpha A(\alpha) \cap W\alpha B(\alpha) \rightleftharpoons W\alpha(A(\alpha) \,\&\, B(\alpha)).$$

Если взять объемы WхУчащийся(х) и WхСпортсмен(х), которые для краткости обозначим соответственно через A и B, то результат их пересечения будет представлен штрихованной частью на рис. 4.

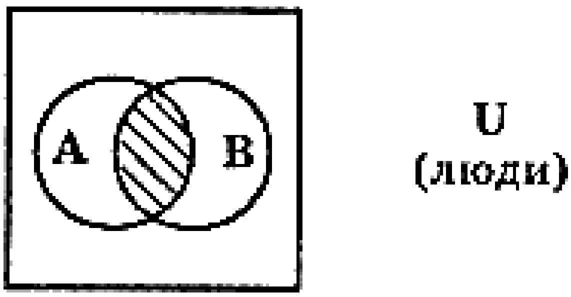


Рис. 4

Элементами в штрихованном множестве как раз и будут те и только те предметы, для которых общим признаком является "быть учащимся и спортсменом", то есть это будет объем $Wx(A(x) \,\&\, B(x))$.

Объединить два множества, представляющих объемы понятий $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$,— это значит образовать объем нового понятия,

элементами которого будут те и только те предметы, которые обладают по крайней мере одним из признаков $A(\alpha)$ или $B(\alpha)$, то есть обладают сложным признаком $(A(\alpha) \vee B(\alpha))$:

$$W\alpha A(\alpha) \cup W\alpha B(\alpha) \leftrightharpoons W\alpha(A(\alpha) \vee B(\alpha)).$$

Для нашего примера с объемами WхУчащийся(х) и WхСпортсмен(х) результат их объединения представлен штрихованной частью на рис. 5.

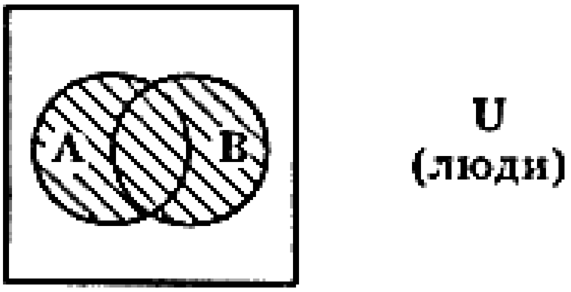


Рис. 5

Действительно, каждый элемент, входящий в заштрихованное множество, обладает признаком "быть учащимся или спортсменом", то есть штрихованная часть — это объем Wх (Учащийся(х) ∨ Спортсмен (х)).

Вычитанием объема понятия $\alpha B(\alpha)$ из объема понятия $\alpha A(\alpha)$ будет объем нового понятия, элементами которого являются те и только те предметы универсума, которые обладают признаком $A(\alpha)$ и не обладают признаком $B(\alpha)$, то есть обладают сложным признаком $(A(\alpha) \,\&\, \neg B(\alpha))$:

$$W\alpha A(\alpha) \setminus W\alpha B(\alpha) \leftrightharpoons W\alpha(A(\alpha) \,\&\, \neg B(\alpha)).$$

В нашем примере при вычитании WхСпортсмен(х) из WхУчащийся(х) образуется объем, элементами которого будут такие учащиеся, которые не являются спортсменами. На рис. 6 этот объем заштрихован.

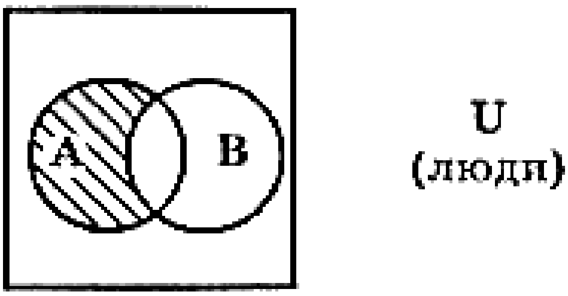


Рис. 6

Рассмотренные операции являются двухместными (бинарными), так как применяются к парам понятий, заданным на одном и том же универсуме. Операция же взятия дополнения является одноместной (унарной) — она применяется к отдельным объемам понятий, заданным на универсуме.

Взять дополнение объема понятия $\alpha A(\alpha)$ — это значит образовать в универсуме U объем нового понятия, элементами которого будут те и только те элементы U, которые не обладают признаком $A(\alpha)$:

$$W\alpha A(\alpha)' \leftrightharpoons W\alpha\neg A(\alpha) \text{ (то есть } U \setminus W\alpha A(\alpha)).$$

Дополнение к объему WxУчащийся(x) есть объем Wx¬Учащийся(x), который на рис. 7 представлен заштрихованной частью.

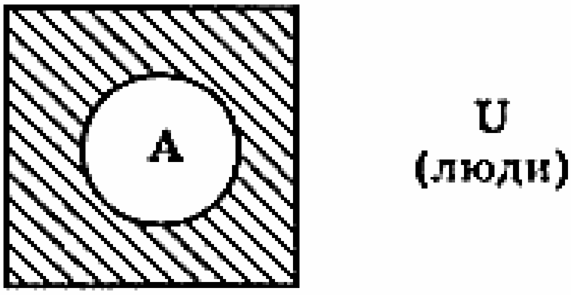


Рис. 7

Из приведенных определений видно, что существует прямая взаимосвязь между операциями над объемами понятий — “∩”, “∪”, “'” и операциями над их содержаниями — “&”, “∨” и “¬”, а именно: объемной операции пересечения “∪” соответствует операция над содержанием — “&”, объемной операции объединения “∪” соответствует операция над содержанием — “∨”, а взятию дополнения “'” соответствует операция отрицания — “¬”. А потому можно оперировать не только с объемами понятий, но и с их содержаниями. Так, если имеются два видовых отличия $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$, составляющих содержание понятий $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$, и они соединяются конъюнктивно в видовое отличие $A(\alpha)$ & $B(\alpha)$, то тем самым создается понятие $\alpha(A(\alpha)$ & $B(\alpha))$, объем которого является пересечением объемов понятий $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$.

Операции над понятиями — это некоторые действия с ними. Но между понятиями существуют и некоторые объективные, независимые от нашей воли и наших желаний *отношения*. Тот факт, что какие-то два понятия находятся друг к другу в некотором объективном отношении, можно установить как по их объемным, так и по содержательным характеристикам.

Пусть даны произвольные два понятия $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$. Будем говорить, что эти два понятия несравнимы, если в первом понятии $\alpha \in U_1$, во втором понятии $\alpha \in U_2$ и $U_1 \neq U_2$, то есть если род первого понятия отличен от рода второго понятия. Например, при обычной формулировке понятий *несравнимыми* будут понятия человека и натурального числа, понятия формулы и небесного тела. У каждого из этих понятий имеется свой собственный род, отличный от родов других понятий.

Два понятия $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$ считаются сравнимыми, если и только если совпадают их роды, то есть $U_1 = U_2$.

Среди всевозможных пар сравнимых понятий прежде всего выделим те, которые находятся в трех *фундаментальных* разновидностях этого отношения. Последние считаются фундаментальными в том смысле, что с помощью различных их комбинаций можно задать все другие виды отношений. К числу фундаментальных отношений принадлежат отношения *совместимости*, *включения* и *исчерпывания*.

Два понятия $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$ считаются совместимыми, если и только если пересечение их объемов A и B непусто, то есть

$$A \cap B \neq \varnothing.$$

Это означает, что в универсуме имеется по крайней мере один элемент, обладающий как признаком $A(\alpha)$, так и признаком $B(\alpha)$, то есть $\exists\alpha(A(\alpha) \,\&\, B(\alpha))$.

Ясно, что если условие совместимости $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$ не выполнено, то есть $A \cap B = \varnothing$, то такие понятия следует считать находящимися в отношении *несовместимости*. В этом случае в универсуме отсутствуют элементы с признаком $A(\alpha) \,\&\, B(\alpha)$, то есть $\neg\exists\alpha(A(\alpha) \,\&\, B(\alpha))$.

Понятие $\alpha A(\alpha)$ включается в понятие $\alpha B(\alpha)$, если и только если каждый элемент объема A является элементом объема B, то есть

$$\forall\alpha(\alpha \in A \supset \alpha \in B).$$

Наличие такого отношения между объемами A и B будем далее обозначать посредством записи $A \subseteq B$, где знак "$\subseteq$" называется *включением*.

Отношение включения может иметь место и в обратную сторону — когда понятие $\alpha B(\alpha)$ включается в понятие $\alpha A(\alpha)$. В этом случае каждый элемент объема B является элементом объема A, то есть

$$\forall\alpha(\alpha \in B \supset \alpha \in A).$$

Наличие этого отношения между объемами понятий будем обозначать посредством записи $B \subsetneq A$.

Два понятия $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$ находятся в отношении исчерпывания, если и только если для их объемов A и B справедливо утверждение:

$$A \cup B = U.$$

Это означает, что каждый предмет из универсума U является элементом или объема первого, или объема второго понятия — $\forall\alpha(A(\alpha) \vee B(\alpha))$.

Если данное условие не выполняется для объемов некоторых понятий $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$, то такие понятия называются находящимися в отношении *неисчерпывания*.

Учитывая теперь различные комбинации фундаментальных отношений, которые возможны для некоторых конкретных понятий $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$ (их совместимость, включенность одного в другое и исчерпываемость), можно было бы установить для них 16 различных нефундаментальных отношений. Если же ограничиться рассмотрением только непустых и неуниверсальных понятий, то для них можно установить ровно 7 различных отношений. Для последних существуют хорошие их представления с помощью так называемых *кругов Эйлера* (см. рис. 8).

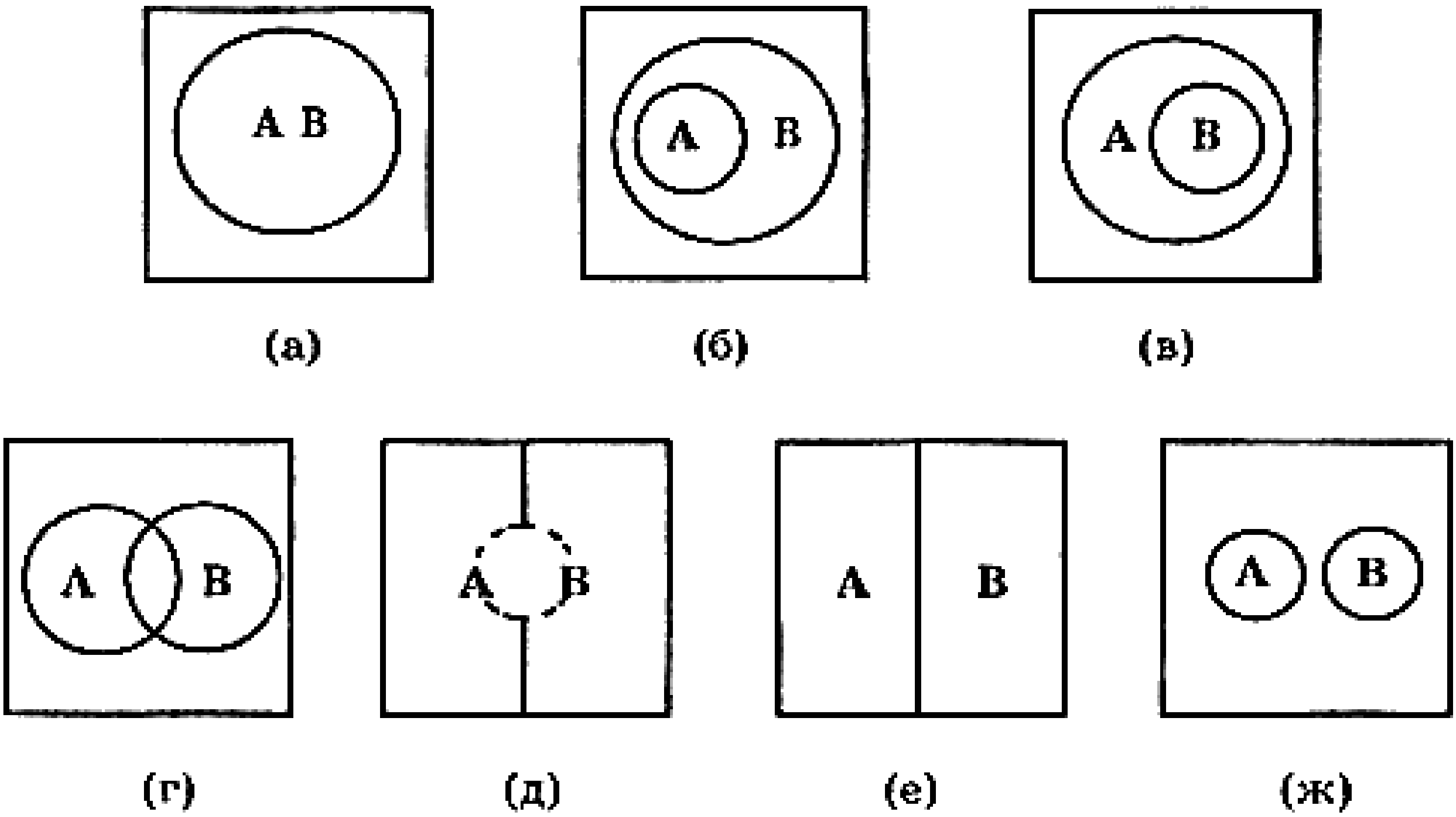


Рис. 8

На схеме (а) представлено отношение *равнообъемности* между понятиями $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$. Оно определяется следующими фундаментальными условиями: понятия $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$ совместимы, первое понятие по объему включается во второе — $A \subseteq B$, второе понятие по объему включается в первое — $B \subseteq A$ и, кроме того, понятия находятся в отношении неисчерпывания. Отношение равнообъемности принято выражать записью $A = B$. В этом отношении находятся, например, понятия "равносторонний треугольник" и "равноугольный треугольник", так как их объемы полностью совпадают всеми своими элементами.

На схеме (б) графически представлено отношение *подчинения понятия* $\alpha A(\alpha)$ понятию $\alpha B(\alpha)$. Оно определяется посредством следующих фундаментальных условий: понятия совместимы, первое понятие включается по объему во второе — $A \subseteq B$, но неверно, что второе понятие включается в первое, и понятия находятся в отношении неисчерпывания. Наличие такого отношения принято выражать посредством записи $A \subset B$. При этом понятие $\alpha A(\alpha)$ называется *видовым*, а понятие $\alpha B(\alpha)$ — *родовым*. В этом отношении находятся, например, понятия учащегося и человека, понятия планеты и небесного тела, если с $\alpha A(\alpha)$ соотнесены, соответственно, первые из них, а с $\alpha B(\alpha)$ — вторые.

На схеме (в) также представлено отношение подчинения, но подчинение обратное, а именно *подчинение* $\alpha B(\alpha)$ *понятию* $\alpha A(\alpha)$. Отличие от предыдущего отношения состоит лишь в том, что здесь понятие $\alpha B(\alpha)$ включается по объему в понятие $\alpha A(\alpha)$ — $B \subseteq A$, и неверно, что имеет место обратное включение. Естественно, это отношение выражается посредством записи $B \subset A$. В этом случае понятие $\alpha B(\alpha)$ является видовым, а $\alpha A(\alpha)$ — родовым. В качестве примеров такого рода отношения могут быть взяты предыдущие понятия, но с $\alpha B(\alpha)$ необходимо теперь соотнести, соответственно, первые из них, а с $\alpha A(\alpha)$ — вторые.

На схеме (г) показано отношение *перекрещивания*. В этом случае понятия $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$ совместимы, отсутствуют включения по объему первого понятия во второе, а также второго понятия в первое и понятия находятся в отношении неисчерпывания. В таком отношении находятся, например, понятия учащегося и спортсмена на множестве (универсуме) людей.

На схеме (д) представлено отношение *дополнительности*. Оно определяется такими фундаментальными условиями: понятия $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$ совместимы, находятся в отношении исчерпывания, но не включаются по объему друг в друга. В этом отношении находятся, например, понятия "число, меньшее ста" и "число, большее восьмидесяти" на универсуме натуральных чисел.

На схеме (е) показано отношение *противоречия* между $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$. В этом случае понятия являются несовместимыми, находятся в отношении исчерпывания и отсутствует включение по объему первого понятия во второе и второго в первое. В этом отношении, в частности, находятся любые два понятия с видовыми отличиями $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha\neg A(\alpha)$, например, понятия "учащийся" и "неучащийся", "преподаватель" и "непреподаватель" и т.д.

На последней схеме (ж) графически задано отношение *соподчинения*. Оно определяется условиями: понятия $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$ несовместимы и не исчерпывают универсум, и, кроме того, оба понятия не включаются по объему друг в друга. Такое отношение свойственно, например, понятиям кометы и звезды на множестве небесных тел.

Отметим, что приведенные выше схемы, задающие рассмотренные только что отношения между непустыми и неуниверсальными понятиями, в точности совпадают с *модельными схемами*, которые использовались в предыдущей главе при построении семантики традиционной силлогистики.

Выше говорилось, что имеется взаимосвязь между объемными характеристиками понятий и их содержательными характеристиками. Одно из важнейших проявлений такой взаимосвязи — так называемый *закон обратного отношения между объемами и содержаниями понятий*. Словесная формулировка этого закона звучит так: **"Объем понятия $\alpha A(\alpha)$ составляет часть объема понятия $\alpha B(\alpha)$, если и только если содержание $\alpha B(\alpha)$ является частью содержания $\alpha A(\alpha)$".**

Так, объем понятия "планета" составляет часть объема понятия "небесное тело", но в таком случае из информации о том, что некий объект x является планетой, можно извлечь информацию, что x является и небесным телом. Заключить в обратную сторону нельзя, так как если x — небесное тело, то это вовсе не означает, что x — планета: ведь x в таком случае мог бы быть и кометой, и астероидом, и звездой, и чем-то еще. Таким образом, информативность выражения "x — планета" больше, чем информативность выражения "x — небесное тело", то есть содержание понятия "небесное тело" составляет часть содержания понятия "планета".

Однако здесь к исходной формулировке закона обратного отношения необходимо сделать одно существенное добавление. Выражение $\forall\alpha(A(\alpha) \supset B(\alpha))$, которое может трактоваться как утверждение о том, что содержание понятия $\alpha A(\alpha)$ больше, чем содержание понятия $\alpha B(\alpha)$, является истинным на некотором конкретном универсуме U. Но установить такую истинность можно, только если на U заданы значения всех дескриптивных терминов, входящих в соответствующие универсалии, и установлены какие-то закономерные отношения между этими значениями. Иначе говоря, установить истинность выражения $\forall\alpha(A(\alpha) \supset B(\alpha))$ можно лишь при наличии некоторого дополнительного знания, описывающего нашу область предметов U. Обычно это осуществляется с помощью некоторой совокупности утверждений, истинных относительно предметной области U. Совокупность эта называется теорией T. Учитывая данное обстоятельство, теперь можно более точно сформулировать закон обратного отношения:

$$W\alpha A(\alpha) \subseteq W\alpha B(\alpha), \text{ если и только если } T \vdash \forall\alpha(A(\alpha) \supset B(\alpha)),$$

где левая часть записи говорит о том, что класс реально существующих предметов, образующий объем понятия $\alpha A(\alpha)$, составляет часть объема понятия $\alpha B(\alpha)$, а правая часть записи означает, что утверждение о соответствующем отношении содержаний данных понятий выводимо в теории T.

Последняя формулировка показывает, что вопрос о наличии отношения включения между объемами понятий сводится к вопросу о выводимости в теории T некоторого предложения, то есть присущность двум понятиям данного отношения можно установить с помощью логики предикатов. Это же верно и для других фундаментальных отношений. Действительно, вопрос о наличии у понятий $\alpha A(\alpha)$ и $\alpha B(\alpha)$ отношения совместимости сводится к построению в исчислении предикатов вывода вида:

$$T \vdash \exists\alpha(A(\alpha) \,\&\, B(\alpha)),$$

а вопрос о наличии у них отношения исчерпывания сводится к построению в исчислении предикатов вывода:

$$T \vdash \forall\alpha(A(\alpha) \vee B(\alpha)).$$

Но так как через данные фундаментальные отношения определяются отношения всех других типов, то отсюда следует, что наличие всех указанных выше отношений может быть установлено в рамках некоторой теории T посредством применения логики предикатов.

§ 4. Операции ограничения, обобщения и деления понятий

Кроме Булевых операций над понятиями можно осуществлять и еще целый ряд других операций. Одной из них является операция *ограничения понятия*.

1. Ограничить непустое понятие $\alpha B(\alpha)$ — это значит указать непустое понятие $\alpha A(\alpha)$, такое, что для их объемов A и B будет справедливо $A \subset B$.

Операция ограничения $\alpha B(\alpha)$, таким образом, состоит в переходе к *видовому* понятию $\alpha A(\alpha)$. Само $\alpha B(\alpha)$ при этом считается *родовым*. Например, пусть на множестве людей задано понятие "писатель". Тогда переход к понятию "русский писатель" является процедурой ограничения. Понятие "русский писатель" является видовым по отношению к понятию "писатель", которое трактуется как родовое.

Процесс ограничения можно продолжить, образовав с этой целью новое понятие $\alpha C(\alpha)$, которое является видовым по отношению к понятию "русский писатель". Пусть $\alpha C(\alpha)$ есть понятие "русский писатель начала XIX в.". Над последним понятием можно в свою очередь произвести операцию ограничения. В результате такой процедуры возникает система подчиненных друг другу понятий (см. рис. 9).

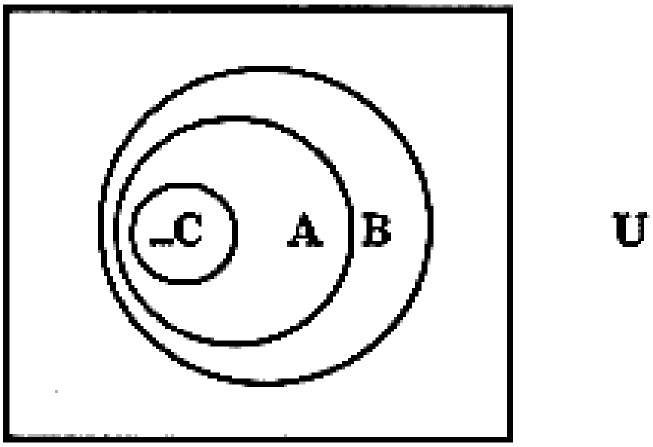


Рис. 9

Для непустых понятий пределом их ограничения считается единичное понятие. Действительно, так как ограничение понятия состоит в разбиении его объема на две непустые части, одна из которых и рассматривается как объем видового понятия $\alpha A(\alpha)$, то ясно, что единичное понятие уже нельзя далее разбить указанным способом.

Для решения вопроса о нахождении для понятия $\alpha B(\alpha)$ ограничивающего его видового понятия можно использовать аппарат исчисления предикатов. В самом деле, если в рамках некоторой теории T удается построить два вывода:

$$T \vdash \forall\alpha(A(\alpha) \supset B(\alpha)) \text{ и } T \vdash \exists\alpha(B(\alpha) \,\&\, \neg A(\alpha)),$$

то понятие $\alpha A(\alpha)$ как раз и будет искомым видовым понятием. Первый вывод обосновывает утверждение $A \subseteq B$, а второй — $\neg(B \subseteq A)$. Отношение же подчинения понятия $\alpha A(\alpha)$ понятию $\alpha B(\alpha)$ было определено как удовлетворяющее условию $(A \subseteq B)$ & $\neg(B \subseteq A)$.

Операцию ограничения объема нельзя путать с *операцией членения предмета*. Первая является действием с объемами понятий, вторая же осуществляется с самими предметами. Например, понятие "здание" можно последовательно ограничивать до понятий "административное здание", "административное здание, расположенное в Москве" и т.д., в то время как членение здания будет состоять в выделении различных его частей: крыши, стен, окон, дверей и т.п. С логической точки зрения различие между двумя этими процедурами состоит в том, что при правильном ограничении понятия $\alpha B(\alpha)$ до понятия $\alpha A(\alpha)$ должно оказаться истинным предложение "Всякий А есть В", в то время как при членении предмета В до предмета А предложение указанного вида будет ложным. В самом деле, истинным является предложение "Всякое административное здание есть здание", но ложным будет предложение "Всякое окно есть здание".

