

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
КАЗАХСТАН**

**Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени
Жангир хана**

Кафедра «Информационные системы»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**по дисциплине «Исследование операций и теория игр»
для специальности 5В070300 - Информационные системы**

Уральск 2013

УДК
ББК

Камалова Г.А., канд. физ.-мат. наук, доцент,
Хамзина А.А., ст. преп.

Рецензент: Кушеккалиев А.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

Учебное пособие
по дисциплине «Исследование операций и теория игр» для
специальности 5В070300 «Информационные системы»

Обсуждено на заседании кафедры «Информационные системы»
____. _____. 2013 г, протокол № ____.

Рекомендовано на заседании УМБ политехнического факультета
____. _____. 2013 г., протокол № ____

Одобрено УМС университета _____. _____. 2013 г., протокол № ____

Данное учебное пособие представляет собой курс лекций и практикум по дисциплине «Исследование операций и теория игр» и предназначено для студентов специальности 5В070300-«Информационные системы».

Цель курса – показать студентам на простых содержательных примерах суть их будущей профессии и заложить основы будущего профессионального мировоззрения. Одновременно намечаются истоки и идейная связь ряда специальных дисциплин (линейное и нелинейное программирование, теория игр, исследование операций, теория выбора и принятия решений), с которыми студенты, будут знакомиться позже, на старших курсах. Пособие состоит из 5 глав, теоретический материал вполне доступен изучающим данную дисциплину. Для самостоятельной проверки знаний в конце каждой главы приведены упражнения и тестовые задания.

Содержание

Введение	5
Типичные классы задач	7
Принятие решений в условиях определенности	9
Принятие решений в условиях риска	10
Принятие решений в условиях неопределенности	11
Принятие решений в условиях конфликтных ситуаций или противодействия	16
Глава 1. Общая постановка задачи линейного программирования	17
1.1. Экономико-математическая модель.	17
Примеры задач линейного программирования	18
Упражнения	21
1.2. Стандартная и каноническая формы задачи линейного программирования	24
Правила приведения задач линейного программирования к стандартной и канонической формам	26
Упражнения	29
Тестовые задания	31
Глава 2. Модели целочисленного линейного программирования	34
2.1. Выпуклые множества и многогранники	34
Постановка задачи целочисленного программирования	36
2.2. Методы отсечения и их сущность	37
2.3. Метод ветвей и границ	40
Упражнения	43
Тестовые задания	44
Глава 3. Двойственные задачи.	47
3.1. Экономическая интерпретация задачи, двойственной задаче об использовании ресурсов	47
3.2. Взаимно двойственные задачи линейного программирования и их свойства.	48
Упражнения	50
3.3. Первая теорема двойственности	52
3.4. Вторая теорема двойственности	59
3.5. Объективно обусловленные оценки и их смысл	63
Тестовые задания	65
Глава 4. Транспортная задача.	69
4.1. Экономико-математическая модель транспортной задачи	69
4.2. Нахождение первоначального базисного распределения поставок. Построение исходного опорного плана (метод северо-западного угла)	74
4.3. Метод минимального элемента	77

4.4.	Метод аппроксимации Фогеля	78
4.5.	Метод двойного предпочтения	80
	Упражнения	81
4.6.	Метод потенциалов	83
	Алгоритм метода потенциалов	84
	Упражнения	90
	Тестовые задания	91
Глава 5. Элементы теории игр		94
5.1.	Понятие об игровых моделях	94
	Платежная матрица. Нижняя и верхняя цены игры	95
	Решение игры в смешанных стратегиях	97
5.2.	Геометрическая интерпретация игры 2x2	99
5.3.	Приведение матричной игры к задаче линейного программирования	102
	Упражнения	106
	Тестовые задания	108
	Список рекомендуемой литературы	110

Введение

Исследование операций (ИО) – наука, которая занимается разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного (или оптимального) управления, в основном, организационными системами.

Предметом исследования операций чаще всего являются системы организационного типа (организации), которые состоят из большого числа подразделений, взаимодействующих между собой. Причем интересы подразделений не всегда согласуются между собой и могут быть противоположными.

Цель исследования операций – количественное обоснование принимаемых решений по управлению организациями (системами).

Решение, наиболее выгодное всей организации называется *оптимальным*. Решение, выгодное одному или нескольким подразделениям – *субоптимальное*.

Исследования операций характеризуется следующими *основными особенностями*:

1. Системный подход к анализу поставленной проблемы. Системный подход (анализ) является основным принципом исследования операций. Любая задача, какая бы ни была частная, рассматривается с точки зрения ее влияния на критерий функционирования всей системы.

Для исследования операций характерно, что при решении каждой новой проблемы возникают все новые задачи. Наибольший эффект достигается при непрерывном исследовании, обеспечивающий преемственность при переходе одной задачи к другой.

2. Стремление к нахождению оптимального решения поставленной задачи. Хотя определение оптимального решения не всегда возможно из-за ограничений, накладываемыми имеющимися в наличии ресурсами (или уровня развития современной науки). В этом случае довольствуются субоптимальным решением.

3. Одним из создателей исследования операций является Т. Саати, который определил ее как ***”искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые делаются еще худшие ответы другими методами”***.

4. Исследования всегда проводятся комплексно по многим направлениям. Для проведения такого исследования системы организационного типа создается группа, состоящая из специалистов различного профиля из разных областей (инженеры, экономисты, психологи и т.д.). Задача такой группы – комплексное исследование всего множества факторов, влияющих на решение проблемы, и использования идей и методов различных наук.

Основные этапы операционного исследования

Любое операционное исследование, при всем возможном многообразии конкретных работ по исследованию операций, проходит последовательно следующие этапы:

1. Постановка задачи
2. Построение математической модели
3. Нахождение метода решения (выбор, разработка)
4. Проверка и корректировка модели
5. Реализация найденного решения на практике

1. Постановка задачи

Чрезвычайно ответственный этап операционного исследования. Первоначально задачу формулируют с точки зрения заказчика. Такая постановка никогда не бывает окончательной. Во время анализа исследуемой системы постановка всегда уточняется. На этом этапе роль операций состоит в тщательном исследовании объекта, изучении множества факторов, влияющих на результаты исследования процесса.

2. Формализация задачи

В самом общем случае математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{найти } \max E &= \max f(\bar{x}, \bar{y}) \\ \text{при } g_i(\bar{x}, \bar{y}) &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

где $E = f(\bar{x}, \bar{y})$ – целевая функция (показатель качества или эффективность системы);

$\bar{x}$ – вектор управляемых переменных;

$\bar{y}$ – вектор неуправляемых переменных;

g_i – функция потребления i -го ресурса

b_i – величина i -го ресурса

3. Нахождение метода решения

Для нахождения оптимального решения $\bar{x}_{opt}$ в зависимости от структуры целевой функции и ограничений применяют те или иные методы теории оптимальных решений:

- Линейное программирование, если f и g – линейные функции.
- Нелинейное программирование, если f и g – нелинейные функции.
- Динамическое программирование, если f имеет специфическую структуру, т.е. является аддитивной или мультипликативной функцией от

переменных $\bar{x}$ и $\bar{y}$, например, $f(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i, y_i)$.

- Геометрическое программирование, если целевая функция $f(\bar{x}) = \sum_i c_i x_1^{\alpha_i} \dots x_m^{\alpha_m}$, а $g_i(\bar{x}) \leq 1$.
- Стохастическое программирование, когда $\bar{y}$ – случайная величина, а вместо функции $f(\bar{x}, \bar{y})$ рассматривается ее математическое ожидание $E_y[f(\bar{x}, \bar{y})]$.
- Дискретное программирование, если на $\bar{x}$ и $\bar{y}$ наложено требование дискретности (например, целочисленности).
- Эвристическое программирование применяют при решении тех задач, в которых точный оптимизм найти алгоритмическим путем невозможно из-за огромного числа вариантов.

4. Проверка и корректировка модели

В сложных системах, к которым относятся и системы организационного типа, модель лишь частично отражает реальный процесс. Поэтому необходима проверка степени соответствия или адекватности модели и реального процесса. Проверку производят сравнением предсказанного поведения с фактическим поведением при изменении значений внешних неуправляемых воздействий.

5. Реализация найденного решения на практике

Важнейший этап, завершающий операционное исследование.

Типичные классы задач

По содержательной постановке наиболее часто возникают следующие типичные классы задач:

- *Задачи управления запасами.* Такие задачи обладают следующей особенностью: с увеличением запасов увеличиваются расходы на хранение, но уменьшаются потери из-за возможной их нехватки. (Логистика)
- *Задачи распределения ресурсов.* Такие задачи возникают, когда существует определенный набор работ, которые необходимо выполнить, а наличных ресурсов для выполнения работы должным образом не хватает.
- *Задачи ремонта и оборудования* появляются в тех случаях, когда работающее оборудование изнашивается, устаревает и со временем подлежит замене.
- *Задачи массового обслуживания* рассматривают вопросы образования и функционирования очередей, с которыми приходится сталкиваться в повседневной практике, при управлении технологическими процессами, в линиях связи и компьютерных сетях.
- *Задачи календарного планирования или составления расписания.*
- *Задачи сетевого планирования и управления.* Здесь рассматриваются соотношения между сроком окончания крупного комплекса операций и

моментами начала всех операций комплекса. Они актуальны при разработке сложных и дорогостоящих проектов.

- *Задачи выбора маршрута или сетевые задачи.* Чаще всего встречаются при исследовании разнообразных процессов на транспорте и в системах связи (компьютерные сети).

Часто задачи оказываются комбинированными.

Некоторые принципы принятия решений в ИО

В процессе принятия решений всегда возникают многочисленные трудности.

1. Большое число критериев, которые не всегда согласованы между собой. Например, требования максимальной надежности и минимальной стоимости; или требование максимальной мощности изделия при минимальных габаритах. Такие критерии противоречивы. Поэтому часто возникает задача выбора некоторого компромисса между такими требованиями.

2. Высокая степень неопределенности, которая обусловлена недостаточной информацией для обоснованного принятия решения.

Любой процесс принятия решения включает следующие элементы:

- *Цель.* Необходимость принятия решения определяется целью или несколькими целями, которые должны быть достигнуты.
- *Лицо, принимающее решение,* должно нести ответственность за последствия этих решений.
- *Наличие альтернативных решений* (различных вариантов достижения целей).
- *Наличие внешней среды* (совокупности внешних факторов, влияющих на исход решения).
- *Исходы решений,* т.е. результаты, к которым приходят в результате реализации принятых решений.
- *Правила выбора решений* (решающие правила).

Эти правила позволяют определить наиболее предпочтительные в смысле выбранного критерия решения. Решающее правило отражает информированность лица, принимающего решение, о возможных исходах выбранных решений, а также предпочтительность тех или иных исходов.

Теория принятия решений использует различные процедуры, позволяющие формализовать предпочтения, т.е. выразить их в единой количественной мере. Основой для таких процедур является *теория полезности*, разработанная Дж. Фон Нейманом и О. Моргенштерном. Ее математическая основа – система аксиом, в которых утверждается, что существует некоторая мера ценности, позволяющая упорядочить результаты решений. Эта мера называется функцией *полезности решений* или *полезностью*.

В зависимости от условий внешней среды и степени информированности лица, принимающего решение, существует следующая квалификация задач принятия решений:

- а) в условиях определенности;
- в) в условиях риска;
- с) в условиях неопределенности;
- д) в условиях конфликтных ситуаций или противодействия (активного противника).

Принятие решений в условиях определенности

Характеризуется однозначной или детерминированной связью между принятым решением и его исходом. Основная трудность – наличие многих критериев, по которым следует сравнивать исходы.

В таких ситуациях возникает задача принятия решения при так называемом “компромиссном критерии”.

Пусть имеется совокупность критериев $F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x}), \dots, F_n(\bar{x})$, $\bar{x} \in X$. Пусть для определенности все $F_i(\bar{x}) \rightarrow \max$, тогда можно рассмотреть следующие случаи:

1. Если все критерии измеряются в одной шкале, то обобщенный критерий $F_0(\bar{x})$ можно записать в виде взвешенной суммы критериев

$$F_0(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n w_i F_i(\bar{x}), \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1,$$

где w_i – вес соответствующего критерия. В этом случае необходимо найти

$$\max_{\bar{x} \in X} F_0(\bar{x})$$

Если же критерии измеряются в различных шкалах, то необходимо привести их к одной шкале. Для этого формируют критерий

$$\min_{\bar{x} \in X} F_0(\bar{x}) = \min_{\bar{x} \in X} \sum_{i=1}^n w_i \frac{F_i(\bar{x}_i^*) - F_i(\bar{x})}{|F_i(\bar{x}_i^*)|}, \text{ где } F_i(\bar{x}_i^*) = \max_{\bar{x} \in X} F_i(\bar{x}), F_i(\bar{x}_i^*) \neq 0.$$

Т.е. требуется свести к минимуму взвешенную величину отклонения каждого критерия от его максимального значения.

При таком формировании обобщенного критерия можно добиться высоких показателей по одним критериям за счет ухудшения показателей его другим.

2. Часто требуется, чтобы значения некоторых частных критериев не оказались меньше предельно допустимых значений $F_i(\bar{x}) \geq F_{i \text{ доп}}$. Допустим, что по каждому критерию определены значения $F_{i \text{ доп}}, i = \overline{1, n}$. В таком случае формируемый обобщенный критерий может быть дополнен системой ограничений, и задача принимает следующий вид:

$$\max_{x \in X} F_0(\bar{x}) = \max_{\bar{x} \in X} \sum_{i=1}^n w_i F_i(\bar{x}), \text{ при } F_i(\bar{x}) \geq F_{i \text{ don}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

3. Бывает, что критерии упорядочены по предпочтению $F_1(\bar{x}) \succ F_2(\bar{x}) \succ \dots \succ F_n(\bar{x})$, тогда задача отыскания оптимального решения может быть записана следующим образом: $\max_{\bar{x} \in X} F_1(\bar{x})$ при $F_2(\bar{x}) \geq F_{2 \text{ don}}, \dots, F_n(\bar{x}) \geq F_{n \text{ don}}$.

4. Бывают ситуации, когда критерии $F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x}), \dots, F_n(\bar{x})$ могут принимать только два значения (0 или 1): $F_i(\bar{x}) = 1$, если i -ая цель достигнута, $F_i(\bar{x}) = 0$ – в противном случае.

Тогда обобщенный критерий может быть образован логическим объединением отдельных критериев.

а) В виде конъюнкции критериев $F_i(\bar{x})$, если общая цель операции состоит в выполнении всех целей одновременно, т.е. $F_0(\bar{x}) = \prod_{i=1}^n F_i(\bar{x})$.

б) В виде дизъюнкции критериев, когда общая цель достигается, если достигается хотя бы одна частная цель, т.е.

$$F_0(\bar{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(\bar{x})).$$

5. Методика определения полезности. Очень часто в реальных условиях критерии носят качественный характер и не могут быть выражены в количественной мере. Но решение надо принимать, каким-то образом проранжировав критерии. Для принятия решений необходимо установить предпочтения различных критериев (меру полезности) для лица, принимающего решения.

Принятие решений в условиях риска

Такая задача возникает в том случае, когда с каждой принимаемой стратегией x_i связано целое множество различных результатов $O_1, O_2, \dots, O_m$ с известными вероятностями $P(O_j | x_i)$.

Формально модель задачи может быть представлена в виде следующей матрицы:

$x_i \backslash O_j$	O_1	O_2		O_m
x_1	L_{11}	L_{12}		L_{1m}
x_2	L_{21}	L_{22}		L_{2m}
....				
x_n	L_{n1}	L_{n2}		L_{nm}

Где $L_{ij} = U(O_j, x_i)$ – полезность результата O_j при использовании решения x_i .

Пусть заданы условные вероятности $P(O_j|x_i)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Вводят ожидаемую полезность для каждой стратегии

$$E[U(x_i)] = \sum_{j=1}^m U(O_j, x_i) P(O_j|x_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Решающее правило для определения оптимальной стратегии: следует выбрать ту стратегию, которая дает максимальную ожидаемую полезность, т.е.

$$\max_{x_i} E[U(x_i)] = \max_{i=\overline{1, n}} E[U(x_i)].$$

Принятие решений в условиях неопределенности

Одним из определяющих факторов в таких задачах является внешняя среда или природа, которая может находиться в одном из состояний $S_1, S_2, \dots, S_k$, которые неизвестны лицу (наблюдателю) принимающему решения.

Тогда математическую модель задачи в условиях неопределенности можно сформулировать следующим образом.

Имеется некоторая матрица L размерности $m \times n$ с элементами, рассматриваемыми как полезность результата O_j при использовании стратегии x_i : $L_{ij} = U(O_j, x_i)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

В зависимости от состояния среды результат O_j достигается с вероятностью $P(O_j|x_i, S_k)$.

$x_i \backslash O_j$	O_1	O_2		O_m
x_1	L_{11}	L_{12}		L_{1m}
x_2	L_{21}	L_{22}		L_{2m}
.....				
x_n	L_{n1}	L_{n2}		L_{nm}

Кроме того, наблюдателю неизвестно распределение вероятностей $P(S_k)$. Относительно состояния среды наблюдатель может высказать только определенные гипотезы. Его предположения о вероятном состоянии среды называются субъективными вероятностями $\overline{P}(S_k)$, $k = \overline{1, K}$.

Если бы величины $P(S_k)$ были известны наблюдателю, то мы бы имели задачу принятия решений в условиях риска, и в этом случае

решающее правило для определения стратегии определялось бы следующим образом:

$$\max_{x_i} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^K U(0_j, x_i) P(0_j | x_i, S_k) P(S_k) = \max_{x_i} \sum_{j=1}^m U(0_j, x_i) P(0_j | x_i) = \max_{x_i} E[U(x_i)]. \quad (1)$$

На самом же деле состояния среды неизвестны и неизвестно также распределение вероятностей $P(S_k)$.

Существует несколько критериев для выбора оптимальной стратегии.

Критерий Вальда. Или критерий осторожного наблюдателя. Этот критерий оптимизирует полезность в предположении, что среда находится в самом невыгодном для наблюдателя состоянии. По данному критерию решающее правило имеет следующий вид: $\max_{x_i} \min_{S_k} U(x_i, S_k)$, (2)

где $U(x_i, S_k) = \sum_{j=1}^m U(0_j, x_i) P(0_j | x_i, S_k)$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, K}$.

По критерию Вальда выбирают стратегию, которая дает гарантированный выигрыш при наихудшем варианте состояния среды.

Критерий Гурвица. Основан на следующих двух предположениях: среда может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $1 - \alpha$ и в самом выгодном с вероятностью α , где α - коэффициент доверия.

Тогда решающее правило записывается следующим образом:

$$\max_{x_i} [\alpha \max_{S_k} U(x_i, S_k) + (1 - \alpha) \min_{S_k} U(x_i, S_k)], \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3)$$

Если $\alpha = 0$, то получаем критерий Вальда. Если $\alpha = 1$, то приходим к решающему правилу вида:

$$\max_{x_i} \max_{S_k} U(x_i, S_k) \quad (4)$$

– так называемая стратегия “здорового оптимиста”, который верит в свою удачу.

Критерий Лапласа. Если никакой информации о вероятностях состояний среды нет, то все состояния среды считаются равновероятными:

$$P(S_1) = P(S_2) = \dots = P(S_K).$$

В результате решающее правило определяется соотношением (1):

$$\max_{x_i} E[U(x_i)] = \max_{x_i} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^K U(0_j, x_i) P(0_j | x_i, S_k) P(S_k) = \max_{x_i} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^K U(0_j, x_i) P(0_j | x_i, S_k), \quad (5)$$

при условии $P(S_k) = 1/K$.

Критерий Сэвиджа. Или критерий минимизации “сожалений”. “Сожаление” – это величина, равная изменению полезности результата

при данном состоянии среды относительно наилучшего возможного состояния.

Чтобы определить “сожаление” поступают следующим образом. Строят матрицу

$$\mathbf{U} = \|u_{ik}\|,$$

$$\text{где } u_{ik} = U(x_i, S_k) = \sum_{j=1}^m u(x_i, O_j) P(O_j | x_i, S_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, K}.$$

В каждом столбце этой матрицы находят максимальный элемент $u_k = \max_i u_{ik}$, который вычитают из всех элементов этого столбца. Далее строим матрицу сожалений

$$\mathbf{U}_c = \|u_{ik} - u_k\| = \|u_{ik}^c\|.$$

Искомую стратегию x_i , которая минимизирует “сожаление”, определяют из условия

$$\min_{x_i} \max_{S_k} u_{ik}^c \quad (6)$$

Этот критерий минимизирует возможные потери при условии, что состояние среды наихудшем образом отличается от предполагаемого.

Рассмотрим **частный случай** модели задачи в условиях неопределенности. Предположим, что каждому возможному состоянию среды соответствует один возможный исход: $P(O_j | S_k) = \delta_{jk}$, где

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Таким образом, в данном случае математическая модель задачи принятия решения определяется множеством стратегий $\{x_i\}$, множеством состояний среды $\{S_k\}$, а также матрицей полезностей

$x_i \setminus S_j$	S_1	S_2		S_K
x_1	L_{11}			L_{1K}
x_2				
....				
x_n	L_{n1}			L_{nK}

Где $L_{ij} = U(x_i, S_j)$. Множество $\{P(S_j)\}$ предполагается неизвестным. В этом случае рассмотренные выше критерии для выбора оптимальной стратегии принимают следующий вид.

Критерий Вальда: $\max_{x_i} \min_{S_k} U(x_i, S_k)$

Критерий Гурвица: $\max_{x_i} [\alpha \max_{S_k} U(x_i, S_k) + (1 - \alpha) \min_{S_k} U(x_i, S_k)]$

$$\text{Критерий Лапласа: } \max_{x_i} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K U(x_i, S_k)$$

$$\text{Критерий Сэвиджа: } \min_{x_i} \max_{S_k} U_c(x_i, S_k),$$

$$\text{где } U_c(x_i, S_k) = U(x_i, S_k) - \max_i U(x_i, S_k).$$

Пример (Использования данных критериев в условиях определенности).

Некоторая фирма решает построить отель в одном из курортных мест. Необходимо определить наиболее целесообразное количество мест или комнат в этой гостинице. Составляют смету расходов по строительству гостиницы с различным количеством комнат, а также рассчитывают ожидаемый доход в зависимости от количества комнат, которые будут сняты.

В зависимости от принятого решения – количество комнат в гостинице $x_i = 20, 30, 40, 50$ и количество снятых комнат $S_k = 0, 10, 20, 30, 40, 50$, которое зависит от множества случайных факторов и неизвестно фирме. Получают следующую таблицу ежегодных прибылей (тыс. \$):

$x_i \setminus S_j$	0	10	20	30	40	50
20	-121	62	245	245	245	245
30	-168	14	198	380	380	380
40	-216	-33	150	332	515	515
50	-264	-81	101	284	468	650

Наиболее подходящее количество комнат в гостинице определим по рассмотренным критериям.

Критерий Вальда:

$$\max_{x_i} \min_{S_k} U(x_i, S_k) = \max_i \min_k L_{ik} = -121, x_{\text{ОПТ}} = 20.$$

Судя по результату, критерий Вальда неприменим, так как в этом случае от постройки гостиницы следует отказаться.

Критерий Лапласа:

$$\max_{x_i} \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 L_{ik} = \max_{x_i} \bar{L}_i = \max \{ 153, 198, 210, 193 \} = 210, \text{ где } \bar{L}_i -$$

среднее арифметическое по каждой строке таблицы. $x_{\text{ОПТ}} = 40.$

Критерий Гурвица:

$$\max_{x_i} [\alpha \cdot \max_k U(x_i, S_k) + (1 - \alpha) \cdot \min_k U(x_i, S_k)].$$

Для разных α можно построить таблицу доходов по критерию Гурвица

$$\mathbf{H} = \|h_{i,\alpha}\|, \text{ где } h_{i,\alpha} = [\alpha \cdot \max_k L_{ik} + (1 - \alpha) \cdot \min_k L_{ik}].$$

Например, для $i = 1$ $\max_k L_{1k} = 245$, $\min_k L_{1k} = -121$, и при $\alpha = 0.1$

$$h_{1,0.1} = (0.1 \cdot 245 + 0.9 \cdot (-121)) = -84.4 \approx -84.$$

В совокупности получим:

x_i/α	0.1	0.2	0.5	0.9
20	-84	-47	63	206
30	-114	-59	108	325
40	-143	-70	150	442
50	-172	-81	193	560

Тогда оптимальное количество комнат в гостинице в зависимости от α :

α	0.1	0.2	0.5	0.9
$x_{ОПТ}$	20	20	50	50

Таким образом, будет выбрано 20 комнат, если заказчик пессимист, и 50 комнат, если оптимист.