2. Еще одной операцией является операция *обобщения понятий*. Осуществить операцию обобщения понятия $\alpha A(\alpha)$ — это значит указать понятие $\alpha B(\alpha)$, такое, что $A \subset B$, то есть процедура обобщения состоит в переходе к родовому понятию.

Пусть на множестве людей задано понятие "поэт". Тогда переход к понятию "литератор" является процедурой обобщения исходного понятия. Последнее понятие можно обобщить далее до понятия, скажем, "интеллигент". В результате последовательного выполнения этой процедуры возникает система подчиненных друг другу понятий (см. рис. 10).

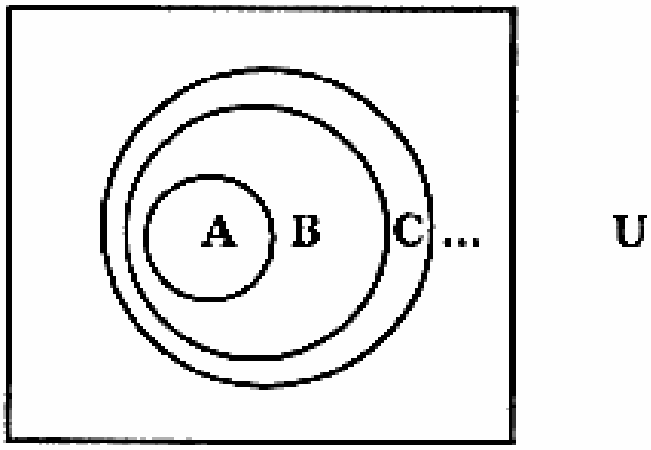


Рис. 10

Пределом обобщения является универсальное понятие, то есть некоторое понятие $\alpha D(\alpha)$, такое, что $W\alpha D(\alpha) = U$. Как и в случае с операцией ограничения, для решения вопроса о нахождении для понятия $\alpha A(\alpha)$ обобщающего его родового понятия можно использовать исчисление предикатов. При этом осуществление тех же выводимостей позволяет заключить, что $\alpha B(\alpha)$ как раз и есть искомое родовое понятие.

3. Еще одной операцией является *операция деления понятий*.

Под операцией деления некоторого непустого понятия $\alpha B(\alpha)$ понимают переход от данного понятия к системе каких-либо понятий $S = \{\alpha A_1(\alpha), \alpha A_2(\alpha), ..., \alpha A_n(\alpha)\}$. Деление считается квазиправильным, если для объемов понятий, входящих в S, выполняются следующие условия:

1) $\forall_i (W\alpha A_i(\alpha) \subset W\alpha B(\alpha))$ — каждое понятие является видовым для $\alpha B(\alpha)$,

2) $\forall_i (W\alpha A_i(\alpha) \neq \varnothing)$ — каждое понятие не пусто,

3) $\forall_i \forall_j (i \neq j \supset W\alpha A_i(\alpha) \cap W\alpha A_j(\alpha) = \varnothing)$ — понятия попарно несовместимы,

4) $W\alpha A_1(\alpha) \cup W\alpha A_2(\alpha) \cup \ldots \cup W\alpha A_n(\alpha) = W\alpha B(\alpha)$ — объединение объемов всех понятий из S совпадает с объемом $\alpha B(\alpha)$.

Деление разбивает объем исходного родового понятия $\alpha B(\alpha)$ на неперекрещивающиеся объемы видовых понятий $\alpha A_i(\alpha)$, причем делает это так, что в сумме они исчерпывают весь объем родового понятия: вне возникшей видовой системы не должно оказаться ни одного элемента из объема $\alpha B(\alpha)$.

При осуществлении операции деления используется следующая терминология: $\alpha B(\alpha)$ называется *делимым понятием*; видовые понятия, входящие в систему S, называются *членами деления*. Кроме того, с каждым делением обязательно связывается еще одна чрезвычайно важная компонента — *основание деления*. **Основанием деления называется такая характеристика предметов, входящих в объем делимого понятия, модификация которой и порождает систему членов деления S.** В зависимости от того, что берется в качестве основания деления, различают два их вида — *дихотомическое деление и деление по видоизменению основания*.

В случае дихотомического деления родового понятия $\alpha B(\alpha)$ основанием деления является некоторый *признак*, присущий лишь части предметов, входящих в объем $\alpha B(\alpha)$. Деление осуществляется по наличию или отсутствию этого признака у предметов делимого понятия. Например, понятие "человек" дихотомически делится, если взять в качестве основания деления признак "быть мужчиной", ровно на два понятия, соответствующих понятиям xМужчина(x) и x ¬Мужчина(x). Это же понятие, но уже по другому основанию может быть разбито на виды xУчащийся(x) и x¬Учащийся(x). В объем одного понятия войдут учащиеся, а в объем другого — все другие люди.

Графически дихотомическое деление представляют в виде дерева с двумя ветвями (см. рис. 11).

Рис. 11

Другой вид деления — это деление по видоизменению основания. В этом случае в качестве основания деления используются *предметно-функциональные* характеристики элементов объема делимого понятия. Необходимо только (для выполнения условий деления) следить, чтобы предметная функция **f**, берущаяся в качестве основания, была всюду определенной на множестве $W\alpha B(\alpha)$. При таком делении объемы видовых понятий представляют собой собрания тех и только тех предметов **a** и **b**, для которых выполняется условие **f(a) = f(b)**.

Примером деления по видоизменению основания является деление понятия "человек" по цвету глаз. Цвет глаз — это одноместная предметно-функциональная характеристика каждого человека. Значением этой функции будет множество цветов {голубой, серый, коричневый, ...}. Применяя эту функцию к отдельным людям, будем получать выражения вида "цвет глаз(Ивана) = голубой", "цвет глаз(Петра) = зеленый" и т.д. В один класс теперь соберутся все люди, обладающие одним и тем же цветом глаз, например голубым. Тем самым порождается множество голубоглазых людей. Аналогично образуется множество сероглазых людей и т.д. Эти классы являются объемами членов деления.

Если выбрать в качестве основания деления другую предметно-функциональную характеристику, присущую каждому человеку, то можно осуществить другое деление этого же понятия. Например, понятие человека можно указанным способом разделить по национальности, росту и т.д.

Всякое квазиправильное деление должно удовлетворять требованиям 1—4, перечисленным выше. Кроме того, всякое деление должно осуществляться *по одному основанию*. Невыполнение этого последнего условия считается ошибкой деления, так как даже при соблюдении всех остальных условий квазиправильности деления (на самом деле при этом часто нарушается 3-е требование) данная процедура ведет к так называемому *скачку в делении*, состоящему в том, что в системе S членов деления $\alpha B(\alpha)$ одни понятия являются видами $\alpha B(\alpha)$, а другие — его подвидами. Например, выше указывалось, что понятие человека может быть по отношению к процессу обучения дихотомически поделено на понятия "учащийся" и "неучащийся". В свою очередь понятие учащегося по другому основанию — характеру обучения — может быть поделено на подвиды "учащийся в системе начального образования", "учащийся в системе среднего образования" и "учащийся в системе высшего образования". Совмещая эти два деления в одном, то есть осуществляя ошибочное деление сразу по двум основаниям, можно, например, получить систему понятий S = {"неучащийся", "учащийся в системе начального образования", "учащийся в системе среднего образования" и "учащийся в системе высшего образования"}, в которой понятие неучащегося является видовым, а все остальные понятия подвидовыми, так как для них не указан ближайший их род — понятие учащегося. Все требования квазиправильности здесь соблюдаются. Тем не менее это деление считается неправильным, так как оно осуществлено не по одному основанию и ведет к скачку в делении, то есть исходное понятие делится не на *ближайшие* видовые понятия.

Итак, деление считается правильным, если выполнены все условия квазиправильности и деление осуществлялось по одному основанию.

Операцию деления иногда путают с операцией членения предмета, то есть вместо перечисления видовых понятий перечисляют понятия о частях предмета. Ошибка устанавливается с помощью того же критерия, что и в случае с ограничением понятия. Для каждого видового понятия $\alpha A(\alpha)$ должно быть истинным высказывание "Всякий А есть В", в то время как ни для одного понятия о частях это предложение не будет истинным. Однако любое членение предмета можно превратить в правильное деление некоторого понятия. Для этого достаточно вместо понятия $\alpha B(\alpha)$, которое ошибочно делилось на понятия о частях предмета, взять понятие "часть В". Например, выше такой предмет, как здание, членился на свои части: окна, двери, стены и т.д. Если теперь образовать понятие "часть здания", то тогда то, что мы раньше неверно считали видом понятия "здание", становится действительно видом, но понятия "часть здания", ведь, например, верно будет сказать: "Всякое окно есть часть здания".

Операция деления лежит в основе построения различного рода *классификаций*. **Под классификацией понимается результат последовательного деления некоторого понятия на его виды, видов на подвиды и т.д.** Классификации играют большую роль в научном познании и практической деятельности людей. Обычно исследование любой совокупности объектов всегда завершается построением их классификации. Это позволяет нам правильно ориентироваться в окружающем мире, принимать верные решения и осуществлять эффективные (ведущие к достижению нужных нам целей) действия.

При построении классификации могут использоваться обе разновидности деления — дихотомическое и по видоизменению основания. Причем каждый акт деления, который применяется при построении классификации, может осуществляться по своему собственному основанию, отличному от оснований, которые использовались в других актах деления.

Любая классификация может быть представлена в форме дерева понятий (см. схему 1). Дерево классификации выглядит как множество точек (*вершин*), соединенных линиями (*ребрами*). Каждая вершина представляет некоторое понятие, которое называют *таксоном* (таксономической единицей). Ребра же показывают, на какие подвиды разбиваются данные таксоны.

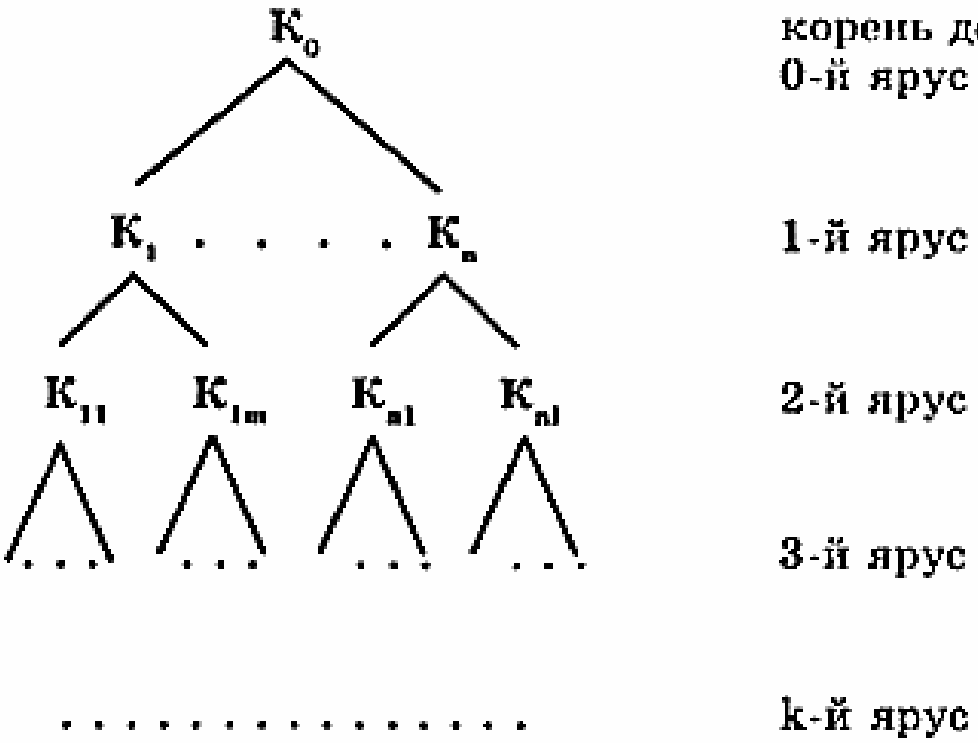


Схема 1

Вершина K_0 называется *корнем дерева*. Она репрезентирует (представляет) исходное делимое понятие. Таксоны группируются по *ярусам*. В каждом ярусе собраны таксоны, полученные в результате одинакового числа применений операций деления к исходному понятию. Те таксоны, которые в данной классификации уже далее не делятся на свои виды, называются *концевыми таксонами*. *Предельной классификацией* является такая классификация, все концевые таксоны которой представляют собой единичные понятия. Однако в зависимости от целей, которые преследуются при построении классификации, концевые таксоны могут и не быть единичными понятиями.

Примером классификации является классификация биологических организмов. Возникающие при этом подмножества распределяются по ярусам, получая в каждом ярусе специальные названия. Так, все организмы делятся первоначально на два множества, называемые царствами (царство животных и царство растений). Эти два множества образуют 1-й ярус — ярус царств. В свою очередь царства делятся на типы, типы на классы, классы на отряды, отряды на семейства, семейства на роды, роды на виды. Последние делятся на разновидности, а разновидности на расы.

Различают два вида классификаций — *искусственные* и *естественные*. Они различаются по характеру оснований, которые используются в операциях деления. Если в качестве оснований делений берутся *существенные* характеристики предметов, то классификация считается естественной, если же в качестве оснований берутся *несущественные*, то есть случайные, характеристики предметов, то классификация относится к искусственной.

Обычно к числу существенных относят те характеристики предметов, которые являются их теоретическими характеристиками, то есть используются при теоретическом описании той предметной области, элементом которой является данный предмет. С этой целью из огромного числа различных свойств, отношений, предметно-функциональных характеристик, присущих предметам, стараются выбрать такие, с помощью которых можно осуществить процедуру дедуцирования как можно большего числа других свойств, отношений, предметно-функциональных характеристик. Существенные характеристики предмета как бы лежат в основе всех других характеристик и составляют его *сущность*. Знание того, что предмет обладает данными характеристиками, позволяет получить очень богатую и разнообразную дополнительную информацию о нем. Так, наличие у человека способности к созданию орудий труда и способность к членораздельной речи являются существенными его признаками, так как позволяют при теоретическом описании человека развернуть стройное учение о человеке и его бытии. В противоположность этому такой признак, как наличие у человека мягкой мочки уха, не является существенным. Зная эту особенность, присущую людям, ничего важного и нового из этого нашего знания получить нельзя.

Из сказанного вовсе не следует делать вывод, что искусственные классификации не представляют никакого интереса. Напротив, они часто выполняют важные практические задачи, и без них наша жизнь была бы затруднена. Например, алфавитный библиотечный каталог является искусственной классификацией книг библиотеки, так как знание того, что книгу, которую я ищу, написал автор с фамилией Иванов, ничего еще не говорит о содержании этой работы. Однако использование алфавитного каталога позволяет быстро найти нужное произведение.

С другой стороны, основная особенность естественных классификаций как раз состоит в том, что, зная местоположение некоторого предмета в данной классификации, нам удается сразу же получить большое число других сведений о предмете. Например, естественная классификация химических элементов, предложенная Д.И.Менделеевым (таблица Менделеева), позволяет по одному только местоположению того или иного элемента в таблице установить огромное число его свойств, предсказать поведение этого элемента в самых различных химических реакциях. То же самое характерно и для современной классификации биологических организмов. Но этой особенностью не обладала классификация организмов, предложенная в XIX веке К.Линнеем, а потому ее относят к числу искусственной.

Так как в основе любой классификации лежат операции деления, то условием правильности классификации является выполнение всех требований, которые определяют правильность деления.

ГЛАВА VII

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

§ 1. Теоретико-познавательные характеристики определений

В предыдущей главе уже говорилось, что в повседневной разговорной практике словарный запас языка обычно используется на интуитивном уровне. У каждого человека эта интуиция складывается стихийно в ходе овладения языком. Было отмечено также, что подобная ситуация в силу наличия у разных людей различной интуиции может вести к взаимному недопониманию и даже недоразумениям. Поэтому имеется насущная потребность в уточнении значений терминов. Но осуществить такое уточнение языковыми средствами можно лишь одним способом — указав смысл, в котором следует понимать данный термин. Именно эту функцию и выполняют определения.

Русский термин "определение", как и латинский его эквивалент — "*definitio*", является производным от слов "предел", "граница". В логике определением (дефиницией) называют логическую процедуру придания строго фиксированного смысла языковым выражениям (терминам языка). Так, ставя в соответствие математическому термину "треугольник" выражение "замкнутая геометрическая фигура, ограниченная тремя сторонами", мы придаем ему тот смысл, в котором он должен использоваться в математике. При этом само соответствие между термином и приданным ему смыслом достигается посредством лингвистической конструкции вида:

> "треугольник есть замкнутая геометрическая
> фигура, ограниченная тремя сторонами",

которая и называется определением.

Так как значения языковых выражений зависят от их смыслов, то всякий раз, придавая через определение какой-либо смысл (содержание) языковому выражению, одновременно с этим невольно указывают и его значение (экстенсионал), то есть в некотором универсуме очерчивается (определивается) граница того класса предметов, которые подпадут под него. Иначе говоря, каждое определение задает не только смысл термина, но и его значение, а потому будем далее полагать, что основной функцией любого определения является задание значения определяемого термина.

В языковой повседневной практике определения применяются для решения различных задач. Часто, например, встречаются ситуации, когда некоторый термин при интуитивном его употреблении разными людьми оказывается столь расплывчатым и неоднозначным, что возникают трудности с его пониманием. В таких случаях встает проблема экспликации (уточнения) смысла данного термина, что крайне важно для его нормативного использования. Эту задачу выполняют толковые и энциклопедические словари, где каждый термин посредством его определения получает некую однозначную стандартную трактовку. С другой стороны, для многих терминов (хотя они и употребляются однозначно в том смысле, что ими обозначаются вполне определенные объекты) зачастую остается неясным, по каким признакам осуществлено отличение данных предметов от всех остальных. В таком случае возникает задача указать некоторый простой или сложный признак, на основе которого отождествляются одни предметы, а другие — отличаются от них. Именно эта цель и стояла перед Платоном, когда он определил термин "человек" условием: "человек есть бесперое и двуногое существо".

Особенно велико значение четкой и однозначной терминологии в научных исследованиях, где вопросу об определениях уделяется самое пристальное внимание. При этом, правда, надо учитывать, что для решения различных научных задач одному и тому же термину могут ставиться в соответствие различные смыслы. Так, для решения задач, которые стояли перед Аристотелем, ему оказалось достаточным определить термин "человек" посредством выражения "политическое животное". С другой стороны, для Б.Франклина такое определение оказалось недостаточным и он определил данный термин другим условием: "животное, способное производить орудия труда". Но и это определение человека не может удовлетворить ученого-естественника, для которого главными признаками человека являются не юридические или социально-экономические признаки, но прежде всего признаки, характеризующие его биологическую природу.

Данный пример показывает, что для решения различных задач один и тот же термин может определяться различными способами. Вообще не существует определений, которые были бы пригодны для решения любых познавательных проблем. Напротив, в повседневной практике смыслы терминов часто строго фиксируются только на момент ведения беседы, и не более того. И даже в сфере науки, где терминам стремятся придать устойчивые, постоянные смыслы, нередко возникают ситуации, которые требуют уточнения, переопределения уже ранее определенных терминов. Последнее является следствием постоянного развития и уточнения научного знания, в соответствии с чем трансформируются и определения научных терминов.

Итак, всякое определение, независимо от целей его введения, представляет собой простую констатацию наличия соответствия между языковым выражением и его смыслом. Такая констатация всегда является *конвенцией* (*соглашением*) об употреблении языковых конструкций. Например, выражение "человек есть политическое животное", рассматриваемое в качестве определения, представляет собой конвенцию о том, что термин "человек" будет употребляться в смысле "политическое животное". Определения как конвенции не являются утверждениями, а потому не могут характеризоваться ни как истинные, ни как ложные. О них можно лишь говорить, удачные они или нет, достигают поставленных целей или нет.

Определения достаточно часто из-за нашей небрежности и вольности в обращении с ними выражаются в языке фразами, которые ничем не отличаются от утверждений. Так, лингвистическая конструкция "человек есть политическое животное" по всем канонам грамматики русского языка выглядит как предложение, утверждающее наличие некоторого свойства у человека. Это создает иллюзию совпадения определений с предложениями и ведет к неверному представлению о том, что определения могут оцениваться как истинные или ложные утверждения. На самом же деле определения — не предложения, а конвенции, призванные ответить на вопрос: "Что будет обозначать данный термин?" или "Какой смысл приписан данному термину?". Поэтому фраза "человек есть политическое животное" является определением, только если рассматривается как ответ на вопрос: "Как будет употребляться термин "человек"?". Чтобы отличить первое употребление этой конструкции (в качестве утверждения) от второго ее употребления (в качестве определения) требуется в самом языке каким-то образом их различить. Последнее достигается, в случае второго использования фразы, ее трансформацией в выражение "человек, *по определению (по дефиниции)* есть политическое животное", которая как раз и подчеркивает, что содержанием фразы является не утверждение, а конвенция.

К определениям предъявляют различного рода *требования*, соблюдение которых гарантирует корректность этой логической операции. В данном параграфе мы сформулируем лишь самые общие теоретико-познавательные требования. Другие условия корректности, налагаемые на отдельные виды определений, будут указаны в следующих параграфах.

а) Всякое определение должно быть *ясным* и *четким*. Это означает, во-первых, что термины, посредством которых разъясняется смысл определяемого термина, сами должны быть осмысленными выражениями. Если смыслы этих терминов не ясны, не понятны, то определение не достигает основной своей познавательной цели — приписывания термину строго фиксированного смысла. В этом случае должны быть предварительно разъяснены (определены) термины, посредством которых задают смысл исходного выражения.

Во-вторых, это означает, что в определении надо указывать лишь то, что необходимо и достаточно для задания смысла термина, то есть в определении не должно быть ничего лишнего. Так, определение термина "квадрат" через указание на то, что это "четырехугольник, являющийся ромбом, у которого равны все стороны, равны все углы, равны диагонали и последние делятся при их пересечении пополам", трудно признать корректным, так как оно содержит совершенно лишнюю информацию, которая не столько разъясняет, сколько затемняет смысл определяемого термина.

б) Требование ясности и четкости определений заставляет нас одни термины определять посредством других, а эти последние в свою очередь определять через некоторые иные термины. В науке это приводит к построению системы взаимосвязанных определений. К этим совокупностям определений предъявляется требование: они не должны содержать *порочного круга*, то есть не должно возникать ситуаций, когда термин В, посредством которого определяется термин А, в конечном итоге сам определяется через термин А. Например, система из двух определений — "логика — это наука о законах правильного мышления" и "правильное мышление — это мышление, подчиняющееся требованиям науки логики" содержит круг, так как "логика" определяется через "правильное мышление", а "правильное мышление" в свою очередь определяется через "логику". Наличие порочного круга считается ошибкой в системе определений.

Среди различных познавательных процедур существует ряд приемов, которые, не будучи сами по себе определениями, в какой-то мере выполняют роль разъяснения значений терминов. К таким приемам относятся так называемые *остенсивные "определения"*, *описание предмета* и его *сравнение* с какими-то иными предметами. Все эти приемы не следует путать с определением.

Остенсивное "определение" — это разъяснение значений терминов путем непосредственного предъявления экземпляров предметов, которые обозначаются ими. Ясно, что эта операция, хотя и носит условное название "определение", не является таковой, так как выходит за пределы языка.

Остенсивные "определения" являются чрезвычайно важным познавательным приемом. Именно с его помощью мы постепенно овладеваем родным языком, накапливаем предварительные сведения о его словарном составе. Велика роль остенсивных "определений" и в научной практике — ведь смыслы наиболее фундаментальных терминов нельзя задать через их словесные формулировки, то есть свести к чему-то более простому и более фундаментальному, так как ничего более простого и более фундаментального просто не существует. Поэтому для разъяснения значений таких терминов приходится прибегать к наглядным примерам, указывать или предъявлять те экземпляры предметов, которые обозначаются данными терминами. Вводя таким способом фундаментальные термины, мы получаем тем самым возможность далее разъяснять смыслы других терминов, уже не выходя за рамки языка.

Другим познавательным приемом является *описание*. В этом случае вместо определения термина приводят более или менее подробный перечень тех признаков, которые присущи предметам, подпадающим под него. Например, "тигр — это животное, похожее на кошку, но более крупных размеров, имеет рыжую окраску с черными поперечными полосами, является хищником". Этот перечень может продолжаться и далее. Цель такого описания — создать у слушателей, которые ни разу не видели тигра, некоторый образ этого животного. Именно так мы и поступили, когда пытались разъяснить, что подразумевают в логике под термином "индивид".

Описание является важным познавательным приемом, и его не следует недооценивать. Особое значение он имеет для так называемых описательных дисциплин — истории, биологии, геологии и т.д. В этих науках описания как бы выполняют роль определений и позволяют, хотя и недостаточно четко, фиксировать смыслы терминов.

Иногда выражения языка разъясняются с помощью *сравнения* одного предмета с другими предметами. Часто такого рода сравнения носят метафорический характер, например "верблюд — корабль пустыни", "нефть — черное золото" и т.п. Выражения такого рода, конечно же, определениями не являются и научной ценности не имеют, хотя и могут выполнять роль идеологических клише.

§ 2. Явные определения

Определения можно разделить на несколько видов. Наиболее существенно их подразделение на *явные* и *неявные*. Последние будут рассмотрены в следующем параграфе.

Явными определениями называются определения, задаваемые лингвистической конструкцией вида:

$$\mathrm{A} \leftrightharpoons \mathrm{B}.$$

Каждая такая конструкция содержит четыре части: A называется *определяемой частью*, B — *определяющей частью*, а знак $\leftrightharpoons$ указывает, что выражение A означает то же самое, что и выражение B. В случаях конкретных определений вместо знака "$\leftrightharpoons$" пишется либо знак "$=_{Df}$" (читается: "равно по дефиниции"), либо знак "$\equiv_{Df}$" (читается: "эквивалентно по дефиниции"). Первый знак употребляется в том случае, когда определяемая часть A является именной конструкцией, а второй в том случае, когда A — высказывательная конструкция. В определяемой части A всегда также присутствует некоторый термин, который и служит целью построения всего определения. Этот термин называется *определяемым термином*. Значение данного выражения будет объяснено ниже.

1. Явные определения делятся по разным основаниям на несколько видов. В зависимости от того, к какой языковой категории относится определяемая часть A, различают следующие виды явных определений.

(а) Дефиниция называется *определением имени*, если A — это собственное имя некоторого предмета a. При этом a может быть не только именем индивида, но и именем свойства, отношения, множества, предметно-функциональной характеристики или еще чего-то. Вся дефиниция имеет вид выражения:

$$\mathrm{a} =_{Df} \iota\alpha \mathrm{B}(\alpha),$$

читается: "a равно по дефиниции тому самому α, для которого верно $\mathrm{B}(\alpha)$". В данном выражении встречается знак "ι". Это особый оператор, который позволяет по понятию $\alpha\mathrm{B}(\alpha)$ в том случае, когда это единичное понятие с объемом $\{\mathrm{a}\}$, построить имя того единственного предмета a, который входит в объем этого понятия,— "тот самый α, для которого верно $\mathrm{B}(\alpha)$".

Приведем два примера таких определений. Выражение вида «А.С.Пушкин — это автор "Евгения Онегина"» является дефиницией имени некоторого конкретного объекта — А.С.Пушкина, а выражение вида "стоимость — это то общее, что есть у всех товаров" является определением имени некоторого абстрактного объекта — предметно-функциональной характеристики товаров, то есть тех предметов, которые обмениваются друг на друга на рынке. Оба определения призваны указать, в каком смысле будут употребляться данные имена. Формальные записи определений будут, соответственно, выглядеть следующим образом:

$$\text{А.С.Пушкин} =_{\text{Df}} \iota x(\text{автор}(x, \text{"Евг.Онегин"})),$$

$$\text{стоимость} =_{\text{Df}} \iota f \forall x \forall y(\text{обмен.на}(x, y) \equiv f(x) = f(y)).$$

(б) Если А представляет собой универсалию вида $\alpha\Pi(\alpha)$, где П — n-местный предикатор, то дефиниция называется *определением универсалии* и записывается в форме

$$\alpha\Pi(\alpha) =_{\text{Df}} \alpha B(\alpha).$$

В определениях этого вида α может быть индивидной переменной, n-кой индивидных переменных, предикатной переменной различной местности, предметно-функциональной переменной различной местности или переменной для множеств. Определяемая часть $\alpha\Pi(\alpha)$ является языковым выражением простого понятия, а определяющая часть $\alpha B(\alpha)$ — сложного понятия. Смысл определения состоит в том, что в нем посредством $\alpha B(\alpha)$ "раскрывается" содержание простого понятия.

Примерами таких определений являются: выражение "$\langle x, y\rangle$ Дед$(x, y) =_{\text{Df}} \langle x, y\rangle \exists z(\text{Отец}(x, z)\ \&\ \text{Родит.}(z, y))$", задающее смысл простой универсалии "пара предметов, находящихся в отношении x дед y-ка", и выражение "$P0(P) =_{\text{Df}} P\neg\exists xP(x)$, которое может быть прочитано следующим образом: "число 0 — это произвольное свойство P, не выполняющееся ни для одного предмета", что (при экстенсиональной трактовке свойств) эквивалентно фразе "число 0 — это произвольное множество P, которое является пустым".

(в) Определение называется *определением высказывательной формы*, если А — простая высказывательная форма $\Pi(\alpha)$, где П — n-местный предикатор или знак n-местной функции истинности. При таких условиях определение имеет вид:

$$\Pi(\alpha) \equiv_{\text{Df}} B(\alpha).$$

Так как П — простой логический функтор, а $B(\alpha)$ — сложная высказывательная форма, то можно сказать, что в определении "раскрывается" смысл выражения П.

Приведем два примера таких определений. Выражение вида "x есть наименьший элемент в множестве M тогда и только тогда, когда он меньше или равен любому элементу из множества M" задает смысл двухместной высказывательной формы "x наименьший элемент в M". Формальная запись этого определения выглядит следующим образом: "Наим. элемент$(x, M) \equiv_{Df} \forall z(z \in M \supset x \leq z)$". Другим примером является выражение "$A \supset B \equiv_{Df} \neg A \vee B$, задающее смысл высказывательной формы "$A \supset B$".

Обратим внимание, что в определениях этого вида в качестве знака конвенционального тождества используется знак $\equiv_{Df}$.

(г) Если A — выражение вида $f(\alpha)$, где f — n-местный предметный функтор, то дефиниция называется *определением функционального выражения*. Сама дефиниция в этом случае принимает вид:

$$f(\alpha) =_{Df} Y(\alpha),$$

где $f(\alpha)$ — простое функциональное выражение, а $Y(\alpha)$ — сложное выражение.

Примером такого определения является следующее выражение:

$$A \times B =_{Df} \{<x, y> \mid x \in A \ \& \ y \in B\}.$$

В этой дефиниции задается определение операции Декартова произведения двух множеств A и B. Смысл этой операции, то есть смысл выражения $A \times B$, "раскрывается" в определяющей части, которая читается так: "множество всевозможных пар $<x, y>$, таких, что $x \in A$ и $y \in B$". Другими примерами определений этого типа являются следующие два определения.

Допустим, что нам уже известна двухместная функция вычитания "$x \dot{-} y$", которая принимает значение $x - y$, если $x \geq y$ и принимает значение 0 в противном случае. Допустим далее, что знак "+" используется в обычном своем арифметическом смысле. Тогда определения вида:

$$|x - y| =_{Df} (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x),$$
$$\min(x, y) =_{Df} x \dot{-} (x \dot{-} y)$$

задают, соответственно, двухместную функцию абсолютного вычитания и двухместную функцию выбора из двух чисел x и y минимального числа. Используя эти дефиниции и зная, как вычислить значения правых выражений, можно узнать и значения левых выражений для соответствующих значений x и y.

Для всех явных определений должны выполняться след ующие требования согласованности: (1) тип переменной α в А В должен быть одинаков, то есть если α — индивидная еременная в А, то и В переменная α является индивидной, сли α — это предикатная переменная определенной местности А, то и в В переменная α — предикатная переменная той же естности и т.д., (2) тип выражения А должен совпадать с ипом выражения В, то есть если А — имя, то и В должно ыть именем, если А — универсалия, то и В должно быть ниверсалией и т.д.

читается, что в каждом явном определении определяется екоторый термин, который называется *определяемым термином*. удем считать, что в определении имен определяемым термином вляется имя а, в определениях же универсалий, высказыват-ельных форм и функциональных выражений определяемыми вляются термины П и f.

определяемым термином связывается еще одно требование, редъявляемое к явным определениям; (3) определяемый термин е должен встречаться в определяющей части В. Если явное пределение таким свойством не обладает, то оно считается шибочным. Про такое определение говорят, что оно является *автологичным*, то есть определяет то же через то же, а тем амым не несет никакой новой информации об употреблении терм-инов. Является тавтологичным, например, определение множ-ества как совокупности любых предметов, так как определяемый ермин "множество" входит в определяющую часть, где слово совокупность" есть просто синоним слова "множество".

Среди явных определений выделяют *родо-видовые* и *не родо-в идовые* определения. К первым относятся все определения, оторые строятся с использованием универсалий αВ(α). Они азываются родо-видовыми, так как универсалия трактуется как ыражение, указывающее на род и видовое отличие,— "предмет из рода U, такой, что В(α)". Родо-видовыми являются, таким бразом, все определения вида (а) и (б) из пункта 1. Определения ругих видов из пункта 1 будем относить к числу не родо-видовых.

се родо-видовые определения по характеру видового отличия ожно подразделить на несколько подвидов.

) *Генетические определения*. К ним относятся определения, которых признак В(х) указывает на способ порождения (образ-ования) предметов. Например, генетическим будет определение окружность есть замкнутая линия, образованная вращением рад-иуса определенной длины вокруг неподвижной точки в некоторой лоскости".

б) *Операциональные определения*. К ним относятся определения, в которых признак B(x) указывает на процедуру, посредством которой можно узнать, подпадает ли произвольный предмет из рода U под данный термин или нет. Например, определение "кислота есть жидкость, которая окрашивает лакмусовую бумажку в красный цвет" относится к операциональным.

в) Признак B(x) может указывать на то, как используется предмет, какие функции он выполняет, для достижения каких целей он применяется. Такие определения можно назвать *целевыми*. Например, целевой дефиницией является определение "транспорт есть средство, с помощью которого осуществляется пространственное перемещение людей и грузов".

г) Признак B(x) может фиксировать, что предмет представляет собой, то есть фиксировать какие-то его структурные особенности, его атрибуты, а также особенности внешнего вида. Такие определения можно назвать *квалифицирующими*. Пример такого определения — выражение "ромб есть четырехугольник с равными сторонами".

3. Рассмотренные только что виды определений — это разновидности как определений типа (а), так и определений типа (б) пункта 1. Но существуют и такие разновидности родо-видовых дефиниций, которые устанавливаются отдельно, либо для определений типа (а), либо для определений типа (б).

а) Для определений типа (б) п. 1 укажем на так называемые *перечислительные* определения. В них в определяющей части просто перечисляются те предметы, которые подпадают под определяемый термин. Например, выражение "день недели — это понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье" отвечает на вопрос: "Что называется термином "день недели"?" Формальная запись этого определения в прикладном языке предикатов выглядит так: "xДень недели(x) $=_{Df}$ x(x = понед. ∨ x = вторник ∨ x = среда ∨ x = четверг ∨ x = пятница ∨ x = суббота ∨ x = воскр.).

Среди родо-видовых определений типа (а) пункта 1 выделяются два особых подвида.

б) *Определения через гипостазирование*. С их помощью раскрывается содержание собственных имен для свойств, отношений и функций, например, таких, как "теплопроводность", "краснота", "белизна" и т.д. Особенность определений этого вида состоит в том, что их определяющие части как бы фиксируют в своей структуре три интеллектуальные процедуры, с помощью которых строятся объекты, обозначаемые указанными терминами. Вначале посредством так называемой *обобщающей абстракции* создаются конкретные понятия об индивидах или n-ках индивидов, обладающих некоторым признаком. Затем с помощью *изолирующей абстракции* эта их характеристика абстрагируется от предметов и, наконец, с помощью процедуры *гипостазирования* превращается в самостоятельный абстрактный объект мысли. Рассмотрим это более внимательно на примере определения термина "отцовство".

Исходным понятием является понятие о паре предметов, между которыми существует отношение "x отец y":

$$\langle x, y\rangle\ (\text{Мужч.}(x)\ \&\ \text{Родит.}(x, y)).$$

Это понятие конкретное, здесь речь идет именно об индивидах (их парах), обобщенных данным понятием. Затем мы можем отделить отношение "отец" и рассмотреть его самостоятельно, то есть создать понятие уже не о паре предметов, а об отношении "отец":

$$R\forall x\forall y(R(x, y) \equiv (\text{Мужч.}(x)\ \&\ \text{Родит.}(x, y))).$$

Это уже абстрактное понятие, а не конкретное, так как элементами его будут не пары индивидов, а отношения. Но это еще не гипостаза. Следующим этапом является гипостазирование этого отношения, то есть превращение его в абстрактный индивид:

$$\iota R\forall x\forall y(R(x, y) \equiv (\text{Мужч.}(x)\ \&\ \text{Родит.}(x, y))).$$

Данное выражение является уже именем некоторого предмета, а именно отношения отцовства, что и фиксируется дефиницией:

$$\text{отцовство} =_{Df} \iota R\forall x\forall y(R(x,y) \equiv (\text{Мужч.}(x)\ \&\ \text{Родит.}(x, y))),$$

то есть "отцовство — это то отношение, которое имеет место между любыми x и y тогда и только тогда, когда x является мужчиной и x является родителем y-ка".

в) Некоторым вариантом определения через гипостазирование является *определение через абстракцию*. В логике так называют определения, в которых определяющая часть фиксирует еще одну важную интеллектуальную процедуру.

Часто замечают, что некоторые предметы в определенных ситуациях ведут себя одинаковым образом и потому в отношении именно этой ситуации являются как бы неразличимыми, тождественными друг другу. Например, будучи положены на две чаши весов, они уравновешивают их, или, вступив на рынке в отношение купли-продажи, они обмениваются друг на друга и т.д. Такое равенство указывает на то, что они (будучи разными предметами) обладают одинаковой величиной какой-то своей характеристики. Тогда можно создать абстрактное понятие об этой их характеристике, которое будет звучать примерно так: "то общее у предметов, что делает их равными друг другу в рассматриваемой ситуации".

Именно так и образуются определения через абстракцию. В частности, рассмотрим абстрактное понятие об одноместной предметно-функциональной характеристике "вес какого-либо предмета":

$$f\forall x\forall y(\text{Уравнив. весы}(x, y) \equiv f(x) = f(y)).$$

Если теперь мы собираемся задать гипостазу "вес", то есть образовать новое понятие о некотором абстрактном предмете, то для этого достаточно применить к данному абстрактному понятию процедуру гипостазирования. В результате этой процедуры строится определение:

$$\text{вес} =_{Df} \imath f\forall x\forall y(\text{Уравнив. весы}(x, y) \equiv f(x) = f(y)),$$

которое выражает мысль о том, что термин "вес" следует понимать как знак той самой предметно-функциональной характеристики, соответствующие величины которой для любых x и y будут равны тогда и только тогда, когда эти предметы уравновешивают чаши весов.

Явные определения обладают одним замечательным свойством — определяемые и определяющие части могут в любом контексте замещаться друг на друга, то есть для них верно следующее правило:

$$\frac{C \rightleftharpoons D,\ K(C)}{K(C/D)},$$

называемое *правилом замены по дефиниции*. Это правило надо понимать следующим образом. Пусть дано произвольное явное определение $C \rightleftharpoons D$ и пусть дан контекст K(C), содержащий в качестве подтекста выражение C, являющееся либо определяемой, либо определяющей частью дефиниции $C \rightleftharpoons D$. Тогда можно перейти от контекста K(C) к контексту K(C/D), то есть к контексту, в котором некоторый подтекст C (не обязательно каждый) заменен на подтекст D.

Это правило позволяет использовать явные определения в процессах дедуктивного вывода.

§ 3. Неявные определения

Существует целый ряд определений, не имеющих вид равенства $A \rightleftharpoons B$, то есть не относящихся к явным определениям. Такого рода определения называются *неявными*.

Неявные определения — это определения, задаваемые лингвистической конструкцией вида:

А есть то, что удовлетворяет условиям: B_1, B_2, ..., B_n.

Для всех неявных определений имеют место следующие особенности: 1) условия B_1, B_2, ..., B_n представляют собой предложения, то есть выражения, которые с содержательной точки зрения могут оцениваться как истинные или ложные утверждения; 2) определяемый термин входит в определяющие условия B_1, B_2, ..., B_n, что не влечет тем не менее тавтологичности дефиниций, так как в дефинициях этого сорта определяющая часть (условия B_1, B_2, ..., B_n) не приравнивается выражению А; 3) в силу сказанного для неявных определений не действует *правило замены по дефиниции*.

Неявные определения делятся на три вида: *индуктивные, рекурсивные и аксиоматические*.

(а) Тот вид определений, который называется *индуктивным*, уже использовался в учебнике. Именно с помощью индуктивных определений вводилось понятие формулы в логике предикатов и логике высказываний и понятие терма в логике предикатов. Приведем еще один пример индуктивного определения — определение натурального числа. Итак:

1. 0 есть натуральное число.
2. Если n — натуральное число, то n' — натуральное число.
3. Ничто иное не есть натуральное число.

Суть таких определений состоит в следующем. Если нам требуется задать класс предметов, подпадающих под некоторый термин, то мы прямо и недвусмысленно объявляем некоторые предметы элементами этого класса. Данный пункт определения называется *базисом индукции*. В приведенном примере ему соответствует 1-й пункт определения, где число 0 объявлено натуральным числом. После этого все остальные предметы, входящие в класс, порождаются с помощью некоторых процедур. Такой пункт определения называется *индуктивным шагом*. В нашем примере ему соответствует пункт 2, который говорит, что если удалось построить некоторое натуральное число, то и число, получающееся из него с помощью порождающей процедуры, тоже будет натуральным числом. В качестве порождающей процедуры здесь используется функция, которая называется "следовать за" и которая обозначена надстрочным штрихом. 3-й пункт определения ограничивает класс натуральных чисел только теми объектами, которые задаются первыми двумя пунктами.

Результатом применения этого определения будет построение множества натуральных чисел. Действительно, по пункту 1, 0 — натуральное число, тогда по пункту 2 объект $0'$— тоже натуральное число, тогда по пункту 2 объект $0''$ — тоже натуральное число и т.д. Таким образом возникает бесконечная последовательность

$$0, 0', 0'', 0''', 0'''', 0''''', \ldots$$

Используя теперь цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 и позиционную запись имен натуральных чисел, мы можем обозначить любое натуральное число цифрами: цифрой "0" обозначается число 0, цифрой "1" обозначается число $0'$, цифрой "2" обозначается число $0''$ и т.д.

Индуктивные определения являются вполне законными определениями, хотя в определяющую часть (пункты 1, 2, 3) входит термин, который определяется. В данном случае это будет термин "натуральное число".

В общем случае в пункте, задающем "базис индукции", может указываться не один предмет, а много предметов, и даже бесконечное их число. С другой стороны, в пунктах, задающих индуктивные шаги, может использоваться не одна порождающая операция, как это имеет место в приведенном примере, а несколько операций. Именно с такой ситуацией мы сталкиваемся в индуктивном определении формул логики высказываний. Здесь в базисе индукции любая пропозициональная переменная, а их число бесконечно, объявляется формулой. Порождающими же процедурами в этом случае являются процедуры применения логических констант — $\neg$, &, $\vee$, $\supset$ — к ранее построенным формулам.

(б) *Рекурсивные определения* очень похожи на определения индуктивные, но применяются для задания не классов предметов, а некоторых функций. Приведем пример рекурсивного определения сложения. Итак:

$$1.\ x + 0 = x.$$
$$2.\ x + y' = (x + y)'.$$

Суть этого определения такова. Понимание некоторой функции состоит в знании ее значений для определенных значений аргументов. Именно это и позволяет дать рекурсивное определение сложения. Действительно, 1-й пункт определения, который называется *базисом рекурсии*, говорит, что значение функции $x + y$ равно x, если $y = 0$. 2-й пункт, который называется *рекурсией*, говорит, что если мы хотим вычислить значение $x + y'$, где y' — число, следующее за y, то надо вычислить для этого y, чему равно $x + y$, и взять следующее за $x + y$ число.

Покажем действие этого определения на примере. Пусть нам требуется вычислить, чему равно выражение $5 + 2$. По пункту 1 мы знаем, что $5 + 0 = 5$. Тогда по 2-му пункту $5 + 1 = 5 + 0' = (5 + 0)' = 5' = 6$. Итак, $5 + 1 = 6$. Тогда по 2-му пункту $5 + 2 = 5 + 1' = (5 + 1)' = 6' = 7$. Итак, мы установили, что $5 + 2 = 7$.

Рекурсивные определения, как и определения индуктивные, содержат в определяющей части тот термин, который определяется, а определяется в данном случае знак "+".

(в) Еще одна разновидность неявных определений — *аксиоматические определения*. В этих определениях некоторый термин определяется путем указания той совокупности аксиом, в которой он содержится. Так как аксиомы — это истинные утверждения о предметах некоторой предметной области, то тем самым термин, входящий в эти аксиомы, получает свое значение. Например, считается, что аксиомы Евклида неявно определяют такие термины, как "точка", "прямая", "плоскость". Так как в самих аксиомах — определяющих частях данных определений — встречаются определяемые термины, этот вид определений тоже не удовлетворяет требованию, согласно которому определяемый термин не должен входить в определяющую часть.

§ 4. Другие виды определений

Кроме вышеуказанного членения всех определений на явные и неявные существуют другие способы их деления, по некоторым иным основаниям. Так, все определения можно подразделить на *контекстуальные* и *неконтекстуальные*.

1. К первым относятся те дефиниции, в которых либо определяемая, либо определяющая части представляют собой контексты употребления (использования) определяемого термина. Иначе говоря, в контекстуальных определениях определяется не просто какой-либо термин, но он определяется внутри некоторого контекста своего использования, в который входит. Так, в приведенном выше примере $A \supset B \equiv_{Df} \neg A \vee B$ определяемым термином является знак "$\supset$", но он определяется внутри контекста своего использования — "$A \supset B$".

Приведем еще один пример явного контекстуального определения. Выражение вида:

$$B(\iota xA(x)) \equiv_{Df} \exists x(A(x) \,\&\, \forall x\forall y((A(x) \,\&\, A(y)) \supset x = y) \,\&\, B(x))$$

задает смысл знака "ι" (йота-оператора), о котором говорилось выше, но задает его вместе со смыслом контекста, в который он входит. Данное определение указывает, что выражение $\iota xA(x)$, входящее в произвольный контекст **B**, должно пониматься в смысле следующего утверждения: "существует предмет x, обладающий признаком A(x) (так как, согласно определению, $\exists xA(x)$), этот предмет единственен (об этом говорит выражение $\forall x\forall y((A(x) \,\&\, A(y)) \supset x = y)$) и данный x обладает признаком B(x)".

Среди явных дефиниций к контекстуальным относятся определения типа (в) и (г) пункта 1, то есть не родо-видовые определения, а среди неявных — рекурсивные и аксиоматические определения. Остальные определения будем считать *неконтекстуальными*.

2. Все определения делятся также на *реальные* и *номинальные*. При этом следует различать *семантически* и *прагматически* реальные и номинальные определения.