Критерий Сэвиджа:

Опираясь на таблицу 1,

$x_i \setminus S_j$	0	10	20	30	40	50
20	-121	62	245	245	245	245
30	-168	14	198	380	380	380
40	-216	-33	150	332	515	515
50	-264	-81	101	284	468	650

строят матрицу сожалений:

$x_i \setminus S_j$	0	10	20	30	40	50
20	0	0	0	-135	-270	-405
30	-47	-48	-47	0	-135	-275
40	-95	-95	-95	-48	0	-135
50	-145	-143	-144	-96	-47	0

$$\max_{x_i} \min_{S_k} U_c(x_i, S_k) = \max\{-405, -275, -135, -145\} = -135, \text{ таким образом,}$$

$$x_{ОПТ} = 40.$$

Какое из решений предпочтительнее, определяется выбором критерия.

Выбор критерия принятия решения является наиболее сложным и ответственным этапом в исследовании операций. При этом не существует каких-либо общих рекомендаций или советов. Выбор критерия должен производить заказчик на самом высоком уровне и в максимальной степени согласовывать этот выбор с конкретной спецификой задачи, а также со своими целями.

В частности, если даже минимальный риск недопустим, то следует применять критерий Вальда. Если наоборот, определенный риск вполне приемлем и заказчик намерен вложить в некоторое предприятие столько средств, чтобы потом не сожалеть, что вложил слишком мало, то выбирают критерий Сэвиджа.

При отсутствии достаточной информации для выбора того или иного критерия возможен альтернативный подход, который может быть связан с вычислением шансов на успех или неуспех на основе прошлого опыта.

Принятие решений в условиях конфликтных ситуаций или противодействия

В отличие от задач принятия решений в условиях определенности, риска и неопределенности, в которых внешняя среда (природа) предполагалась пассивной, *конфликтные ситуации* предполагают наличие по крайней мере *двух противодействующих сторон, интересы которых противоположны*.

Упрощенная математическая модель конфликтных ситуаций представляет собой игру.

Игра может быть определена следующим образом:

- Имеются n конфликтных сторон (лиц), принимающих решения, интересы которых не совпадают.
- Заданы правила, определяющие выбор допустимых стратегий и известные игрокам.
- Существует точно определенный набор конечных состояний, которыми заканчивается игра (например, выигрыш, ничья, проигрыш).
- Заранее определены и известны всем игрокам платежи, соответствующие каждому возможному конечному состоянию.

Обычно они заданы в виде некоторой матрицы $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$.

Практические задачи, в которых встречаются игровые аспекты, чрезвычайно разнообразны.

Характерным примером является довольно распространенная ситуация, когда несколько фирм добиваются права у заказчика на получение выгодного заказа или конфликтуют из-за обладания новыми рынками сбыта.

Глава 1. Общая постановка задачи линейного программирования.

Основные понятия

Линейное программирование является одной из основных частей того раздела современной математики, который получил название **математического программирования**. В общей постановке задачи этого раздела выглядят следующим образом.

Имеются какие-то переменные $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и функция этих переменных $Z(x) = Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая носит название **целевой функции**. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $Z(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G :

$$\begin{cases} Z(x) \rightarrow \max \\ x \in G \end{cases}$$

В зависимости от вида функции $Z(x)$ и области G и различают разделы математического программирования: квадратичное программирование, выпуклое программирование, динамическое программирование, нелинейное программирование, целочисленное программирование и т.д.

Линейное программирование характеризуется тем, что:

а) функция $Z(x)$ является **линейной функцией** переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$;

б) область G определяется системой **линейных** равенств или неравенств.

Чтобы понять, откуда берутся задачи линейного программирования, рассмотрим некоторые, уже ставшие классическими, примеры подобных задач.

1.1. Экономико-математическая модель

ЭММ - математическое описание исследуемого экономического процесса или объекта. Эта модель выражает закономерности экономического процесса в абстрактном виде с помощью математических соотношений. Можно выделить три основных этапа проведения экономико-математического моделирования. На **первом этапе** ставятся цели и задачи исследования, проводится качественное описание объекта в виде экономической модели. На **втором этапе** формируется математическая модель изучаемого объекта, осуществляется выбор методов исследования, проводится программирование модели на ЭВМ, подготавливается исходная информация. Далее проверяются пригодность машинной модели на основании правильности получаемых с ее помощью результатов и оценка их устойчивости. На **третьем, основном, этапе** экономико-математического моделирования осуществляются анализ математической модели, реализованной в виде программ для ЭВМ, проведение машинных расчетов, обработка и анализ полученных результатов.

Примеры задач линейного программирования

1. Задача об использовании ресурсов (задача планирования производства)

1.1. Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4 . Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таб.1.1

Таблица 1.1. Виды и запасы ресурсов

Вид ресурса	Запас ресурса	число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
S_4	21	3	-

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2 , - соответственно 2 и 3 ден.ед.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1, x_2 – число единиц продукции соответственно P_1 и P_2 , запланированных к производству. Для их изготовления (табл.1.2) потребуется (x_1+3x_2) единиц ресурса S_1 , $(2x_1+x_2)$ единиц ресурса S_2 , (x_2) единиц ресурса S_3 и $3x_1$ единиц ресурса S_4 . Так как потребление ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4 не должно быть превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \end{cases} \quad (1.1)$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (1.2)

Суммарная прибыль F составит $2x_1$ ден.ед. от реализации продукции P_1 и $3x_2$ ден.ед.- от реализации продукции P_2 , т.е.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \quad (1.3)$$

Итак, экономико-математическая модель задачи: *найти такой план выпуска продукции $X=(x_1, x_2)$, удовлетворяющий системе (1.1) и условию (1.2), при котором функция (1.3) принимает максимальное значение.*

Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 ден.ед.

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1, x_2 – количество кормов I и II, входящих в дневной рацион. Тогда этот рацион (табл.1.2) будет включать $(3x_1+x_2)$ единиц питательного вещества S_1 , (x_1+2x_2) единиц вещества S_2 и (x_1+6x_2) единиц питательного вещества S_3 . Так как содержание питательных веществ S_1, S_2 и S_3 в рационе должно быть не менее соответственно 9, 8 и 12 единиц, то получим систему неравенств:

Кроме того, переменные

Общая стоимость рациона составит (в ден.ед.): $F = 4x_1 + 6x_2$. (1.9)

Для формулировки задачи в общей постановке обозначим:

найти такой рацион $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе

$$\text{и условию} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (1.11)$$

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (1.12)$$

Обратите внимание на полученный результат. Во-первых, достаточно реальная задача приобрела строгую математическую форму. Во-вторых, целевая функция (стоимость рациона) является **линейной**

функцией переменных x_1, x_2 . В третьих, сами ограничения на значения переменных x_1, x_2 имеют вид **линейных неравенств**. Всё это и определило название этого класса задач - задачи **линейного программирования**.

Примеры других задач линейного программирования встречаются очень часто при оптимизации самых разнообразных производственных и экономических задач.

3. Производственная задача «места и времени».

Компания, располагающая двумя заводами, заключила контракт на изготовление a единиц продукции за определенный промежуток времени. Стоимость изготовления продукции в количествах x_1 и x_2 на заводах 1 и 2 составляет x_1^2/c_1 и x_2^2/c_2 ден. ед. соответственно, где c_1 и c_2 – известные положительные коэффициенты. Требуется распределить заказ на продукцию между заводами так, чтобы он был выполнен, и общая стоимость изготовления продукции была наименьшей.

Математическая постановка задачи достаточно очевидна. В принятых обозначениях общая стоимость C изготовления продукции равна

$$C(x_1, x_2) = x_1^2/c_1 + x_2^2/c_2,$$

и требование выполнения заказа приводит к условию $x_1 + x_2 = a$.

Необходимо найти такие значения неизвестных x_1 и x_2 , которые доставляют минимум функции: $C(x_1, x_2) = x_1^2/c_1 + x_2^2/c_2 \rightarrow \min$ (1.13)

при ограничениях: $x_1 + x_2 = a, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. (1.14)

Неравенства (1.14) отражают физический смысл неизвестных. Целевая функция (1.13) в задаче квадратичная относительно x_1, x_2 , поэтому ее относят к задачам *нелинейного (квадратичного) программирования*.

Упражнения

В задачах 1.3-1.13 составить экономико-математические модели.

1.3. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Другие условия задачи приведены в таблице.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, кг
	А	В	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия, ден.ед.	30	40	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что изделий В надо выпустить не менее, чем изделий А.

1.4. Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 80 ден.ед. и содержит: 1 ед. жиров, 3 ед. белков, 1 ед. углеводов, 2 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 10 ден.ед. и содержит 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов. Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 6 ед., белков не менее 9 ед., углеводов не менее 8 ед., нитратов не более 16 ед.

1.5. На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов. Другие условия задачи приведены в таблице.

Тип аппарата	Производительность работы линий, шт. в сутки		Затраты на работу линий, ден.ед. в сутки		План, шт.
	1	2	1	2	
A	4	3	400	300	50
B	6	5	100	200	40
C	8	2	300	400	50

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за 10 суток.

1.6. Необходимо распилить 20 бревен длиной по 5 м каждое на бруски по 2 м и 3 м; при этом должно получиться равное количество брусков каждого размера. Составить такой план распила, при котором будет получено максимальное число комплектов и все бревна будут распилены (в один комплект входит по одному бруску каждого размера).

1.7. Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 условных единиц (усл. ед.), жиров – не менее 70 и витаминов – не менее 10 усл. ед. Содержание их в каждой единице продуктов P_1 и P_2 равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1) усл. ед.

Стоимость 1 ед. продукта P_1 – 2 руб., P_2 – 3 руб. Постройте математическую модель задачи, позволяющую так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

1.8. Из пункта А в пункт В ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. Данные об организации перевозок следующие:

Поезда	Количество вагонов в поезде				
	багажный	почтовый	плацкарт	купе	СВ
скорый	1	1	5	6	3
пассажирский	1	-	8	4	1
число пассажиров	-	-	58	40	32
парк вагонов	12	8	81	70	26

Сколько должно быть сформировано скорых и пассажирских поездов, чтобы перевезти наибольшее количество пассажиров?

1.9. Четыре овощехранилища каждый день обеспечивают картофелем три магазина. Магазины подали заявки соответственно на 17, 12 и 32 тонны.

Овощехранилища имеют соответственно 20, 20, 15 и 25 тонн. Тарифы (в д.е. за 1 тонну) указаны в следующей таблице:

Овощехранилища	Магазины		
	1	2	3
1	2	7	4
2	3	2	1
3	5	6	2
4	3	4	7

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

1.10. Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь – 100 ед., труд – 120 ед., тяга – 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции: P_1 , P_2 , P_3 и P_4 . Организация производства характеризуется следующей таблицей:

продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от единицы продукции
	площадь	труд	тяга	
P_1	2	2	2	1
P_2	3	1	3	4
P_3	4	2	1	3
P_4	5	4	1	5

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

1.11. Совхоз отвел три земельный массива размером 5000, 8000 и 9000 га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана в следующей таблице:

Посевы	Массивы		
	I	II	III
рожь	12	14	15
пшеница	14	14	22
кукуруза	30	35	25

За 1 центнер ржи совхоз получает 2 д.е., за 1 центнер пшеницы – 2,8 д.е., за 1 центнер кукурузы – 1,4 д.е. Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану он обязан сдать не менее 1900 тонн ржи, 158 000 тонн пшеницы и 30 000 тонн кукурузы?

1.12. В школе проводится конкурс на лучшую стенгазету. Одному школьнику дано следующее поручение:

- купить акварельной краски по цене 30 д.е. за коробку, цветные карандаши по цене 20 д.е. за коробку, линейки по цене 12 д.е., блокноты по цене 10 д.е.;

- В каком количестве школьник должен купить указанные предметы, чтобы общее число предметов было наименьшим?

Обратите внимание на то, что в указанных выше двух примерах задачи имели достаточно разный вид: в задаче о диете требовалось найти **минимум** целевой функции, а в задаче о плане производства **максимум**. В задаче о диете ограничения имели вид

а в задаче о плане производства $\square$ вид

Такой разноречивой неудобно при разработке алгоритмов решения этих задач. Поэтому имеются некоторые стандартные формы задач линейного программирования, к которым и приводят различные конкретные задачи. Для более краткой записи используют векторную или матричную запись. Под **векторами** понимают **вектора-столбцы**, например:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix},$$

Соответственно, запись $\vec{a} = \vec{b}$ означает, что $a = b$ и $\alpha = \beta$.

Первая стандартная форма задачи линейного программирования имеет вид:

[illegible]

$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$; $\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$; $\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$, а также вектора $\vec{A}_i = \begin{bmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ A_{i3} \end{bmatrix}$, $i = \overline{1,3}$.

ведем вектора:

$$J_k = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(k)} & \sigma_{12}^{(k)} & \sigma_{13}^{(k)} & \sigma_{14}^{(k)} \\ \sigma_{21}^{(k)} & \sigma_{22}^{(k)} & \sigma_{23}^{(k)} & \sigma_{24}^{(k)} \\ \sigma_{31}^{(k)} & \sigma_{32}^{(k)} & \sigma_{33}^{(k)} & \sigma_{34}^{(k)} \\ \sigma_{41}^{(k)} & \sigma_{42}^{(k)} & \sigma_{43}^{(k)} & \sigma_{44}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Заметим, что комбинация $\vec{a} \otimes \vec{b}$ есть не что иное, как **скалярное произведение** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому в **векторной форме** задача (1.13) примет вид:

$$\begin{aligned} (F, T) = \max_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ T \in \mathcal{T}}} & \\ a_1 \tilde{A}_1 + a_2 \tilde{A}_2 + \dots + a_n \tilde{A}_n \in F & \end{aligned} \quad (1.14)$$

Можно использовать и **матричные обозначения**. Тогда комбинация $\{x_i, y_j\}$ есть произведение $x_i y_j$ и задача (1.13) примет вид:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^2 \mathcal{F}^2 \mathcal{F}^2 \mathcal{F}^2 \\ & \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \\ & \mathcal{F} \mathcal{F} \mathcal{F} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Вторая стандартная форма задачи линейного программирования имеет вид:

[illegible]

В векторной форме эта задача имеет вид:

$$\begin{aligned} & (S', T') \in \text{max} \\ & a_1 \tilde{a}_1 = a_1 \tilde{a}_2 = \dots = a_n \tilde{a}_n \geq \tilde{b} \\ & \quad \quad \quad \tilde{b} \geq \tilde{b} \end{aligned} \quad (1.17)$$

и в матричной форме – вид

$$\frac{F^2 F_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}}{A^2 F^2} \geq 0 \quad (1.18).$$

Канонической формой задачи линейного программирования называется задача вида:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min \quad (1.19)$$

В векторной форме эта задача имеет вид

и в матричной форме - вид

Во всех этих задачах функцию $f(x)$ называют **целевой функцией**. Вектор $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ называют **вектором коэффициентов** линейной формы, вектор $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ — **вектором ограничений**. Матрицу $A = (a_{ij})$ называют **матрицей коэффициентов**.

Любой набор чисел $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям задачи, называют **планом**, а множество всех планов Π **допустимой областью**. Тот план, который доставляет экстремум (минимум или максимум) целевой функции, называют **оптимальным планом** или просто **решением** задачи линейного программирования.

Правила приведения задач линейного программирования к стандартной и канонической формам

Рассмотрим теперь те приёмы, которые позволяют произвольные формы задач линейного программирования приводить к указанным выше стандартным формам.

1.2.1. Превращение max в min и наоборот

Если целевая функция в задаче линейного программирования задана в виде:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min ,$$

то, умножая её на (-1) , приведем её к виду $(-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \dots + (-c_n)x_n \rightarrow \max$, так как смена знака приводит к смене $\min$ на $\max$. Аналогично можно заменить $\max$ на $\min$.

1.2.2. Смена знака неравенства

Если ограничение задано в виде: $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$, то, умножая на (-1) , получим: $-\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq -b_i$.

Аналогично, неравенство вида больше либо равно можно превратить в неравенство вида меньше либо равно.

1.2.3. Превращение равенства в систему неравенств

Если ограничение задано в виде: $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$, то его можно заменить эквивалентной системой двух неравенств

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_1x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_1x_n + \alpha_{1n+1}x_1 \\ & + (-\alpha_{21})x_1 + (-\alpha_{22})x_2 + \dots + (-\alpha_{2n})x_n + (-\alpha_{2n+1})x_2, \end{aligned}$$

или такой же системой неравенств со знаками больше либо равно.

Указанные выше приемы позволяют приводить задачи линейного программирования к **стандартной форме**.

1.2.4. Превращение неравенств в равенства

Пусть исходная форма задачи линейного программирования имеет вид:

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n \leq b_r \\ a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \dots + a_{r+1,n}x_n \geq b_{r+1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n \geq b_p \\ a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + \dots + a_{p+1,n}x_n = b_{p+1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.22)$$

Здесь первые r ограничений имеют вид неравенств со знаком меньше либо равно:

затем идет группа неравенств со знаком больше либо равно:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \quad \dots, \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m,$$

и, наконец, группа ограничений со знаком =.

Для приведения задачи к канонической форме, где **все** ограничения имеют вид **равенств**, вводят **дополнительные переменные** $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$,

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + \dots + x_1^2 x_n^2 + \dots + x_2^2 x_3^2 + \dots + x_2^2 x_n^2 + \dots + x_3^2 x_4^2 + \dots + x_3^2 x_n^2 + \dots + x_{n-1}^2 x_n^2 = 0$$

$$a_1 \cdot 1/0, a_2 \cdot 1/0, \dots, a_k \cdot 1/0, a_{k+1} \cdot 1/0, \dots, a_{k+m} \cdot 1/0$$

В целевую функцию эти дополнительные переменные включают с коэффициентом 0, т.е. фактически они в целевой функции отсутствуют. Получив решение задачи (1.23), т.е. решение задачи в канонической форме, для получения решения исходной задачи (1.22) надо просто выбросить из решения значения введенных дополнительных переменных.

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

1.2.5. Ограничения на неотрицательность переменных

Во всех приведенных выше формах требуется, чтобы все переменные были неотрицательны, т.е. $x_i \geq 0$. В реальных задачах часто на переменные накладываются ограничения вида $x_i \leq b_i$ (они называются двусторонними ограничениями), или же условие неотрицательности какой-то переменной может отсутствовать вообще.

Рассмотрим, как поступать в этих случаях.

а) Пусть на переменную x_i вообще не наложено никаких ограничений. Для приведения задачи к канонической форме введем две новые переменные x_i^+ и x_i^- и будем считать, что

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \\ x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0.$$

После этого, заменив в исходной задаче x_i на $x_i^+ - x_i^-$, получим задачу линейного программирования в канонической форме.

б) Пусть на x_i наложено двустороннее ограничение вида $a_i \leq x_i \leq b_i$. Введем переменную $x_i^+ = x_i - a_i$. Тогда будет $x_i \geq a_i$, что дает ограничения в стандартной форме.

Вводя дополнительную неотрицательную переменную x_i^- , можно записать двустороннее ограничение в виде

$$x_i^+ - x_i^- = b_i - a_i, \\ x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0. \quad (1.24)$$

После того, как в исходных соотношениях вместо x_i будет подставлено выражение $x_i = x_i^+ - x_i^-$ и добавлено ограничение (1.24), задача приобретет канонический вид.

Упражнения

А. Привести к канонической форме следующие задачи линейного программирования.

$$1. \quad \begin{aligned} & x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & x_1 \leq 2x_2 - 8 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} & 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} & -2x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ & -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ & 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ & 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 16 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{aligned} & 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \rightarrow \max \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 16 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 3. & \begin{array}{l}
 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \min \\
 x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\
 -2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 4 \\
 x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 4. & \begin{array}{l}
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \max \\
 -3x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 \leq 6 \\
 x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\
 x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 5. & \begin{array}{l}
 -2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min \\
 2x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 12 \\
 3x_1 - 5x_2 - 12x_3 = 14 \\
 -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 18 \\
 x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 8. & \begin{array}{l}
 -3x_1 - 2x_2 - 6x_3 \rightarrow \min \\
 -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 15 \\
 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 12 \\
 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 \leq 17 \\
 x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 9. & \begin{array}{l}
 -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min \\
 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6 \\
 x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 8 \\
 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10 \\
 -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \\
 x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 10. & \begin{array}{l}
 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 \rightarrow \max \\
 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\
 x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 3 \\
 +x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 4 \\
 x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 \leq 8 \\
 x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Б. Напишите задачи 1,2,5,6,7,8,9 в стандартных формах

Тестовые задания

1. Задача линейного программирования, представленная в виде

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \chi_j \rightarrow \max(\min), \quad \text{при} \quad \text{ограничениях:}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} \chi_j \leq b_i (i=1,2,\dots,k) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \chi_j = b_i (i=k+1,k+2,\dots,m) \end{cases}, \chi_j \geq 0 (j=1,2,\dots,r; r \leq n) \text{ называется:}$$

А) стандартной; В) допустимой; С) канонической; D) общей.

2. Задача линейного программирования, состоящая в определении минимума линейной функции $F = \sum_{j=1}^n c_j \chi_j$, при выполнении условий

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \chi_j \geq b_i \text{ и } \chi_j \geq 0 (i=1 \dots m, j=1 \dots n) \text{ называется:}$$

А) стандартной; В) допустимой; С) канонической; D) общей.

3. Цель исследования операций - это:

А) количественное обоснование принимаемых решений по организации управления;

В) установление критериев эффективности;

С) управление любой системой;

D) изучение взаимосвязей между системами ЗЛП.

4. Исследование операций – это:

А) научная дисциплина, занимающаяся внедрением новых

информационных технологий для решения транспортных задач;

В) наука о способах сбора, хранения и переработки информации;

С) научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными методами;

D) наука, занимающаяся практическим решением задач линейного программирования.

5. Задача линейного программирования, состоящая в определении максимума линейной функции $F = \sum_{j=1}^n c_j \chi_j$, при выполнении условий

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \chi_j \leq b_i \text{ и } \chi_j \geq 0 (i=1 \dots m, j=1 \dots n) \text{ называется:}$$

А) стандартной; В) допустимой; С) канонической; D) общей.

6. Задача линейного программирования, состоящая в определении максимума линейной функции $F = \sum_{j=1}^n c_j \chi_j$, при выполнении условий

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \chi_j = b_i \text{ и } \chi_j \geq 0 (i=1 \dots m, j=1 \dots n) \text{ называется:}$$

- А) стандартной; В) допустимой; С) канонической; D) общей.
7. Оптимальным решением ЗЛП называется:
- А) допустимое решение, в котором целевая функция достигает максимального (минимального) значения;
- В) допустимое решение, в котором целевая функция не достигает максимального (минимального) значения;
- С) любое решение, в котором целевая функция достигает максимального (минимального) значения;
- Д) допустимое решение, в котором целевая функция имеет значение.
8. Кто впервые рассмотрел симплекс-метод:
- А) Канторович Л.В.; В) Ньютон; С) Лейбниц; D) Дж.Б. Данцинг.
9. Общей задачей линейного программирования называется задача:
- А) которая состоит в отыскании максимального (минимального) значения функции $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ при ограничениях: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m);$
 $x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$
- В) которая состоит в отыскании максимального (минимального) значения функции $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ при ограничениях: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m);$
 $x_j \leq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$
- С) Которая состоит в отыскании максимального (минимального) значения функции $F = \sum_{j=1}^n c_j$ при ограничениях: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m);$
 $x_j \leq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$
- Д) Которая состоит в отыскании максимального (минимального) значения функции $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$.
10. Допустимое решение, в котором целевая функция достигает максимального (минимального) значения называется
- А) Оптимальным решением; В) Любым решением;
- С) Единственным решением; D) Недопустимым решением.
11. Функция, для которой находится ее максимальное (минимальное) значение называется:
- А) целевой; В) тригонометрической; С) дробно-линейной; D) линейной.
12. Целевая функция, это та, для которой находится:
- А) ее максимальное (минимальное) значение; В) ее отрицательные значения;
- С) ее положительные значения; D) ее нулевое значение.
13. Любое решение системы ограничений называется:
- А) допустимым; В) оптимальным; С) единственным; D) недопустимым.
14. Симплекс- метод заключается в:
- А) определении какого-либо допустимого решения и путем последовательных улучшений нахождения оптимального решения;
- В) определении какого-либо допустимого решения;

- С) определении какого-либо оптимального решения;
- Д) определении какого-либо допустимого решения и в нахождении оптимального решения.