С семантической точки зрения определение считается *реальным*, если значением определяемого термина является реально (материально) существующий предмет или его характеристики (свойства, отношения, предметно-функциональные характеристики), а *номинальными* (от лат. "nomen" — название, имя) те, в которых значением определяемых терминов являются предметы, реально (материально) не существующие, а также их характеристики. Понятно, почему определения такого рода относят к номинальным: ведь в этом случае реально существует только термин (имя), а не его значение. Поэтому к номинальным в этом смысле будут относиться определения таких терминов, как, например, "Пегас", "кентавр", "единорог", "олимпийские боги" и т.п. К числу номинальных следует отнести и определения терминов, обозначающих математические объекты, а также различного рода абстрактные и идеальные объекты естественных наук — "идеальный маятник", "идеальный газ", "абсолютно черное тело" и т.д.

С прагматической точки зрения номинальные и реальные определения различают по характеру целей и намерений, которые имелись в виду при формулировке определений. Если цель введения определения заключается в как можно более точном разъяснении содержания некоторого общеупотребимого термина, то говорят, что определение является *реальным*. В этом случае иногда даже настаивают, что термин надо употреблять именно в таком, а не ином смысле. Если же указанной цели не ставится, а введением определения пытаются просто зафиксировать некоторую терминологию (возможно, лишь на данный момент ее использования), то определение считается *номинальным*. В этом случае иногда даже специально подчеркивают условный характер определений посредством введения их такими фразами: "давайте считать, что термин **А** обозначает...", "термином **А** будем называть...", "под термином **А** я буду понимать..." и т.д.

Определения — это конвенции, и потому допускают такие трактовки определяемых терминов, которые могут не совпадать с общепринятым их словоупотреблением. В частности, задаваемый определением класс предметов может оказаться шире или у́же определяемой части, то есть класс предметов, задаваемый определяющей частью, может оказаться шире или у́же того класса предметов, который, по традиции, связывается с определяемым термином. Такое расхождение в общем случае не является ошибкой, хотя и может быть неудобным и вести к недоразумениям. Поэтому если данное расхождение обусловлено какими-то важными и принципиальными соображениями, а не является досадным промахом, то следует каждый раз специально оговаривать это расхождение. Если же целью определения было построение прагматически реального определения, то такое расхождение следует считать ошибкой. Иначе говоря, для прагматически реальных определений в качестве условия их правильности необходимо потребовать, чтобы они были *соразмерными*, то есть класс предметов, который традиционно считается подпадающим под определяемый термин, должен совпасть с тем классом, который задается определяющей частью.

ГЛАВА VIII

ПРАВДОПОДОБНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

§ 1. Общие сведения о правдоподобных рассуждениях

Важнейшей задачей логики является исследование различных интеллектуальных процедур, посредством которых из уже имеющихся у нас сведений можно получать новую информацию. Одна из таких процедур — процедура дедукции, имеющая место в том случае, когда совокупная информация, выраженная предложениями $A_1, \ldots, A_n$, содержит в качестве своей части (иногда в неявной форме) информацию, выраженную высказыванием B. Дедукция позволяет извлечь эту информацию и представить ее в явной форме. Способом такого извлечения является вывод. Его построение как раз и должно убедить нас в том, что заключенная в высказывании B информация "вытекает" из имеющихся у нас сведений.

Однако достаточно часто мы встречаемся с иной ситуацией: полученные тем или иным способом сведения $A_1, \ldots, A_n$ используются не для осуществления дедуктивного вывода высказывания B из посылок $A_1, \ldots, A_n$, а применяются как некая "подсказка", "намек", "подводящий", "наводящий" нас на мысль о возможности принятия высказывания B. Рассуждение в этом случае строится по следующей схеме: если информация, содержащаяся в посылках $A_1, \ldots, A_n$, верна, то правдоподобно было бы считать, что имеет место и B. Переход от посылок к заключению носит здесь не достоверный (как при дедукции), а лишь правдоподобный (проблематичный) характер. Посылки лишь подтверждают B, делают истинность B более достоверной. Именно такого рода рассуждения и будут далее считаться *правдоподобными*.

Правдоподобный характер связи между посылками и заключением будем обозначать посредством записи:

$$A_1, \ldots, A_n \mid\!\approx B,$$

которая читается: "из посылок $A_1, \ldots, A_n$ правдоподобно следует B". При этом отношение правдоподобного следования "$\mid\!\approx$" надо отличать от отношения логического следования "$\models$", лежащего в основе теории дедукции.

Иногда при осуществлении правдоподобного перехода от посылок к заключению удается достаточно точно оценить степень этой правдоподобности, то есть оценить, насколько обоснована истинность заключения B при истинности посылок $A_1, \ldots, A_n$. Для решения этой задачи используется аппарат *теории вероятности*.

В теории вероятности исследуются так называемые *массовые события* — события, которые могут быть *исходами* (результатами) какого-то много раз повторяющегося опыта. Такими событиями являются, например, выпадение той или иной грани игральной кости при неоднократном ее бросании, прыжок спортсмена на определенную длину, попадание в "десятку" при стрельбе из лука, мнение человека, высказанное им в ходе социологического опроса и т.д. Обычно если осуществляется некоторый опыт α и имеется *полная система несовместимых исходов* (результатов) данного опыта — $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, то каждое событие $x_i \in U$ называют *элементарным событием*. При этом под полной системой несовместимых исходов имеют в виду такую систему результатов опыта, которая удовлетворяет двум условиям: (1) каждый возможный результат опыта α может быть представлен с помощью данной системы исходов, (2) попарно различные исходы x_i и x_j, входящие в данную систему, не могут осуществиться одновременно. Итак, в случае, когда опыт α состоит в бросании игральной кости, элементарными событиями будут выпадения различных граней. Если опыт α состоит в прыжках в длину, то элементарными событиями будут прыжки на определенное расстояние.

Сложные события трактуются как совокупности элементарных, то есть как подмножества множества U. Считается, что сложное событие осуществилось, если осуществилось по крайней мере одно из элементарных событий, входящих в него.

Если события выражать посредством пропозициональных переменных p, q, r, s, ..., то сложные события можно записывать в виде формул — $(p \& q)$, $(r \vee p)$, $(s \supset q)$, $(p \equiv s)$, $\neg p$. Первая формула говорит о наступлении сразу двух событий — p и q, вторая формула говорит о наступлении по крайней мере одного из событий — p или q. Третья формула говорит о наступлении так называемого *условного события* q, которое осуществляется всякий раз, когда осуществляется событие s. Четвертая формула говорит о наступлении двух условных событий — s и p. Причем событие s осуществляется всякий раз, когда осуществляется событие p, а событие p осуществляется всегда, когда осуществляется событие s. Наконец, последняя формула говорит о наступлении такого события, которое осуществляется тогда и только тогда, когда не осуществляется событие p. Так, допустим, что посредством p репрезентировано высказывание о событии "выпало четное число", а через q — "выпало число, делящееся на 2", тогда эти два высказывания будут эквивалентными — ($p \equiv q$), так как они говорят об одном и том же множестве событий — {выпало число 2, выпало число 4, выпало число 6}. Если через p репрезентировано высказывание "осуществлен прыжок за 5 метров", а через q — "осуществлен прыжок за 4 метра", то справедливо будет утверждать — ($p \supset q$), так как множество прыжков за 5 метров включается в множество прыжков за 4 метра. Если p репрезентирует высказывание "выпало четное число", а $\neg p$ — "неверно, что выпало четное число", что эквивалентно событию "выпало нечетное число", то выражение ($p \vee \neg p$) задаст событие "выпало четное или нечетное число", которое совпадает с множеством всех исходов бросания игральной кости, а выражение ($p \,\&\, \neg p$) задаст событие "выпало четное и нечетное число", которое является пустым множеством, так как такое событие никогда не может осуществиться. Первое из этих событий, реализующееся при любом исходе опыта, называется *достоверным* и обозначается знаком "1". Второе событие называется *невозможным* и обозначается знаком "0".

С каждым событием или высказыванием о событии A иногда удается связать величину P(A), называемую *вероятностной мерой* (или просто *вероятностью*). Функция P(A) принимает значения в замкнутом интервале [0, 1]. При этом если A — это событие, то величина P(A) указывает на вероятность осуществления этого события, а если A — высказывание о событии, то величина P(A) говорит о вероятности оценки данного высказывания как истинного.

Одноместная функция P(A) считается вероятностной мерой, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $0 \leq P(A)$, для любого A,
2) $P(1) = 1$,
3) Если $A \,\&\, B = 0$, то $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$.

В теории вероятности эти условия позволяют вычислять вероятность произвольного сложного события (высказывания), если известны вероятности элементарных событий (высказываний). Таким образом, задача о нахождении вероятности для произвольного A сводится к задаче о нахождении вероятностных оценок элементарных событий (высказываний).

Существует по крайней мере два различных способа задания вероятности исходов опыта. Первый из них основан на идее симметрии и ведет к так называемому *классическому* (*априорному*) *понятию вероятности*. Это понятие используется в том случае, когда у нас нет никаких разумных оснований считать, что вероятность одного элементарного исхода некоторого опыта должна отличаться от вероятности других элементарных исходов. Например, при бросании монеты у нас нет никаких оснований полагать, что выпадение одной стороны монеты ("орла") должно происходить чаще, чем выпадение другой стороны ("решетки"): монета является симметричным объектом и потому априорно (до всякого эксперимента) можно считать, что выпадение каждой из сторон равновероятно. Так как равновероятных элементарных исходов в этом случае существует ровно 2, а в сумме вероятности не должны превышать 1, то вероятность каждого из событий ("выпал орел" и "выпала решетка") должна быть равна $^1/_2$. В случае бросания игральной кости, в силу ее симметричности, можно априорно считать вероятность каждого из исходов равной $^1/_6$.

Представим теперь, что мы имеем дело с фальшивой игральной костью, в которую запаян свинец таким образом, чтобы чаще выпадало число 6. Тогда уже нельзя воспользоваться идеей симметрии и априорно задать вероятность исходов, так как симметрия нарушена, а потому для решения вопроса о вероятности некоторого исхода бросания кости необходимо произвести ее испытание. С этой целью осуществляется серия опытов: бросается кость и записываются исходы этого бросания. Допустим, проведена 1 тысяча опытов и выяснилось, что в 350 случаях выпало число 6. Тогда можно ввести некоторую величину δ, которая называется *относительной частотой* исходов — $\delta = m/n$, где m — число благоприятных (положительных) исходов, а n – число всех опытов в данной серии. В нашем случае $\delta = {}^7/_{20}$. На практике эту величину можно принять за вероятность выпадения шестерки, то есть считать $P(6) = {}^7/_{20}$. Введенная так величина называется *статистической* (*апостериорной*) *вероятностью*.

Использование относительной частоты исходов в качестве вероятностной меры некоторого события определяется *законом больших чисел*, согласно которому при неограниченном увеличении серии опытов относительная частота исходов δ будет колебаться около некоторой величины, постепенно приближаясь к ней. Величина, к которой будет стремиться относительная частота при неограниченном увеличении серии опытов, будет находиться где-то вблизи $^7/_{20}$, а потому последняя величина и может быть принята за приблизительное значение вероятности. Чтобы расхождение между относительной частотой и вероятностью не было значительным, серия опытов, в которой устанавливается относительная частота, должна быть достаточно представительной.

Рассмотрим сказанное на примере формул логики высказываний. С каждой формулой **A**, содержащей r различных пропозициональных переменных, свяжем величину **P(A)**, задающую *вероятность истинности* этой формулы. Для этого рассмотрим 2^r различных наборов значений пропозициональных переменных. Множество этих наборов представляет собой полную систему несовместимых событий некоторого опыта, состоящего в том, что на каждом из этих наборов проверяется значение **A**. Так как у нас нет никаких оснований предпочесть один набор значений пропозициональных переменных другому, будем считать, что все они равновероятны, и потому вероятность каждого набора определяем равной $^1/_2{}^r$.

Будем считать далее некоторый набор значений пропозициональных переменных *благоприятным (положительным) исходом*, если на этом наборе формула **A** принимает значение "истина". Величину **P(A)** можно тогда определить как относительную частоту исходов m/n, где m — число наборов, на которых формула **A** приняла значение "истина", а n — число всех наборов.

При данных условиях, ввиду того что тождественно-истинная формула **A** принимает значение "истина" на всех наборах значений своих переменных, относительная частота m/n = 1, то есть **P(A)** = 1. Это говорит о том, что каждая тождественно-истинная формула описывает некоторое достоверное событие и потому **A** = 1. С другой стороны, для тождественно-ложной формулы **A** величина m/n = 0, то есть **P(A)** = 0. Таким образом, любая тождественно-ложная формула описывает некоторое невозможное событие и потому **A** = 0. Вероятность всех остальных формул лежит в интервале [0, 1], то есть для каждой формулы справедливо, что 0 ≤ **P(A)** ≤ 1. Рассматривая с этой точки зрения истинностную таблицу, скажем, формулы **p & (q ∨ r)**,

p	q	r	p & (q ∨ r)
и	и	и	и
и	и	л	и
и	л	и	и
и	л	л	л
л	и	и	л
л	и	л	л
л	л	и	л
л	л	л	л

находим, что **P(p & (q ∨ r))** = 3/8.

В теории вероятностей два события (высказывания) A и B называются *независимыми*, если осуществление (истинность) или неосуществление (ложность) одного из них никак не влияет на осуществление (истинность) или неосуществление (ложность) другого. Так, при бросании кости два события — "выпало четное число" и "выпало число, делящееся на 3" — являются независимыми.

Если A и B независимые события (высказывания), то для них справедлива теорема:

$$(1)\ P(A\&B) = P(A) \cdot P(B),$$

откуда сразу же получаем, что

$$(2)\ P(B) = \frac{P(A\&B)}{P(A)},$$

где $P(A) \neq 0$.

Величина $\frac{P(A\&B)}{P(A)}$ называется *условной вероятностью* и обозначается записью $P(B/A)$ — читается: "вероятность B при условии A".

Для формул логики высказываний существует простая процедура вычисления условной вероятности по совместной истинностной таблице для формул B и A. Из этой таблицы вычеркиваются все строчки, в которых формула A принимает значение "ложь", то есть оставляют только те строчки, где A принимает значение "истина" (по крайней мере одна такая строчка должна быть, так как $P(A) \neq 0$), подсчитывают их число и принимают за n. А далее на этих n строчках подсчитывают число благоприятных исходов для формулы B, получая таким образом число m. Величина m/n и является условной вероятностью $P(B/A)$. Например, подсчитаем, чему равна $P(p \,\&\, q \,\&\, r \,/\, \neg p \vee r)$.

p	q	r	p & q & r	¬p ∨ r
и	и	и	и	и
и	и	л	л	л
и	л	и	л	и
и	л	л	л	л
л	и	и	л	и
л	и	л	л	и
л	л	и	л	и
л	л	л	л	и

В таблице вычеркиваются строчки, где формула $\neg p \vee r$ принимает значение "ложь". Оставшиеся 6 строк, на которых условие $\neg p \vee r$ выполнено, дают число n. Теперь устанавливаем, на скольких строчках из этих 6 оказывается истинной формула $p \& q \& r$. В нашем случае такая строчка единственна, то есть $m = 1$. Отсюда получаем, что $P(p \& q \& r / \neg p \vee r) = {}^1/_6$.

Итак, если A и B независимы друг от друга, то имеет место равенство:

$$(3)\ P(B) = P(B/A).$$

Если же они зависят друг от друга, то указанное равенство нарушается. При этом оно может нарушаться двояким образом: либо левая величина будет больше правой, либо наоборот. Наиболее интересным является случай, когда $P(B) < P(B/A)$. Это говорит о том, что вероятность B без учета информации A меньше, чем вероятность этого же высказывания при учете A, то есть наличие сведений, фиксируемых высказыванием A, увеличивает вероятность истинности B.

Учитывая данное соотношение, теперь можно определить *правдоподобное следование* посредством условия:

$$(4)\ A_1, \ldots, A_n \mid\approx B \leftrightharpoons P(B) < P(B/A_1 \& \ldots \& A_n).$$

О данном определении говорят, что отношение правдоподобного следования задано с помощью *условия позитивной релевантности*.

В том случае, когда $P(B) = {}^1/_2$, то есть высказывание B в одинаковой степени может оказаться как истинным, так и ложным, отношение правдоподобного следования можно определить другим условием.

$$(5)\ A_1, \ldots, A_n \mid\approx B \leftrightharpoons P(B/A_1 \& \ldots \& A_n) > {}^1/_2$$

В этом случае говорят, что правдоподобное следование определено условием *высокой вероятности*.

Величина $P(B/A_1 \& \ldots \& A_n)$ характеризует как вероятность истинностной оценки предложения B при условии справедливости посылок $A_1, \ldots, A_n$, так и степень связи заключения B с данными посылками. Так, рассматривая предыдущий пример, можно сказать, что имеет место правдоподобное следование

$$\neg p \vee r \mid\approx p \& q \& r$$

со степенью связи посылки с заключением, равной ${}^1/_6$. Это, несомненно, очень слабая связь. В частном случае, когда $P(B/A_1$

$\& \ldots \& A_n) = 1$, связь между посылками и заключением является *достоверной (необходимой)*, то есть отношение правдоподобного следования в определенном смысле обобщает понятие логического следования, но с одной оговоркой: $P(A_1 \& \ldots \& A_n) \neq 0$, то есть выражение $A_1 \& \ldots \& A_n$ не должно быть тождественно-ложным.

§ 2. Обобщающая индукция

Правдоподобные рассуждения подразделяют на несколько видов — *обобщающую индукцию, методы установления причинных зависимостей (исключающую индукцию)* и *аналогию*.

Под обобщающей индукцией (наведением) понимаются такие рассуждения, в которых переходят от знания об определенных предметах некоторого класса к знанию обо всех предметах этого класса, то есть переходят от единичных утверждений к общим. Примером обобщающей индукции является следующее рассуждение. Допустим, что некто приехал в незнакомый город и решил зайти в магазин. При этом оказалось, что магазин a_1 в 19 часов был закрыт, магазин a_2 тоже оказался в это время закрытым, это же верно оказалось и для магазина a_3. Тогда, на основе этих данных, приезжий сделал вывод, что все магазины города закрываются в 19 часов.

Различают несколько видов обобщающей индукции — *статистическую* и *нестатистическую* индукцию, а также *полную* и *неполную* индукцию. Среди полных нестатистических индукций по методу обоснования индуктивного рассуждения выделяют *эмпирическую* и *математическую* индукции.

Полная обобщающая индукция — это умозаключение от знания об отдельных предметах некоторого класса при условии исследования каждого предмета, входящего в данный класс, к знанию о всех предметах этого класса. Схема рассуждения по *полной обобщающей нестатистической эмпирической индукции* имеет следующий вид:

$$\begin{array}{l}
1.\ Q(a_1) \\
2.\ Q(a_2) \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
n.\ Q(a_n) \\
n+1.\ \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = S \\
\hline
\forall x(S(x) \supset Q(x))
\end{array}$$

В первых n посылках фиксируются результаты эмпирической проверки предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на наличие у них интересующего нас свойства Q. Посылки показывают, что каждый проверенный предмет обладает этим свойством. n+1-я посылка указывает, что множество проверенных предметов в точности составляет класс S. Это позволяет сделать *достоверное* заключение о наличии свойства Q у всех предметов класса S.

Достоверность заключения по полной обобщающей нестатистической эмпирической индукции определяется тем обстоятельством, что условная вероятность высказывания $\forall x(S(x) \supset Q(x))$ при данных посылках равна 1. Этот факт можно установить разными способами, и в частности путем подсчета относительной частоты исходов опыта, состоящего в последовательной проверке предметов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на наличие у них свойства Q. Так как класс S содержит ровно n предметов, то число всех применявшихся проверочных процедур равно n, из которых число благоприятных случаев тоже равно n. Таким образом, относительная частота $n/n = 1$. Этот результат говорит о том, что в случае полной обобщающей нестатистической эмпирической индукции между посылками и заключением имеет место отношение логического следования.

Разновидностью полной нестатистической индукции является так называемая *математическая индукция* — особый способ рассуждения, используемый в дедуктивных науках (логике и математике). Он применяется в тех случаях, когда исследуемый класс S задается индуктивным определением. Как было показано в главе "Определение", индуктивное определение состоит в том, что первоначально некоторые объекты прямо объявляются принадлежащими данному классу. Все же остальные объекты порождаются из исходных с помощью каких-либо процедур $f_1, \ldots, f_k$. Чтобы доказать теперь общее утверждение о наличии у всех предметов класса S свойства Q, применяют следующую схему рассуждения:

1. $Q(a_i)$ — базис индукции
2. $\forall f_j \forall x_1 \ldots, \forall x_n(Q(x_1) \& \ldots \& Q(x_n) \supset Q(f_j(x_1, \ldots, x_n)))$ — индуктивный шаг
3. $\{\{a_i\} \cup \{f_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}\} = S$ — индуктивное определение S

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\,,$$
$$\forall x(S(x) \supset Q(x))$$

где каждый a_i — это объект, принадлежащий классу S по базисному пункту индуктивного определения данного класса, а $f_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — объект класса S, порожденный функцией f_j, где $1 \le j \le k$ и каждое $\alpha_i \in S$ ($1 \le i \le n$).

Согласно этой схеме, вначале для исходных объектов a_i обосновывают, что они обладают свойством $Q(a_i)$, то есть пытаются доказать утверждение, которое называется *базисом математической индукции*. Далее предполагают, что свойство Q выполняется для некоторых произвольных уже построенных объектов $x_1, \ldots, x_n$, то есть имеет место высказывание $Q(x_1)$ & ... & $Q(x_n)$ — *индуктивное предположение*. Исходя из данного предположения, стремятся осуществить так называемый *индуктивный шаг* — доказать, что объект $f_j(x_1, \ldots, x_n)$, образованный из $x_1, \ldots, x_n$ с помощью порождающей процедуры f_j, тоже обладает свойством Q. Если все эти пункты удается выполнить, то считается, что свойство Q присуще всем предметам класса S. Математическая индукция как разновидность полной индукции дает *достоверное* знание.

Полная эмпирическая индукция является ограниченным познавательным приемом. В эмпирических науках она может применяться лишь в том случае, когда класс S конечен и легко обозрим. В наиболее же интересных познавательных ситуациях сплошная проверка предметов просто невозможна. Например, хотя класс рыб, существующих в настоящее время на Земле, конечен, нельзя предложить никакой реально осуществимой процедуры, с помощью которой можно было бы у каждой рыбы установить по схеме полной обобщающей эмпирической индукции наличие некоторого свойства Q. Для этого пришлось бы переловить всех рыб, что заведомо невыполнимо.

С другой стороны, имеются и такие случаи, когда класс S хотя и конечен, но сплошная его проверка потребовала бы таких огромных затрат, на которые общество не может пойти. Например, достаточно часто и по разным поводам проводятся социологические опросы, но каждый такой опрос требует затрат времени, материальных и людских ресурсов. Ясно, что проведение каждый раз сплошной проверки населения по тому или иному поводу неприемлемо ни по затратам материальных и людских ресурсов, ни по затратам времени — хотя бы по той причине, что к моменту, когда станут известны результаты такой проверки, они уже могут никого не интересовать.

Наконец, сплошная проверка бывает неприемлемой в силу того, что ведет к уничтожению проверяемого предмета. Например, если наша цель — установление доброкачественности партии консервированных продуктов, то каждая проверка, осуществляемая путем вскрытия консервных банок, делает их непригодными к дальнейшему использованию.

Итак, имеются самые разнообразные причины, по которым сплошная проверка бывает невозможной. В таких случаях применяется процедура *неполной обобщающей индукции*. Неполная обобщающая эмпирическая индукция делится на *популярную* и *научную*, которые будем далее называть популярной и научной индукцией.

Схема *популярной обобщающей нестатистической индукции* имеет следующий вид:

$$\frac{\begin{array}{l} 1.\ Q(a_1) \\ 2.\ Q(a_2) \\ . \\ . \\ . \\ n.\ Q(a_n) \\ n+1.\ \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset S \end{array}}{\forall x(S(x) \supset Q(x))}.$$

Отличие популярной индукции от полной состоит в n+1-й посылке. При полной индукции класс $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ в точности совпадает с классом S. При индукции же популярной он составляет лишь часть этого класса. Ясно, что истинность заключения $\forall x(S(x) \supset Q(x))$ в данном случае является правдоподобной, проблематичной, но отнюдь не достоверной. Ведь среди непроверенных предметов из S могут быть и такие, которые свойством Q не обладают.