15. Для нахождения минимального значения функции симплекс – методом в индексной строке выбирают:

- А) наибольшее положительное число;
- В) наибольшее по модулю отрицательное число;
- С) наименьшее по модулю отрицательное число;
- Д) наименьшее положительное число.

Глава 2. Модели целочисленного линейного программирования

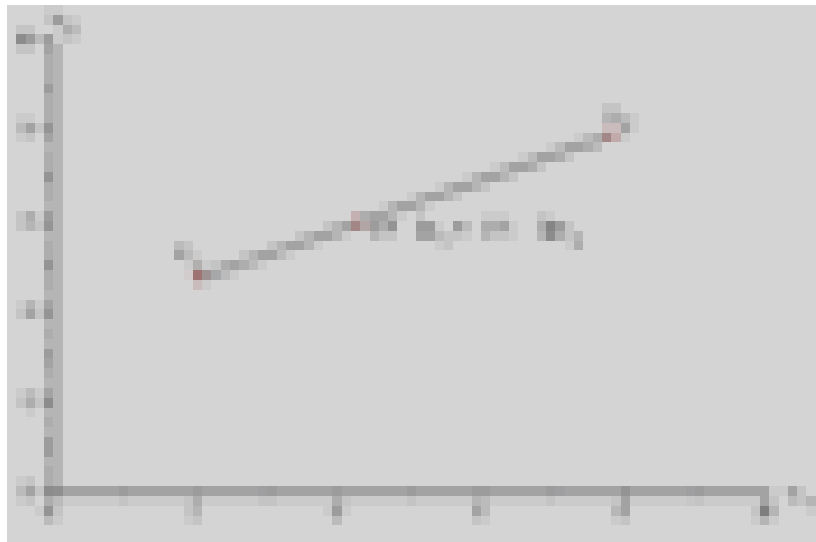
2.1. Выпуклые множества и многогранники

Рассмотрим n -мерное евклидово пространство E^n и пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ — точка в этом пространстве.

Рассмотрим две точки $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)$ и $x_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n)$, принадлежащие E^n . Множество точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые могут быть представлены в виде

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

(в координатах это записывается так: $x_i = \lambda x_i^1 + (1 - \lambda) x_i^2, i = \overline{1, n}, 0 \leq \lambda \leq 1$), называется **выпуклой комбинацией** точек x_1 и x_2 , или **отрезком**, соединяющим точки x_1 и x_2 . Сами точки x_1 и x_2 называются **концами отрезка**. В случаях $n = 2$ и $n = 3$ это — отрезок в обычном понимании этого слова на плоскости или в пространстве. Заметим, что при $\lambda = 0$ $x = x_2$, а при $\lambda = 1$ $x = x_1$, т.е. при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ получаются концы отрезка.



Пусть в E^n заданы k точек $x_1, x_2, \dots, x_k$. Точка $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, где все $\lambda_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, называется **выпуклой комбинацией** точек $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Пусть $G \subset E^n$ есть некоторая область в пространстве E^n (другими словами, G есть некоторое множество точек из E^n).

Определение. Множество (область) $G \subset E^n$ называется **выпуклым**, если из того, что $x_1 \in G$ и $x_2 \in G$ следует, что $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in G$ для $\lambda \in [0, 1]$. Другими словами, G — **выпуклое множество**, если оно, вместе с

любыми двумя своими точками, содержит в себе отрезок, соединяющий эти точки.



рис.2.1

На этих рисунках "а" и "б" - выпуклые множества, а "в" не является выпуклым множеством, так как в нём есть такая пара точек, что соединяющий их отрезок не весь принадлежит этому множеству.

Теорема 1. Пусть G — выпуклое множество. Тогда любая выпуклая комбинация точек, принадлежащих этому множеству, также принадлежит этому множеству.

Доказательство: Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k$ — точки, принадлежащие множеству G . Докажем теорему методом математической индукции. При $k=2$ теорема верна, так как она просто переходит в определение выпуклого множества.

Пусть теорема верна для некоторого k . Возьмём точку $x_{k+1} \in G$ и рассмотрим выпуклую комбинацию $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}$, где все $\alpha_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$.

Представим y в виде

$$y = \alpha_{k+1} x_{k+1} + (1 - \alpha_{k+1}) \left[\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_{k+1}} x_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_{k+1}} x_2 + \dots + \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} x_k \right].$$

Но коэффициенты $\alpha_i / (1 - \alpha_{k+1}) \geq 0$ и $\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i}{1 - \alpha_{k+1}} = \frac{1 - \alpha_{k+1}}{1 - \alpha_{k+1}} = 1$, и, раз мы считаем, что для k теорема верна, точка

$$z = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_{k+1}} x_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_{k+1}} x_2 + \dots + \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{k+1}} x_k \in G.$$

Но тогда $y = \alpha_{k+1} x_{k+1} + (1 - \alpha_{k+1}) z$ является выпуклой комбинацией точек x_{k+1} и z , и, по определению выпуклого множества, $y \in G$. Теорема доказана.

Теорема 2. Допустимая область задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

Доказательство: В стандартной форме в матричных обозначениях допустимая область G определяется условием: $A\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0$. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2$

принадлежат G , т.е.

$$A\vec{x}_1 \leq \vec{b}, \vec{x}_1 \geq 0$$

$$A\vec{x}_2 \leq \vec{b}, \vec{x}_2 \geq 0$$

Но тогда для $\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, \lambda \in [0,1]$ имеем
 $A\vec{x} = A(\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2) = \lambda A\vec{x}_1 + (1-\lambda)A\vec{x}_2 \leq \lambda\vec{b} + (1-\lambda)\vec{b} = \vec{b}, \vec{x} \geq 0$, т.е. $\vec{x}$ принадлежит G и, следовательно, выпукло.

В канонической форме область G определена условиями: $A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq 0$.

Пусть $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ принадлежат G , т.е.

$$A\vec{x}_1 = \vec{b}, \vec{x}_1 \geq 0$$

$$A\vec{x}_2 = \vec{b}, \vec{x}_2 \geq 0$$
 Но тогда для

$\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, \lambda \in [0,1]$ имеем
 $A\vec{x} = A(\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2) = \lambda A\vec{x}_1 + (1-\lambda)A\vec{x}_2 = \lambda\vec{b} + (1-\lambda)\vec{b} = \vec{b}, \vec{x} \geq 0$, т.е. $\vec{x}$ принадлежит G и, следовательно, G выпукло. Теорема доказана.

Таким образом, допустимая область в задаче линейного программирования является выпуклым множеством. По аналогии с двумерным или трехмерным случаями, при любом n эту область называют **выпуклым многогранником** в n -мерном пространстве.

Теорема 3. Множество оптимальных планов задачи линейного программирования выпукло (если оно не пусто).

Доказательство: Если решение задачи линейного программирования единственно, то оно выпукло по определению $\square$ точка считается выпуклым множеством. Пусть теперь $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ два оптимальных плана задачи линейного программирования. Тогда $\vec{x}_1 \in G, \vec{x}_2 \in G$ и $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) = \vec{c}\vec{x}_1 = \vec{c}\vec{x}_2 = \vec{c}\vec{z}$. Рассмотрим $\vec{x} = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, \lambda \in [0,1]$. В силу выпуклости области допустимых значений, $\vec{x} \in G$. Но для этого плана $f(\vec{x}) = \vec{c}\vec{x} = \vec{c}(\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2) = \lambda\vec{c}\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{c}\vec{x}_2 = \lambda\vec{c}\vec{z} + (1-\lambda)\vec{c}\vec{z} = \vec{c}\vec{z}$, т.е. $\vec{x}$ есть также оптимальный план и, в силу этого, множество оптимальных планов выпукло. Теорема доказана.

Теорема 4. Для того, чтобы задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы целевая функция на допустимом множестве была ограничена сверху (при решении задачи на максимум) или снизу (при решении задачи на минимум).

Постановка задачи целочисленного программирования

Задача линейного целочисленного программирования формулируется следующим образом: найти такое решение (план)

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ при котором линейная функция } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.2.1)$$

принимает максимальное или минимальное значение при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.2.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.2.3)$$

$$x_j - \text{целые числа} \quad (2.2.4)$$

Для решения задач линейного целочисленного программирования используется ряд методов. Самый простой из них – обычный метод линейного программирования. В случае, если компоненты оптимального решения оказываются нецелочисленными, то округляют их до ближайших целых чисел. Этот метод применяют тогда, когда отдельная единица совокупности составляет малую часть объема всей совокупности. Методы целочисленной оптимизации можно разделить на три основные группы: а) методы отсечения; б) комбинаторные методы; в) приближенные методы.

2.2. Методы отсечения и их сущность

Сущность методов отсечения состоит в том, что сначала задача решается без учета целочисленности. Если полученный план целочисленный, то задача решена. В противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

- 1) оно должно быть линейным;
- 2) должно отсекал найденный оптимальный нецелочисленный план;
- 3) не должно отсекал ни одного целочисленного плана.

Дополнительное ограничение, обладающее указанными свойствами, называется правильным отсечением. Далее задача решается с учетом нового ограничения. После этого, в случае необходимости, добавляется еще одно ограничение и т.д. Один из алгоритмов решения задачи линейного целочисленного программирования (2.2.1)-(2.2.4), предложенный Гомори, основан на симплексном методе и использует достаточно простой способ построения правильного отсечения.

Пусть ЗЛП (2.2.1)-(2.2.3) имеет конечный оптимум и на последнем шаге ее решения симплексным методом получены следующие уравнения, выражающие основные переменные $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m$ через неосновные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+i}, \dots, x_n$ оптимального решения

$$(2.2.5)$$

так, что оптимальным решением задачи (2.2.1)-(2.2.3) является $X^* = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots, \beta_m, 0, 0, \dots, 0)$, в котором, например, β_i - нецелая компонента. В этом случае неравенство $\{\beta_i\} - \{\alpha_{im+1}\}x_{m+1} - \dots - \{\alpha_{in}\}x_n \leq 0$ (2.2.6) сформированное по i-му уравнению системы (2.2.5), обладает всеми свойствами правильного отсечения. Для решения задачи целочисленного линейного программирования (2.2.1)-(2.2.4) методом Гомори используется следующий алгоритм:

- 1) симплексным методом решить задачу (2.2.1)-(2.2.3) без учета условия целочисленности. Если все компоненты оптимального плана целые, то он является оптимальным и для задачи целочисленного программирования (2.2.1)-(2.2.4). Если первая задача (2.2.1)-(2.2.3) неразрешима, то и вторая задача (2.2.1)-(2.2.4) также неразрешима.
- 2) Если среди компонентов оптимального решения есть нецелые, то выбрать компоненту с наибольшей целой частью и по соответствующему уравнению (2.2.5) сформировать правильное отсечение (2.2.6).
- 3) Неравенство (2.2.6) введением дополнительной неотрицательной целочисленной переменной преобразовать в равносильное уравнение $\{\beta_i\} - \{\alpha_{im+1}\}x_{m+1} - \dots - \{\alpha_{in}\}x_n + x_{n+1}$ (2.2.7) и включить его в систему ограничений (2.2.2).
- 4) Полученную расширенную задачу решить симплексным методом. Если найденный оптимальный план будет целочисленным, то задача целочисленного программирования (2.2.1)-(2.2.4) решена. В противном случае вернуться к п.2 алгоритма.

Если задача разрешима в целых числах, то после конечного числа шагов (итераций) оптимальный целочисленный план будет найден.

Пример. Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет 34 ден.ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 60 кв.м. Фермер может заказать оборудование двух видов: менее мощные машины типа А стоимостью 3 ден.ед., требующие производственную площадь 3 кв.м. (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность за смену 2 т. зерна, и более мощные машины типа В стоимостью 4 ден.ед., занимающие площадь 5 кв.м. и обеспечивающие производительность за смену 3 тонны сортового зерна.

Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность при условии, что фермер может приобрести не более 8 машин типа В.

Решение. $Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ (1') при ограничениях
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 34 \\ x_2 \leq 8 \end{cases} \quad (2')$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (3'), x_1, x_2 – целые числа (4').

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 60 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 34 \\ x_2 + x_5 = 8 \end{cases} \quad (5') \quad x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

1-й шаг.
$$\begin{cases} x_3 = 60 - 3x_1 - 5x_2 \\ x_4 = 34 - 3x_1 - 4x_2 \\ x_5 = 8 - x_2 \end{cases} \quad Z_1 = 2x_1 + 3x_2, \quad X_1 = (0; 0; 60; 34; 8) \quad x_2 = \min\{12; 34/4; 8\} = 8$$

2-ой шаг.
$$\begin{cases} x_3 = 60 - 3x_1 - 5(8 - x_5) = 20 - 3x_1 + 5x_5 \\ x_4 = 34 - 3x_1 - 4(8 - x_5) = 2 - 3x_1 + 4x_5 \\ x_2 = 8 - x_5 \end{cases}, \quad X_2 = (0; 8; 20; 0; 2),$$

$Z_2 = 2x_1 + 24 - 3x_5 \quad x_1 = \min\{\infty; 20/3; 2/3\} = 2/3$

3-й шаг.
$$\begin{cases} x_1 = 2/3 - 1/3x_4 + 4/3x_5 \\ x_3 = 18 + x_4 + x_5 \\ x_2 = 8 - x_5 \end{cases}, \quad X_3 = (2/3; 8; 18; 0; 0)$$

$Z_3 = Z(X_3) = 24 + 4/3 - 2/3x_4 + 8/3x_5 - 3x_5 = 76/3 - 2/3x_4 - 1/3x_5.$

Первая компонента оптимального решения $X_3 = (2/3; 8; 18; 0; 0)$ получилась нецелой. В соответствии с алгоритмом необходимо сформировать правильное отсечение: $\left\{\frac{2}{3}\right\} - \left\{\frac{1}{3}\right\}x_4 - \left\{\frac{4}{3}\right\}x_5 \leq 0$. Дробную часть свободного члена берут с тем же знаком, который он имеет в уравнении, а дробные части коэффициентов при неосновных переменных x_4 и x_5 – с противоположными знаками.

$$\left\{\frac{2}{3}\right\} = \left\{0 + \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}; \left\{\frac{1}{3}\right\} = \left\{0 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}; \left\{-\frac{4}{3}\right\} = \left\{-2 + \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}; \quad 2/3 - 1/3x_4 - 2/3x_5 \leq 0$$

(6')

$2/3 - 1/3x_4 - 2/3x_5 + x_6 = 0$ (7')

4-й шаг.
$$\begin{cases} x_1 = 2/3 - 1/3x_4 + 4/3x_5 \\ x_2 = 8 - x_5 \\ x_3 = 18 + x_4 + x_5 \\ x_6 = -2/3 + 1/3x_4 + 2/3x_5 \end{cases}, \quad X_4 = (2/3; 8; 18; 0; 0; -2/3), \quad x_5 = \min\{\infty; 8; \infty; 1\} = 1$$

$$\begin{cases} x_5 = 1 - 1/2x_4 + 3/2x_6 \\ x_1 = 2/3 - 1/3x_4 + 4/3 - 2/3x_4 + 2x_6 = 2 - x_4 + 2x_6 \\ x_2 = 8 - 1 + 1/2x_4 - 3/2x_6 = 7 + 1/2x_4 - 3/2x_6 \\ x_3 = 18 + x_4 + 1 - 1/2x_4 + 3/2x_6 = 19 + 1/2x_4 + 3/2x_6 \end{cases}, X_5 = (2; 7; 19; 0; 1; 0),$$

$$Z(X_5) = 76/3 - 2/3x_4 - 1/3 + 1/6x_4 - 1/2x_6 = 25 - 1/2x_4 - 1/2x_6, Z_{\max} = Z(X_5) = 25$$

2.3. Метод ветвей и границ

Пусть

$$\max F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$, x_j - целые числа.

Как и при решении задачи методом Гомори, первоначально находим симплексным методом или методом искусственного базиса оптимальный план задачи без учета целочисленности переменных. Если среди компонент этого плана нет дробных чисел, то тем самым найдено искомое решение данной задачи. Если среди компонент плана имеются дробные числа, то необходимо осуществить переход к новым планам, пока не будет найдено решение задачи.

Метод ветвей и границ основан на предположении, что оптимальный нецелочисленный план дает значение функции, большее, чем всякий последующий план перехода.

Пусть переменная x_i в плане – дробное число. Тогда в оптимальном плане ее значение будет по крайней мере либо меньше или равно ближайшему меньшему целому числу K_i^0 , либо больше или равно ближайшему большему целому числу $K_i^0 + 1$.

Определяя эти числа, находим симплексным методом решение двух задач: линейного программирования: $\max F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m},$

$$x_i^0 \leq K_i^0, \quad x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad x_j - \text{целые числа и } \max F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_i^0 \leq K_i^0 + 1, \quad x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad x_j - \text{целые числа.}$$

Возможны четыре случая при решении этой пары задач:

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции дают решение исходной задачи.
2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет нецелочисленный оптимальный план. Тогда рассматриваем вторую задачу и в ее оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой

равно дробному числу и строим две задачи, аналогичные предыдущим.

3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевой функции от планов и сравниваем их между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи и дает искомое решение.
4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. И строим две задачи.

Алгоритм метода ветвей и границ

1. Находим решение задачи линейного программирования без учета целочисленности.
2. Составляет дополнительные ограничения на дробную компоненту плана.
3. Находим решение двух задач с ограничениями на компоненту.
4. Строим в случае необходимости дополнительные ограничения, согласно возможным четырем случаям получаем оптимальный целочисленный план либо устанавливаем неразрешимость задачи.

Пример № 1

$$\begin{aligned}
 & 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \end{cases} \\
 & x_j \geq 0 \quad (j = \overline{5}) \\
 & x_j - \text{целые} \quad (j = \overline{3}).
 \end{aligned}$$

Решение:

Находим решение без учета целочисленности задачи симплексным методом.

$$x^* = (4, 2, 0, 0, 0), \quad f(x^*) = 12.$$

Рассмотрим следующую пару задач:

Задача №1

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ & \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \end{cases} \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}, x_5 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

и

Задача № 2

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ & \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \end{cases} \\ & x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}, x_5 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Первая задача имеет оптимальный план $x_1^* = (2, 1, 0, 0, 0)$, вторая – неразрешима.

Проверяем на целочисленность план первой задачи. Это условие не выполняется, поэтому строим следующие задачи:

Задача №1.1

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ & \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \end{cases} \\ & x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}, x_5 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

и

Задача № 1.2

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ & \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \end{cases} \\ & x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z}, x_4 \in \mathbb{Z}, x_5 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Задача № 1.2 неразрешима, а задача № 1.1 имеет оптимальный план $x_1^* = (0, 2, 0, 0, 0)$, на котором значение целевой функции $F(x_1^*) = 2$.

В результате получили, что исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $Z^* = 913,33$ и $x_1^* = 1, x_2^* = 1$.

Упражнения

В задачах **2.2-2.7** методом Гомори найти оптимальные решения задач целочисленного линейного программирования. Дать геометрическую интерпретацию процесса решений задач.

2.2. $Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + x_2 \leq 9, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, x_1, x_2 – целые числа

2.4. $Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 24, \\ -3x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, x_1, x_2 – целые числа

2.6. $Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$2x_1 + 11x_2 \leq 38,$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$4x_1 - 5x_2 \leq 54,$$

$x_i \geq 0, i = 1, 2$. x_i – целые.

2.3. $Z = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26, \\ x_1 + 4x_2 \geq 25, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, x_1, x_2 – целые числа

2.5. $Z = 6x_1 + x_2 \rightarrow \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 18, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, x_1, x_2 – целые числа

2.7. $Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9,$$

$$-4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4,$$

$$5x_1 - 6x_2 + x_5 = 6,$$

$x_i \geq 0$, x_i – целые.

Тестовые задания

1. Суть метода ветвей и границ заключается:

- А) в том, что сначала задача решается с учетом целочисленности переменных;
- В) в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении лишь тех из них, которые оказываются по определенным признакам перспективными, и отбрасывании бесперспективных вариантов;
- С) в произвольном отборе вариантов и рассмотрении тех из них, которые удовлетворяют условию целочисленности и являются перспективными;
- Д) в делении системы ограничений на подсистемы.

2. Неравенство сформулированное по i -му уравнению системы уравнений задачи, называется:

- А) правильным отсечением;
- В) оптимальным решением;
- С) дополнительным решением;
- Д) приближенным решением.

3. Недостатком метода Гомори является:

- А) требование целочисленности для всех переменных – как основных, так и дополнительных;
- В) требование целочисленности основных переменных;
- С) требование целочисленности дополнительных переменных;
- Д) требование нецелочисленности всех переменных – как основных, так и дополнительных.

4. Метод ветвей и границ – один из:

- А) комбинаторных методов; В) симплексных методов;
- С) приближенных методов; Д) численных методов.

5. Определить выпуклость (вогнутость) функции $y=x^2$:

- А) строго выпуклая;
- В) выпуклая;
- С) вогнутая;
- Д) является ни выпуклой, ни вогнутой.

6. Определить выпуклость (вогнутость) функции $y=e^x$:

- А) строго выпуклая;
- В) строго вогнутая;
- С) вогнутая;
- Д) является ни выпуклой, ни вогнутой.

7. По свойству выпуклых функций; если функция $F(x)$ выпукла, то:

- А) функция $F(X)$ – вогнута;
- В) является ни выпуклой, ни вогнутой;
- С) функция $F(x)$ - неограниченна сверху;
- Д) функция $F(x)$ является строго вогнутой.

8. Если функции $F_i(X)$, $i=1, \overline{m}$, выпуклы, то при любых действительных числах $\alpha_i \geq 0$ функция $\sum_{i=1}^m \alpha_i F_i(X)$ является:

A) выпуклой; B) вогнутой; C) только выпуклой; D) только вогнутой.

9. Функция $F(X)=C$ и линейная функция $F(X)=ax+b$ являются:

A) всюду выпуклыми и всюду вогнутыми; B) всюду выпуклыми;

C) всюду вогнутыми; D) ни выпуклыми, ни вогнутыми.

10. Дважды дифференцируемая функция $F(X)=F(x_1, \dots, x_2)$ являются выпуклой в том и только в том случае, когда:

A) $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j > 0$ для любых $X \in M$ и $\Delta x_i, \Delta x_j$, не обращающихся

в нуль одновременно;

B) $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \leq 0$ для любых $X \in M$ и $\Delta x_i, \Delta x_j$, не обращающихся в нуль одновременно;

C) $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j = 0$ для любых $X \in M$ и $\Delta x_i, \Delta x_j$, обращающихся в нуль одновременно;

D) $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \geq i+j$ для любых $X \in M$ и $\Delta x_i, \Delta x_j$, не обращающихся в нуль одновременно.

11. Если в процессе решения задачи целочисленного программирования появится уравнение (выражающее основную переменную через неосновные) с нецелым свободным членом и целыми остальными коэффициентами, то:

A) соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах;

B) соответствующее уравнение имеет решение в целых числах;

C) соответствующее уравнение не имеет решения в нецелых числах;

D) соответствующее уравнение имеет решение в отрицательных числах.

12. Какое условие указывает на то, что задача линейного программирования целочисленная?

A) x_j – целые числа;

B) $x_j > 0$;

C) $x_j = 0$;

D) $x_j \geq 0$.

13. Дробная часть числа вычисляется по формуле:

A) $\{a\} = a - [a]$;

B) $\{a\} = [a] - a$;

C) $[a] = \{a\} - a$;

D) $[a] = \{a\} + a$.

14. Правильное отсечение в методе Гомори формируется по формуле:

A) $\{\alpha_{i1}\}x_1 + \{\alpha_{i2}\}x_2 + \dots + \{\alpha_{in}\}x_n \geq \{\beta_i\}$;

B) $[\alpha_{i1}]x_1 + [\alpha_{i2}]x_2 + \dots + [\alpha_{in}]x_n \geq \{\beta_i\}$;

C) $\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq \beta_i$;

D) $\{\alpha_{i1}\}x_1 + \{\alpha_{i2}\}x_2 + \dots + \{\alpha_{in}\}x_n = \{\beta_i\}$.

Глава 3. Двойственные задачи

Каждой задаче линейного программирования соответствует другая задача, называемая двойственной или сопряженной по отношению к исходной. Теория двойственности оказалась полезной для проведения качественных исследований задач линейного программирования.

3.1. Экономическая интерпретация задачи, двойственной задаче об использовании ресурсов

В гл.1 рассмотрена задача об использовании ресурсов (экономико-математическая модель и содержательная интерпретация этой задачи I представлены в левой части табл. 3.1). В приведенной модели b_i ($i=1,2,\dots,m$) обозначает запас ресурса S_i ; a_{ij} - число единиц ресурса S_i , потребляемого при производстве единицы продукции P_j ($j=1,2,\dots,n$); c_j -прибыль (выручка) от реализации единицы продукции P_j (или цена продукции P_j).

Предположим, что некоторая организация решила закупить ресурсы $S_1, S_2, \dots, S_m$ предприятия и необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы $y_1, y_2, \dots, y_m$.

Очевидно, что покупающая организация заинтересована в том, чтобы затраты на все ресурсы Z в количествах $b_1, b_2, \dots, b_m$ по ценам соответственно $y_1, y_2, \dots, y_m$ были минимальны, т.е.

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min .$$

С другой стороны, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была не менее той суммы, которую предприятие может получить при переработке ресурсов в готовую продукцию. На изготовление единицы продукции P_1 расходуется a_{11} единиц ресурса S_1 , a_{21} единиц ресурса S_2 , ..., a_{i1} единиц ресурса S_i , ..., a_{m1} единиц ресурса S_m по цене соответственно $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m$. Поэтому для удовлетворения требований продавца затраты на ресурсы, потребляемые при изготовлении единицы продукции P_1 , должны быть не менее ее цены c_1 , т.е.

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1 .$$

Аналогично можно составить ограничения в виде неравенств по каждому виду продукции $P_1, P_2, \dots, P_n$. Экономико-математическая модель и содержательная интерпретация полученной таким образом двойственной задачи II приведены в правой части табл.3.1.

Таблица 3.1. Экономико-математическая модель и содержательная интерпретация задачи

[illegible]

3.2. Взаимно двойственные задачи линейного программирования и их свойства

Рассмотрим формально две задачи I и II линейного программирования, представленные в табл.3.1, абстрагируясь от содержательной интерпретации параметров, входящих в их экономико-математические модели. Обе задачи обладают следующими свойствами:

1. В одной задаче ищут максимум линейной функции, в другой – минимум.
2. Коэффициенты при переменных в линейной функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.
3. Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче максимизации все неравенства вида « $\leq$ », а в задаче минимизации – все неравенства вида « $\geq$ ».
4. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач являются транспонированными друг к другу:

Для задачи I $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Для задачи II $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.

6. Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

Две задачи I и II линейного программирования, обладающие указанными свойствами, называются **симметричными взаимно двойственными задачами**.

Исходя из определения, можно предложить следующий алгоритм составления двойственной задачи:

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному смыслу: если в исходной задаче ищут максимум линейной функции, то все неравенства системы ограничений привести к виду « $\leq$ », а если минимум - к виду « $\geq$ ». Для этого неравенства, в которых данное требование не выполняется, умножить на -1.
2. Составить расширенную матрицу системы A_1 , в которую включить матрицу коэффициентов при переменных A , столбец свободных членов системы ограничений и строку коэффициентов при переменных в линейной функции.
3. Найти матрицу A'_1 , транспонированную к матрице A_1 .
4. Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы A'_1 и условия неотрицательности переменных.

3.1. Составить задачу, двойственную следующей задаче:

$$F = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях:}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \end{cases} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Решение. 1. Так как исходная задача на максимизацию, то приведем все неравенства системы ограничений к виду « $\leq$ », для чего обе части первого и четвертого неравенства умножим на -1.

Получим:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ -x_1 - x_2 \leq -5 \end{cases}$$

2. Составим расширенную матрицу системы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & F \end{pmatrix}$$

3. Найдем матрицу A_1' , транспонированную к A : $A_1' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & Z \end{pmatrix}$

3. Сформулируем двойственную задачу: $Z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \rightarrow \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$$

Упражнения

Написать двойственные задачи к следующим задачам.

1.
$$\begin{aligned} &4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ &-x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &3x_1 - x_2 \leq 15 \\ &2x_1 + x_2 \leq 20 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ &-3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &x_1 - 4x_2 \leq 3 \\ &x_1 - x_2 \leq 5 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min \\ &3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ &-2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} &5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ &4x_1 + x_2 + 2x_3 = 16 \\ &6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} &-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \rightarrow \min \\ &4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 9 \\ &3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 8 \\ &x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq 12 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} &12x_1 + 17x_2 + 4x_3 \rightarrow \min \\ &-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ &4x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \\ &-2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq -1 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} &-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min \\ &x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ &x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ &2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} &-2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ &x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ &3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ &x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} 2x_1 &= x_2 \text{ (or } x_2 = 2x_1) \\ -4x_1 &= 3x_2 \text{ (} x_2 = -\frac{4}{3}x_1) \\ x_1 &= -4x_2 \text{ (} x_2 = -\frac{1}{4}x_1) \\ -6x_1 &= 5x_2 \text{ (} x_2 = -\frac{6}{5}x_1) \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} 6x_1 &= x_2 \text{ (or } x_2 = 6x_1) \\ 3x_1 &= 7x_2 \text{ (} x_2 = \frac{3}{7}x_1) \\ 2x_1 &= 3x_2 \text{ (} x_2 = \frac{2}{3}x_1) \\ 4x_1 &= 5x_2 \text{ (} x_2 = \frac{4}{5}x_1) \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3.3. Первая теорема двойственности

Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается с помощью теорем двойственности. Вначале рассмотрим вспомогательное утверждение.

Основное неравенство теории двойственности. Пусть имеется пара двойственных задач I и II. Покажем, что для любых допустимых решений $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ исходной и двойственной задач справедливо неравенство

$$F(X) \leq Z(Y) \text{ или } \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (3.7)$$

□ Умножив неравенства системы ограничений (3.2) исходной задачи $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i (i=1, 2, \dots, m)$ соответственно на переменные $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m$ и сложив правые и левые части полученных неравенств, имеем

$$\sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (3.8)$$

аналогично преобразовав систему ограничений (3.5) двойственной задачи $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j (j=1, 2, \dots, n)$ путем умножения обеих частей ее неравенства на переменные $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ и последующего их сложения, получим

$$\sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.9)$$

Так как левые части неравенств (3.8) и (3.9) представляют одно и то же выражение $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i$, то в силу свойства транзитивности неравенств получим доказываемое неравенство (3.7).

Достаточный признак оптимальности.

Теорема. Если $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ - допустимые решения взаимно двойственных задач, для которых выполняется равенство

$$F(X^*) = Z(Y^*), \quad (3.10)$$

то X^* - оптимальное решение исходной задачи I, а Y^* - двойственной задачи II.

□ Пусть X_1 - любое допустимое решение исходной задачи I. Тогда на основании основного неравенства (3.7) получим $F(X_1) \leq Z(Y^*)$. Однако X_1 - произвольное решение задачи I, отсюда в силу равенства (3.10) следует, что $F(X_1) \leq F(X^*)$, т.е. X^* - оптимальное решение задачи I. Аналогично доказывается, что решение оптимально для задачи II. □

Кроме достаточного признака оптимальности взаимно двойственных задач существуют и другие важные соотношения между их решениями.

Прежде всего, возникают вопросы: всегда ли для каждой пары двойственных задач есть одновременно оптимальные решения; возможна ли ситуация, когда одна из двойственных задач имеет решение, а другая нет. Ответ на эти вопросы дает следующая теорема.

Первая (основная) теорема двойственности. Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны:

$$F_{\max} = Z_{\min} \text{ или } F(X^*) = Z(Y^*) \quad (3.11)$$

Если линейная функция одной из задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.

Из первой части утверждения теоремы (которую мы принимаем без доказательства) следует, что равенство (3.10) является не только достаточным признаком оптимальности решений (доказанным выше), но и необходимым признаком оптимальности решений взаимно двойственных задач.

□ Утверждение второй части легко доказывается методом от противного. Предположим, что в исходной задаче линейная функция не ограничена, т.е. $F_{\max} = \infty$, а условия двойственной задачи не являются противоречивыми, т.е. существует хотя бы одно допустимое решение $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Тогда в силу основного неравенства теории двойственности (3.7) $F(X) \leq Z(Y)$, что противоречит условию неограниченности $F(X)$. Следовательно, при $F_{\max} = \infty$ в исходной задаче допустимых решений в двойственной задаче быть не может. □

Рассмотрим примеры, подтверждающие справедливость первой теоремы двойственности.

3.2. Даны две взаимно двойственные задачи:

I. $F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	II. $Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \rightarrow \min$ при ограничениях: $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \geq 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_i \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$
---	---

Отыскание максимума линейной функции

Задачу I решим симплексным методом. С помощью дополнительных переменных перейдем к системе уравнений. В данном случае все дополнительные переменные вводятся со знаком «+», т.к. все неравенства имеют вид « $\leq$ ».

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$$

Для нахождения первоначального базисного решения разобьем переменные на две группы- основные и неосновные.

При выборе основных переменных на первом шаге достаточно воспользоваться следующим **правилом**: *в качестве основных переменных на 1-ом шаге следует выбрать (если возможно) такие m переменных, каждая из которых входит в одно из m уравнений системы ограничений, при этом нет таких уравнений системы, в которые не входит ни одна из этих переменных.*

1-й шаг. Основные переменные: x_3, x_4, x_5, x_6

Неосновные переменные: x_1, x_2

Выразим основные переменные через неосновные:

$$\begin{cases} x_3 = 18 - 3x_2 - x_1 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 5 - x_2 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \end{cases}$$

Положив неосновные переменные равными нулю, т.е. $x_1=0, x_2=0$, получим базисное решение $X_1 = (0;0;18;16;5;21)$, которое является допустимым. Поскольку это решение допустимое, нельзя от бросить возможность того, что оно оптимально. Функцию F можно увеличить за счет увеличения любой из неосновных переменных, входящих в выражение для F с положительным коэффициентом. Это можно осуществить, переходя к такому новому допустимому базисному решению, в котором эта переменная будет неосновной, т.е. принимать не нулевое, а положительное значение.

Система накладывает ограничения на рост переменной x_2 . Поскольку необходимо сохранять допустимость решений, т.е. все переменные должны оставаться неотрицательными, то должны выполняться следующие неравенства ($x_1=0$ как неосновная переменная):

$$\begin{cases} x_3 = 18 - 3x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 - x_2 \geq 0 \\ x_5 = 5 - x_2 \geq 0 \\ x_6 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq 18/3 \\ x_2 \leq 16/1 \\ x_2 \leq 5/1 \end{cases}$$

Сохранение неотрицательности всех переменных возможно, если не нарушается ни одна из полученных во всех уравнениях границ. В данном примере наибольшее возможное значение для переменной x_2 определяется

как $x_2 = \min\{18/3; 16/1; 5/1; \infty\} = 5$. При $x_2=5$ переменная x_5 обращается в нуль и переходит в неосновные.

Уравнение, где достигается наибольшее возможное значение переменной, переводимой в основные (т.е. где оценка минимальна), называется разрешающим.

2-ой шаг. Основные переменные: x_2, x_3, x_4, x_6

Неосновные переменные: x_1, x_5

$$\begin{cases} x_2 = 5 - x_5 \\ x_3 = 18 - x_1 - 3 \cdot (5 - x_5) \\ x_4 = 16 - 2x_1 - (5 - x_5) \\ x_6 = 21 - 3x_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = 5 - x_5 \\ x_3 = 3 - x_1 + 3x_5 \\ x_4 = 11 - 2x_1 + x_5 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \end{cases}$$

Второе базисное решение $X_2 = (0; 5; 3; 11; 0; 21)$ является допустимым. Выразив линейную функцию через неосновные переменные на этом шаге, получим: $F = 2x_1 + 3(5 - x_5) = 15 + 2x_1 - 3x_5$. $F_2 = F(X_2) = 15$.

Однако, значение F_2 не является максимальным, т.к. есть возможность увеличения значения линейной функции за счет переменной x_1 , входящей в выражение для F с положительным знаком.

$$x_1 = \min\{\infty; 3/1; 11/2; 7\} = 3.$$

3-й шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_4, x_6

Неосновные переменные: x_3, x_5

Выражаем основные переменные через неосновные:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 3x_5 \\ x_2 = 5 - x_5 \\ x_4 = 5 + 2x_3 - 5x_5 \\ x_6 = 12 + 3x_3 - 9x_5 \end{cases}$$

Базисное решение $X_3 = (3; 5; 0; 5; 0; 12)$ является допустимым.

Выражаем линейную функцию через неосновные переменные: $F = 15 + 2(3 - x_3 + 3x_5) - 3x_5 = 21 - 2x_3 + 3x_5$. $F_3 = F(X_3) = 21$. Значение линейной функции, выраженной через неосновные переменные, можно увеличить за счет переменной x_5 , входящей в выражение для F с положительным знаком. Наибольшее возможное значение для переменной x_5 определяется как $x_5 = \min\{\infty; 5/1; 12/9\} = 1$.

4-ый шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_5, x_6

Неосновные переменные: x_3, x_4

Основные переменные выражаем через неосновные:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_5 = 1 + 2/5x_3 - 1/5x_4 \\ x_1 = 3 - x_3 + 3(1 + 2/5x_3 - 1/5x_4) \\ x_2 = 4 - 2/5x_3 - 1/5x_4 \\ x_6 = 12 + 3x_3 - 9(1 + 2/5x_3 - 1/5x_4) \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 6 + 1/5x_3 - 3/5x_4 \\ x_2 = 4 - 2/5x_3 + 1/5x_4 \\ x_5 = 1 + 2/5x_3 - 1/5x_4 \\ x_6 = 3 - 3/5x_3 + 9/5x_4 \end{array} \right.$$

Базисное решение $X_4 = (6; 4; 0; 0; 1; 3)$. Линейная функция, выраженная через неосновные переменные, имеет вид: $F = 21 - 2x_3 + 3 + 6/5x_3 - 3/5x_4 = 24 - 4/5x_3 - 3/5x_4$. Это выражение не содержит положительных коэффициентов при неосновных переменных, поэтому значение $F_4 = F(X_4) = 24$ - максимальное.

Критерий оптимальности решения при отыскании максимума линейной функции: *если в выражении линейной функции через неосновные переменные отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально.*

Отыскание минимума линейной функции

II. $Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \rightarrow \min$

при ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \geq 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_i \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4) \end{array} \right.$$

Решение. С помощью дополнительных переменных перейдем к системе уравнений. В данном случае все дополнительные переменные вводятся со знаком «-», т.к. все неравенства имеют вид « $\geq$ ».

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 + 2y_2 + 3y_4 - y_5 = 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 - y_6 = 3 \end{array} \right.$$

Если на 1-ом шаге в качестве основных переменных взять дополнительные переменные, то получим недопустимое базисное решение: $(0; 0; 0; 0; -2; -3)$. Поэтому, воспользовавшись правилом выбора основных переменных, указанным выше, выбираем переменные y_3 и y_4 .

1-ый шаг. Основные переменные: y_3, y_4

Неосновные переменные: y_1, y_2, y_5, y_6

Выражаем основные переменные через неосновные:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_3 = 3 - 3y_1 - y_2 + y_6 \\ y_4 = 2/3 - 1/3y_1 - 2/3y_2 + 1/3y_5 \end{array} \right.$$

$Y_1 = (0; 0; 3; 2/3; 0; 0)$ - 1-ое базисное решение, оно допустимое.
 $Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 = 18y_1 + 16y_2 + 15 - 15y_1 - 5y_2 + 5y_6 + 14 - 7y_1 - 14y_2 + 7y_5 =$
 $= 29 - 4y_1 - 3y_2 + 7y_5 + 5y_6$
 $Z_1 = Z(Y_1) = 29$. Однако, значение Z_1 не является минимальным, т.к. есть возможность уменьшения значения линейной функции за счет переменных y_1 либо y_2 , входящих в выражение для Z_1 с отрицательным знаком. Переводим в основные переменные ту переменную, перед которой стоит больший по абсолютному значению коэффициент, т.е. переменную y_1 .
 $y_1 = \min\{1; 2\} = 1$, 1-ое уравнение является разрешающим.

2-ой шаг. Основные переменные: y_1, y_4

Неосновные переменные: y_2, y_3, y_5, y_6

$$\begin{cases} y_1 = 1 - 1/3y_2 - 1/3y_3 + 1/3y_6 \\ y_4 = 1/3 - 5/9y_2 + 1/9y_3 + 1/3y_5 - 1/9y_6 \end{cases}$$

$Y_2 = (1; 0; 0; 1/3; 0; 0)$ - второе базисное решение допустимое.
 $Z = 29 - 4 + 4/3y_2 + 4/3y_3 - 4/3y_6 - 3y_2 + 7y_5 + 5y_6 = 25 - 5/3y_2 + 4/3y_3 + 7y_5 + 11/3y_6$

Функцию Z_2 можно уменьшить за счет уменьшения неосновной переменной y_2 , входящей в выражение для Z_2 с отрицательным коэффициентом. Это можно осуществить, переходя к такому новому допустимому базисному решению, в котором эта переменная будет неосновной, т.е. принимать не нулевое, а положительное значение
 $y_2 = \min\{3; 3/5\} = 3/5$.

3-й шаг. Основные переменные: y_1, y_2

Неосновные переменные: y_3, y_4, y_5, y_6

$$\begin{cases} y_2 = 3/5 + 1/5y_3 - 9/5y_4 - 3/5y_5 - 1/5y_6 \\ y_1 = 4/5 - 2/5y_3 + 3/5y_4 - 1/5y_5 + 2/5y_6 \end{cases}$$

Базисное решение $Y_3 = (4/5; 3/5; 0; 0; 0; 0)$.

Линейная функция, выраженная через неосновные переменные, имеет вид:
 $Z = 25 - 1 - 1/3y_3 + 3y_4 - y_5 + 1/3y_6 + 4/3y_3 + 7y_5 + 11/3y_6 = 24 + y_3 + 3y_4 + 6y_5 + 4y_6$
. Это выражение не содержит отрицательных коэффициентов при неосновных переменных, поэтому значение $Z_{\min} = Z_3 = Z(Y_3) = 24$ - минимальное.

Задача I об использовании ресурсов (см. разд. 1.2) и двойственная ей задача II имеют оптимумы линейных функций $F_{\max} = 24$ для задачи I, и $Z_{\min} = 24$ для задачи II, т.е. заключение первой части основной теоремы двойственности (3.11) верно.

Критерий оптимальности при отыскании минимума линейной функции: если в выражении линейной функции через неосновные переменные отсутствуют отрицательные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально.

Замечание: На каждом шаге симплексного метода какая-либо неосновная переменная переводится в основные, при этом каждое уравнение системы ограничений определяет конечное или бесконечное наибольшее возможное значение этой переменной – оценочное отношение. В общем виде уравнение $x_i = b_j + \dots + a_{ij}x_i + \dots$ определяет наибольшее возможное значение x_i по следующим правилам:

- 1) $x_i = |b_j / a_{ij}|$, если b_j и a_{ij} разного знака и $a_{ij} \neq 0$, $b_j \neq 0$; например, $x_3 = 8 - 2x_2 + \dots; x_2 = 8/2 = 4$ или $x_3 = -8 + 2x_2 + \dots; x_2 = 8/2 = 4$.
- 2) $x_i = \infty$, если b_j и a_{ij} одного знака и $a_{ij} \neq 0$, $b_j \neq 0$; например, $x_3 = 8 + 2x_2 + \dots; x_2 = \infty$;
- 3) $x_i = 0$, если $b_j = 0$ и $a_{ij} < 0$; например, $x_3 = 0 - 2x_2 + \dots; x_2 = 0$;
- 4) $x_i = \infty$, если $b_j = 0$ и $a_{ij} > 0$; например, $x_3 = 0 + 2x_2 + \dots; x_2 = \infty$;
- 5) $x_i = \infty$, если $a_{ij} = 0$; например, $x_3 = 5 + 0 \cdot x_2 + \dots; x_2 = \infty$;

Экономический смысл первой (основной) теоремы двойственности. План производства $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и набор цен (оценок) ресурсов $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда прибыль (выручка) от продукции, найденная при «внешних» (известных заранее) ценах $c_1, c_2, \dots, c_n$, равна затратам на ресурсы по «внутренним» (определяемым только из решения задачи) ценам $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m$. Для всех же других планов X и Y обеих задач в соответствии с основным неравенством (3.7) теории двойственности прибыль (выручка) от продукции всегда меньше (или равна) затрат на ресурсы.

Так, в задаче 6.2 оптимумы прибыли от продукции $F_{\max}$ и затрат на ресурсы $Z_{\min}$ равны 24 руб., для всех остальных планов $F(X) \leq 24, Z(Y) \geq 24$.

3.3. Даны две взаимно двойственные задачи:

I. $Z = -8y_1 + 2y_2 \rightarrow \min$ при ограничениях: $\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ -2y_1 + y_2 \geq -1, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$	II. $F = x_1 - x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
---	--

В исходной задаче I линейная функция не ограничена ($Z_{\min} = -\infty$), а в двойственной задаче условия противоречивы, т.е. заключение второй части основной теоремы двойственности выполняется.

Замечание. Утверждение, обратное по отношению ко второй части основной теоремы двойственности, в общем случае неверно, т.е. из того, что условия исходной задачи противоречивы, не следует, что линейная функция двойственной задачи не ограничена.

3.4. Вторая теорема двойственности

Тесная связь между двумя взаимно двойственными задачами проявляется не только в равенстве оптимальных значений их линейных функций, о чем утверждалось в первой (основной) теореме двойственности. Пусть даны две взаимно двойственные задачи: I – (3.1)-(3.3) и II- (3.4)-(3.6). если каждую из этих задач решать симплексным методом, то необходимо привести их к каноническому виду, для чего в систему ограничений (3.2) задачи I (в краткой записи $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i (i=1,2,\dots,m)$) следует ввести m неотрицательных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m}$, а в систему ограничений (3.5) задачи II $(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j (j=1,2,\dots,n))$ – n неотрицательных переменных $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+j}, \dots, y_{m+n}$, где $i(j)$ - номер неравенства, в которое введена дополнительная переменная $x_{n+i} \geq 0 (y_{m+j} \geq 0)$.

Системы ограничений каждой из взаимно двойственных задач примут вид:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i (i=1,2,\dots,m) \quad (3.12)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - y_{m+j} = c_j (j=1,2,\dots,n) \quad (3.13)$$

установим соответствие между первоначальными и дополнительными переменными одной из двойственных задач и дополнительными переменными другой задачи (табл.3.2)

таблица 3.2

Переменные исходной задачи I											
Первоначальные						Дополнительные					
x_1	x_2	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+i}	$\dots$	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}	$\dots$	y_{m+j}	$\dots$	y_{m+n}	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$	y_m
Дополнительные						Первоначальные					
Переменные исходной задачи II											

(3.14)

Теорема. Положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи, т.е. для любых $i=1,2,\dots,m$ и $j=1,2,\dots,n$: если $x_j^* > 0$, то $y_{m+j}^* = 0$; если $x_{n+i}^* > 0$, то $y_i^* = 0$, аналогично, если $y_i^* > 0$, то $x_{n+i}^* = 0$; если $y_{m+j}^* > 0$, то $x_j^* = 0$.