Пример ложного заключения, полученного посредством популярной индукции, — предложение "Все лебеди белы". Оно, казалось бы, "вытекало" из фактов: каждый раз при наблюдении некоторого конкретного лебедя европейцы убеждались, что он обладает белым цветом. Тем не менее после открытия Австралии, где были обнаружены черные лебеди, стало ясно, что это индуктивное заключение неверно.

Рассматриваемое рассуждение называется популярной (народной) индукцией, потому что оно не замутнено никакими мудрствованиями и осуществляется с детской наивной простотой. Эта простота проявляется прежде всего в том, что на наличие свойства Q проверяются первые попавшиеся объекты. После чего проводится *поспешное обобщение* — типичная ошибка индуктивного рассуждения. Однако вывод по неполной индукции можно существенно усовершенствовать и добиться повышения степени надежности получаемых результатов. С этой целью необходимо организовать поиск именно тех предметов, которые в наибольшей степени характеризуют всю совокупность S на проверяемое свойство Q.

Иначе говоря, надо осуществить систематический розыск предметов, которые бы не обладали свойством Q. Если такая процедура не увенчалась успехом, то есть, проводя по определенной методике поиск тех предметов, которым свойство Q могло бы быть не присуще, мы все время находим предметы, этим свойством обладающие, то это существенно повышает надежность заключения.

Итак, *при научной нестатистической индукции* проверяются на наличие свойства Q не первые попавшиеся предметы класса S — *генеральной совокупности*,— а те из них, которые специально отобраны для этой цели. В результате такого отбора образуется класс выбранных предметов, который называется *выборкой*. Выборка подвергается сплошной проверке, а затем полученный на выборке результат переносится на всю генеральную совокупность. Такой перенос называется *индуктивным обобщением*.

Итак, схема научной нестатистической индукции имеет следующий вид:

$$
\begin{array}{ll}
1.\ Q(a_1) & \\
2.\ Q(a_2) & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
n.\ Q(a_n) & \\
n+1.\ \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = B & \\
\hline
\forall x(B(x) \supset Q(x)) & \text{полная индукция} \\
n+2.\ \forall x(B(x) \supset S(x)) & \\
\hline
\forall x(S(x) \supset Q(x)) & \text{индуктивное обобщение.}
\end{array}
$$

В схеме посредством B обозначена выборка. Поэтому первые n посылок указывают на результат сплошной ее проверки, а первое умозаключение осуществляется по полной обобщающей индукции и касается именно выборки. Далее вводится еще одна, n+2-я, посылка, которая говорит, что предметы выборки — это предметы более широкого класса S — генеральной совокупности. Используя это знание, мы и осуществляем окончательный перенос результата на все предметы исследуемого класса S.

Наиболее слабым местом в данном рассуждении является переход от утверждения, что все предметы из выборки обладают свойством Q, к утверждению, что все предметы генеральной совокупности обладают свойством Q. Для его надежного обоснования требуется, чтобы выборка была *репрезентативной*. Это означает, что выборка должна достаточно точно передавать структуру класса S, разнообразие его состава, в частности те его особенности, которые могут влиять на отсутствие свойства Q. Добиться такого структурного соответствия между генеральной совокупностью S и выборкой B, то есть добиться репрезентативной выборки, можно двумя различными способами.

Первый способ основан на выдвижении некоторых *гипотез (предположений)* о том, в силу каких причин у предмета $x \in S$ может отсутствовать свойство Q. Например, если проверяется доброкачественность продукции, выпускаемой пищевой промышленностью (свойство Q), то опыт подсказывает, что отсутствие этого свойства может зависеть от срока хранения продукта, от условий его хранения, от того, какое предприятие выпустило продукцию, и других параметров. Далее генеральная совокупность делится по выбранным параметрам (основание деления) на подклассы — члены деления, и из каждого подкласса выбирается какое-то количество продукции для сплошной ее проверки. Тем самым формируется выборка. При этом если наши гипотезы точно фиксируют все случаи, в силу которых продукция может оказаться недоброкачественной, и если в генеральной совокупности S таковая имеется, то в выборку обязательно попадет какое-то ее количество.

У данного метода имеются два недостатка. Первый связан с тем, что у нас могут отсутствовать хоть какие-то разумные гипотезы для объяснения свойства Q. Второй же состоит в том, что мы можем по тем или иным причинам упустить какой-либо важный параметр, от которого зависит отсутствие свойства Q. Тем самым будет делаться определенная систематическая ошибка, которая и приведет к неверным результатам. Чтобы исключить эти недостатки, применяют второй способ формирования выборки, порождая ее чисто *случайным* образом, то есть с помощью метода, обеспечивающего равную вероятность извлечения каждого элемента генеральной совокупности. Для этого используют специальные таблицы случайных чисел, а сам метод работает следующим образом. Все предметы из класса S нумеруются. Затем берут таблицы случайных чисел и в выборку помещают те предметы, номера которых совпадают с числами таблицы. Считается, что, действуя случайным образом, мы рано или поздно обнаружим в классе S предметы, не обладающие свойством Q, и внесем их в выборку. По крайней мере этот способ формирования выборки устраняет систематические ошибки.

Чтобы выборка была репрезентативной, она должна быть достаточно объемной, так как, согласно закону больших чисел, закономерности, которым подчиняются массовые явления, обнаруживаются лишь при достаточно большом числе наблюдений.

Перейдем к рассмотрению *обобщающей статистической индукции*. Она тоже может быть как *полной*, так и *неполной*, как *популярной*, так и *научной*. Далее мы ограничимся изложением только двух вариантов научной статистической индукции, тем более что в составе данных индуктивных рассуждений будут так или иначе представлены и полная, и неполная статистические индукции. Итак, одним из вариантов научной статистической обобщающей индукции является рассуждение, осуществляемое по следующей схеме:

1. $Q(a_1)$

.

.

.

m. $Q(a_m)$

m + 1. $\neg Q(a_{m+1})$

.

.

.

n. $\neg Q(a_n)$

n+1. $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = B$

————————————— полная статистическая индукция

$\forall x(B(x) \supset \delta(Q(x)) = k)$

n+2. $\forall x(B(x) \supset S(x))$

————————————— индуктивное обобщение.

$\forall x(S(x) \supset \delta(Q(x)) = k)$

В схеме знаком B обозначена выборка. В первых n посылках указаны результаты сплошного обследования предметов из выборки. Посылки показывают, что из n проверенных предметов только часть обладает интересующим нас свойством. Пусть таких предметов будет m. Тогда устанавливается относительная частота обладания свойством Q для произвольного предмета из выборки = m/n. Эта информация и фиксируется на первом этапе данного рассуждения в заключении по полной статистической индукции — $\forall x(B(x) \supset \delta(Q(x)) = k)$, где $k = m/n$, а далее этот результат индуктивно обобщается на всю генеральную совокупность. Итак, любой объект из генеральной совокупности обладает свойством Q с вероятностью, равной k.

По методу статистической индукции осуществляются социологические обследования, где заведомо нереально было бы ожидать, что все люди выскажутся одинаково. Напротив, следует предположить, что на некоторый вопрос один человек ответит "Да", а другой — "Нет", а потому нестатистические формы индуктивных рассуждений здесь перестают действовать.

При проведении социологических опросов чрезвычайно ответственным действием является предварительное формирование выборки. Чтобы выборка была репрезентативной, в этом случае приходится учитывать такие параметры, как возраст людей, их профессию, образовательный уровень, партийную принадлежность, место жительства, половые различия и т.д. Кроме того, если для получения репрезентативной выборки при нестатистических формах рассуждений достаточно учитывать лишь структурные особенности генеральной совокупности S, то есть учитывать лишь типы предметов, входящих в S, то при статистической индукции, как количественном методе, необходимо также следить за сохранением в выборке процентных соотношений между типами предметов, которые входят в генеральную совокупность. Так, если аграрии в генеральной совокупности составляют 10% населения, а в выборке они представлены в количестве 70%, то такая выборка нерепрезентативна, если наша цель — выяснение мнения всего населения по какому-то вопросу, а не мнения аграриев.

Но и при соблюдении указанных условий статистическая индукция может потерять свой научный характер и стать наукообразной формой фальсификации, если термину "выборка" исследователь склонен придать смысл термина "подборка". Ведь в силу наличия у людей различных взглядов в выборку всегда можно отобрать в непропорционально большом количестве тех из них, кто, высказывая свое мнение, исказит подлинную социологическую картину. Такая подтасовка результатов может произойти за счет накопления систематической ошибки даже помимо воли самого исследователя, если он не будет придерживаться еще одного важного требования: после разбиения генеральной совокупности на подклассы и определения числовых соотношений между ними выбор объектов из каждого подкласса для их проверки должен осуществляться случайным образом, например с помощью таблиц случайных чисел. Это гарантирует от неосознанной фальсификации данных. В противном случае заключение, полученное по статистическому рассуждению, нельзя признать научно обоснованным. И повторим еще раз — даже при учете всех этих факторов выборка может оказаться нерепрезентативной, если она недостаточно объемна.

В практике социологических обследований часто используется несколько усложненный вариант статистической индукции, так как на один и тот же вопрос может быть получено не два ответа — "да" или "нет", а несколько различных ответов — Q_1, Q_2, ..., Q_r.

Тогда схема рассуждения по статистической индукции строится таким образом:

$$
\begin{array}{ll}
1.\ Q_1(a_1) & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
m.\ Q_1(a_m) & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
l+1.\ Q_r(a_{l+1}) & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
n.\ Q_r(a_n) & \\
n+1.\ \{a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_{l+1}, \ldots, a_n\} = B & \\
\hline
\forall i \forall x\ (B(x) \supset \delta(Q_i(x)) = k_i) & \text{полная статистическая индукция} \\
n+2.\ \forall x(B(x) \supset S(x)) & \\
\hline
\forall i \forall x\ (S(x) \supset \delta(Q_i(x)) = k_i) & \text{индуктивное обобщение.}
\end{array}
$$

где $1 \leq i \leq r$, а k_i — относительная частота проявления свойства Q_i в выборке. Заключение этого рассуждения имеет следующий смысл: любой предмет из генеральной совокупности S с вероятностью k_i обладает свойством Q_i. Ясно, что для достижения репрезентативности выборка в данном случае должна быть более объемной, чем в простом варианте статистической индукции.

Практика применения научных форм индукции показывает, что при соблюдении всех предосторожностей от различных возможных ошибок формирования репрезентативной выборки надежность этих рассуждений может приближаться к 100%.

§ 3. Понятие о причинной зависимости

Одной из разновидностей индукции, так называемой *исключающей индукцией*, являются *методы установления причинных зависимостей*, когда на основании некоторых эмпирических данных между двумя массовыми событиями (часто говорят "явлениями") x и y устанавливается отношение *причинной* (*каузальной*) связи, состоящей в том, что существование события (явления) x обусловливает существование события (явления) y. Будем в таком случае говорить, что "x каузально влечет y", и записывать это утверждение в форме "$x \mapsto y$", где x называется *причиной*, а y — *следствием* или *действием* этой причины. Например, такое событие, как удар камнем по стеклу, явилось причиной другого события — стекло оказалось разбитым; приложение напряжения к проводнику явилось причиной возникновения в проводнике электрического тока; нагревание чайника с водой явилось причиной того, что вода в чайнике закипела; гравитационное взаимодействие двух тел явилось причиной их взаимного притяжения и т.д.

Существование в объективной действительности *каузальных* связей определяется наличием в природе различного рода сил, при непосредственном участии которых одни тела оказывают воздействие на другие. К числу таких воздействующих факторов относятся различного рода соударения, тепловые, гравитационные, электромагнитные, химические и другие воздействия. Любое такое воздействие некоторого фактора на объект a связано с передачей ему энергии или вещества. В ответ на воздействие подобного рода объект a определенным образом реагирует, причем спектр ответных реакций может быть очень разнообразным: a может изменить какие-то свои свойства, изменить свое состояние, превратиться в новый объект b, породить целый ряд новых объектов b_1, b_2, ..., b_n, вступить в какие-то отношения с другими объектами и т.д. Графически данную ситуацию можно изобразить схемой 1:

Схема 1

На схеме квадратом изображен объект a, стрелкой x изображен воздействующий на a фактор, а стрелкой y обозначена ответная реакция a на воздействие x.

Из рассмотрения данной схемы вытекает, что любой фактор, способный воздействовать на некоторый предмет и вызвать его ответную реакцию, можно понимать как причину этой реакции. Например, причиной образования льда в чайнике с водой является воздействие на воду холода, а причина заболевания малярией — укус человека малярийным комаром. В этих примерах действие холода и укус являются воздействующими факторами. Так, понимаемая причина называется в науке *действующей причиной* и является наиболее фундаментальной ее разновидностью, так как все остальные виды причинения выступают как дополнительные факторы, осуществляющие свое влияние на фоне действующей причины. Рассмотрим более внимательно характерные особенности причинной связи.

1. Действующая причина всегда обладает *активностью* по отношению к своим следствиям, которые она порождает. Этим каузальная связь существенно отличается от других видов *обусловленности* (*детерминации*). Так, при осуществлении логического вывода заключение детерминировано наличием посылок и правил вывода, но сами по себе последние не порождают заключения. Приводят в действие посылки и правила вывода человек или компьютер; именно они проявляют активную форму поведения. Действующая же причина сама по себе творит свои следствия.

Активный характер действующей причины осуществляется за счет потока вещества и энергии. Но, согласно современным физическим теориям, передача вещества и энергии всегда осуществляется с конечной скоростью, не превышающей скорости света, а потому действующая причина должна по времени *предшествовать* своему следствию. Это предшествование может быть сколь угодно малой величиной, но оно всегда имеет место. Так, при ударе по покоящемуся бильярдному шару другим шаром нам кажется, что покоящийся шар пришел в движение одновременно с соударением. На самом же деле имеется определенный временной разрыв между моментом соударения и началом движения покоящегося шара. Однако при практическом решении вопроса о наличии каузальной связи между x и y наибольшую трудность представляют не случаи их практически одновременного проявления, а как раз случай временного разрыва, когда x воздействовал на a в некоторый момент t, а y осуществилось значительно позднее: ведь за это время на a могли подействовать и многие другие факторы, среди которых как раз и может оказаться подлинная причина появления y.

Итак, причина и следствие находятся в отношении временной последовательности, а потому поиск причины для y всегда следует вести среди *предшествующих* наступлению y *обстоятельств*. Однако не любая временная последовательность событий является каузальной. Так, за днем всегда наступает ночь, но это не значит, что день является причиной ночи. Некритическое отношение к обнаруженной временной последовательности двух событий ведет к типичной для причинных рассуждений ошибке *поспешного установления каузальной связи*, известной в логике как ошибка *"вслед за этим — значит по причине этого"*. Данная ошибка лежит в основе многих суеверий (причиной моего несчастья явилось то, что перед этим черная кошка перебежала мне дорогу), а также различного рода антинаучных построений, например построения астрологических гороскопов.

2. Из схемы 1 можно усмотреть, что порождение следствия у действующей причиной x опосредовано объектом **a**, перерабатывающим фактор x в ответную реакцию y. Последнее осуществляется за счет работы некоего внутреннего механизма, присущего **a** и определяемого структурой объекта. Иногда этот механизм известен в деталях, иногда же он неизвестен. В последнем случае говорят, что **a** представляет собой "черный ящик", то есть объект со скрытым от нас механизмом работы. Так, задаваясь вопросом, почему данное ружье выстрелило, можно было бы ответить, что причиной выстрела явилось нажатие на спусковой крючок. Последнее событие рассматривается как воздействующий на ружье (объект **a**) фактор x. Но чтобы это воздействие породило следствие y (выстрел), в ружье должна произойти некоторая последовательность событий: после нажатия на спусковой крючок боевая пружина распрямилась и привела в движение курок, последний воздействовал на боек, который ударил по капсюлю, содержащему гремучую ртуть, взрыв которого поджег порох, а уже давление пороховых газов вытолкнуло из ствола заряд дроби.

Каждое событие, входящее в эту последовательность, называемую *цепью причинения*, является, с одной стороны, *непосредственным (ближайшим) следствием* предшествующего события, а с другой — *непосредственной (ближайшей) действующей причиной* следующего события. Так, ближайшим следствием нажатия на спусковой крючок было распрямление боевой пружины. Последнее же в свою очередь было ближайшей действующей причиной движения курка и т.д. Итак, нажатие на спусковой крючок вовсе не ближайшая причина выстрела, а является причиной *отдаленной*, то есть причиной, действующей через некоторую последовательность промежуточных каузальных связей.

Любое из событий в цепи причинения с неменьшим основанием, чем нажатие на спусковой крючок, может быть названо действующей причиной выстрела. Поэтому всякий раз вопрос о том, что является причиной события y, зависит, во-первых, от наличия у нас уже определенных знаний о каузальных связях и, во-вторых, от тех познавательных задач, которые ставятся. Так, если механизм работы ружья неизвестен, то в ответ на вопрос, почему ружье выстрелило, естественно будет указать на то предшествующее событие (обстоятельство), которое в наиболее наглядной форме выступает как причина этого явления,— нажатие на спусковой крючок. Но установив данную казуальную связь, можно продолжить анализ и задать следующий вопрос: а почему нажатие на спусковой крючок привело к выстрелу? Тем самым ставится задача отыскать причину наличия самой причинной связи. Допустим, что ответ был таков: причиной наличия этой связи является движение курка. Но тогда можно поставить новые два вопроса. С одной стороны, постараться выяснить, что является причиной наличия каузальной связи между нажатием спускового крючка и движением курка, а с другой — почему движение курка привело к выстрелу. Ответы на все эти "почему" постепенно раскрывают весь механизм работы ружья и тем самым дают ответ на вопрос "как" — как работает ружье.

3. Наличие определенной внутренней структуры у объекта а может либо способствовать появлению следствия у в ответ на воздействие х, либо воспрепятствовать этому. Так, чтобы осуществить выстрел, ружье должно быть взведено, боевая пружина и курок должны быть способны работать в определенном режиме, боек должен быть не сточен, в ружье должен находиться патрон в неперекошенном состоянии, порох в патроне должен быть сухим и т.д. Без наличия всех этих условий каузальная связь не осуществится, а потому каждое из них можно трактовать тоже как причину выстрела. Но эти причины особые, указывающие на определенную структуру объекта, его форму, а потому они называются *формальными причинами*.

Формальная причина сама по себе не вызывает действие, не обладает активностью, как это свойственно действующей причине, но она является необходимым условием для того, чтобы действующая причина сработала. В самом деле, активность действующей причины связана с передачей вещества и энергии. Формальная же причина либо способствует этому процессу, либо препятствует ему. Если ружье испорчено, скажем, стесан боек, то попытка выстрелить из такого ружья не приведет к успеху, и на вопрос, почему ружье не стреляет, естественно будет ответить — потому, что стесан боек. В данном случае в качестве причины отсутствия выстрела указывают именно на формальную, а не на действующую причину. Почему не работает телевизор? Потому что сгорел трансформатор (перегорел предохранитель, пробит конденсатор и т.д.). Все это — формальные причины.

Приведенные примеры демонстрируют те каузальные ситуации, когда наличие формальных причин способствует осуществлению некоторого каузального процесса переноса энергии и вещества, а отсутствие хотя бы одного из формальных условий ведет к его нарушению. Но бывают и иного рода случаи, когда отсутствие некоторого условия способствует осуществлению процесса, а его наличие препятствует этому. Например, на вопрос, что явилось причиной самопроизвольного спуска под уклон железнодорожного вагона, можно ответить — отсутствие тормозных колодок. Или: что является причиной отсутствия падения подвешенного груза? Наличие нити, на которой этот груз подвешен. Указанные ситуации можно графически изобразить схемой 2:

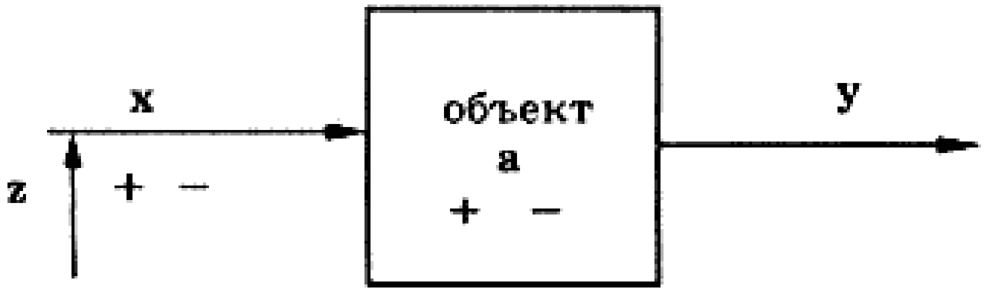


Схема 2

На схеме знаками "+" и "–", помещенными в квадрат, обозначающий объект а, показано, что механизм переработки фактора x в реакцию y может находиться в двух состояниях — способствующем каузальной связи "x ↦ y" (знак "+") и препятствующем этой связи (знак "–"). Стрелкой z показан еще один, внешний по отношению к объекту а, фактор, который также либо способствует каузальной связи, либо блокирует ее.

4. Часто наступление события y происходит только при совместном действии нескольких причин. В этом случае принято говорить о *сложной причине* события y. Например, пусть имеется исправный радиоприемник, то есть все формальные условия для прослушивания радиопередачи, связанные с приемником, наличествуют. Допустим далее, что мы желаем послушать музыку по радиоканалу "Орфей". Причиной осуществления данного события является сложный фактор, состоящий из осуществления трех действующих причин: радиоприемник включен в сеть, радиоканал "Орфей" в данное время работает на определенной частоте, осуществлена настройка приемника на данную частоту. Схема этого случая графически может быть представлена следующим образом:

Схема 3

Рассмотрим еще один пример. Допустим, что расследуется причина автомобильной катастрофы. В ходе расследования выяснилось, что данному событию предшествовали следующие обстоятельства: машина двигалась с большой скоростью, перед этим прошел дождь и асфальт был мокрым, погода стояла пасмурная и была плохая видимость, тормозное устройство машины было неисправно, шофер находился в утомленном состоянии и его реакции были замедленны. Можно ли из указанных обстоятельств вычленить одно и сказать, что именно это обстоятельство и никакое иное явилось причиной автомобильной катастрофы? Вряд ли! В данном случае следует говорить о совокупности, сложной причине события, когда каждое из перечисленных обстоятельств внесло свою лепту в наступление дорожного происшествия. Здесь и формальные и действующие причины в одинаковой мере участвовали в наступлении события.

5. Принято различать два вида каузальной связи между причиной x и следствием y. С одной стороны, каузальную связь, носящую жесткий, однозначный характер, когда всякий раз при наличии формальных условий и наличии причины x с необходимостью возникает (порождается) и следствие y. В этом случае говорят, что причинная связь между x и y носит *динамический характер*. С другой стороны, обусловленность y причиной x может быть и не однозначно жесткой, а лишь статистически вероятностной, то есть при наличии x следствие y осуществляется лишь с определенной степенью вероятности. В этом случае говорят, что каузальная связь между x и y носит *статистический характер*.

6. С логической точки зрения различают несколько трактовок понятия причины.

Иногда о событии x говорят как о причине y, если осуществление x является *достаточным условием* последующего осуществления y. Это означает: всякий раз, то есть в какой бы пространственно-временной точке ни осуществилось x, если в наличии имеются все формальные условия, то имеется некоторый естественный пространственно-временной интервал, определяемый скоростью развития процесса, такой, что в рамках этого интервала осуществится и событие y. Если посредством буквы t обозначить пространственно-временную точку, посредством T — пространственно-временной интервал, через x_t выразить условие наступления события x в точке t, а через y_T — условие наступления события y в интервале T, то сказанное можно записать выражением $\forall t \exists T (x_t \supset y_T)$. Упрощая это сложное выражение, можно так ввести данное понятие причинности:

$$\text{Df1. } x \mapsto y \leftrightharpoons \text{Всякий раз } (x \supset y).$$

Другим понятием причины является ее понимание как *необходимого условия* для наступления следствия. Словесная формулировка этого понимания звучит следующим образом: всякий раз, то есть какой бы ни была пространственно-временная точка, если при наличии всех формальных условий событие x не осуществилось в этой точке, то имеется некоторый естественный пространственно-временной интервал, определяемый скоростью развития процесса, такой, что в рамках этого интервала событие y не осуществится. Иначе говоря, справедливым будет утверждение: $\forall t \exists T(\neg x_t \supset \neg y_T)$. При упрощении этого выражения данное понимание причины можно записать так:

$$\text{Df2. } x \mapsto y \leftrightharpoons \text{Всякий раз } (\neg x \supset \neg y).$$

Третье понимание причины трактует ее как такое событие, которое удовлетворяет одновременно как условию достаточности, так и условию необходимости: $\forall t \exists T(x_t \equiv y_T)$. Это позволяет сформулировать следующее определение:

$$\text{Df3. } x \mapsto y \leftrightharpoons \text{Всякий раз } (x \equiv y).$$

Наконец, часто причину понимают как *событие, модификация которого влечет за собой модификацию следствия*. Такое понимание является разновидностью предыдущего, так как предполагается, с одной стороны, что модификация причины — достаточное условие модификации следствия, а с другой — отсутствие модификации причины будет влечь за собой отсутствие модификации следствия. Определение в этом случае будет таким:

$$\text{Df4. } x \mapsto y \leftrightharpoons \text{Всякий раз } (x^* \equiv y^*),$$

где x^* и y^* — это модифицированные x и y (их усиление или ослабление).

7. При поиске причинных зависимостей можно поступать (и обычно поступают) трояким образом: либо, зная о некотором событии, ищут его причину, либо, зная причину, пытаются определить, какие следствия порождаются ею, либо, зная x и y, пытаются выяснить, связаны ли они каузально. В первом случае, при отсутствии у нас каких-либо соображений о конкретной причине события y или если мы не можем по своему усмотрению воспроизвести его, эмпирическое исследование y ведется в его естественных, природных условиях проявления. Именно так осуществляют зачастую свои исследования натуралисты — ботаники, зоологи,

геологи, астрономы и др. Методом исследования в этом случае является простое *наблюдение* за поведением объекта и протоколирование наблюдаемых последовательностей событий. В данной ситуации, пытаясь обнаружить причину у, мы вынуждены просматривать различные обстоятельства, предшествующие наступлению у. Но число факторов x_1, x_2, ..., влияющих на объект a, когда он находится в естественных условиях, очень велико, и среди них мы должны выделить тот фактор x_i, который породил у (см. схему 4):

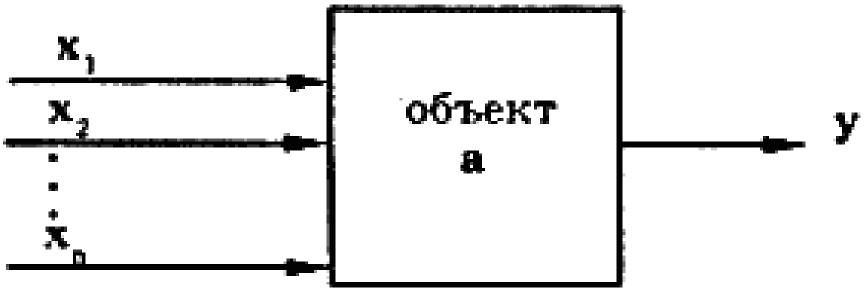


Схема 4

Во втором и в третьем случаях, когда у нас имеется предположение о некотором x как о причине наступления у и мы можем его по своему усмотрению воспроизводить, применяется более сложная форма исследования, называемая *экспериментом* (*опытом*). При проведении эксперимента исследователь активно вмешивается в ход процесса, старается осуществить его в различных условиях. Главное достоинство эксперимента состоит в том, что здесь возможно контролировать каждый фактор, влияющий на объект a. Для этого эксперименты часто осуществляют в специально созданных искусственных условиях (на специальных установках), когда объект a изолируется от различных побочных воздействий. Так, И.П.Павлов, чтобы исключить побочные воздействия, осуществлял свои опыты по выработке у животных условных рефлексов в специально построенном здании, которое было оборудовано звуконепроницаемыми комнатами.

§ 4. Методы установления причинных связей

Различают несколько методов установления причинных зависимостей. Одним из них является *метод сходства*. В соответствии с этим методом для отыскания причины некоторого явления обращаются к предшествующим событиям (обстоятельствам, факторам) и пытаются среди них обнаружить то общее, что всегда присутствует перед наступлением интересующего нас явления. Допустим, что в некотором населенном пункте N произошло острое пищевое отравление нескольких человек. Желательно предотвратить дальнейшее отравление людей, а потому необходимо установить, что явилось причиной этого события, найти его источник. Для этого поступают следующим образом: пытаются установить, какие продукты употребляли отравившиеся люди. Если среди продуктов найдется только один, употреблявшийся каждым из числа отравившихся, то прием в пищу именно данного продукта и считается причиной явления. Обозначив большими латинскими буквами A, B, C... различные пищевые продукты, а через q — факт отравления некоторого человека, можно построить, например, такую таблицу:

Люди	Предшествовавшие обстоятельства							Наблюдаемое явление
	A	B	C	D	K	L	M	
Иванов	+	+	+	–	–	–	–	q
Петров	+	–	+	+	–	–	–	q
Сидоров	+	–	–	–	+	+	+	q

Таблица показывает, что единственным сходным обстоятельством во всех трех случаях отравления является употребление заболевшими продукта A. Отсюда с определенной долей проблематичности делается вывод, что причиной отравления стало употребление в пищу продукта A.

Каждый раз при установлении причинной связи большую роль играет предварительное знание или предположение о возможной области поиска причины исследуемого события. Так, в случае с отравлением мы заранее предположили (а может быть, и знали), что причиной заболевания явилось именно пищевое отравление, а не действие каких-то иных факторов. Это направило наше внимание на выявление тех продуктов, которые употреблялись больными. Тем самым был существенно сужен поиск возможных факторов влияния. Если бы этого предположения не было, то нам пришлось бы анализировать и другие возможные причины, скажем, воздействие каких-то физических факторов или химических веществ и т.д.

При применении метода сходства для установления причины отравления использовалось наблюдение над предшествовавшими обстоятельствами. Но иногда этот метод может сочетаться с экспериментом (опытом). Так, было замечено, что в некоторых случаях различные маятники имеют один и тот же период колебаний. Возникла задача выяснить, что является причиной равенства колебаний. Для ответа на этот вопрос можно проделать несколько экспериментов с различными маятниками, изменяя в каждом случае какие-то их параметры — химический состав, плотность, вес, твердость, длину и т.д. При этом эксперимент по методу сходства строится следующим образом: жестко фиксируется один из факторов, скажем, вес маятника, который рассматривается как возможная причина исследуемого события, а все остальные факторы варьируются различным образом. Если при этих условиях интересующее нас явление (равенство периодов колебаний) не осуществляется, то делают вывод, что тот фактор, который был неизменным, не влияет на интересующее нас явление, и переходят к построению новой серии опытов, в которой постоянной величиной будет уже иной фактор, а все остальные факторы подвергают варьированию. Осуществляя такого рода эксперименты, мы в конце концов придем к рассмотрению случая, когда неизменной будет оставаться длина маятника, причем период его колебаний тоже не будет меняться, что и позволяет причиной интересующего нас явления по методу сходства считать длину маятника. Тем самым экспериментальным методом устанавливается наличие вполне определенного эмпирического закона, состоящего в существовании некоторой постоянной связи между периодом колебания маятника и его длиной.

Рассмотренные примеры показывают, что при установлении причинной связи по методу сходства из числа возможных причин элиминируются (исключаются) все предшествующие обстоятельства, кроме одного. Такая же элиминация происходит и при применении других методов установления причинных связей. Отсюда и происходит название данной формы индукции как *исключающей* (*элиминативной*).

Обозначим через $\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_k$ различные факторы, предшествующие исследуемому явлению и трактуемые как возможные причины его наступления. Тогда рассуждение по методу сходства можно в общем случае представить в виде следующей логической схемы:

1. $\mathbf{A}, \mathbf{B}_{i1}, \mathbf{C}_{j1} - \mathbf{q}$
2. $\mathbf{A}, \mathbf{B}_{i2}, \mathbf{C}_{j2} - \mathbf{q}$

n. $A, B_{i_n}, C_{j_n} - q$

———————————————— обобщение фактов

Во всех данных случаях $(A \supset q)$

———————————————— индуктивное обобщение

Всякий раз $(A \supset q)$

———————————————— по Df1 причины,

$A \mapsto q$

где $1 \le i_1, i_2, \ldots, i_n \le m$ и $1 \le j_1, j_2, \ldots, j_n \le k$.

На схеме цифрами обозначены результаты экспериментов или актов наблюдения. Исходя из них первоначально, строится чисто фактуальное обобщение относительно рассмотренных случаев. Далее полученный результат индуктивно распространяется на любой опыт, который когда-либо может быть осуществлен и будет сходен с рассмотренными ситуациями по наличию фактора A. На заключительной стадии, используя определение причины как достаточного условия, делают окончательное заключение о том, что A — причина события q.

Получаемые по методу сходства заключения являются в общем случае лишь проблематическими, а не достоверными, что обусловлено рядом обстоятельств. Прежде всего это касается числа фактуальных посылок: всегда бывает желательно, если это возможно, расширить круг наблюдений или экспериментов, что повышает надежность заключения. Но если даже число фактуальных посылок существенно увеличено, остается все же одно сомнение относительно справедливости заключения. Оно связано с допущением наличия некоторого скрытого параметра (например, фактора F), который по каким-то причинам выпал из поля нашего зрения, присутствует во всех рассмотренных случаях и является подлинной причиной наступления события q.

Наличие скрытого параметра всегда обусловлено некоторыми особенностями проведения наблюдения или эксперимента, в частности особенностями экспериментальных установок, используемых в опыте, которые систематически влияют на получаемые результаты. Чтобы ликвидировать влияние такой систематической ошибки, любой эксперимент или наблюдение проверяют на разных экспериментальных установках или осуществляют в каких-то иных условиях внешней среды. Проведение эмпирических исследований в принципиально отличных условиях окружающей среды или на разных установках гарантирует, что мы не столкнемся с одними и теми же скрытыми параметрами. Поэтому, даже если такие параметры присутствуют, они должны оказывать различные действия, а потому, получая одни и те же результаты в разных условиях проведения наблюдений или экспериментов, мы можем считать себя гарантированными от влияния скрытых параметров.

Тем не менее всегда бывает желательно каким-то способом удостовериться в правильности сделанного по методу сходства заключения. С этой целью можно использовать два приема: либо, выделив фактор А, осуществить прямую эмпирическую проверку, может ли он вызвать явление q, либо попытаться вывести заключительное утверждение о причинной зависимости теоретическим способом.

Для пояснения того, что здесь имеется в виду, обратимся к двум приведенным выше примерам. В первом из них в качестве причины q (отравление) был выявлен фактор А. В таком случае можно взять какое-то количество пищевого продукта А для химико-биологического анализа. Если анализ подтвердит недоброкачественность продукта, например зараженность его каким-либо болезнетворным микробом, то тем самым напрямую будет обоснована верность заключения.

Принципиально иначе можно поступить в случае второго примера. Здесь, основываясь на классической механике Ньютона, можно чисто теоретически рассмотреть колебания гармонического маятника и установить, что период его колебания Т определяется величиной:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

откуда вытекает, что при равенстве длин двух маятников их периоды колебаний должны тоже совпадать.

Метод сходства применяется главным образом как метод наблюдения, а не эксперимента. Неудобство сочетания этого метода с экспериментом определяется тем обстоятельством, что приходится, фиксируя один фактор, варьировать присутствие или отсутствие большого числа других факторов. Но одно дело, когда такое варьирование происходит в естественных условиях и осуществляется самой природой, а на нашу долю остается лишь констатировать наличие этих вариаций актами наблюдения, и совершенно другое – когда такие вариации должны быть произведены самим экспериментатором. В последнем случае удобнее поступить иначе: зафиксировать некоторое множество обстоятельств так, чтобы они не менялись, и начать варьировать ("включать" или "выключать") одно вполне определенное обстоятельство. Такой подход приводит нас к более сильному методу установления причинных зависимостей — *методу различия*. Его логическая схема выглядит следующим образом:

1. $A, B, C - q$

.

.

.

m. $A, B, C - q$

m+1. $\neg A, B, C - \neg q$

.

.

.

n. $\neg A, B, C - \neg q$

———————————— обобщение фактов

Во всех данных случаях $(\neg A \supset \neg q)$

———————————— индуктивное обобщение

Всякий раз $(\neg A \supset \neg q)$

———————————— по Df2 причины.

$$A \mapsto q$$

Метод различия — экспериментальный метод. Его применение состоит в осуществлении экспериментальных ситуаций двух типов, из которых в одной явление q исследуется в присутствии некоторого предшествующего обстоятельства A, а в другой — это обстоятельство изымается из числа воздействующих факторов при сохранении всех других. Таким образом, два типа эксперимента различаются единственным обстоятельством.

Именно этим методом было установлено, что причиной несовпадения скорости падения тел с различным весом является наличие воздуха. Для этого проводились следующие эксперименты. В длинный стеклянный сосуд, соединенный с воздушным насосом, помещают два предмета различного веса, например стальной шарик и легкое птичье перышко, и проводят первое исследование в присутствии воздуха: сосуд переворачивают и наблюдают, что стальной шарик под действием силы тяжести падает быстрее, чем легкое перышко. Затем из сосуда выкачивают воздух и опыт повторяют. Оказывается, без присутствия воздуха и шарик, и перышко падают с одинаковой скоростью. Отсюда по методу различия заключают, что наличие воздуха ведет к несовпадению скоростей падения тел различного веса.

Заключение, полученное по методу различия, является в общем случае проблематичным, так как и с ним связано сомнение относительно наличия скрытых параметров. Исключение этого сомнения осуществляется теми же способами, что и в случае с методом сходства. Но методу различия присуща и еще одна специфическая трудность. Так как обстоятельства **B** и **C** сохраняются во всех экспериментах, то всегда остается сомнение, не является ли причиной наступления **q** в первом эксперименте не обстоятельство **A**, а некоторое сложное обстоятельство, например — **A & B**. Чтобы элиминировать это допущение, требуется осуществить дальнейшее исследование причинной зависимости. Так, если удастся построить эксперимент, результат которого будет иметь вид:

$$\mathbf{A}, \neg\mathbf{B}, \mathbf{C} — \mathbf{q},$$

где ¬**B** означает, что обстоятельство **B** отсутствует, то это сразу же исключит предположение о совместном действии **A** и **B** в качестве причины **q**, ибо событие **q** осуществляется и без участия **B**.

Но здесь имеется одна сложность, которая связана с тем, что зачастую мы не можем элиминировать заинтересовавшее нас обстоятельство. Так, в экспериментах с маятником, из какого бы материала он ни делался, никогда не удастся элиминировать его вес. Как в этом случае можно было бы показать, что именно длина маятника, а не длина в сочетании с весом является причиной равенства колебаний, будет рассмотрено ниже.

Еще одним методом установления причинных зависимостей является *совместный метод сходства и различия*, применяемый в тех случаях, когда отсутствуют разумные соображения о возможной причине исследуемого явления, а разнообразие факторов, могущих претендовать на эту роль, чрезвычайно велико.

Пусть, как и ранее, **A**, $\mathbf{B}_1$, ..., $\mathbf{B}_m$, $\mathbf{C}_1$, ..., $\mathbf{C}_k$ будут предшествующими обстоятельствами, претендующими на роль возможной причины наступления некоторого события. Тогда схему рассуждения по этому методу можно представить в следующей форме:

1. $\mathbf{A}, \mathbf{B}_{j1}, \mathbf{C}_{j1} — \mathbf{q}$

.

.

.

m. $\mathbf{A}, \mathbf{B}_{jm}, \mathbf{C}_{jm} — \mathbf{q}$

m + 1. $\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}_{j(m+1)}, \mathbf{C}_{j(m+1)} — \neg\mathbf{q}$

.

.

.

$n.\ \neg A,\ B_{in},\ C_{jn} - \neg q$

$1.\ A,\ B_{i1},\ C_{j1} - q \quad m+1.\ \neg A,\ B_{i\,m+1},\ C_{j\,m+1} - \neg q$ — разделение фактов

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$m.\ A,\ B_{im},\ C_{jm} - q \quad n.\ \neg A,\ B_{jn},\ C_{jn} - \neg q$

Во всех данных случаях $(A \equiv q)$ — обобщение фактов

Всякий раз $(A \equiv q)$ — индуктивное обобщение

$A \to q$ — по Df3 причины.

При рассмотрении данной схемы может создаться превратное представление об ее излишней сложности. Казалось бы, вывод о том, что обстоятельство A является причиной q, можно получить из первых m опытных данных по методу сходства. И это было бы действительно так, если бы уже имелось заранее предположение, что именно фактор A есть причина q. Тогда данное предположение можно было бы последовательно проверять, строя эксперименты таким образом, чтобы фактор A все время присутствовал, а все остальные обстоятельства изменялись. Однако, когда заранее никаких предположений относительно возможной причины q нет, исследователь вынужден накапливать как можно больше экспериментального материала с двумя возможными исходами — присутствия q и отсутствия его. Далее весь этот материал разбивается (в чем и состоит использование метода различия) по принципу присутствия и отсутствия q на две группы, после чего становится естественным предположить, что осуществление q в первой группе опытов и неосуществление во второй связано с каким-то одним обстоятельством, которое присутствует во всех опытах первой группы и отсутствует во всех опытах второй группы. Если такое обстоятельство действительно обнаруживается (в нашем случае им оказалось обстоятельство A), то оно и объявляется причиной наступления q.

Примером применения этого метода являются исследования причины выпадения обильной росы на некоторых предметах. Вначале экспериментально удалось отделить те предметы, на которых обильно выпадала роса, от всех остальных. А затем удалось установить, что общим обстоятельством, которое было присуще всем первым предметам и отсутствовало у всех остальных, являлась быстрая скорость охлаждения их поверхности.

Еще одним, причем наиболее распространенным и наиболее значимым, методом установления причинных зависимостей является *метод сопутствующих изменений*. Логическая схема рассуждения по этому методу выглядит так:

$$
\begin{array}{ll}
1.\ A', B, C - q' & \\
2.\ A'', B, C - q'' & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
n.\ A'^{\cdots}', B, C - q'^{\cdots}' & \\
\hline
\text{Во всех данных случаях } (A^* \supset q^*) & \text{обобщение фактов} \\
\hline
\text{Всякий раз } (A^* \supset q^*) & \text{индуктивное обобщение} \\
\hline
A \mapsto q & \text{по Df4 причины.}
\end{array}
$$

Заключение, что A причина q, делается здесь на основе наблюдения одновременной модификации как обстоятельства A, так и следствия q по их *интенсивности* (*степени*), что как раз и показывается знаком "запятая". Например, выкачивая из-под колокола, в котором находится звонок, воздух и оставляя все остальные параметры неизменными, можно наблюдать постепенное ослабление звука по мере выкачивания воздуха; увеличивая сопротивление в электрической цепи, можно одновременно наблюдать ослабление силы тока; перемещая барометр на разные высоты, можно наблюдать изменение высоты ртутного столба и т.д.

Важность этого метода определяется несколькими обстоятельствами.

1. Почти все физические, химические, биологические и социальные характеристики предметов являются *интенсивными величинами*, то есть обладают различной степенью своего проявления. Действительно, такие, скажем, характеристики, как скорость, давление, температура, вязкость, вес, электропроводность, объем тела, частота колебаний и т.д., — это все величины, имеющие различные степени, а следовательно, их можно модифицировать по этим степеням.

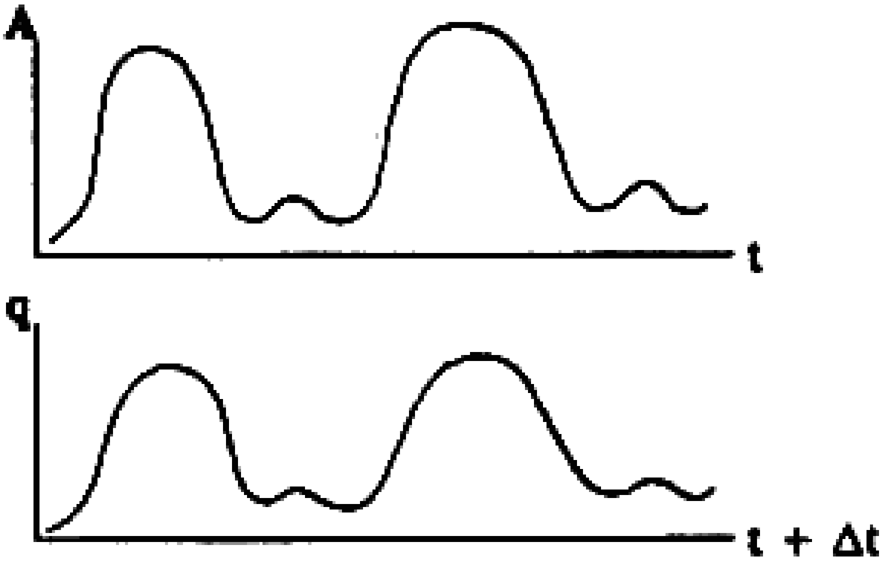
2. Методом сопутствующих изменений можно проверить не только одно обстоятельство относительно его влияния на наступление q, но и проверить влияние всех остальных факторов, участвующих в эксперименте. Последнее особенно важно в случае, когда в принципе нельзя исключить некоторое обстоятельство,

что создает сомнение относительно действия сложной причины, вызывающей q. Так, в опыте с периодом колебаний маятника нельзя устранить вес маятника. Однако, применяя метод сопутствующих изменений по фактору веса, то есть оставляя все другие параметры неизменными и модифицируя лишь вес маятника, можно показать, что такая модификация не оказывает никакого влияния на период колебаний, а тем самым не входит составной частью в причину данного явления. С другой стороны, попытка проверить этим же методом, не влияет ли на величину периода колебаний другой неустранимый фактор — сила тяжести, даст положительный результат. Последнее подтверждается и чисто теоретическим рассмотрением вопроса, ибо в формулу, определяющую период колебаний (см. с. 259), величина веса маятника не входит, а величина силы тяжести входит.

3. Все рассмотренные ранее методы позволяют лишь констатировать наличие причинной связи, то есть позволяют сказать: "да, причинная связь имеется". Метод же сопутствующих изменений дополнительно к этому дает возможность выявить и математическую закономерность, существующую между величиной параметра A и величиной q. Откладывая, например, по оси ординат величину A, а по оси абсцисс величину q, можно построить график изменения q в зависимости от изменения A и найти то аналитическое выражение, которое будет соответствовать этому графику. Последнее позволяет перейти к чисто математическому описанию причинных зависимостей, то есть перейти к теоретическому рассмотрению вопроса.

4. Метод сопутствующих изменений делает возможным определить граничные условия установленной по этому методу казуальной закономерности, то есть позволяет эмпирически определить, при каких условиях данная закономерность начинает и перестает действовать. Определение граничных условий является чрезвычайно важным моментом в познании природы.

5. Методы установления причинных зависимостей, как говорилось выше, не дают гарантию однозначного решения вопроса о причине q, так как заключения по этим методам оказываются проблематическими в общем случае. Метод сопутствующих изменений тоже страдает некой степенью неопределенности, но он же обладает и одним чрезвычайно важным достоинством. Действительно, коль скоро модификация A причинно связана с модификацией q, то эта связь (какой бы сложной она ни была) может быть в пределах, не выходящих за граничные условия, либо прямо пропорциональной, либо обратно пропорциональной. В таком случае можно построить два графика: изменения величины A и изменения величины q по времени (см. рис. 1), а затем их совместить.