□ Выразим дополнительные переменные из систем ограничений (3.12) исходной задачи I и (3.13) двойственной задачи II, представленных в каноническом виде

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, (i=1,2,\dots,m) \quad (3.15)$$

$$y_{m+j} = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j, (j=1,2,\dots,n) \quad (3.16)$$

Умножая каждое неравенство системы (3.15) на соответствующие переменные $y_i \geq 0$ и складывая полученные равенства, найдем

$$\sum_{i=1}^m x_{n+i} y_i = \sum_{i=1}^m b_i y_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i \quad (3.17)$$

Аналогично, умножая каждое равенство системы (3.16) на соответствующие переменные $x_j \geq 0$ и складывая полученные равенства, найдем

$$\sum_{j=1}^n x_j y_{m+j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i - \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.18)$$

Равенства (3.17) и (3.18) будут справедливы для любых допустимых значений переменных, в том числе и для оптимальных значений $x_j^*, x_{n+i}^*, y_i^*, y_{m+j}^*$. В силу первой теоремы двойственности (3.11) $F(X^*) = Z(Y^*)$

или $\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$, поэтому из записи правых частей равенств (3.17) и

(3.18) следует, что они должны отличаться только знаком. С другой стороны, из неотрицательности выражений $\sum_{i=1}^m x_{n+i} y_i$ и $\sum_{j=1}^n x_j y_{m+j}$, входящих в

выражения (3.17) и (3.18), следует, что те же правые части этих равенств должны быть неотрицательны. Эти условия могут выполняться одновременно только при равенстве этих правых частей для оптимальных значений переменных нулю:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{n+i}^* y_i^* = 0, \\ \sum_{j=1}^n x_j^* y_{m+j}^* = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

В силу условия неотрицательности переменных каждое из слагаемых в равенствах (3.19) должно равняться нулю:

$$\begin{cases} x_{n+i}^* y_i^* = 0, i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j^* y_{m+j}^* = 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

откуда и вытекает заключение теоремы. $\square$

Из доказанной теоремы следует важный вывод о том, что введенное ранее соответствие (3.14) между переменными взаимно двойственных задач при достижении оптимума (т.е. на последнем шаге решения каждой задачи симплексным методом) представляет соответствие между **основными** (как правило, не равными нулю) переменными одной из двойственных задач и **неосновными** (равными нулю) переменными другой задачи, когда они образуют допустимые базисные решения.

Рассмотренная теорема является следствием следующей теоремы.

Вторая теорема двойственности. Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.

3.4. Убедиться в справедливости второй теоремы двойственности для взаимно двойственных задач I и II, приведенных в задаче 3.2.

Решение. На основании выражения (3.14) установим следующее соответствие между переменными:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} .$$

В гл.5 обе задачи были решены симплексным методом. На последнем шаге решения каждой задачи получено:

В исходной задаче I

$$F = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \quad (3.20)$$

$F(X^*) = F_{\max} = 24$ при оптимальном базисном решении $X^* = (6; 4; 0; 0; 1; 3)$.

В двойственной задаче II

$$Z = 24 + y_3 + 3y_4 + 6y_5 + 4y_6 \quad (3.21)$$

$Z(Y^*) = Z_{\min} = 24$ при оптимальном

базисном решении $Y^* = (\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; 0; 0; 0; 0)$.

Компоненты оптимального решения двойственной задачи $y_1^* = \frac{4}{5}, y_2^* = \frac{3}{5}, y_3^* = 0, y_4^* = 0, y_5^* = 0, y_6^* = 0$ равны (по абсолютной величине)

коэффициентам при соответствующих переменных линейной функции (3.20), которую можно представить в виде

$F = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 - 0 \cdot x_5 - 0 \cdot x_6 - 0 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2$, а компоненты оптимального

решения исходной задачи $x_1^* = 6, x_2^* = 4, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 1, x_6^* = 3$ равны коэффициентам при *соответствующих* переменных линейной функции (3.21), которую можно представить в виде $Z = 24 + y_3 + 3y_4 + 6y_5 + 4y_6 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2$.

Замечание. Если в одной из взаимно двойственных задач нарушается единственность оптимального решения, то оптимальное решение двойственной задачи вырожденное. Это связано с тем, что при нарушении единственности оптимального решения исходной задачи в выражении линейной функции ее оптимального решения через неосновные переменные отсутствует хотя бы одна из основных переменных.

С помощью теорем двойственности можно, решив симплексным методом исходную задачу, найти оптимум и оптимальное решение двойственной задачи.

3.5. Решить симплексным методом задачу $F = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ при

$$\text{ограничениях: } \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ x_1 - 4x_2 \geq -24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \end{cases} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad \text{и найти оптимум и}$$

оптимальное решение двойственной задачи, используя теоремы двойственности.

Решение. Решая задачу симплексным методом, получим на последнем шаге решения (рекомендуем читателю убедиться в этом самостоятельно):

$$F = 10 - \frac{2}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4, \text{ т.е. } F_{\max} = 10 \text{ при оптимальном базисном решении}$$

$$X^* = (4; 7; 0; 0; 6; 6).$$

В данной задаче соответствие (3.14) между переменными примет вид:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array}.$$

На основании первой теоремы двойственности $Z_{\min} = F_{\max} = 10$. На основании второй теоремы двойственности оптимальное решение двойственной задачи $Y^* = (2/7; 3/7; 0; 0; 0; 0)$, так как $y_1^* = 2/7$, т.е. коэффициенту при соответствующей переменной x_3 в выражении линейной функции $F(x)$, $y_2^* = 3/7$, т.е. коэффициенту при переменной x_4 , $y_3^* = y_4^* = y_5^* = y_6^* = 0$ (из-за отсутствия соответствующих переменных x_5, x_6, x_1, x_2 в выражении $F(x)$)

их коэффициенты равны нулю). Итак, в двойственной задаче $Z_{\min} = 10$ при $Y^* = (2/7; 3/7; 0; 0; 0; 0)$.

Метод, при котором вначале симплексным методом решается двойственная задача, а затем оптимум и оптимальное решение исходной задачи находятся с помощью теорем двойственности, называется **двойственным симплексным методом**. Этот метод бывает выгодно применять, когда первое базисное решение исходной задачи недопустимое или, например, когда число ее ограничений m больше числа переменных n .

3.5. Объективно обусловленные оценки и их смысл

Компоненты оптимального решения двойственной задачи называются **оптимальными (двойственными) оценками** исходной задачи. Академик Л.В.Канторович назвал их **объективно обусловленными оценками**.

Для выяснения смысла этих оценок вернемся к задаче I об использовании ресурсов и двойственной ей задаче II (см. задачу 3.2). Компоненты оптимальных решений этих задач, приведенные в задаче 3.5 даны в следующей таблице.

Компоненты оптимального решения исходной задачи I					
Число единиц продукции		Остатки ресурсов, единиц			
P ₁	P ₂	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄
$x_1^* = 6$	$x_2^* = 4$	$x_3^* = 0$	$x_4^* = 0$	$x_5^* = 1$	$x_6^* = 3$
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕
$y_5^* = 0$	$y_6^* = 0$	$y_1^* = 4/5$	$y_2^* = 3/5$	$y_3^* = 0$	$y_4^* = 0$
Превышение затрат на ресурсы над ценой реализации		Объективно обусловленные оценки ресурсов (условные цены ресурсов)			
Компоненты оптимального решения двойственной задачи II					

В таблице дополнительные переменные исходной задачи I x_3, x_4, x_5, x_6 , представляющие согласно выражению (3.15) разность между запасами b_i ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4 и их потреблением, выражают остатки ресурсов, а дополнительные переменные двойственной задачи II y_5, y_6 , представляющие в соответствии с выражением (3.16) разность между затратами на ресурсы для производства из них единицы продукции и ценами c_j продукции P_1, P_2 , выражают *превышение затрат над ценой*.

Ресурсы S_1, S_2 по оптимальному плану полностью использованы (x_3^*, x_4^*), и объективно обусловленные оценки этих ресурсов ненулевые

$(y_1^* = 4/5; y_2^* = 3/5)$. Ресурсы S_3, S_4 не полностью используются в оптимальном плане ($x_5^* = 1, x_6^* = 3$) и объективно обусловленные оценки этих ресурсов нулевые ($y_3^* = 0, y_4^* = 0$).

Таким образом, объективно обусловленные оценки ресурсов определяют степень дефицитности ресурсов: по оптимальному плану производства дефицитные (т.е. полностью используемые) ресурсы получают ненулевые оценки, а недефицитные – нулевые оценки.

По оптимальному плану в исходной задаче следует производить оба вида продукции ($x_1^* = 6, x_2^* = 4$) и превышение затрат на ресурсы над ценой реализации равно нулю ($y_5^* = 0, y_6^* = 0$).

Итак, в оптимальный план производства могут попасть только рентабельные, неубыточные виды продукции.

Третья теорема двойственности. Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны значениям частных производных линейной функции $F_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ по соответствующим аргументам, т.е.

$$\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*, (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.22)$$

Тестовые задания

1. Метод, при котором вначале симплексным методом решается двойственная задача, а затем оптимум и оптимальное решение исходной задачи находятся с помощью теорем двойственности, называется:

- А) симплексным методом; В) двойственным симплексным методом;
С) методом наименьших затрат; D) методом отсечения.

2. На последнем шаге решения задачи $F = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1; \\ x_1 - 4x_2 \geq -24; \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \end{cases} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ симплексным методом получено:}$$

$F = 10 - (2/7)x_3 - (3/7)x_4$ при оптимальном базисном решении $X = (4; 7; 0; 0; 6; 6)$.

С помощью теорем двойственности найти решение двойственной задачи:

- А) $Z_{\min} = F_{\max} = 10$; $Y = (2/7; 3/7; 0; 0; 0; 0)$; В) $Z_{\min} = F_{\max} = 10$; $Y = (0; 0; 2/7; 3/7; 0; 0)$;
С) $Z_{\max} = F_{\max} = 10$; $Y = (2/7; 3/7; 0; 0; 0; 0)$; D) $Z_{\min} = F_{\max} = 10$; $Y = (0; 0; 0; 0; 2/7; 3/7)$.

3. По правилам определения наибольшего возможного значения неосновной переменной x_i при переводе ее в основные, если b_j и a_{ij} разного знака и $a_{ij} \neq 0$,

$b_j \neq 0$ (b_j -свободный член, a_{ij} -коэффициент при x_i), то:

- А) $x_i = 0$; В) $x_i = \infty$; С) $x_i = |b_j / a_{ij}|$; D) $x_i < 0$

4. Вторая теорема двойственности:

А) компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через основные переменные ее оптимального решения;

В) компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих основных переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения;

С) компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих основных переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через основные переменные ее оптимального решения;

D) компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.

5. Если в выражении линейной функции через неосновные переменные отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально:

- А) критерий оптимальности при отыскании максимума линейной функции;
- В) критерий оптимальности при отыскании минимума линейной функции;
- С) критерий оптимальности правильного отсечения;
- Д) критерий оптимальности дополнительного ограничения.

6. Базисное распределение поставок оптимально тогда и только тогда, когда оценки свободных клеток неотрицательны – это:

- А) критерий оптимальности при отыскании максимума линейной функции;
- В) критерий оптимальности при отыскании минимума линейной функции;
- С) критерий оптимальности базисного распределения поставок;
- Д) критерий оптимальности при отыскании дополнительного ограничения.

7. Укажите двойственную исходной задаче $F = 15x_1 + 33x_2 \rightarrow \min$ при

ограничениях:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 1 \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$$
 задачу:

А) $Z = 6y_1 + 6y_2 + y_3 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \leq 15 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 33 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

В) $Z = 6y_1 + 6y_2 + y_3 \rightarrow \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \leq 15 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 33 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

С) $Z = 6y_1 + 6y_2 + y_3 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} -3y_1 + 6y_2 \geq 15 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 33 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Д) $Z = 4y_1 + 4y_2 + y_3 \rightarrow \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \leq 15 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 33 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

8. Критерий оптимальности при отыскании минимума линейной функции:

- А) если в выражении линейной функции через неосновные переменные отсутствуют отрицательные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально;
- В) если в выражении линейной функции через неосновные переменные отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально;

С) если в выражении линейной функции через неосновные переменные отсутствуют отрицательные коэффициенты при основных переменных, то решение оптимально;

Д) если в выражении линейной функции через основные переменные отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально;

9. Двойственный симплексный метод – это:

А) метод, при котором вначале симплексным методом решается двойственная задача, а затем оптимум и оптимальное решение исходной задачи находятся с помощью теорем двойственности;

В) метод, при котором вначале симплексным методом решается исходная задача, а затем оптимум и оптимальное решение двойственной задачи находятся с помощью теорем двойственности;

С) метод, при котором оптимум и оптимальное решение исходной задачи находятся с помощью теорем двойственности;

Д) метод, при котором оптимум и оптимальное решение двойственной задачи находятся с помощью теорем двойственности.

10. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений взаимно двойственных задач являются:

А) транспонированными друг к другу; В) единичными;

С) линейными; Д) нелинейными.

10. Число неравенств в системе ограничений одной из взаимно двойственных задач совпадает:

А) с числом переменных в другой задаче;

В) с количеством неравенств в другой задаче;

С) с числом дополнительных переменных в другой задаче;

Д) с числом отрицательных переменных в другой задаче.

11. Коэффициенты при переменных в линейной функции одной из взаимно двойственных задач:

А) являются свободными членами системы ограничений в другой;

В) являются коэффициентами при переменных в системе ограничений другой;

С) суммой коэффициентов при переменных в линейной функции другой;

Д) равны числу неравенств в системе ограничений другой.

12. Две задачи I и II линейного программирования, обладающие свойствами взаимно двойственных задач, называются:

А) симметричными взаимно двойственными задачами;

В) транспонированными друг к другу;

С) несимметричными задачами;

Д) несимметричными взаимно двойственными задачами.

13. Если линейная функция одной из взаимно двойственных задач не ограничена:

А) то условия другой задачи противоречивы;

- В) то значения линейных функций исходной и двойственной задач не равны;
- С) то значения линейных функций исходной и двойственной задач равны;
- Д) то условия другой задачи непротиворечивы.
14. Положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют:
- А) нулевые компоненты оптимального решения другой задачи;
- В) положительные компоненты оптимального решения другой задачи;
- С) ненулевые компоненты оптимального решения другой задачи;
- Д) отрицательные компоненты оптимального решения другой задачи.
15. Симплекс- метод заключается в:
- А) определении какого-либо допустимого решения и путем последовательных улучшений нахождения оптимального решения;
- В) определении какого-либо допустимого решения;
- С) определении какого-либо оптимального решения;
- Д) определении какого-либо допустимого решения и в нахождении оптимального решения.

Глава 4. Транспортная задача

4.1. Экономико-математическая модель транспортной задачи

Важным частным случаем задачи линейного программирования является так называемая транспортная задача.

4.1. Построить экономико-математическую модель следующей задачи. Имеются три поставщика и четыре потребителя. Мощность поставщиков и спросы потребителей, а также затраты на перевозку единицы груза для каждой пары «поставщик-потребитель» сведены в таблицу поставок (см.табл.4.1).

Таблица 4.1. Сведения о поставщиках и потребителях

Поставщики	Мощность поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		20	110	40	110
1	60	1 x_{11}	2 x_{12}	5 x_{13}	3 x_{14}
2	120	1 x_{21}	6 x_{22}	5 x_{23}	2 x_{24}
3	100	6 x_{31}	3 x_{32}	7 x_{33}	4 x_{34}

В левом верхнем углу произвольной (i,j)-клетки (i- номер строки, j- номер столбца) стоит так называемый коэффициент затрат – затраты на перевозку единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю, например, в левом верхнем углу клетки (1,4) стоит число 3, следовательно, перевозка единицы груза от 1-го поставщика к 4-му потребителю обойдется в 3 условных денежных единицы и т.д.

Задача ставится следующим образом. *Найти объемы перевозок для каждой пары «поставщик-потребитель» так, чтобы:*

- 2) мощности всех поставщиков были реализованы;
- 3) спросы всех потребителей удовлетворены;
- 4) суммарные затраты на перевозку были бы минимальны.

Решение. Построим экономико-математическую модель данной задачи. Искомый объем перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю обозначим через x_{ij} и назовем *поставкой клетки (i, j)*. Например, x_{12} – искомый объем перевозки от 1-го поставщика ко 2-му потребителю или поставка клетки (1,2) и т.д. Заданные мощности поставщиков и спросы потребителей накладывают ограничения на значения неизвестных x_{ij} . Так, например, объем груза, забираемого от 1-го поставщика, должен быть равен мощности этого поставщика – 60 единицам, т.е. $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60$ (уравнение баланса по первой строке). Таким образом, чтобы мощность

каждого из поставщиков была реализована, необходимо составить уравнения баланса для каждой строки таблицы поставок, т.е.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 120, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 \end{cases} \quad (4.1)$$

Аналогично, чтобы спрос каждого из потребителей был удовлетворен, подобные уравнения баланса составляем для каждого столбца таблицы поставок:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110 \end{cases} \quad (4.2)$$

Очевидно, что объем перевозимого груза не может быть отрицательным, поэтому следует дополнительно предположить, что $x_{ij} \geq 0 (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$.

Суммарные затраты F на перевозку выражаются через коэффициенты затрат и поставки следующим образом:

$$F = 1 \cdot x_{11} + 2 \cdot x_{12} + 5 \cdot x_{13} + 3 \cdot x_{14} + 1 \cdot x_{21} + 6 \cdot x_{22} + 5 \cdot x_{23} + 2 \cdot x_{24} + 6 \cdot x_{31} + 3 \cdot x_{32} + 7 \cdot x_{33} + 4 \cdot x_{34} \quad (4.3)$$

Теперь можно дать математическую формулировку задачи. *На множестве неотрицательных решений систем ограничений (4.1) и (4.2) найти такое решение $X = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33}, x_{34})$, при котором линейная функция (4.3) принимает минимальное значение.*

О с о б е н н о с т и экономико-математической модели транспортной задачи:

- система ограничений есть система уравнений (т.е. транспортная задача задана в канонической форме);
- коэффициенты при переменных систем ограничений равны единице или нулю;
- каждая переменная входит в систему ограничений два раза: один раз - в систему (4.1) и один раз – в систему (4.2).

Для математической формулировки транспортной задачи в общей постановке обозначим через c_{ij} коэффициенты затрат, через M_i - мощности поставщиков, через N_j - мощности потребителей, где $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; m$ - число поставщиков, n - число потребителей. Тогда система ограничений примет вид:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = M_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (4.4) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = N_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.5)$$

Система (4.4) включает в себя уравнение баланса по строкам, а система (4.5) – по столбцам таблицы поставок.

Линейная функция в данном случае $F = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}$ (4.6)

Математическая формулировка транспортной задачи в общей постановке будет следующей: на множестве неотрицательных (допустимых) решений систем ограничений (4.4), (4.5) найти такое решение $X = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn})$, при котором значение линейной функции (4.6) минимально.

Произвольное допустимое решение $X = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn})$ систем ограничений (4.4), (4.5) назовем *распределением поставок*. Такое решение задает заполнение таблицы поставок, поэтому в дальнейшем значение произвольной переменной x_{ij} и содержимое соответствующей клетки таблицы поставок будут отождествляться.

Транспортная задача, приведенная в примере 4.1, обладает важной особенностью: суммарная мощность поставщиков равна суммарной мощности потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^m M_i = \sum_{j=1}^n N_j \quad (4.7)$$

Такие транспортные задачи называются *закрытыми* (говорят также, что транспортная задача в этом случае имеет закрытую модель). В противном случае транспортная задача называется *открытой* (открытая модель транспортной задачи).

Рассмотрим закрытую транспортную задачу. Являясь задачей линейного программирования, транспортная задача может быть решена симплексным методом. Однако специфичная форма системы ограничений данной задачи позволяет существенно упростить обычный симплексный метод. Модификация симплексного метода применительно к транспортной задаче называется *распределительным методом*. По аналогии с общим случаем решение в нем осуществляется по шагам, и каждому шагу соответствует разбиение переменных на основные (базисные) и неосновные (свободные). Число r основных переменных транспортной задачи равно рангу системы линейных уравнений (максимальному числу линейно независимых уравнений в системе ограничений).

Теорема 4.1. Ранг r системы уравнений (4.4), (4.5) при условии (4.7) равен $m+n-1$.

□ Прежде всего заметим, что уравнения системы (4.4), (4.5) при условии (4.7) линейно зависимы и, следовательно, ранг системы не больше, чем $m+n-1$. Действительно, сравним сумму $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m M_i$ (4.8) первых m уравнений системы (сумму уравнений системы (4.4)) с суммой $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n N_j$ (4.9) оставшихся n уравнений (суммой уравнений системы (4.5)).

Согласно условию (4.7) правые части уравнений (4.8) и (4.9) совпадают. Левые части (4.8) и (4.9), являющиеся суммами всевозможных переменных x_{ij} данной задачи, также совпадают. Следовательно, совпадают уравнения (4.8) и (4.9), т.е. сумма первых m уравнений системы ограничений равна сумме оставшихся n уравнений системы ограничений: уравнения системы (4.4), (4.5) линейно зависимы.

Докажем, что ранг r системы не меньше, чем $m+n-1$. Из линейной алгебры известно, что если некоторые k переменных произвольной системы линейных уравнений можно линейно выразить через остальные переменные системы, то ранг этой системы не меньше, чем k .

Выразим, например, переменные x_{ij} , входящие в первый столбец и первую строку табл.4.1, через остальные переменные x_{ij} , где $i=2,3,\dots,m; j=2,3,\dots,n$. Сначала найдем такие выражения для переменных, отличных от x_{11} . Для каждой переменной x_{1j} первой строки, где $j=2,3,\dots,n$, воспользуемся уравнением баланса по соответствующему столбцу:

$$x_{1j} = N_j - \sum_{i=2}^m x_{ij} \quad (4.10)$$

Аналогично, для каждой переменной x_{i1} первого столбца, где $i=2,3,\dots,m$, воспользуемся уравнением баланса по соответствующей строке:

$$x_{i1} = M_i - \sum_{j=2}^n x_{ij}.$$

Для нахождения выражения для x_{11} воспользуемся, например, уравнением баланса по первой строке:

$$x_{11} = M_1 - \sum_{j=2}^n x_{1j} \quad (4.11)$$

Подставляя в правую часть уравнения (4.11) выражения для x_{1j} , где $j=2,3,\dots,n$ из уравнения (4.10), получаем искомое выражение для x_{11} .

Таким образом, $m+n-1$ переменных этой задачи можно выразить через остальные $mn-m-n+1$ переменные, т.е. ранг r системы $r \geq m+n-1$.

Сравнивая два полученных ограничения на ранг r системы (4.4) и (4.5) ($r \geq m+n-1$ и $r \leq m+n-1$), получаем, что $r = m+n-1$. ■

Основное следствие теоремы 4.1 — число r основных (базисных) переменных закрытой транспортной задачи равно $m+n-1$, где m — число поставщиков, n — число потребителей.

Каждому разбиению переменных x_{ij} задачи на основные (базисные) и неосновные (свободные) соответствует базисное решение (см. гл. 2) и, как следствие, заполнение таблицы поставок, которое также назовем базисным. Иными словами, *распределение поставок называется базисным, если переменные, соответствующие заполненным клеткам, можно принять за основные переменные*. Клетки, отвечающие базисным переменным, в дальнейшем будем называть *базисными*, а клетки, соответствующие свободным переменным, — *свободными или пустыми*. Поскольку в дальнейшем мы используем исключительно базисные распределения поставок, то термины "базисная клетка" и "заполненная клетка" будут считаться равнозначными.

Подобно тому, как это было в симплексном методе, в распределительном методе решения транспортной задачи будем переходить от одного базисного распределения поставок к другому в сторону невозрастания целевой функции вплоть до оптимального решения. Для начала такого движения потребуется исходное базисное распределение поставок — так называемый *опорный план*.

Теорема 4.2. Пусть на каждом шаге заполнения таблицы поставок возникает одна заполненная клетка, причем из рассмотрения на каждом (кроме последнего) шаге выпадает либо одна строка, либо один столбец. Тогда переменные, соответствующие заполненным клеткам, можно принять за базисные.

□ Из линейной алгебры известно, что если ранг системы линейных уравнений равен r и некоторые r переменных системы выражены через остальные переменные, то эти r переменных можно взять за основные (базисные). Из условия данной теоремы следует, что число заполненных клеток равно $m+n-1$, т. е. равно рангу системы (4.4), (4.5) (см. пояснения к методу "северо-западного" угла). Поэтому теорема будет доказана, если показать, что переменные, соответствующие заполненным клеткам, могут быть выражены через переменные, соответствующие свободным клеткам. Предположим, что переменные заполненных клеток, возникшие на первых t шагах метода, где $t = 1, 2, \dots, m+n-2$, можно выразить через переменные, соответствующие свободным клеткам тех строк и столбцов, которые были вычеркнуты (выпали из рассмотрения) на первых t шагах.

Пусть на $(t+1)$ -м шаге метода заполнена (p, q) -я клетка и из рассмотрения выпала, например, p -я строка. Выразим переменную x_{pq} из уравнения баланса по p -й строке:

$$x_{pq} = M_p - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^n x_{pj}$$

Пусть среди переменных правой части последнего равенства есть переменные клеток, заполненных на одном из первых t шагов. Тогда по предположению их можно выразить через переменные свободных клеток тех строк и столбцов, которые были вычеркнуты на первых t шагах. В случае, если на $(t+1)$ -м шаге из рассмотрения выпал q -й столбец, x_{pq} следует выразить из уравнения баланса по q -му столбцу. Подобные рассуждения следует последовательно провести для каждого из шагов заполнения таблицы поставок.

4.2. Нахождение первоначального базисного распределения поставок Построение исходного опорного плана (метод северо-западного угла)

Для начала решения транспортной задачи необходимо иметь какой-то исходный опорный план, то есть оказаться в какой-то вершине допустимой области. Приведем конструктивный прием построения такого опорного плана, получивший название "метод северо-западного угла".

Итак, пусть имеется m складов с запасами $a_1, a_2, \dots, a_m$ и n пунктов потребления с потребностями $b_1, b_2, \dots, b_n$. Пусть запасы и потребности сбалансированы, то есть

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Представим это в виде таблицы,

a_1					a_m
					b_1
					b_2
					b_3
					b_4
a_2	a_3	a_4	...	a_5	

где в столбце справа указаны запасы, в строке снизу $\square$ потребности, а пустые клетки оставлены для будущего плана перевозок.

Начнем заполнение с клетки, расположенной вверху слева, то есть с "северо-западного угла". Вместо a_1 впишем число $x_{11} = \min(a_1, b_1)$.

Возможны два варианта.

1. $\min(a_1, b_1) = a_1$, то есть $a_1 \leq b_1$. Тогда, запланировав перевозку из первого склада в первый пункт потребления в объеме a_1 мы полностью опустошим

первый склад и там ничего не останется. Поэтому все остальные перевозки из первого склада могут быть только нулевые.

Ну, а потребность в первом пункте потребления останется в объеме a_1 .
Наша таблица примет вид:

a_1	0	0	...	0	0
					a_2
					a_3
					a_4
					a_5
$a_1 - a_1$	a_1	a_1	...	a_1	

Обратите внимание на то, что оставшаяся незаполненной часть таблицы вновь по структуре та же, что и исходная таблица, только в ней **на одну строку меньше**.

2. $a_1 - a_1 = 0$, то есть 0 . Тогда, запланировав перевозку из первого склада в первый пункт потребления в объеме a_1 , мы полностью удовлетворим его потребности. Перевозить туда больше будет ничего не надо, поэтому остальные перевозки туда будут равны нулю.

Ну, а в первом складе еще останется $a_1 - a_1$ запасов продукта.

Наша таблица примет вид:

a_1					$a_1 - a_1$
0					a_2
0					a_3
a_1					a_4
0					a_5
0	a_1	a_1	...	a_1	

Обратите внимание на то, что оставшаяся незаполненной часть таблицы вновь по структуре та же, что и исходная таблица, только в ней **на один столбец меньше**.

Ну, а дальше все можно повторить, продолжая заполнять оставшуюся часть таблицы перевозок начиная с левого верхнего, "северо-западного" угла, пока не будут исчерпаны запасы всех складов и не удовлетворены потребности всех пунктов потребления.

Всего в таблице m строк и n столбцов. Каждый раз исчезает, как минимум, либо строка, либо столбец (могут исчезнуть сразу и строка, и столбец, если запасы какого-то подмножества складов полностью удовлетворяют потребности какого-то подмножества пунктов потребления). Однако при последней перевозке исчезает сразу и последняя строка, и

последний столбец. Поэтому получающийся план перевозок содержит **не более** $m+n-1$ компонент.

План, полученный методом северо-западного угла, является опорным. Если получающийся план содержит **ровно** $m+n-1$ компоненту, то он называется **невырожденным**. Если число положительных компонент плана перевозок **меньше** $m+n-1$, то он называется **вырожденным**.

4.2. Найти первоначальное базисное распределение поставок для транспортной задачи 4.1.

Решение. Дадим переменной x_{11} максимально возможное значение или, иными словами, максимально возможную поставку в клетку (1,1) - "северо-западный" угол таблицы поставок: $x_{11} = \min \{60, 20\} = 20$. После этого спрос 1-го потребителя будет полностью удовлетворен, в результате чего первый столбец таблицы поставок выпадет из последующего рассмотрения),полненные клетки будем перечеркивать сплошной линией (см. табл. 4.2) клетки, выпавшие из последующего рассмотрения, перечеркнуты пунктирной линией. В таблице поставок найдем новый "северо-западный" угол - клетку (1,2) и дадим в нее максимально возможное значение. Учитывая, что 1-й поставщик уже отдал 20 единиц груза и у него осталось только $40 = 60-20$ единиц груза, получаем, что $x_{12} = \min \{40, 110\} = 40$. После этого мощность 1-го поставщика полностью реализована и из рассмотрения выпадет первая строка таблицы поставок (перечеркиваем сплошной линией клетку (1,2) и пунктирной линией оставшиеся свободные клетки первой строки). В оставшейся таблице снова находим "северо - западный угол" и т. д. В результате получаем следующее исходное распределение поставок (см. табл.4.2).

Таблица 4.2. Распределение поставок

	20	110	40	110
60	1 20	2 40	5	3
120	1	6 70	5 40	2 10
100	6	3	7	4 100

Число заполненных клеток в полученном распределении оказалось равным $m+n-1 = 3+4-1 = 6$, т.е. числу основных (базисных) переменных. Это, конечно, не случайно. Действительно, на каждом шаге (кроме последнего) данного метода из рассмотрения выпадали либо строка, либо

столбец, а на последнем шаге и столбец, и строка. Поэтому число заполненных клеток (число шагов) на единицу меньше, чем сумма числа строк и столбцов таблицы поставок, т.е. равно $m+n-1$. Оказывается (см. теорему 4.2), что эта особенность шагов метода "северо-западного" угла служит причиной того, что полученное распределение является базисным.

Существенный недостаток метода "северо-западного" угла состоит в том, что он построен без учета значений коэффициентов затрат задачи. С другой стороны, данный метод допускает модификацию, лишенную этого недостатка: на каждом шаге максимально возможную поставку следует давать не в "северо-западную" клетку оставшейся таблицы, а в клетку с наименьшим коэффициентом затрат. При этом распределение поставок оказывается, вообще говоря, ближе к оптимуму, чем распределение, полученное методом "северо-западного угла". Такой метод получения опорного плана называется *методом наименьших затрат*.

4.3. Метод минимального элемента

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_{ij} и b_{ij} . Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Найти методом наименьших затрат первоначальное распределение поставок в задаче 4.1.

Таблица 4.3

	20	110	40	110
60	1	2	5	3
120	1 20	6	5	2
100	6	3	7	4

Решение. Находим в таблице поставок (см. табл. 4.1) клетки с наименьшим коэффициентом затрат. Таких клеток две - (1,1) и (2,1) с коэффициентами затрат, равными 1. Сравним максимально возможные поставки для этих клеток: для клетки (1,1) $x_{11} = \min \{60, 20\} = 20$, для

Таблица 4.4

	20	110	40	110
60	1	2	5	3
120	1 20	6	5	2 100
100	6	3	7	4

клетки (2,1) $x_{12} = \min \{120, 20\} = 20$. Так как они совпадают, то максимально возможную поставку даем в любую из них. Например, даем поставку, равную 20 единицам, в клетку (2,1). В результате спрос первого потребителя удовлетворен, и первый столбец таблицы поставок выпадает из последующего рассмотрения (табл. 4.3).

В оставшейся таблице наименьшим коэффициентом затрат обладают две клетки: $c_{12} = c_{24} = 2$. Сравним максимально возможные поставки для этих клеток: для клетки (1,2) $x_{12} = \min \{60, 110\} = 60$; для клетки (2,4) $x_{24} = \min \{120 - 20, 110\} = 100$. Даем поставку в клетку (2,4), для которой максимально возможная поставка оказалась больше: $x_{24} = 100$.

Таблица 4.5

	20	110	40	110
60	1	2 60	5	3
120	1 20	6	5	2 100
100	6	3 50	7 40	4 10

При этом из рассмотрения выпадает вторая строка таблицы поставок (табл. 4.4). Аналогично, продолжая заполнение таблицы поставок шаг за шагом, получаем $\overline{x_{12}} = \min \{60, 110\} = 60$, $\overline{x_{32}} = \min \{100, 110 - 60\} = 50$, $\overline{x_{34}} = \min \{100 - 50, 110 - 100\} = 10$, $\overline{x_{33}} = \min \{100 - 60, 40\} = 40$ (табл. 4.5)

Сравним найденное распределение поставок с распределением, полученным для той же задачи по методу "северо-западного" угла (см. задачу 4.2, табл. 4.2). Вычислим для каждого из этих распределений суммарные затраты в денежных единицах:

в задаче 4.2:

$$F_0 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 6 \cdot 70 + 5 \cdot 40 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 100 = 1140$$

в задаче 4.3:

$$F_0 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 50 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 40 + 4 \cdot 10 = 810$$

Как и ожидалось, при использовании метода "северо-западного" угла суммарные затраты больше, чем при применении метода наименьших затрат. Таким образом, во втором случае мы находимся ближе (по числу необходимых шагов) к оптимуму, чем в первом.

4.4. Метод аппроксимации Фогеля

При определении опорного плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля на каждой итерации находят разность по всем

столбцам и по всем строкам между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце таблицы условий задачи. Среди указанных разностей выбирают минимальную. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальная стоимость. Клетку, в которой она записана, заполняют на данной итерации.

Если минимальная стоимость одинакова для нескольких клеток данного столбца (строки), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными стоимостями, находящимися в данном столбце (строке).

Пример 4.3. Найти методом аппроксимации Фогеля первоначальный опорный план транспортной задачи. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120,50,190 и 110 ден.ед. сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160,140,170 ден.ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	7	8	1	2	160
A ₂	4	5	9	8	140
A ₃	9	2	3	6	170
Потребности	120	50	190	110	

Решение:

Для каждой строки и столбца таблицы условий находятся разности между двумя минимальными тарифами, записанными в данной строке или столбце, и помещаются они в соответствующем дополнительном столбце или дополнительной строке таблицы 4.6. Так, в строке A₂ минимальный

тариф равен 4, а следующий за ним равен 5, разность между ними $5-4=1$. точно так же разность между минимальными элементами в столбце B_4 равен $6-2=4$. После вычисления всех разностей можно увидеть, что наибольшая из них соответствует столбцу B_4 . В этом столбце минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки A_1 и столбца B_4 . Таким образом, эту клетку следует заполнить. После этого определяют следующую клетку для заполнения.

Таблица 4.6. Сведения о распределенном грузе методом аппроксимации Фогеля

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы						
	B_1	B_2	B_3	B_4							
A_1	7 50	8 110	1 50	2 110	160	1	6	-	-	-	-
A_2	4 120	5 20	9	8	140	1	1	1	1	1	0
A_3	9	2 30	3 140	6	170	1	1	1	7	-	-
Потребности	120	50	190	110							
Разности по столбцам	3	3	2	4							
	3	3	2	-							
	5	3	6	-							
	5	3	-	-							
	-	0	-	-							
	-	0	-	-							

Продолжая итерационный процесс, последовательно заполняются клетки, находящиеся на пересечении строки A_3 и столбца B_3 , строки A_3 и столбца B_2 , строки A_2 и столбца B_1 , строки A_2 и столбца B_2 . В результате получается опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}$$

При этом плане общая стоимость перевозок такова:

$$S = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 110 + 4 \cdot 120 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 140 = 1330$$

4.5. Метод двойного предпочтения

В случае больших размерностей, эффективен способ определения первоначального опорного плана с помощью метода двойного предпочтения. В каждом столбце отмечают знаком клетку с наименьшей стоимостью. Затем тоже проделывают в каждой строке. В результате некоторые клетки имеют двойную отметку. В них находится минимальная

стоимость, как по столбцу, так и по строке. В эти клетки помещают максимально возможные объемы перевозок, каждый раз, исключая и рассмотрения соответствующие столбцы или строки. Затем распределяют перевозки по клеткам с единичной отметкой. Остальные перевозки распределяют по наименьшей стоимости.

Пример

10	20	10	
2**	3	4	15
11	6*	10	1
8	9	3*	3
4	1*	2*	21

1. Заполняем клетки с двойным предпочтением:

10	20	10	
10			15
0			1
0			3
0			21

2. Заполняем клетки с простым предпочтением, начиная с наименьшей стоимости.

10	20	10	
10	0		15
0	0		1
0	0	3	3
0	20	1	21

3. Заполняем оставшиеся пустыми клетки.

10	20	10	
10	0	5	15
0	0	1	1
0	0	3	3
0	20	1	21

Это опорный план, составленный методом двойного предпочтения.

Упражнения

Используя методы северо-западного угла, минимального элемента, двойного предпочтения и аппроксимации Фогеля, найдите опорные планы транспортных задач 4.4-4.8. Сравните результаты между собой.

4.4.

Пункты	Пункты назначения	Запасы
--------	-------------------	--------

отправления	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	
A ₁	4	5	2	8	6	115
A ₂	3	1	9	7	3	175
A ₃	9	6	7	2	1	130
Потребности	70	220	40	30	60	

4.5.	Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
	A ₁	4	5	3	7	280
	A ₂	7	6	2	9	175
	A ₃	1	3	9	8	125
	A ₄	2	4	5	6	130
	Потребности	90	180	310	130	
4.6.	Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
	A ₁	1	4	7	3	510
	A ₂	5	6	8	9	90
	A ₃	7	2	4	8	120
	Потребности	270	140	200	110	

4.7. На трех складах оптовой базы сосредоточен однородный груз в количествах 180,60 и 80 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина. Каждый из магазинов должен получить соответственно 120,40,60 и 80 ед.груза. Тарифы перевозок единицы груза из каждого из складов во все магазины задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

4.8. Производственное объединение имеет в своем составе три филиала, которые производят однородную продукцию соответственно в количествах, равных 50,30 и 10 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя, расположенные в разных местах. Их потребности соответственно равны 30,30,10 и 20 ед.Тарифы перевозок единицы продукции от каждого из филиалов соответствующим потребителям задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Составить такой план прикрепления получателей продукции к ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

4.6. Метод потенциалов

Метод позволяет находить оптимальный план перевозок транспортной таблицы. В основе лежит следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы некоторый план $X=[x_{ij}]_{m \times n}$ транспортной задачи был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы ему соответствовала такая система $m+n$ чисел $u_1, u_2, \dots, u_m; v_1, v_2, \dots, v_n$, для которой выполняются условия:

$$v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$v_j - u_i = c_{ij}, \quad \forall x_{ij} > 0. \quad (2)$$

u_i и v_j называются потенциалами соответствующих пунктов отправления и пунктов назначения. Условия (1)-(2) называются условиями потенциальности.

План X будем называть потенциальным, если для него существует система u_i и v_j , удовлетворяющая (1)-(2). Тогда теорем коротко формулируется следующим образом.

Теорема. Для оптимальности транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы он был оптимальным.

Достаточность. Пусть план X потенциален, так что существует система u_i и v_j , удовлетворяющая (1)-(2). Тогда для любого допустимого плана $X'=[x'_{ij}]_{m \times n}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_{ij} &\geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (v_j - u_i) x'_{ij} = \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^m x'_{ij} - \sum_{i=1}^m u_i \sum_{j=1}^n x'_{ij} = \sum_{j=1}^n v_j b_j - \sum_{i=1}^m u_i a_i = \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^m x_{ij} - \\ &- \sum_{i=1}^m u_i \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m v_j x_{ij} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (v_j - u_i) x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}, \end{aligned}$$

т.е. стоимость перевозок по любому плану X' не меньше стоимости перевозок по потенциальному плану X . Следовательно, план X оптимален.

Необходимость. Будем рассматривать транспортную задачу, как задачу линейного программирования с минимизацией линейной формы:

$$Q(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$$

при соответствующих ограничениях. Заполним симплексную таблицу и рассмотрим двойственную к ней задачу, что легко получить из таблицы. Прямую таблицу будем заполнять, повернув.

	$0=-u_1$	...	$0=-u_i$	...	$0=-u_m$	$0=-v_1$	...	$0=-v_j$	...	$0=-v_n$	$Q=1$
$x_{1l} y_{1l} =$	-1	...	0	...	0	1	...	0	...	0	c_{1l}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_{1n} y_{1n} =$	-1	...	0	...	0	0	...	0	...	1	c_{1n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_{il} y_{il} =$	0	...	-1	...	0	1	...	0	...	0	c_{il}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_{ij} y_{ij} =$	0	...	-1	...	0	0	...	1	...	0	c_{ij}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_{in} y_{in} =$	0	...	-1	...	0	0	...	0	...	1	c_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_{m1} y_{m1} =$	0	...	0	...	-1	1	...	0	...	0	C_{m1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_{mn} y_{mn} =$	0	...	0	...	-1	0	...	0	...	1	C_{mn}
$1 \quad w =$	a_1	...	a_i	...	a_n	b_1	...	b_j	...	b_n	0

Получаем, что двойственная задача имеет вид:

$$w = \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$y_{ij} = u_i - v_j + c_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \text{ т.е. } v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Пусть $X=[x_{ij}]_{m \times n}$ – оптимальное решение транспортной задачи. Тогда на основании теоремы двойственности двойственная задача имеет оптимальное решение

$$u_1^*, \dots, u_m^*; v_1^*, \dots, v_n^*.$$

Убедимся, что эти числа являются потенциалами соответствующих пунктов транспортной задачи. Действительно, все u_i^*, v_j^* как опорное решение двойственной задачи удовлетворяют неравенствам (1).

Если $x_{ij} > 0$, то по второй теореме двойственности соответствующее ограничение

$$y_{ij}^* = u_i^* - v_j^* + c_{ij} \geq 0$$

двойственной задачи обращается в строгое равенство

$$v_j^* - u_i^* = c_{ij}.$$

Алгоритм метода потенциалов

Алгоритм метода потенциалов состоит из предварительного этапа и повторяющегося основного этапа.

Предварительный этап.

1. Каким-либо способом ищется допустимый план X (методом северо-западного угла или минимального элемента).
2. Для полученного плана строится система $m+n$ чисел $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$, таких, что $v_j - u_i = c_{ij}, \forall x_{ij} > 0$.
3. Построенная система u_i и v_j исследуется на потенциальность (то есть план X исследуется на оптимальность). Для этого проверяется $v_j - u_i \leq c_{ij}, \forall x_{ij} = 0$.

Если система непотенциальна, то переходят к основному этапу (т.к. план не оптимален), иначе оптимальный план найден.

Основной этап.

1. Улучшаем план, то есть от плана X переходим к плану X' такому, что $Q(X) \geq Q(X')$.
2. Для плана X' строим новую систему $u'_i, v'_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, такую, что $v'_j - u'_i = c_{ij}, \forall x_{ij} > 0$.
3. Исследуем систему u'_i, v'_j на потенциальность. Если система непотенциальна, то переходим на п.1. Иначе найден оптимальный план. Найдем методом потенциалов оптимальное решение задачи, взяв в качестве опорного план, построенный методом северо-западного угла (1-й шаг предварительного этапа).

v_j u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	2 30	4 80	2 10	3	8
u_2	3	5	6 10	-6 20	+2
u_3	6	8	7	+4 10	-5 30
u_4	3	4	2	1	4 60

2. Строим систему потенциалов:

$$\begin{aligned}
 v_1 - u_1 &= 2, & v_2 - u_1 &= 4, & v_3 - u_1 &= 2, \\
 v_3 - u_2 &= 6, & v_4 - u_2 &= 6, & v_4 - u_3 &= 4, \\
 v_5 - u_3 &= 5, & v_5 - u_4 &= 4.
 \end{aligned}$$

Число неизвестных больше числа уравнений, поэтому можем взять, например, $u_1 = 0$ и найти значения остальных потенциалов, $u_2 = -4$, $u_3 = -2$, $u_4 = -1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 4$, $v_3 = 2$, $v_4 = 2$, $v_5 = 3$.

3. Проверяем систему на потенциальность:

$$\begin{aligned} v_1 - u_2 &= 6 \not\leq 3, & v_1 - u_3 &= 4 \leq 6, & v_1 - u_4 &= 3 \leq 3, \\ v_2 - u_2 &= 8 \not\leq 5, & v_2 - u_3 &= 6 \leq 8, & v_2 - u_4 &= 5 \not\leq 4, \\ v_3 - u_3 &= 4 \leq 7, & v_3 - u_4 &= 3 \not\leq 2, & v_4 - u_1 &= 2 \leq 3, \\ v_4 - u_4 &= 3 \not\leq 1, & v_5 - u_1 &= 3 \leq 8, & v_5 - u_2 &= 7 \not\leq 2, \end{aligned}$$

Система непотенциальна.

Переходим к общему этапу.

1. Выбираем клетку, для которой неравенство вида $v_j - u_i \leq c_{ij}$ нарушается в наибольшей степени, то есть, находится число

$$\alpha_{i_0 j_0} = \max_{i,j} \{ \alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} > 0 \}$$

среди тех клеток, для которых условие (1) не выполняется: $\alpha_{i_0 j_0} = \alpha_{25} = 5$.

Начиная с клетки $i_0 j_0$ в направлении против часовой стрелки строится цепь из заполненных клеток таблицы (цикл). Совершая обход по цепи, помечаем клетки, начиная с $i_0 j_0$, попеременно знаками + и -. Клетки со знаками + образуют положительную полуцепь, а со знаками - отрицательную полуцепь. В клетках отрицательной полуцепи ищем минимальную перевозку $\theta = \min \{ x_{ij}^- \}$.

Теперь улучшаем план следующим образом: перевозки отрицательной полуцепи уменьшаем на величину θ , а перевозки положительной полуцепи увеличиваем на θ . Новые

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij}^- - \theta, \\ x_{ij}^+ + \theta, \\ x_{ij}. \end{cases}$$

В нашем примере $\theta = \min \{ x_{ij}^- \} = 20$.

1. Новому плану соответствует таблица.

v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_i					
u_1	2 30	4 80	2 10	3	8
u_2	3	5	-6 10	6 0	+2 20
u_3	6	8	7	4 30	5 10
u_4	3	4	+2	1	-4 60

Затраты на перевозку по построенному плану равны:

$$Q = 30 \times 2 + 4 \times 80 + 2 \times 10 + 6 \times 10 + 4 \times 30 + 2 \times 20 + 5 \times 10 + 4 \times 60 = 910.$$

2. Строим систему потенциалов

$$\begin{aligned} v_1 - u_1 &= 2, & v_2 - u_1 &= 4, & v_3 - u_1 &= 2, \\ v_3 - u_2 &= 6, & v_5 - u_2 &= 2, & v_4 - u_3 &= 4, \\ v_5 - u_3 &= 5, & v_5 - u_4 &= 4. \end{aligned}$$

Полагаем $u_1 = 0$ и находим значения остальных потенциалов:
 $u_2 = -4, u_3 = -7, u_4 = -6, v_1 = 2, v_2 = 4, v_3 = 2, v_4 = -3, v_5 = -2.$

3. Проверяем систему на потенциальность:

$$\begin{aligned} v_1 - u_2 &= 6 \not\leq 3, & v_1 - u_3 &= 9 \not\leq 6, & v_1 - u_4 &= 8 \not\leq 3, \\ v_2 - u_2 &= 8 \not\leq 5, & v_2 - u_3 &= 11 \not\leq 8, & v_2 - u_4 &= 10 \not\leq 4, \\ v_3 - u_3 &= 9 \not\leq 7, & v_3 - u_4 &= 8 \not\leq 2, & v_4 - u_1 &= -3 \leq 3, \\ v_4 - u_4 &= 3 \not\leq 1, & v_5 - u_1 &= -2 \leq 8, & v_4 - u_2 &= 1 \leq 6, \end{aligned}$$

Система непотенциальна.