Совмещенный график изменения A и q по времени при прямой пропорциональной зависимости

Рис. 1

В результате должно получиться нечто подобное тому, что изображено на рис. 1. Вероятность чисто случайного совпадения этих двух графиков столь ничтожно мала, что вероятность наличия причинной связи между A и q становится почти достоверностью, то есть близкой к 100%.

Аналогично можно поступить и в случае применения метода различия, если рассматривать наличие и отсутствие причины A и следствия q во времени. Результатом, если между A и q имеется причинная связь, должен явиться, например, такой совмещенный график (см. рис. 2).

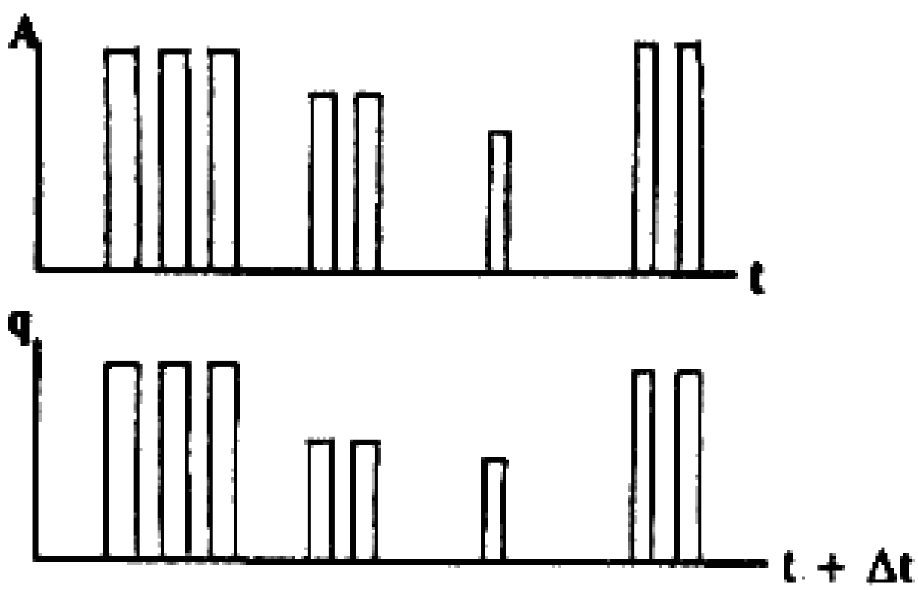


Рис. 2

Совпадение этих двух графиков тоже не может быть случайным, а потому A с высокой степенью вероятности должно быть признано причиной q. Сама возможность рассмотрения метода различия подобным образом говорит о том, что фактически мы имеем здесь дело с частным случаем метода сопутствующих изменений, а именно с тем случаем, когда фактор A дихотомически модифицируется по его наличию или отсутствию.

Во всех рассмотренных до сих пор случаях причинные зависимости носили жесткий однозначный характер, были динамическими. Однако они могут носить и не столь жесткий характер. Например, некоторое событие q может осуществляться при наступлении A лишь в определенном числе случаев, то есть связь между q и A осуществляется лишь вероятностным образом.

Допустим, при осуществлении A с необходимостью осуществляется в точности одно из событий $q_1, \ldots, q_r$. Это означает, что A, жестко (динамически) детерминируя наступление сложного события $q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_r$, лишь случайным образом (статистически) детерминирует наступление именно события q_i. Логическая схема рассуждения, применяемого в этом случае для установления связи между причиной A и следствием q_i, имеет вид:

$$\frac{\begin{array}{l} 1.\ A - q_{i_1} \\ 2.\ A - q_{i_2} \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ n.\ A - q_{i_n} \end{array}}{A \mapsto \delta(q_i) = k_i},$$

где $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_n \leq r$, а $\delta(q_i)$ — относительная частота наступления явления q_i под действием предшествующего обстоятельства A.

Например, бросание монеты жестко детерминирует выпадение или "орла" (q_1), или "решетки" (q_2), но бросание монеты лишь случайным образом детерминирует выпадение при данном бросании именно "решетки". Прохождение фотона сквозь узкую щель жестко детерминирует его попадание в некоторую точку экрана, но это же самое событие лишь случайным образом детерминирует, в какую именно точку экрана он попадет. Вероятностный характер этого процесса выражается в том, что при прохождении большого количества фотонов через узкую щель на экране появится интерференционная картинка в виде светлых и темных колец. В квантовой механике имеется специальная Ψ-функция, позволяющая теоретически вычислить вероятность, с которой произвольный фотон в данном опыте отклонится на определенный угол от прямолинейного движения.

В приведенной выше схеме рассуждения есть некоторые сомнительные моменты, не позволяющие рассматривать ее в качестве метода установления причинных зависимостей. Так, среди обстоятельств, претендующих на роль причины наступления каждого q_i, указано лишь обстоятельство A. Тем самым предполагается, что мы каким-то образом уже заранее установили, помимо данного рассуждения, причину явления q_i. На самом же деле в реальном эмпирическом исследовании имеется большое число других обстоятельств, которые тоже могут каким-то образом влиять на наступление q_i. Обычно полагают, что одно и то же обстоятельство A вызывает каждое из событий q_i при условии, что прочие факторы являются постоянными (неизменными). Такое рассмотрение ведет к следующей схеме:

$$
\begin{array}{l}
1.\ A, B, C - q_{j1} \\
2.\ A, B, C - q_{j2} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
n.\ A, B, C - q_{jn} \\
\hline
A \mapsto \delta(q_i) = k_i
\end{array}
$$

Однако здесь опять-таки нельзя установить, что именно A является статистической причиной q_i. Ведь поведение фактора A ничем не отличается от поведения факторов B и C. Поэтому из данных посылок может вытекать и что B причина q_i, и что C причина q_i. Более того, допущение, что обстоятельства B и C неизменны, может оказаться очень сильным и сомнительным. По крайней мере, чтобы сделать умозаключение о статистической зависимости между A и q достоверным, необходимо более внимательно рассмотреть каждое из обстоятельств A, B, C. Такое рассмотрение может привести к двум различным схемам установления статистической зависимости.

Во-первых, можно полагать, что обстоятельства B и C действительно неизменны в каждом из экспериментов. В то же время само обстоятельство A является сложным событием. Например, подбрасывание монеты связано со следующими характеристиками: высотой, с которой ведется подбрасывание, силой броска, скоростью закручивания монеты, высотой падения монеты на пол и т.д.

Таким образом, фактор A состоит из факторов D, K, S, T, которые меняют свое значение в экспериментах. Далее можно предположить, что возможные значения интенсивностей последних величин распадаются ровно на два класса: на значения D′, K′, S′, T′, при которых выпадает "орел", — q_1, и на значения D″, K″, S″, T″, при которых выпадает "решетка", — q_2. Обозначим первый класс как бросок с интенсивностью A′, а второй — как бросок с интенсивностью A″. Тогда рассуждение о каузальной связи примет вид метода сопутствующих изменений:

$$\begin{array}{l}
1.\ A', B, C - q_1 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
m.\ A', B, C - q_1 \\
m+1.\ A'', B, C - q_2 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
n.\ A'', B, C - q_2 \\
\hline
A \mapsto \delta(q_i) = k_i
\end{array}.$$

В этом случае причиной выпадения "орла" и "решетки" действительно является бросание монеты, но сам этот фактор оказывается интенсивной величиной.

Во-вторых, можно полагать, что A является неизменным в каждом из экспериментов, а другие сопутствующие обстоятельства изменяются. Тогда схема установления причинной зависимости будет строиться по методу, напоминающему метод сходства:

$$\begin{array}{l}
1.\ A, B_{j^1}, C_{j^1} - q_{j^1} \\
2.\ A, B_{j^2}, C_{j^2} - q_{j^2} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
n.\ A, B_{j^n}, C_{j^n} - q_{j^n} \\
\hline
A \mapsto \delta(q_i) = k_i
\end{array}.$$

Данное рассуждение, однако, не совместимо с нашим пониманием причинности. Ведь по этой схеме получается, что нечто неизменное (обстоятельство A) является причиной изменяющегося (q_i).

Это наводит на мысль, что при согласовании данной схемы с понятием каузальной связи подлинной причиной события q_i должно считаться не обстоятельство **A**, а **A** в сочетании с какими-то другими обстоятельствами, которые меняются от эксперимента к эксперименту, то есть в сочетании с некоторыми скрытыми параметрами. Именно наличием скрытых параметров многие физики пытаются объяснить интерференционную картинку, возникающую на экране после прохождения потока фотонов сквозь узкую щель.

Отсутствие события **q** при наступлении предполагаемой причины **A** исследователь зачастую может попытаться объяснить наличием каких-то трудно уловимых факторов, препятствующих действию причины **A**. В ситуациях же, когда эти препятствующие факторы исчезают, **A** проявляет свое подлинное действие, порождая **q**. Установление в этих условиях наличия причинной зависимости между **A** и **q** осуществляется по следующей схеме метода различия:

$$\frac{\begin{array}{l} 1.\ A, B, C - q \\ 2.\ A, B, C - \neg q \\ 3.\ \neg A, B, C - \neg q \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n.\ A, B, C - q \\ n{+}1.\ \text{Отсутствует опыт типа: } \neg A, B, C - q \end{array}}{\delta(q/A) > 1/2 \supset A \mapsto q},$$

где $\delta(q/A)$ — относительная частота наступления **q** при условии наступления события **A** (при подсчете этой частоты следует учитывать только результаты экспериментов, выражаемых посылками вида 1 и 2).

Применение данного рассуждения основано на следующих соображениях. Если между **A** и **q** имеется каузальная связь, то ее можно было бы попытаться установить методом различия. Об этом как раз и говорят посылки 1 и 3, в которых фиксируются результаты экспериментов, получаемые в обычных условиях по этому методу. Однако посылка 2 показывает, что стандартные условия метода различия нарушены влиянием какого-то фактора. Тогда для подсчета степени связи между **A** и **q** надо учесть количество экспериментов вида 1 по отношению к общему числу экспериментов вида 1 и 2.

Чрезвычайно существенной в этой ситуации является n+1-я посылка, которая гласит, что нам ни разу не встретился случай, когда при отсутствии A наступило событие q. Действительно, если q может осуществиться и без наличия A, то это означает, что причиной q явилось иное обстоятельство, отличное от A, но тогда нет оснований полагать, что в других случаях осуществления q именно наличие A было этому причиной. Отметим, что для получения достоверного заключения с использованием данного рассуждения чрезвычайно важно накопление статистического материала. При этом чем слабее связь между A и q, тем большее количество экспериментов надо проводить.

Рассмотренный только что метод, казалось бы, можно использовать для экспериментального оправдания телепатии — передачи мыслей на расстояние. Однако именно для этой цели данная схема как раз и не подходит, так как в опытах по телепатии всегда присутствуют эксперименты вида n+1-й посылки. Поэтому обычно рассуждения относительно телепатических опытов осуществляют по иной схеме, основанной на идее статистической независимости двух массовых событий. Напомним, что два события p и q считаются независимыми, если наступление или ненаступление любого из них никак не влияет на наступление или ненаступление другого. В этом случае говорят о случайной связи между p и q.

Применительно к опытам по телепатии это означает, что если акт передачи мысли (событие A) и так называемый "прием мысли" (событие q) независимы друг от друга, то относительные частоты наступления события q при наличии события A и ненаступления события q при наличии A должны быть одинаковы. Учитывая сказанное, метод рассуждения по установлению статистической причинной связи между A и q будет теперь выглядеть следующим образом:

$$\frac{\begin{array}{l} 1.\ A, B, C - q \\ 2.\ A, B, C - \neg q \\ 3.\ \neg A, B, C - q \\ 4.\ \neg A, B, C - \neg q \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n.\ A, B, C - q \end{array}}{\delta(q/A) > 1/2 \supset A \mapsto q},$$

где при вычислении относительной частоты наступления q при условии наступления A необходимо учитывать количество экспериментов вида 1 к числу всех экспериментов вида 1, 2 и 3. Этим данное рассуждение существенно отличается от предыдущего, в котором учитывалось количество экспериментов вида 1 к числу всех экспериментов лишь вида 1 и 2. Такое различие обусловлено тем, что в предыдущем случае отсутствовали эксперименты вида $\neg$**A**, **B**, **C** — **q**, присутствующие в данном рассуждении. Наличие же таких экспериментов не позволяет считать каждое наступление события **q** в опытах вида 1 (**A**, **B**, **C** — **q**) за результат действия именно фактора **A**. Ведь **q**, как показывают опытные данные, может произойти и без наличия **A**. Поэтому данное обстоятельство надо количественно учесть.

Этот метод обладает рядом недостатков, которые делают его очень ненадежным. Во-первых, в силу наличия экспериментов, фиксируемых посылкой 3, всегда есть возможность считать, что осуществление **q** обусловлено наличием каких-то скрытых параметров, а потому, во-вторых, требуется наложить чрезвычайно жесткие условия на отслеживание всех возможных побочных воздействий, что весьма трудно осуществить. Кроме того, для получения действительно хорошо обоснованного заключения требуется постоянство результатов — $\delta(q/A) > 1/2$ — во всех сериях опытов, что применительно к экспериментам по телепатии не выполняется, так как в значительном их числе результат бывает отрицательным — $\delta(q/A) < 1/2$. Таким образом, с научной точки зрения попытки экспериментального оправдания телепатии выглядят сомнительными.

Интерес представляет и достаточно часто использующийся в науке прием установления *корреляции* между некоторым обстоятельством **A** и следствием **q**. Обстоятельство **A** в этом случае не является причиной **q**, но наличие **A** так или иначе (позитивно или негативно) модифицирует **q**. Например, внесение в почву удобрений не является причиной роста растения, но его подкормка удобрениями может увеличить урожайность. Применение в автомобилях ремней безопасности не устраняет причин аварий, но оно может снизить число аварий с тяжелыми последствиями. Итак, фактор **A**, не будучи причиной **q**, может тем не менее модифицировать его величину и тем самым является причиной этой модификации. В этом случае говорят, что величина **q** коррелирует с наличием или отсутствием **A**.

Чтобы установить такого рода корреляцию, поступают следующим образом: проводят по крайней мере два эксперимента. В одном из них фактор **A** отсутствует (этот эксперимент называется контрольным), в других же фактор **A** присутствует. Рассуждение в этом случае выглядит следующим образом:

$$\frac{\begin{array}{l}1.\ \neg A,\ B,\ C - q'\\ 2.\ A,\ B,\ C - q''\end{array}}{A \mapsto (q'' - q' \neq 0)},$$

где выражение, стоящее в заключении, означает, что A является причиной изменения величины q. Если q′ и q″ выражаемы числами, то величину корреляции между A и q можно вычислить.

§ 5. Гипотетико-дедуктивный метод

При рассмотрении причинных зависимостей неоднократно указывалось на важную роль, которую играют в поиске этих зависимостей определенные соображения (предположения) о возможной причине исследуемого события. Такого рода предположения позволяют более целесообразно организовать исследовательскую работу, существенно сузить область поиска возможной причины, а если предположение оказалось верным, то и быстро достигнуть положительного результата.

Вообще, имея дело с фактами окружающей действительности, человек всегда стремится понять и объяснить, почему мир устроен именно таким, а не иным образом. С этой целью он выдвигает различного рода предположения о том, как устроен отдельно взятый предмет и мир в целом, допускает существование различных сил, действующих в мире, наличие закономерных связей между явлениями, высказывает соображения о механизмах взаимодействия между предметами. Все эти предположения, допущения и соображения носят первоначально проблематический (вероятностный) характер и могут в конце концов оказаться как *обоснованными* (*верифицированными*), так и *опровергнутыми* (*фальсифицированными*).

Проблематическое предположение, высказанное для объяснения совокупности фактов, называется гипотезой. Однако не всякое предположение может быть названо научной гипотезой. К числу последних относятся лишь такие предположения, которые удовлетворяют ряду условий.

Во-первый, предположение не должно вступать в противоречие с твердо установленными и неоднократно проверенными научными фактами, эмпирическими сведениями о мире. Наличие подобного несоответствия прямо и заранее указывало бы на ложность выдвинутой гипотезы.

Во-вторых, научная гипотеза должна основываться на допущении действия только лишь естественных, существующих в самой природе, сил и сущностей, то есть не выходить за рамки естественных причин. Несоблюдение этого условия, допущение в качестве объясняющей причины наличия некоторых сверхъестественных факторов, скажем, божественной воли или демонических сил, лишает гипотезу статуса научного предположения. Последнее объясняется следующими обстоятельствами: (1) предположение о действии воли бога или дьявола является слишком сильным допущением, так как с помощью этих факторов можно объяснить все что угодно, (2) это предположение нельзя экспериментально ни обосновать, ни опровергнуть, (3) из сказанного вытекает, что, вводя такого рода допущения, мы сделали бы бессмысленным само научное исследование и оно, еще не начавшись, должно уже было бы считаться завершенным.

В-третьих, при формулировке научных гипотез надо стараться не вводить без весьма веских оснований таких допущений, которые вступали бы в противоречие с твердо установленными теоретическими положениями. Так, если для объяснения некоторых фактов вводится гипотеза, согласно которой допускается существование вечного двигателя, то такая гипотеза (если в ее пользу не приведено очень мощное фактуальное обоснование) должна расцениваться как антинаучная, ибо она вступает в противоречие с законами термодинамики, которые прямо запрещают существование вечных двигателей.

Характерным примером в этом отношении является история с открытием нейтрино — одной из элементарных частиц. При исследовании β-распада ядер атомов выяснилось, что подсчет баланса энергии, количества движения и момента количества движения начального ядра и продуктов распада не сходится. Это привело некоторых ученых к идее о нарушении при β-распаде одних из наиболее фундаментальных законов физики — законов сохранения, что лежало за гранью научной рациональной гипотезы. Выход из положения был найден В.Паули, который предположил, что в β-распаде принимает участие еще одна, не наблюдаемая в опыте, частица с нулевой массой покоя, которая как раз и уносит с собой часть энергии. Эта частица получила название “нейтрино”, а ее существование было обосновано экспериментально в 1953 году — через 20 лет после выдвижения В.Паули своей гипотезы.

Кроме этих самых общих условий каждая хорошо организованная научная гипотеза должна обладать еще некоторыми особенностями. Прежде всего это касается степени ее развитости. Первоначально гипотеза рождается как простая догадка. Далее эта догадка уточняется, детализируется, наполняется более богатым содержанием. В частности, если гипотеза допускает математическое описание, то желательно довести ее до такой степени, чтобы она не только объясняла явления, но и точно предсказывала их количественные характеристики.

Кроме этого, всякая хорошо организованная гипотеза должна допускать свою *принципиальную проверку на истинность*. Иначе говоря, всегда должна существовать принципиальная возможность с помощью различного рода экспериментов или наблюдений либо подтвердить ее, а может быть, и доказать (установить истинность, верифицировать), либо опровергнуть (фальсифицировать).

Наконец, добротное научное предположение не должно "обрастать" *гипотезами ad hoc* (*гипотезами для данного случая*). Их появление связано с тем, что порой основное предположение не в полной мере объясняет ту совокупность фактов, ради которых оно и было выдвинуто, а лишь часть их. В таком случае для объяснения этого "остатка" приходится вводить дополнительные гипотезы, которые и носят название гипотез *ad hoc*. Например, Птолемей для объяснения видимого движения планет предположил, что движение каждой планеты осуществляется одновременно по двум концентрическим окружностям. В центре одной из этих окружностей, называемой деферентом, помещалась неподвижная Земля. Предполагалось, что небесное тело движется с постоянной скоростью по еще одной окружности, называемой эпициклом, центр которой перемещался по деференту. В результате сложения этих двух движений Птолемею удалось достаточно точно, в математически строгом виде описать видимые перемещения планет по небесному своду. Это позволило предвычислять положение планет на небосводе, составлять календари, рассчитывать движения судов. Однако по мере накопления расхождений между реальным положением планет и их вычисленными положениями общую схему Птолемея пришлось усложнить, введя новые эпициклы второго, третьего и т.д. порядка. Введение эпициклов n-го порядка, центры которых перемещались по эпициклам n-1-го порядка было, конечно же, искусственным построением и представляло собой гипотезу *ad hoc*.

Широкое использование гипотез свойственно всем наукам — как дедуктивным, так и эмпирическим. Но в эмпирических науках это использование оформляется в особый познавательный прием, называемый *гипотетико-дедуктивным методом*. Метод представляет из себя сложный процесс формирования и проверки гипотез, распадающийся на несколько этапов.

(1) На основе эмпирических наблюдений выделяется некоторый процесс или событие, и относительно этого процесса или

события устанавливается наличие некоторых наблюдаемых фактов $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

(2) Пользуясь предшествующим опытом и имеющимся уже заранее знанием Γ, а также установленными фактами $f_1, f_2, \ldots, f_n$, для объяснения этих фактов выдвигают гипотезу h. Переход от Γ и $f_1, f_2, \ldots, f_n$ к гипотезе h представляет собой правдоподобное следование $\Gamma, f_1, f_2, \ldots, f_n \mid\approx h$, причем считается, что это следование имеет место, только если из Γ и h можно дедуцировать каждый из наблюдаемых фактов $f_1, \ldots, f_n$, то есть имеет место $\Gamma, h \vdash f_i$. Если данное условие не выполнено, то гипотеза h является неверной уже при своей формулировке и должна быть отброшена.

(3) Из Γ и h дедуктивно выводятся следствия фактуального характера $I_1, \ldots, I_r$, утверждающие наличие новых фактов, отличных от уже наблюдавшихся фактов $f_1, \ldots, f_n$, известных до формулировки гипотезы. Итак, на данном этапе осуществляется дедукция вида $\Gamma, h \vdash I_j$.

(4) На последнем этапе каждое следствие $I_1, \ldots, I_r$ фактуального характера подвергается эмпирической проверке. Если каждое из следствий $I_1, \ldots, I_r$ согласуется с опытом, то гипотеза h считается подтвержденной (иногда даже можно заключить, что она доказана). Если же хотя бы одно из следствий $I_1, \ldots, I_r$ не согласуется с опытом, то гипотеза считается *фальсифицированной*.

Покажем действие гипотетико-дедуктивного метода на одном примере. Наблюдая за поведением пчел, ученые заметили, что насекомые на некоторых цветках полностью завершали сбор нектара (f_1), в то время как на другие цветки они садились лишь на мгновение и тут же взлетали (f_2). Так как никакой гипотезы по поводу этого различия в поведении пчел сделано не было, то наблюдения были продолжены над отдельно взятыми пчелами. В результате выяснилось, что пчела полностью завершала сбор, если она посещала цветок впервые (f_3). Если же подлетала к цветку, который недавно посетила, то ее поведение менялось и она, присев на него, мгновенно улетала (f_4). Тем самым уже на уровне простого наблюдения фактов была установлена причинная зависимость поведения пчел (f_1, f_2) от числа посещений цветка (f_3, f_4). Для объяснения этой причинной зависимости и была выдвинута гипотеза h. Используя знание о том, что многие животные помечают посещаемые ими места различного рода пахучими веществами (Γ), ученые предположили, что пчелы при первой посадке на цветок тоже помечают его специальным пахучим химическим веществом — феромоном. Эта гипотеза позволила объяснить, в чем заключалась причина различия в поведении насекомых, так как из Γ и h можно было сделать два вывода: $\Gamma, h \vdash f_3 \supset f_1$ и $\Gamma, h \vdash f_4 \supset f_2$. Кроме того, гипотеза h позволила представить поведение пчел как целесообразное с биологической точки зрения. Действительно, феромон служил для пчелы знаком, что посещаемый ею цветок является уже истощенным объектом. Тем самым энергозатраты пчелы снижались и повышалась эффективность ее работы.