1. Находим $\alpha_{i_0 j_0} = \alpha_{43} = 6$, строим цикл, $\theta = \min\{x_{ij}^-\} = 10$. Улучшаем план.

Новому плану соответствует таблица.

v_j u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	2 30	4 80	2 10	3	8
u_2	3	5	6 0	6 0	2 30
u_3	6	8	7	-4 30	+5 10
u_4	3	4	2 10	+1	-4 50

Затраты на перевозку по построенному плану равны:

$$Q = 30 \times 2 + 4 \times 80 + 2 \times 10 + 2 \times 10 + 4 \times 30 + 2 \times 30 + 5 \times 10 + 4 \times 50 = 850.$$

2. Строим систему потенциалов

$$\begin{aligned} v_1 - u_1 &= 2, & v_2 - u_1 &= 4, & v_3 - u_1 &= 2, \\ v_3 - u_4 &= 2, & v_5 - u_2 &= 2, & v_4 - u_3 &= 4, \\ v_5 - u_3 &= 5, & v_5 - u_4 &= 4. \end{aligned}$$

Полагаем $u_1 = 0$ и находим значения остальных потенциалов:
 $u_2 = 2, u_3 = -1, u_4 = 0, v_1 = 2, v_2 = 4, v_3 = 2, v_4 = 3, v_5 = 4$.

3. Проверяем систему на потенциальность:

$$\begin{aligned} v_1 - u_2 &= 0 \leq 3, & v_1 - u_3 &= 3 \leq 6, & v_1 - u_4 &= 2 \leq 3, \\ v_2 - u_2 &= 2 \leq 5, & v_2 - u_3 &= 5 \leq 8, & v_2 - u_4 &= 4 \leq 4, \\ v_3 - u_3 &= 3 \leq 7, & v_3 - u_2 &= 0 \leq 6, & v_4 - u_1 &= 3 \leq 3, \\ v_4 - u_4 &= 3 \not\leq 1, & v_5 - u_1 &= 4 \leq 8, & v_4 - u_2 &= 1 \leq 6, \end{aligned}$$

Система непотенциальна.

1. Находим $\alpha_{i_0 j_0} = \alpha_{44} = 2$, строим цикл, $\theta = \min\{x_{ij}^-\} = 30$. Улучшаем план.

Новому плану соответствует таблица.

v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_i					
u_1	2 30	4 80	2 10	3	8
u_2	3	5	6	6	2 30
u_3	6	8	7	4	5 40
u_4	3	4	2 10	1 30	4 20

Затраты на перевозку по построенному плану равны:

$$Q = 30 \times 2 + 4 \times 80 + 2 \times 10 + 2 \times 10 + 1 \times 30 + 2 \times 30 + 5 \times 40 + 4 \times 20 = 790.$$

2. Строим систему потенциалов

$$\begin{aligned} v_1 - u_1 &= 2, & v_2 - u_1 &= 4, & v_3 - u_1 &= 2, \\ v_3 - u_4 &= 2, & v_5 - u_2 &= 2, & v_4 - u_4 &= 1, \\ v_5 - u_3 &= 5, & v_5 - u_4 &= 4. \end{aligned}$$

Полагаем $u_1 = 0$ и находим значения остальных потенциалов:
 $u_2 = 2, u_3 = -1, u_4 = 0, v_1 = 2, v_2 = 4, v_3 = 2, v_4 = 1, v_5 = 4$.

3. Проверяем систему на потенциальность:

$$\begin{aligned} v_1 - u_2 &= 0 \leq 3, & v_1 - u_3 &= 3 \leq 6, & v_1 - u_4 &= 2 \leq 3, \\ v_2 - u_2 &= 2 \leq 5, & v_2 - u_3 &= 5 \leq 8, & v_2 - u_4 &= 4 \leq 4, \\ v_3 - u_3 &= 3 \leq 7, & v_3 - u_2 &= 0 \leq 6, & v_4 - u_1 &= 1 \leq 3, \\ v_4 - u_4 &= 1 \leq 1, & v_5 - u_1 &= 4 \leq 8, & v_4 - u_2 &= -1 \leq 6, \end{aligned}$$

Система *потенциальна*, следовательно, план *оптимален* и окончательные затраты $Q_{\min} = 790$.

Определение 4. Допустимый опорный план транспортной задачи называется невырожденным, если число заполненных клеток

транспортной таблицы, т.е. число положительных перевозок $x_{ij} > 0$, равно $m + n + 1$, где m – число пунктов отправления, n – число пунктов назначения.

Определение 5. Если допустимый опорный план содержит менее $m + n + 1$ элементов $x_{ij} > 0$, то он называется вырожденным, а транспортная задача называется вырожденной транспортной задачей.

Следующая теорема позволяет определить вырожденность задачи до ее решения.

Теорема. Для невырожденной транспортной задачи необходимо и достаточно отсутствие такой неполной группы пунктов производства, суммарный объем производства которой точно совпадает с суммарными потребностями некоторой группы пунктов потребления.

Другими словами, это условие означает, что для любых двух систем индексов $i_1, i_2, \dots, i_t, j_1, j_2, \dots, j_S$, где $t + S < n + m$, имеет место неравенство $\sum_{k=1}^t a_{i_k} \neq \sum_{k=1}^S b_{j_k}$. (Доказательство не сложно, от противного.)

Для решения транспортной задачи методом потенциалов строится система потенциалов $v_j - u_i = c_{ij}$, $\forall x_{ij} > 0$. Если опорное решение невырожденно, то число неизвестных на 1 больше числа уравнений. При вырожденном опорном решении число этих уравнений еще меньше. По аналогии симплекс-методом, в невырожденном решении $x_{ij} > 0$ представляют собой базисные переменные, а $x_{ij} = 0$ – небазисные. Если опорное решение вырожденно, то часть базисных переменных принимает нулевые значения.

Пусть первое опорное решение, найденное методом северо-западного угла или методом минимального элемента, является вырожденным. Тогда, чтобы решать задачу методом потенциалов необходимо выбрать в качестве базисных переменных некоторые перевозки $x_{ij} = 0$ и для них также составить уравнения $v_j - u_i = c_{ij}$ по условию (2) теоремы. Какие перевозки вида $x_{ij} = 0$ включать в базисные? Выбираются такие клетки таблицы с $x_{ij} = 0$, чтобы из базисных переменных нельзя было организовать ни одного цикла!

При переходе к новому улучшенному плану задачи в небазисные переменные переводится перевозка в отрицательной полуцепи, которая находится следующим образом $\theta = \min\{x_{ij}^-\}$. В вырожденной задаче это значение может достигаться на нескольких перевозках x_{ij} отрицательной полуцепи. В этом случае на каждом шаге в небазисные переменные переводится та минимальная перевозка отрицательной полуцепи, которая

связана с пунктом производства, имеющим меньший номер. Это правило уменьшает вероятность возникновения закливания, что само по себе достаточно редкое явление в практических задачах.

Упражнения

Решить следующие транспортные задачи методом потенциалов.

1.	<table><tr><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td>9</td><td>200</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td><td>8</td><td>12</td><td>270</td></tr><tr><td>11</td><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>130</td></tr><tr><td colspan="4"> </td><td></td></tr><tr><td>122</td><td>82</td><td>242</td><td>154</td><td></td></tr></table>	2	4	7	9	200	5	1	8	12	270	11	6	4	3	130						122	82	242	154		6.	<table><tr><td>7</td><td>8</td><td>1</td><td>2</td><td>140</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>9</td><td>8</td><td>140</td></tr><tr><td>9</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>170</td></tr><tr><td colspan="4"> </td><td></td></tr><tr><td>122</td><td>52</td><td>192</td><td>164</td><td></td></tr></table>	7	8	1	2	140	4	5	9	8	140	9	2	3	6	170						122	52	192	164											
2	4	7	9	200																																																											
5	1	8	12	270																																																											
11	6	4	3	130																																																											
122	82	242	154																																																												
7	8	1	2	140																																																											
4	5	9	8	140																																																											
9	2	3	6	170																																																											
122	52	192	164																																																												
2.	<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>90</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>60</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>150</td></tr><tr><td colspan="4"> </td><td></td></tr><tr><td>122</td><td>42</td><td>42</td><td>74</td><td></td></tr></table>	2	3	4	3	90	5	3	1	2	60	2	1	4	2	150						122	42	42	74		7.	<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>4</td><td>140</td></tr><tr><td>8</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>180</td></tr><tr><td>9</td><td>7</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>140</td></tr><tr><td colspan="5"> </td><td></td></tr><tr><td>42</td><td>72</td><td>122</td><td>132</td><td>92</td><td></td></tr></table>	2	3	4	2	4	140	8	4	1	4	1	180	9	7	1	5	3	140							42	72	122	132	92						
2	3	4	3	90																																																											
5	3	1	2	60																																																											
2	1	4	2	150																																																											
122	42	42	74																																																												
2	3	4	2	4	140																																																										
8	4	1	4	1	180																																																										
9	7	1	5	3	140																																																										
42	72	122	132	92																																																											
3.	<table><tr><td>18</td><td>2</td><td>3</td><td>12</td><td>180</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>8</td><td>7</td><td>160</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>12</td><td>140</td></tr><tr><td>7</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>120</td></tr><tr><td colspan="4"> </td><td></td></tr><tr><td>152</td><td>152</td><td>122</td><td>174</td><td></td></tr></table>	18	2	3	12	180	3	4	8	7	160	4	5	6	12	140	7	1	3	4	120						152	152	122	174		8.	<table><tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>8</td><td>6</td><td>115</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>9</td><td>7</td><td>3</td><td>175</td></tr><tr><td>9</td><td>6</td><td>7</td><td>2</td><td>1</td><td>130</td></tr><tr><td colspan="5"> </td><td></td></tr><tr><td>72</td><td>212</td><td>42</td><td>32</td><td>42</td><td></td></tr></table>	4	5	2	8	6	115	3	1	9	7	3	175	9	6	7	2	1	130							72	212	42	32	42	
18	2	3	12	180																																																											
3	4	8	7	160																																																											
4	5	6	12	140																																																											
7	1	3	4	120																																																											
152	152	122	174																																																												
4	5	2	8	6	115																																																										
3	1	9	7	3	175																																																										
9	6	7	2	1	130																																																										
72	212	42	32	42																																																											
4.	<table><tr><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>7</td><td>280</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>2</td><td>9</td><td>175</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>9</td><td>8</td><td>125</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>130</td></tr><tr><td colspan="4"> </td><td></td></tr><tr><td>92</td><td>182</td><td>364</td><td>132</td><td></td></tr></table>	4	5	3	7	280	7	6	2	9	175	1	3	9	8	125	2	4	5	6	130						92	182	364	132		9.	<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>3</td><td>210</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>9</td><td>90</td></tr><tr><td>7</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>120</td></tr><tr><td colspan="4"> </td><td></td></tr><tr><td>270</td><td>140</td><td>200</td><td>110</td><td></td></tr></table>	1	4	7	3	210	5	6	8	9	90	7	2	4	8	120						270	140	200	110						
4	5	3	7	280																																																											
7	6	2	9	175																																																											
1	3	9	8	125																																																											
2	4	5	6	130																																																											
92	182	364	132																																																												
1	4	7	3	210																																																											
5	6	8	9	90																																																											
7	2	4	8	120																																																											
270	140	200	110																																																												
5.	<table><tr><td>7</td><td>12</td><td>4</td><td>6</td><td>5</td><td>180</td></tr><tr><td>1</td><td>8</td><td>6</td><td>5</td><td>3</td><td>250</td></tr><tr><td>4</td><td>13</td><td>8</td><td>7</td><td>4</td><td>120</td></tr><tr><td colspan="5"> </td><td></td></tr><tr><td>112</td><td>92</td><td>122</td><td>82</td><td>142</td><td></td></tr></table>	7	12	4	6	5	180	1	8	6	5	3	250	4	13	8	7	4	120							112	92	122	82	142		10.	<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>50</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>30</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>50</td></tr><tr><td colspan="4"> </td><td></td></tr><tr><td>28</td><td>28</td><td>16</td><td>18</td><td></td></tr></table>	1	2	4	1	50	2	3	1	5	30	3	2	4	4	50						28	28	16	18						
7	12	4	6	5	180																																																										
1	8	6	5	3	250																																																										
4	13	8	7	4	120																																																										
112	92	122	82	142																																																											
1	2	4	1	50																																																											
2	3	1	5	30																																																											
3	2	4	4	50																																																											
28	28	16	18																																																												

Тестовые задания

1. Транспортная задача является задачей:

- A) двойственной задачей;
- B) линейного программирования;
- C) выпуклого программирования;
- D) теории матричных игр.

2. В данной транспортной задаче первоначальное базисное распределение поставок найти методом "северо-западного" угла и вычислить суммарные затраты:

	40	100	30	110
70	1	2	5	3
110	5	6	1	2
100	6	3	7	4

A) $F=907$; B) $F=970$; C) $F=900$; D) $F=790$.

3. Открытая модель транспортной задачи решается:

- A) симплексным методом;
- B) сведением ее к закрытой транспортной задаче;
- C) методом потенциалов;
- D) интегрированным методом.

4. Число, прибавляемое к коэффициентам затрат выделенной строки (столбца) таблицы поставок, называется:

- A) оценкой свободной клетки;
- B) оценкой цикла;
- C) потенциалом;
- D) связным числом.

5. Поставка, передаваемая по циклу, не может быть...

- A) ни меньше, ни больше максимума поставок клеток цикла со знаком "+-";
- B) ни меньше, ни больше максимума поставок клеток цикла со знаком "-";
- C) ни меньше, ни больше минимума поставок клеток цикла со знаком "-";
- D) ни меньше, ни больше минимума поставок клеток цикла со знаком "+".

6. Модификация симплексного метода применительно к транспортной задаче называется:

- A) методом наименьших затрат;
- B) методом северо-западного угла;
- C) методом ветвей и границ;
- D) распределительным методом.

7. В закрытой транспортной задаче число основных (базисных) переменных равно:

- A) $m+n-1$;
- B) $m-n+1$;
- C) $m*n-1$;

D) $m \cdot n + 2$;

8. В данной транспортной задаче первоначальное базисное распределение поставок найти методом "северо-западного" угла и вычислить суммарные затраты:

	20	110	40	110
60	1	2	5	3
120	1	6	5	2
100	6	3	7	4

A) $F=1140$;

B) $F=1040$;

C) $F=907$;

D) $F=970$.

9. Укажите формулировку теоремы о потенциалах:

A) каждая конечная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий;

B) Оценка свободной клетки не изменится, если к коэффициентам затрат некоторой строки (столбца) таблицы поставок прибавить некоторое число;

C) если область D замкнута и ограничена, то дифференцируемая функция $z=f(X)$ достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений или в стационарной точке, или в граничной точке области;

D) Если в точке X^* функция $z=f(X)$ имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны нулю: $f'_{x_i}(X^*) = 0, i = 1, 2, \dots, n$

10. В данной транспортной задаче первоначальное базисное распределение поставок найти методом наименьших затрат и вычислить суммарные затраты:

	40	100	30	110
70	1	2	5	3
110	5	6	1	2
100	6	3	7	4

A) $F=602$;

B) $F=622$;

C) $F=620$;

D) $F=600$.

11. Транспортная задача называется закрытой, если:

A)
$$\sum_{i=1}^m N_i = \sum_{j=1}^n M_j$$

B)
$$\sum_{i=1}^m M_i = \sum_{j=1}^n N_j$$

C)
$$\sum_{j=1}^m M_j = \sum_{i=1}^n N_i$$

D)
$$\sum_{i=0}^m M_i = \sum_{j=0}^n N_j$$

12. Транспортная задача называется открытой:

A) если суммарная мощность поставщиков не равна суммарной мощности потребителей;

B) если суммарная мощность поставщиков равно суммарной мощности потребителей;

C) если суммарная мощность поставщиков равно удвоенной суммарной мощности потребителей;

D) если суммарная мощность потребителей равно удвоенной суммарной мощности поставщиков.

13. Распределительный метод – это:

A) модификация симплексного метода применительно к транспортной задаче;

B) модификация симплексного метода применительно к двойственной задаче;

C) метод решения задачи целочисленного программирования;

D) метод наискорейшего спуска.

14. Распределение поставок называется базисным:

A) если переменные, соответствующие заполненным клеткам, можно принять за основные переменные;

B) если переменные, соответствующие пустым клеткам, можно принять за основные переменные;

C) если переменные, соответствующие заполненным клеткам, можно принять за неосновные переменные;

D) если переменные, соответствующие пустым клеткам, можно принять за неосновные переменные.

15. Оценка цикла – это:

A) алгебраическая сумма коэффициентов, стоящих в вершинах цикла, взятых с соответствующими знаками;

B) алгебраическая сумма коэффициентов, стоящих не в вершинах цикла, взятых с соответствующими знаками;

C) алгебраическое произведение коэффициентов, стоящих в вершинах цикла, взятых с соответствующими знаками;

D) алгебраическое произведение коэффициентов, стоящих не в вершинах цикла, взятых с соответствующими знаками.

Глава 5. Элементы теории игр

5.1. Понятие об игровых моделях

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых необходимо принимать решения в условиях неопределенности, т.е. возникают ситуации, в которых две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера. Такие ситуации относятся к конфликтным: результат каждого хода игрока зависит от ответного хода противника.

Цель игры – выигрыш одного из партнеров. Для грамотного решения задач с конфликтными ситуациями необходимы научно обоснованные методы. Такие методы разработаны математической теорией конфликтных ситуаций, которая носит название *теория игр*.

Основные понятия теории игр. Математическая модель конфликтной ситуации называется *игрой*, стороны, участвующие в конфликте, - *игроками*, а исход конфликта – *выигрышем*.

Для каждой формализованной игры вводятся **правила**, т.е. система условий, определяющая:

- 1) варианты действий игроков;
- 2) объем информации каждого игрока о поведении партнеров;
- 3) выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий.

Игра называется парной, если в ней участвуют два игрока, и множественной, если число игроков больше двух. Игра называется игрой с нулевой суммой, или антагонистической, если выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, т.е. для полного задания игры достаточно указать величину одного из них.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется ходом игрока. Ходы могут быть личными и случайными. Личный ход – это сознательный выбор игроком одного из возможных действий. Случайный ход – это случайно выбранное действие.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Игра называется конечной, если у каждого игрока имеется конечное число стратегий, и бесконечной – в противном случае. Для того, чтобы решить игру или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию оптимальности, т.е. один из игроков должен получать максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей стратегий. В то же второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый придерживается своей стратегий. Такие стратегии называются оптимальными. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять условию устойчивости, т.е. любому из игроков должно__ невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Целью теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока.

Платежная матрица. Нижняя и верхняя цены игры

Итак, пусть имеется два игрока. Пусть игрок А располагает m личными стратегиями, которые обозначим $A_1, A_2, \dots, A_m$; в распоряжении второго игрока имеется n личных стратегий, обозначим их $B_1, B_2, \dots, B_n$. Игра имеет размерность $m \times n$. В результате выбора любой пары стратегий A_i и B_j ($i=1,2,3,\dots,m; j=1,2,3,\dots,n$) однозначно определяется исход игры, т.е. выигрыш игрока А (положительный или отрицательный) и проигрыш игрока В. Матрица $P = (a_{ij})$, $i=1,2,3,\dots,m; j=1,2,3,\dots,n$, элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям A_i и B_j , называется платежной матрицей или матрицей игры.

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Составим платежную матрицу для следующей игры.

Игра «поиск». Игрок А может спрятаться в одном из двух убежищ (I и II); игрок В ищет игрока А, и если найдет, то получает штраф 1 ден.ед. от А, в противном случае платит игроку А 1 ден.ед. необходимо построить платежную матрицу игры.

Решение. Игрок А может спрятаться в убежище I – обозначим через A_1 или в убежище II – стратегия A_2 . Игрок В может искать первого игрока в убежище I – стратегия B_1 , либо в убежище II – стратегия B_2 . Если игрок А находится в убежище I и там его обнаруживает игрок В, т.е. осуществляется пара стратегий (A_1, B_1) , то игрок А платит штраф, т.е. $a_{11} = -1$. Аналогично получаем $a_{22} = -1$. Очевидно, что стратегии (A_1, B_2) и (A_2, B_1) дают игроку А выигрыш 1, поэтому $a_{12} = a_{21} = 1$.

$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ - платежная матрица игры «поиск» размера 2×2 .

Рассмотрим игру $m \times n$ с матрицей $P = (a_{ij})$ ($i=1,2,3,\dots,m; j=1,2,3,\dots,n$) и определим наилучшую среди стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$. Выбирая стратегию A_i игрок А должен рассчитывать, что игрок В ответит на нее той из стратегий B_j для которой выигрыш для игрока А минимален. Обозначим через α_i наименьший выигрыш игрока А при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий выбора В (наименьшее число в i -ой строке платежной матрицы), т.е.

$$\min_{j=1,\dots,n} a_{ij} = \alpha_i \quad (5.1)$$

Среди всех чисел α_i ($i=1,2,3,\dots,m$) выберем наибольшее: $\alpha = \max_{i=1,\dots,m} \alpha_i$.

Назовем α нижней ценой игры, или максимальным выигрышем (максимином).

Это гарантированный выигрыш игрока А при любой стратегии игрока В. Следовательно,

$$\alpha = \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} a_{ij} \quad (5.2).$$

Стратегия, соответствующая максимину, называется *максиминной* стратегией. Игрок В заинтересован в том, чтобы уменьшить выигрыш игрока А; выбирая стратегию B_j , он учитывает максимально возможный при этом выигрыш для А. обозначим

$$\beta_j = \max_{i=1,\dots,m} a_{ij} \quad (5.3)$$

Среди всех чисел β_j выберем наименьшее $\beta = \min_{j=1,\dots,n} \beta_j$ и назовем β верхней

ценой игры или минимаксным выигрышем (минимаксом). Это гарантированный проигрыш игрока В. Следовательно,

$$\beta = \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij}. \quad (5.4)$$

стратегия, соответствующая минимаксу, называется *минимаксной* стратегией. Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» минимаксной и максиминной стратегий, называется принципом минимакса. Этот принцип следует из разумного предположения, что каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели противника.

	B_1	B_2	α_i
A_1	-1	1	-1
A_2	1	-1	-1
β_j	1	1	$\alpha = -1$ $\beta = 1$

$$\alpha_1 = \min(-1;1) = -1, \alpha_2 = \min(1;-1) = -1, \alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2) = \max(-1;-1) = -1$$

$$\beta_1 = \max(-1;1) = 1, \beta_2 = \max(1;-1) = 1, \beta = \min(\beta_1, \beta_2) = \min(1;1) = 1$$

Если верхняя и нижняя цены игры совпадают, то общее значение верхней и нижней цен игры $\alpha = \beta = v$ называется чистой ценой игры или

ценой игры. Минимаксные стратегии, соответствующие цене игры, являются оптимальными стратегиями, а их совокупность – оптимальным решением, или решением игры.

В этом случае игрок А получает максимальный гарантированный выигрыш ν , а игрок В добивается минимального гарантированного проигрыша ν . Говорят, что решение игры обладает устойчивостью, т.е. если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии. Пара чистых стратегий A_i и B_j дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент α_i является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке. Такая ситуация, если она существует, называется седловой точкой.

5.2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры, заданной платежной матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,8 \\ 0,9 & 0,7 & 0,8 \\ 0,7 & 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}. \text{ Имеет ли игра седловую точку?}$$

Решение:

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,5	0,6	0,8	0,5
A_2	0,9	0,7	0,8	0,7
A_3	0,7	0,6	0,6	0,6
β_j	0,9	0,7	0,8	$\alpha = 0,7$ $\beta = 0,7$

$\alpha = \beta = 0,7$, следовательно, игра имеет седловую точку (A_2, B_2) и цена игры $\nu = 0,7$.