Но гипотезу еще надо было подтвердить. Ее можно было бы прямо доказать, если бы исследователям удалось выделить сам этот феромон и проделать с ним соответствующие опыты. Однако они применили иной прием обоснования гипотезы, а именно проверили те следствия, которые вытекали из данной гипотезы. Так как вещество было пахучим, то естественно было считать, что снижение пахучести феромона должно было как-то повлиять на поведение пчел (I_1). С этой целью над пчелами были проведены опыты по наблюдению их поведения в условиях действия вытяжного вентилятора. Оказалось, что в обычных условиях пчела на сбор нектара с цветка тратила вполне определенное время. В случае же, когда был включен вентилятор и тем самым феромонный сигнал значительно ослабевал, пчела затрачивала на сбор нектара большее количество времени. Этот опыт согласуется с выдвинутой гипотезой и тем самым ее подтверждает, хотя и не обосновывает полностью.

Описанная выше общая теоретическая схема гипотетико-дедуктивного метода представляет собой лишь идеализированную модель того, как она используется в реальных условиях. Покажем идеализированный характер общей схемы на примере опровержения гипотезы.

На первый взгляд представляется, что опровержение гипотезы есть простое воспроизведение аналога схемы *modus tollens* дедуктивной логики:

$$\frac{\begin{array}{l} h \vdash I \\ \neg I \end{array}}{\neg h}.$$

Но в дедуктивной логике *modus tollens* применяется как теоретический метод познания. В случае же эмпирического познания многие моменты не являются жестко определенными, а потому ход опровержения будет отличаться от простого применения *modus tollens*.

В самом деле, допустим, что имеется дедуктивное выведение вида: $\Gamma, h \vdash I$. Наличие такого вывода при хорошо развитой дедуктивной теории можно установить надежно, а потому не будем сомневаться в выводе вида $\Gamma, h \vdash I$. Допустим далее, что опыт показывает на наличие $\neg I$. Тем самым возникло противоречие между предсказанием — I и показанием опыта — $\neg I$. Означает ли это, что надо сразу же отбросить гипотезу h как неверную? Попав в такую ситуацию, исследователь может далее поступить по-разному.

Во-первых, он может предположить, что данные опыта неверны и на самом деле имеет место как раз I, а не $\neg I$, то есть он может подвергнуть сомнению результаты эмпирической проверки утверждения I. Таким образом, что должно быть отвергнуто — гипотеза h или свидетельство $\neg I$, еще только следует установить дальнейшими проверками.

Допустим далее, что, проведя несколько независимых друг от друга проверок, удалось окончательно доказать наличие $\neg I$. Означает ли это теперь, что гипотеза h должна быть отброшена как неверная? Оказывается, даже в этом случае такой вывод был бы слишком поспешным. Ведь I выводилось не просто из гипотезы h, а из h, взятого совместно с совокупностью сведений Γ. Поэтому можно допустить, что противоречие между I и $\neg I$ есть результат неучета какого-то обстоятельства A, которое должно входить в Γ, а на самом деле в нем отсутствует. Следовательно, можно, не отбрасывая гипотезу h, видоизменить Γ на Γ', где Γ' — это новая совокупность сведений, в которой уже учитывается обстоятельство A.

Из данного рассмотрения видно, что гипотезу не так уж и легко бывает опровергнуть. Для этого необходимо убедиться, что эмпирический результат $\neg I$ твердо установлен и не вызывает сомнений и, кроме того, что не удается устранить различие между теоретическим I и эмпирическим $\neg I$ допущением каких-то факторов, не учитываемых в Γ, несмотря на все попытки это сделать. Только при учете всех этих обстоятельств можно заключить о неверности именно гипотезы h. Рассмотрим все эти случаи.

При создании своей знаменитой таблицы химических элементов Д.И.Менделеев оставил некоторые клетки незаполненными, так как в то время соответствующие химические элементы не были известны. Одно из таких мест отводилось Менделеевым химическому элементу, который он назвал экаалюминием. Используя гипотезу, которая легла в основу построенной им таблицы, он теоретически вычислил атомный вес экаалюминия и предсказал его свойства. Через некоторое время французский исследователь П.Лекок экспериментально выделил новый химический элемент, названный им галлием, который совпадал по химическим свойствам с гипотетическим экаалюминием, но опытная проверка его атомного веса показала расхождение с теоретически предсказанным Д.И.Менделеевым. На этом основании П.Лекок заявил о неверности гипотезы Менделеева. Однако Менделеев не согласился с этим выводом и настоял на перепроверке результатов опыта. При более тщательной проверке результаты экспериментов совпали с предсказанными Менделеевым, а источником первоначального расхождения оказалось наличие в образцах галлия, по которым эмпирически устанавливался атомный вес, примесей других химических элементов.

Рассмотрим другой пример. В результате теоретических расчетов, выполненных на основе небесной механики Ньютона (h), было выявлено расхождение между теоретически вычисленным движением планеты Уран (I) и наблюдаемым ее движением на небесной сфере (¬I). При этом были учтены возмущающие действия других небесных тел на движение Урана (Г). Таким образом, возникла ситуация, логическая суть которой представима в форме:

$$1.\ \Gamma, h \vdash I,$$
$$2.\ \neg I.$$

Однако уверенность ученых в правильности механики Ньютона (h) и правильности результатов наблюдений (¬I) была столь высока, что причину расхождения заподозрили в совокупности сведений Г. Было высказано предположение, что эта совокупность неполна, так как не учитывает существования еще одной, неизвестной планеты, орбита которой более удалена от Солнца, чем орбита Урана, и возмущающее действие которой как раз и является причиной указанного расхождения.

Итак, для объяснения несоответствия между I и ¬I была выдвинута новая гипотеза о существовании некоторой еще не открытой планеты, что изменило совокупность сведений Г на Γ'. Французский исследователь Леверье и англичанин Адамс, исходя из величин расхождения данных, вычислили орбиту предполагаемой планеты и указали место ее нахождения на небосводе. В результате проведения астрономических наблюдений планета действительно была открыта в указанном месте и получила название Нептун.

В связи с данным примером заметим, что по мере того, как с помощью гипотезы h удается получить объяснение все новых и новых фактов, доверие к ней возрастает и она переходит в разряд *теории*, то есть становится широко признанным рабочим инструментом исследователя. Гипотетический характер теории не изменяется, но ученый, при возникновении расхождения между теоретически вычисленной величиной I и эмпирически наблюдаемой, склонен в этом случае объяснять данное несоответствие не неверностью теории, а действием некоторых неучтенных факторов. Для опровержения теории он всегда потребует очень веских оснований. Чаще всего это происходит в том случае, когда на смену одной теории приходит новая теория, которая лучше, чем первая, объясняет совокупность имеющихся фактов.

Именно с этим обстоятельством связан следующий пример. Астрономам было известно, что перигелий планет, движущихся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, то есть ближайшая к Солнцу точка их орбиты, со временем перемещается в направлении движения планеты. Для всех планет такое вековое смещение их перигелия удалось объяснить возмущающим действием других небесных тел. Но у Меркурия величина смещения оказалась достаточно значительной, причем эту величину не удавалось полностью объяснить действием других небесных тел. История науки показала, что в данном случае это расхождение между теорией и эмпирией опровергало как раз теорию (h) — небесную механику Ньютона. При замене h на h′ — общую теорию относительности Эйнштейна расхождение между теоретической величиной и эмпирической удалось устранить.

Выше были рассмотрены различного рода сложности, возникающие в связи с опровержением гипотез. Рассмотрим теперь, каким образом происходит процесс их *подтверждения*. При этом заметим, что бывают случаи, когда гипотеза при ее эмпирической проверке не просто подтверждается, то есть увеличивается степень доверия к ней, но она и *доказывается* (*верифицируется*). Именно так произошло с гипотезой о возмущающем действии неизвестной планеты на движение Урана после того, как эта планета (Нептун) была эмпирически обнаружена, а расчеты показали, что учет гравитационного действия новой планеты достаточен, чтобы согласовать теоретические расчеты с данными наблюдений. Но такая ситуация возможна далеко не всегда, а только когда гипотеза носит *частный* и *эмпирический* характер. В других же случаях, когда в качестве гипотезы выступает *общее* утверждение или утверждение *теоретического* характера, согласованность гипотезы с фактами является все же не окончательным ее доказательством, а лишь увеличивает степень ее правдоподобия, то есть подтверждает ее.

Так, специальная теория относительности основана на принятии гипотезы о постоянстве скорости света в вакууме в любой системе отсчета. Она подтверждается различного рода экспериментами, и в частности наблюдением за движением двойных звездных систем. Действительно, если бы скорость света, приходящего к нам от каждой из звезд двойной системы, была различной, то мы должны были бы наблюдать нарушение законов гравитационного взаимодействия при их взаимном движении. Однако такого рода нарушений не наблюдается.

Гипотеза о постоянстве скорости света является эмпирической гипотезой, но она носит общий характер, а потому никакие ее эмпирические проверки никогда не могут ликвидировать сомнения: всегда ли верна данная гипотеза. Этому сомнению учит нас история с небесной механикой Птолемея и механикой Ньютона, которые господствовали в науке в течение долгого времени, были неоднократно подтверждены различного рода наблюдениями и тем не менее оказались ложными. Причина такого положения заключается в том, что каждый раз, проверяя на практике (эмпирически) теоретические утверждения, исследователь действует в исторически ограниченных условиях, а потому имеет дело с некоторой ограниченной практикой. Так, механика Ньютона проверялась на объектах, которые двигались с весьма умеренными скоростями, где расхождения между эмпирическими данными и предсказанием теории столь незначительны, что их нельзя зафиксировать ни одним современным прибором. Движение же объектов со скоростями, близкими к скорости света, например элементарных частиц в синхрофазотронах, сразу же показывает, что механика Ньютона неверна. Указанную ограниченность нашей сегодняшней практики приходится всегда учитывать и при рассмотрении современных теорий.

Обнаружение новых, ранее не известных фактов, которые совместимы с гипотезой, ведет к повышению ее достоверности. Вероятность истинности особенно повышается в том случае, когда факты, подтверждающие гипотезу, являются разнородными. Так, немецкий ученый Вегенер для объяснения совпадения в очертаниях современных материков выдвинул гипотезу об их перемещении, согласно которой в прошлом существовал единый субматерик, в результате тектонических процессов он раскололся, а отдельные его части, разойдясь в разные стороны, образовали нынешнее расположение современных материков. Проведенные исследования по теоретической реконструкции субматерика позволили установить, что геологическое строение тех регионов нынешних материков, которые некогда соприкасались, является идентичным. Эти факты существенно повысили степень доверия к гипотезе Вегенера. В свою очередь палеонтологические исследования показали наличие сходства в этих регионах ископаемых остатков флоры и фауны. Но окончательно гипотеза стала рассматриваться как хорошо обоснованная теория после того, как были открыты срединно-океанические хребты с рифтовыми зонами, в которых происходит постоянное изливание магматического вещества, ведущее к раздвижению материков. В настоящее время уточненная версия этой гипотезы известна как теория литосферных плит.

Очень веским доводом в пользу гипотезы является эмпирическое обнаружение такого эффекта, существование которого ранее не было известно и было предсказано лишь исходя из положений гипотезы. Таким доводом в пользу гравитационной гипотезы Эйнштейна (общая теория относительности) стало обнаружение английским астрономом А.Эддингтоном в 1919 году искривления луча света при прохождении вблизи массивных тел (Солнце) — эффект, который до гипотезы Эйнштейна предсказан быть не мог.

Часто для объяснения одной и той же совокупности фактов $f_1, \ldots, f_n$ выдвигается две или большее количество различных гипотез $h_1, \ldots, h_k$. В этом случае возникает ситуация *конкурирующих гипотез*. При их дальнейшей проверке может оказаться, что все гипотезы, кроме одной, скажем, h_1, будут опровергнуты. В таком случае считается, что вероятность истинности h_1 возрастает. Рассуждение в данном случае строится многократным использованием модуса *tollendo ponens*:

$$\frac{\begin{array}{c} h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_k \\ \neg h_2, \ldots, \neg h_k \end{array}}{h_1}.$$

В науке известно много различных конкурирующих гипотез. Таковыми являются или являлись гипотеза Гюйгенса—Френеля, объяснявшая световые явления волновыми процессами, с одной стороны, и гипотеза Ньютона, рассматривавшая эти же явления с корпускулярной точки зрения, — с другой; гипотезы органической и неорганической природы происхождения нефти, гипотезы Менделя—Дарвина, Ламарка и Берга, объясняющие явления наследственности с различных позиций, и т.д. Проходя проверку эмпирическим испытанием, одна гипотеза не обязательно должна победить другую. Достаточно часто возникает ситуация, когда обе конкурирующие гипотезы в своих исходных формулировках оказываются опровергнутыми, а вместо них принимается другая гипотеза, которая в тех или иных формах совмещает в себе обе гипотезы. Так, например, произошло с корпускулярной и волновой гипотезами света. В современной квантовой механике показано, что свет одновременно обладает как корпускулярными, так и волновыми свойствами, хотя и теория Гюйгенса—Френеля, и теория Ньютона не могут быть приняты.

§ 6. Аналогия

К правдоподобным относится еще одна форма умозаключений, называемая *аналогией*. Обычно под аналогией (подобием, сходством) имеют в виду рассуждения, состоящие в том, что на основе сходства двух предметов (систем предметов) a и b по каким-то характеристикам, а также на основе того, что a присущ некоторый признак, заключают о присущности b того же признака.

Одной из разновидностей аналогии является *аналогия свойств*. О последней говорят в том случае, когда a и b представляют собой индивиды. Рассуждение по аналогии свойств имеет следующую структуру:

$$\begin{array}{l} 1.\ P_1(a)\ \&\ P_1(b) \\ 2.\ P_2(a)\ \&\ P_2(b) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n.\ P_n(a)\ \&\ P_n(b) \\ \hline \qquad a \approx b \\ n+1.\ Q(a) \\ \hline \qquad Q(b) \end{array},$$

где "$a \approx b$" означает, что "предмет a подобен предмету b", а знак "$\approx$" — знак подобия (сходства).

Суть этого рассуждения состоит в следующем. Допустим, что исследователь желает установить наличие некоторого свойства Q у предмета b и при этом по каким-либо обстоятельствам лишен возможности сделать это посредством эмпирической проверки. В этой ситуации он может опереться на подобие предмета b и предмета a. Первые n посылок как раз и устанавливают наличие такого подобия между a и b на основании их сходства в признаках $P_1, P_2, \ldots, P_n$, о чем и делается первое заключение — $a \approx b$. Далее, опираясь на это заключение о подобии предмета a предмету b и на n+1-ю посылку, которая говорит, что у предмета a наличествует свойство Q, исследователь может распространить это подобие и на указанное свойство Q, перенося последнее с предмета **a** на предмет **b**.

Заключение, получаемое по данному рассуждению, носит проблематичный характер и является лишь вероятностным, более или менее правдоподобным. С теоретической точки зрения это легко объяснить, ведь **a** и **b** — разные предметы, а следовательно, они должны чем-то различаться. Поэтому, будучи сходны между собой по признакам $P_1, \ldots, P_n$, они как раз могут различаться по наличию у одного и отсутствию у другого признака Q. Это непосредственно вытекает из принципа *тождества неразличимого* Г.Лейбница, согласно которому два предмета тождественны (то есть являются одним и тем же предметом) тогда и только тогда, когда все свойства, которыми они обладают, одинаковы:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \leftrightharpoons \forall P(P(\mathbf{a}) \equiv P(\mathbf{b})).$$

Отсюда следует, что если предметы не тождественны, то у них имеется по крайней мере одно различающее их свойство.

Чтобы гарантировать более высокую степень вероятности заключения, полученного по аналогии, необходимо учитывать какие-то дополнительные содержательные условия. По наличию или отсутствию этих дополнительных условий различают *научную* и *популярную аналогию*.

Популярная аналогия строится без какого-либо систематического анализа и отбора тех свойств, по которым устанавливается наличие подобия между двумя предметами, и не учитывает, связаны ли каким-либо образом эти свойства $P_1, \ldots, P_n$ с переносимым признаком Q или нет. В популярной аналогии первое случайно встретившееся сходство между **a** и **b** служит уже основанием перенесения интересующего нас признака, то есть она осуществляется как попало. Примером такого рода рассуждения может служить попытка, скажем, следующим образом аргументировать, что на Марсе имеется жизнь — Q(**b**). С этой целью сравниваются свойства, присущие Марсу и Земле, и устанавливается, что и Марс, и Земля являются планетами (P_1), что они вращаются вокруг Солнца (P_2), светят отраженным светом (P_3), вращаются вокруг своей оси (P_4), и Марс, и Земля имеют спутники (P_5), обе планеты подчиняются законам тяготения (P_6). Таким образом, сходство (подобие) этих предметов по $P_1, \ldots, P_6$ очевидно. Отсюда, действуя по популярной аналогии, можно получить вывод, что, следовательно, они сходны и в наличии на этих планетах жизни (Q).

Недостаток этого рассуждения состоит в том, что подобие двух планет — Земли и Марса — установлено с помощью признаков, которые или вообще не имеют, или имеют весьма отдаленное отношение к переносимому признаку **Q**. Важнейшее же условие построения научной аналогии состоит как раз в том, чтобы два предмета **a** и **b** уподобились по свойствам, существенным для переносимого признака **Q**. Это означает, что свойства $P_1, \ldots, P_n$ должны быть не любыми, а лишь такими, которые, будучи непосредственно связаны с переносимым признаком **Q**, с какой-то долей вероятности гарантировали бы перенесение признака **Q** на предмет **b**. К числу таких свойств, если иметь в виду жизнь в тех биологических формах, как она существует на Земле, должны быть отнесены сходство или различие в температурном режиме обеих планет, наличие атмосферы, возможность существования тех или иных веществ (воды, например) в жидком состоянии и вообще любые свойства, создающие возможность образования на Марсе аминокислот и нуклеиновых кислот.

Другой формой аналогии является *аналогия отношений*. Эта форма умозаключения применяется в том случае, когда **a** и **b** — системы объектов, например, *n*-ки объектов — $a = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ и $b = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$. Рассуждение в этом случае строится следующим образом:

$$\begin{array}{l}
1.\ P_1(a_1, \ldots, a_n)\ \&\ P'_1(b_1, \ldots, b_n) \\
2.\ P_2(a_1, \ldots, a_n)\ \&\ P'_2(b_1, \ldots, b_n) \\
\quad . \\
\quad . \\
\quad . \\
n.\ P_n(a_1, \ldots, a_n)\ \&\ P'_n(b_1, \ldots, b_n) \\
\hline
\qquad\qquad a \approx b \\
n+1.\ Q(a_1, \ldots, a_n) \\
\hline
\qquad\qquad Q'(b_1, \ldots, b_n)
\end{array},$$

где P_i и P'_i, а также **Q** и **Q′** — одинаковые отношения, когда **a** и **b** качественно однородные предметы, или сходные отношения, когда **a** и **b** качественно разнородны. Например, после открытия Галилеем спутников у Юпитера для этой системы объектов стало возможным установить целый ряд отношений $P_1 \ldots, P_n$, и в частности тот факт, что каждый спутник вращался вокруг наиболее массивного небесного тела, входящего в данную систему,— планеты Юпитер (**Q**). Это явилось веским доводом в пользу гелиоцентрического устройства нашей планетной системы, позволив сделать по аналогии отношений вывод, что и сами планеты вместе со своими спутниками вращаются вокруг наиболее массивного небесного тела — Солнца (Q). В этом случае переносимое отношение совпадало с исходным.

Несколько иная ситуация имела место в случае, когда Резерфорд на основании проведенных им экспериментов установил целый ряд сходных отношений, существующих между электронами и атомным ядром, с одной стороны, и планетами и Солнцем — с другой. Исходя из этого он сделал по аналогии отношений вывод о планетарном строении атомов, допустив, что электроны вращаются вокруг ядра по определенным орбитам наподобие того, как планеты вращаются вокруг Солнца. В этом случае как отношения P_i и P'_i, так и переносимое отношение Q и Q′ были в силу качественного отличия небесных тел от атомов не идентичными, а лишь сходными отношениями. В дальнейших исследованиях это было достаточно четко подтверждено.

Аналогия свойств и отношений широко используется в процессах *моделирования*. Прежде чем приступить к строительству дорогостоящего сооружения (самолета, гидроэлектростанции, корабля и т.д), создают модель этого объекта и затем устанавливают различные свойства и отношения, присущие модели, которые далее по аналогии переносятся на оригинал. Чтобы правомерно осуществить такое перенесение, необходимо предварительно быть уверенным, что модель и оригинал подобны друг другу. Для решения этого вопроса существует специальная *теория подобия*, которая устанавливает условия подобия двух объектов. Выполнение этих условий позволяет с высокой степенью вероятности переносить результаты эмпирических исследований, полученные на модели, на оригинал.

Выводы по аналогии играют большую роль при выдвижении тех или иных гипотез. Так, на основании сходства процессов распространения волн в жидких средах с процессами распространения звука в свое время по аналогии был сделан вывод о том, что звук — это распространение волн в воздушной среде. Заключение данной аналогии стало гипотезой, которая в дальнейшем была экспериментально подтверждена. В течение долгого времени на основании сходства многих эффектов, присущих как звуковым, так и световым явлениям (отражение, интерференция, дифракция и т.д.), считалось, что распространение света представляет собой колебательный процесс особой среды — эфира. Последняя аналогия оказалась неверной, так как гипотеза о существовании эфира не выдержала экспериментальной проверки.

В настоящее время большую роль в научных изысканиях играет аналогия между работой головного мозга и компьютера. Эта аналогия, с одной стороны, позволяет из знания, как работает компьютер, лучше понять, каким образом осуществляется переработка информации живыми биологическими системами, в частности человеком, а с другой — исследования в области нейрофизиологии и информатики позволяют переносить на искусственные системы все более и более тонкие детали работы головного мозга, приближаясь тем самым к созданию искусственного интеллекта.

Наконец, можно сказать, что все наше познание окружающего мира есть не что иное, как воспроизведение этого мира в аналоговых конструкциях. Действительно, наши теории, посредством которых описывается мир, представляют собой теоретические модели этого мира. С одной точки зрения, теоретическое описание различных процессов, происходящих в мире, если наши теории являются хорошими подобиями этого мира, позволяет переносить на саму действительность то, что мы установили чисто теоретически.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В предметном указателе содержатся ссылки на страницы, где вводится соответствующий термин — посредством определения или другим способом.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА V. СИЛЛОГИСТИКА

ГЛАВА VI. ПОНЯТИЕ

ГЛАВА VII. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

ГЛАВА VIII. ПРАВДОПОДОБНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

КНИГИ ИНФРА-М ПОЧТОЙ

Книги рассылаются почтой по **всей территории России** и ближнего зарубежья.

Рассылка книг производится только **по предоплате.**

Для оформления заказа нужно воспользоваться прайс-листом Издательского Дома **"ИНФРА-М"**

Прайс-лист можно бесплатно заказать **по почте,** получить **по факсу** с круглосуточного автоматического факс-аппарата, заказать **по электронной почте** или считать в телеконференции relcom.commerce.publishing.

Заказчик самостоятельно подсчитывает по прайс-листу стоимость своего заказа.

Рекомендуемая к предоплате величина почтовых расходов составляет **40%** от стоимости заказа. Это средняя величина почтовых расходов для России. **Реальные** почтовые **расходы** могут быть больше или меньше оплаченной суммы.

При поступлении средств на расчетный счет Издательского Дома "ИНФРА-М" на каждого клиента открывается **лицевой счет,** на котором фиксируется движение средств клиента.

Цена заказанного товара может отличаться от указанной в прайс-листе. **Цена**, по которой производится отгрузка, назначается в момент регистрации заказа оператором. Это оптовая цена, действующая в день регистрации заказа.

При выполнении заказа с лицевого счета списываются стоимость книг и реальная сумма почтовых расходов, исчисленная по почтовым тарифам доставки на указанный клиентом адрес.

Остаток средств фиксируется на лицевом счете и может быть использован по усмотрению клиента для закупки литературы по прайс-листу или оплаты услуг Издательского Дома "ИНФРА-М".
С каждой посылкой вы получаете **свежий прайс-лист.**

Адрес: 127214, Москва, Дмитровское ш., д.107.
Телефоны: (095) 485-7177, 485-7618
Факс: (095) 485-5318
Робофакс: (095) 485-5444 (круглосуточно)
E-mail: contra[illegible]