Решение игры в смешанных стратегиях

Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. Смешанной стратегией S_A игрока А называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$ с вероятностью $p_1, p_2, \dots, p_m$, причем сумма вероятностей равна 1: $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.

Смешанные стратегии игрока А записываются в виде матрицы:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_m \end{pmatrix}, \text{ или в виде строки } S_A = (p_1, \dots, p_m).$$

Аналогично, смешанные стратегии игрока В обозначаются:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_n \end{pmatrix}, \text{ или } S_B = (q_1, \dots, q_n), \text{ где сумма вероятностей}$$

появления стратегий равна 1: $\sum_{j=1}^n q_j = 1$. Чистые стратегии можно считать частным случаем смешанных и задавать строкой, в которой 1 соответствует чистой стратегии. На основании принципа определяется оптимальное решение (или решение) игры: это пара оптимальных стратегий S_A^*, S_B^* в общем случае смешанных, обладающих следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступать от своей. Выигрыш, соответствующий оптимальному решению, называется ценой игры v . Цена игры удовлетворяет неравенству $\alpha \leq v \leq \beta$ (5.5), α и β - нижняя и верхняя цены игры.

Справедлива следующая основная теорема теории игр – **теорема Неймана**. *Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий.*

Пусть $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$ и $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ - пара оптимальных стратегий. Если чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, то она называется активной. Справедлива теорема об активных стратегиях: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то выигрыш останется неизменным и равным цене игры v , если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

Рассмотрим игру размера 2×2 , которая является простейшим случаем конечной игры. Если такая игра имеет седловую, то оптимальное решение – это пара чистых стратегий, соответствующих этой точке.

Игра, в которой отсутствует седловая точка, в соответствии с основной теоремой теории игр, оптимальное решение существует и определяется пара смешанных стратегий $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$ и $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$.

Пусть игра задана платежной матрицей $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Средний выигрыш игрока А, если он использует оптимальную смешанную стратегию $P = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix}$, а игрок В – чистую стратегию B_1 (это соответствует первому столбцу платежной матрицы Р), равен цене игры v : $a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* = v$.

Тот же средний выигрыш получает игрок А, если второй игрок применяет стратегию B_2 , т.е. $a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* = v$. Учитывая, что $p_1^* + p_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии S_A^* и цены игры v :

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases} \quad (5.6)$$

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad (5.7)$$

$$\text{и цену игры } v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \quad (5.8)$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании S_B^* - оптимальной стратегии игрока В, получаем, что при любой чистой стратегии игрока А, средний проигрыш игрока В равен цене игры, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = v \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = v \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases} \quad (5.9).$$

Тогда оптимальная стратегия $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$ определяется формулами:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \quad (5.10)$$

Пример. Найти оптимальные стратегии игры, приведенной в задаче 5.1.

Решение:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \alpha = -1; \beta = 1$$

$$\begin{cases} (-1) \cdot p_1^* + 1 \cdot p_2^* = v \\ 1 \cdot p_1^* + (-1) \cdot p_2^* = v \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}; \begin{cases} (-1) \cdot q_1^* + 1 \cdot q_2^* = v \\ 1 \cdot q_1^* + (-1) \cdot q_2^* = v \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}; \quad p_1^* = \frac{-1-1}{(-1)+(-1)-1-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$p_2^* = \frac{-1-1}{(-1)+(-1)-1-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$q_1^* = \frac{-1-1}{(-1)+(-1)-1-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$p_1^* = p_2^* = q_1^* = q_2^* = \frac{1}{2}, v = \frac{1-1}{4} = 0.$$

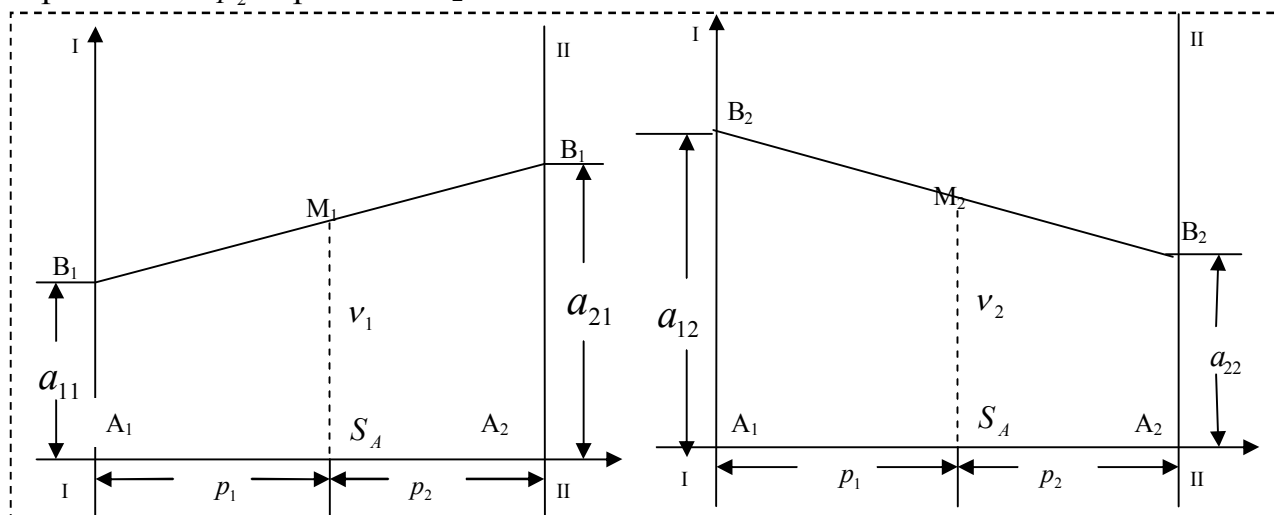
$$q_2^* = \frac{-1-1}{(-1)+(-1)-1-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Это означает, что оптимальная стратегия каждого игрока состоит в том, чтобы чередовать свои чистые стратегии случайным образом, выбирая каждое из убежищ с вероятностью $\frac{1}{2}$, при этом средний выигрыш равен 0.

5.2. Геометрическая интерпретация игры 2x2

В случае, когда число чистых стратегий одного из игроков (скажем, первого) равно двум, возможно геометрическое решение игры, то есть нахождение её цены и смешанных стратегий каждого игрока.

Пусть игра задана платежной матрицей $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ($i=1,2; j=1,2$). По оси абсцисс отложим единичный отрезок A_1A_2 ; точка A_1 ($x=0$) изображает стратегию A_1 , а все промежуточные точки этого отрезка – смешанные стратегии S_A первого игрока, причем расстояние от S_A до первого конца отрезка – это вероятность p_1 стратегии A_1 , расстояние до второго конца – вероятность p_2 стратегии A_2 .

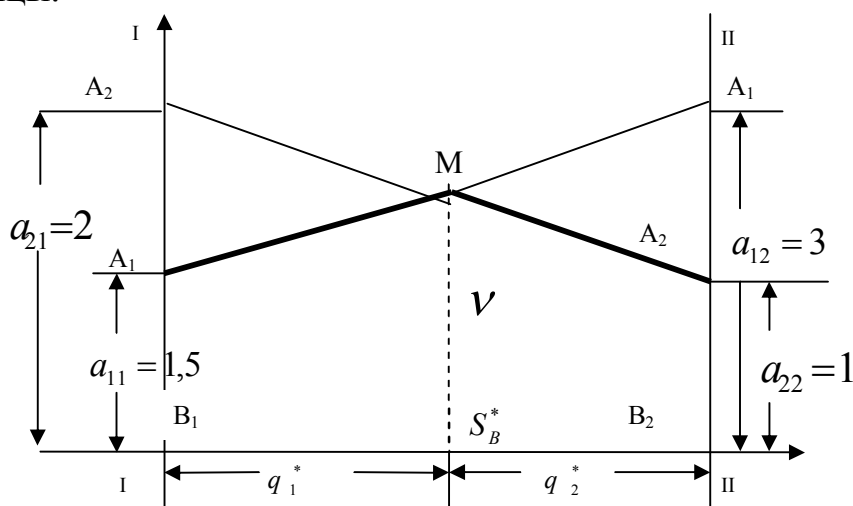


На перпендикулярных осях I-I и II-II откладываем выигрыш при стратегиях A_1 и A_2 соответственно. Если второй игрок примет стратегию B_1 , то она дает выигрыш a_{11} и a_{21} на осях I-I и II-II, соответствующие стратегиям A_1 и A_2 . Обозначим эти точки на I-I и II-II буквой B_1 . Средний выигрыш v_1 , соответствующий смешанной стратегии S_A , определяется по формуле математического ожидания $v_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2$ и равен ординате M_1 , которая лежит на отрезке B_1B_2 и имеет абсциссу S_A (рисунок слева). Аналогично строим отрезок B_2B_2 , соответствующий применению вторым игроком стратегии B_2 (рисунок справа). При этом средний выигрыш $v_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2$ – ордината точки M_2 .

В соответствии с принципом минимакса оптимальная стратегия S_A^* такова, что минимальный выигрыш игрока А (при наихудшем поведении игрока В) обращается в максимум. Ординаты точек, лежащих на ломаной (рис.3), показывают минимальный выигрыш игрока А при использовании им любой смешанной стратегии (на участке B_1N – против стратегии B_1 , на участке $N B_2$ – против стратегии B_2). Оптимальную стратегию $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$ определяет точка N, в которой минимальный выигрыш достигает максимума; ее ордината равна цене игры v .

$$\begin{cases} y = 0.5x + 1.5 \\ y = 2x + 3 \end{cases}, x = 0.6; y = 1.8, \quad \text{т.е.} \quad N(0.6; 1.8). \quad \text{Таким образом}$$
 $p_1^* = 0.6; p_2^* = 1 - 0.6 = 0.4, \quad \text{оптимальная стратегия } S_A^* = (0.6; 0.4), \quad \text{цена игры } v = 1.8.$

Геометрически можно также определить стратегию игрока В, если поменять местами игроков А и В и вместо максимума нижней границы A_2MA_1 в соответствии с принципом минимакса рассмотреть минимум верхней границы.



Координаты точек – $A_1(0; 1.5), A_1(1; 3), A_2(0; 2), A_2(1; 1)$. $A_1A_1: \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1.5}{3-1.5}$
 или $y = 1.5x + 1.5$; $A_2A_2: \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-2}{1-2}$ или $y = -x + 2$. Точка пересечения
 прямых является решением системы:

$$\begin{cases} y = 1.5x + 1.5 \\ y = -x + 2 \end{cases}, x = 0.2; y = 1.8, \quad \text{т.е.} \quad M(0.2; 1.8). \quad \text{Таким образом}$$
 $q_2^* = 0.2; q_1^* = 1 - 0.2 = 0.8, \quad \text{оптимальная стратегия } S_B^* = (0.8; 0.2), \quad \text{цена игры } v = 1.8. \quad \text{Оптимальное решение игры найдено.}$

5.3. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования

Игра $m \times n$ в общем случае не имеет геометрической интерпретации. Решение игры $m \times n$ может быть сведено к решению ЗЛП. Пусть игра $m \times n$ задана платежной матрицей $P = (a_{ij})$ ($i=1, 2, 3, \dots, m; j=1, 2, 3, \dots, n$). Игрок А обладает стратегиями $A_1, A_2, \dots, A_m$, игрок В – стратегиями $B_1, B_2, \dots, B_n$. Необходимо определить оптимальные стратегии $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$ и $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$, где p_i^*, q_j^* – вероятности применения соответствующих стратегий A_i, B_j ; $p_1^* + p_2^* + \dots + p_m^* = 1, q_1^* + q_2^* + \dots + q_n^* = 1$. Оптимальная стратегия S_A^* удовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку А средний выигрыш, не меньший, чем цена игры v , при любой стратегии



(5.11).

$$x_1 = p_1/v, x_2 = p_2/v, \dots, x_m = p_m/v.$$

$$(5.12)$$

$$\int a_{11}x_1 + a_{21}$$

(5.13)

Решая задачу (5.12)-(5.13), получаем оптимальное решение $p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*$ и оптимальную стратегию S_A^* .

Для определения оптимальной стратегии $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ следует учесть, что игрок В стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т.е. найти $\max 1/v$. Переменные $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$ удовлетворяют неравенствам:

[illegible]

которые следуют из того, что средний выигрыш игрока В не превосходит цены игры, какую бы чистую стратегию не применял игрок А.

Если обозначить $y_j = q_j / v, j = 1, 2, \dots, n$ (5.15), то получим систему неравенств:

[illegible]

Переменные $y_j (j=1,2,...,n)$ удовлетворяют условию: $y_1 + y_2 + ... + y_n = 1/v$.

Игра свелась к следующей задаче: определить значения переменных $y_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, n)$, которые удовлетворяют системе неравенств (5.16) и максимизируют линейную функцию $Z' = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ (5.17). Решение ЗЛП (5.16)-(5.17) определяет оптимальную стратегию $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$. При этом цена игры $v = 1/\max Z' = 1/\min Z$ (5.18). Составив расширенные матрицы для задач (5.12), (5.13) и (5.16), (5.17), можно убедиться, что одна матрица получилась из другой транспонированием:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \min Z \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \max Z' \end{pmatrix}$$

Таким образом, задачи линейного программирования (5.12),(5.13) и (5.16),(5.17) являются взаимно-двойственными. Очевидно, при определении оптимальных стратегий в конкретных задачах следует выбрать ту из взаимно-двойственных задач, решение которой менее трудоемко, а решение другой задачи найти с помощью теорем двойственности.

Пример. Предприятие может выпускать три вида продукции (A_1, A_2, A_3), получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из четырех состояний (B_1, B_2, B_3, B_4). Дана матрица, ее элементы характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i -й

продукции с j -м состоянием спроса. Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

Решение: Прежде чем решать задачу, можно попытаться упростить игру, проведя анализ платежной матрицы и отбросив стратегии, заведомо невыгодные или дублирующие.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	3	3	6	8
A ₂	9	10	4	2
A ₃	7	7	5	4

Т.к. цель игрока В- уменьшить выигрыш А, вторая стратегия является невыгодной для игрока В по сравнению с первой. Поэтому второй столбец можно отбросить.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 3; \alpha_2 = 2; \alpha_3 = 4; \alpha = 4, \beta_1 = 9; \beta_2 = 6; \beta_3 = 8; \beta = 6. \text{ Так как } \alpha \neq \beta,$$

то седловая точка отсутствует и оптимальное решение искать в смешанных стратегиях игроков: $S_A^* = (p_1, p_2, p_3)$ и $S_B^* = (q_1, q_2, q_3)$. Обозначив $x_i = p_i / v, i = 1, 2, 3$ и $y_j = q_j / v, j = 1, 2, 3$, составив две взаимно-двойственные задачи линейного программирования.

Задача 1

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1, \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

Задача 2

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \leq 1, \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1, \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \leq 1, \\ y_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$Z' = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max$$

Решаем симплексным методом одну из задач, например, задачу 2, поскольку для нее первое базисное решение будет допустимым. Введем добавочные переменные и перейдем к уравнениям:

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 + y_4 = 1, \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_5 = 1, \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 + y_6 = 1, \end{cases}$$

I шаг. Основные переменные – y_4, y_5, y_6 ; неосновные переменные – y_1, y_2, y_3 .

$$\begin{cases} y_4 = 1 - 3y_1 - 6y_2 - 8y_3, \\ y_5 = 1 - 9y_1 - 4y_2 - 2y_3, \quad Z' = y_1 + y_2 + y_3. \\ y_6 = 1 - 7y_1 - 5y_2 - 4y_3, \end{cases}$$

Базисное решение $Y_1 = (0; 0; 0; 1; 1; 1)$ допустимое; переводим y_2 в основные; $y_2 = \min\{1/6; 1/4; 1/5\} = 1/6$; переводим y_4 в неосновные переменные.

II шаг. Основные переменные – y_2, y_5, y_6 ; неосновные переменные – y_1, y_4, y_3 .

$$\begin{cases} y_2 = 1/6 - 1/2y_1 - 4/3y_3 - 1/6y_4, \\ y_5 = 1/3 - 7y_1 + 10/3y_3 + 2/3y_4, \quad Z' = 1/6 + 1/2y_1 - 1/3y_3 - 1/6y_4. \\ y_6 = 1/6 - 9/2y_1 + 8/3y_3 + 5/6y_4, \end{cases}$$

Базисное решение $Y_2 = (0; 1/6; 0; 0; 1/3; 1/6)$ допустимое; переводим y_1 в основные; $y_1 = \min\{1/3; 1/21; 1/27\} = 1/27$; переводим y_6 в неосновные переменные.

III шаг. Основные переменные – y_1, y_2, y_5 ; неосновные переменные – y_3, y_4, y_6 .

$$\begin{cases} y_1 = 1/27 + 16/27y_3 + 5/27y_4 - 2/9y_6, \\ y_2 = 4/27 - 44/27y_3 - 7/27y_4 + 1/9y_6, \quad Z' = 5/27 - 1/27y_3 - 2/27y_4 - 1/9y_6. \\ y_5 = 2/27 - 22/27y_3 + 17/27y_4 + 14/9y_6, \end{cases}$$

Базисное решение $Y_3 = (1/27; 4/27; 0; 0; 2/27; 0)$. $Z'_{\max} = 5/27$.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Оптимальное базисное решение задачи I: $(2/27; 0; 1/9; 0; 0; 1/27)$, причем $\min Z = \max Z' = 5/27$. Из соотношений (5.18) находим цену игры $v = 1/\max Z' = 1/\min Z = 27/5 = 5,4$.

Оптимальную стратегию $S_A^* = (p_1, p_2, p_3)$ находим, используя (5.12):

$$p_i^* = x_i v; i = 1, 2, 3, \text{ т.е.}$$

$$p_1^* = 5,4 * 2/27 = 0,4; p_2^* = 5,4 * 0 = 0; p_3^* = 5,4 * 1/9 = 0,6; S_A^* = (0,4; 0; 0,6).$$

Следовательно, предприятие должно выпустить 40% продукции A_1 и 60% продукции A_3 , а продукцию A_2 не выпускать.

Оптимальная стратегия спроса S_B^* определяется аналогично: $q_j^* = v y_j^*$; $j = 1, 2, 3$, т.е. $q_1^* = 5,4 * 1/27 = 0,2$; $q_2^* = 5,4 * 4/27 = 0,8$; $q_3^* = 5,4 * 0 = 0$, $S_B^* = (0,2; 0,8; 0)$.

Упражнения

1. Каким характеристическим свойством обладает элемент матрицы выигрышей, соответствующий седловой точке? Можно ли считать, что седловая точка образована оптимальными стратегиями игроков?
2. Какие из приведенных ниже матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

имеют седловые точки?

3. Игрок А записывает одно из двух чисел: 1 или 2, игрок В – одно из трех чисел: 1, 2 или 3. если оба числа одинаковой четности, то А выигрывает и выигрыш равен сумме этих чисел, если четности выбранных игроками чисел не совпадают, то В выигрывает, выигрыш равен сумме этих чисел. Построить платежную матрицу игры, определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить наличие седловой точки.
4. Для следующих платежных матриц определить верхнюю и нижнюю цены игры, минимаксные стратегии и оптимальные решения игры, если существует седловая точка.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,8 \\ 0,9 & 0,4 & 0,2 \\ 0,7 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{с) } \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 6 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 10 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Решить и дать графическую интерпретацию следующих игр 2х2.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Найти решения игр путем сведения их к задаче линейного программирования, используя платежные матрицы:

$$\text{А) } \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{с) } \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 6 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 10 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Найти решение игры, предварительно упростив ее:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Тестовые задания

1. Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» минимаксной и максиминной стратегий, называется:

- А) принципом максимина; В) принципом минимакса;
С) принципом максимального выигрыша; D) принципом максимального проигрыша.

2. Какие из приведенных ниже матриц имеют седловые точки?

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

- А) 1,3; В) 1,2,3; С) 2,4; D) 3,4.

3. Укажите формулу нижней цены игры $m \times n$:

А) $\alpha = \max_{i=1 \dots m} \min_{j=1 \dots n} a_{ij}$

В) $\alpha = \min_{j=1 \dots m} \min_{i=1 \dots n} a_{ij}$

С) $\alpha = \max_{i=1 \dots m} \max_{j=1 \dots n} a_{ij}$

D) $\alpha = \max_{i=1 \dots k} \min_{j=1 \dots r} a_{ij}$

4. Если выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, то игра называется:

- А) парной; В) множественной; С) конфликтной; D) антагонистической.

4. Укажите формулу верхней цены игры $m \times n$:

А) $\beta = \max_{i=1 \dots m} \max_{j=1 \dots n} a_{ij}$;

В) $\beta = \min_{j=1 \dots n} \max_{i=1 \dots m} a_{ij}$;

С) $\beta = \min_{i=1 \dots m} \min_{j=1 \dots n} a_{ij}$;

D) $\beta = \min_{i=1 \dots 2} \max_{j=1 \dots 5} a_{ij}$.

5. Определить нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей:

		0,5	0,6	0,8
P	=	0,9	0,7	0,8
		0,7	0,6	0,6

А) $\alpha = 0,7$;

В) $\alpha = 0,9$;

С) $\alpha = 0,8$;

D) $\alpha = 0,6$.

6. Определить верхнюю цену игры, заданной платежной матрицей:

		0,5	0,6	0,8
P	=	0,9	0,7	0,8
		0,7	0,6	0,6

A) $\beta = 0,7$; B) $\beta = 0,9$; C) $\beta = 0,8$; D) $\beta = 0,6$.

7. Стратегией игрока называется:

A) совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации;

B) любой локальный максимум (минимум) задачи выпуклого программирования;

C) совокупность правил, определяющих исход игры;

D) чистая цена игры.

8. Если в игре участвуют два игрока, то она называется:

A) парной;

B) множественной;

C) конечной;

D) бесконечной.

9. Если в игре число игроков больше двух, то она называется:

A) множественной;

B) парной;

C) бесконечной;

D) конечной.

10. Основная теорема теории игр:

A) каждая конечная игра имеет по крайней мере одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий;

B) Оценка свободной клетки не изменится, если к коэффициентам затрат некоторой строки (столбца) таблицы поставок прибавить некоторое число;

C) если область D замкнута и ограничена, то дифференцируемая функция $z=f(X)$ достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений или в стационарной точке, или в граничной точке области;

D) Если в точке X^* функция $z=f(X)$ имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны нулю: $f'_{x_i}(X^*) = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Список рекомендуемой литературы

1. Вентцель, Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. – М. : Дрофа, 2004. – 208 с.
2. Хазанова, Л. Э. Математические методы в экономике : учеб. пособие / Л. Э. Хазанова. – М. : Изд-во БЕК, 2002. – 144 с.
3. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие для студентов экономических специальностей / И. Л. Акулич. – М. : Высшая школа, 1986. – 319 с.
4. Алесинская, Т. В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели" / Т. В. Алесинская. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2002. – 153 с.
5. Аронович, А. Б. Сборник задач по исследованию операций / А. Б. Аронович, М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. – М. : Изд-во МГУ, 1997. – 256 с.
6. Афанасьев, М. Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения / М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. – М. : ИНФРА, 2003. – 444 с.
7. Афанасьев, М. Ю. Прикладные задачи исследования операций : учеб. пособие / М. Ю. Афанасьев, К. А. Багриновский, В. М. Матюшок – М.: ИНФРА-М, 2006. – 352 с.
8. Кремер, Н. Ш. Исследование операции в экономике / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко. – М. : ЮНИТИ, 1997. – 346 с.
9. Кремер, Н. Ш. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 407 с.
10. Тынкевич, М. А. Экономико-математические методы (исследование операций) / М. А. Тынкевич. – Кемерово, 2000. – 177 с.
11. Петросян, Л. А. Теория игр / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич. – М. : Книжный дом «Университет», 1998. – 300 с.
12. Мур, Дж. Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Дж. Мур, Л. Уэдерфорд. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2004. – 243 с.
13. Таха, Х. Введение в исследование операций / Х. Таха, А. Хемди. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.