

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Рудненский индустриальный институт

Б.А. Шалдыкова

**Неопределенные и определенные
интегралы**

Учебное пособие

Рудный 2015

УДК 517.3 (075.8)
ББК 22.161.6Я73
Ш18

Рецензенты:

Ахманова Д.М. – кандидат физико-математических наук, Карагандинский
государственный университет им. Е. Букетова
Смирнова С.В. – кандидат физико-математических наук, Рудненский
индустриальный институт

Шалдыкова Б.А.
Неопределенные и определенные интегралы:
Ш 18 Учебное пособие/ Б.А. Шалдыкова – Рудный:
Рудненский индустриальный институт, 2015.- 55 с.
ISBN 978-601-7554-23-1

В учебном пособии приведены необходимые теоретические сведения, рассмотрены основные методы интегрирования. Разобрано большое количество примеров, для самопроверки приведены варианты контрольных заданий.

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей.

УДК 517.3 (075.8)
ББК 22.161.6Я73

ISBN 978-601-7554-23-1

© Шалдыкова Б.А., 2015

© Рудненский индустриальный институт, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Неопределенный интеграл	5
1.1 Понятие первообразной и неопределенного интеграла	5
1.2 Методы интегрирования неопределенного интеграла	6
1.3 Интегрирование рациональных функций	12
1.4 Интегрирование простейших иррациональных функций	18
1.5 Интегрирование тригонометрических функций	19
2 Определенный интеграл	25
2.1 Понятие определенного интеграла	25
2.2 Основные свойства определенного интеграла	26
2.3 Интеграл с переменным верхним пределом. Непосредственное вычисление определенного интеграла	27
2.4 Замена переменной в определенном интеграле	29
2.5 Интегрирование по частям в определенном интеграле	31
2.6 Несобственные интегралы	32
3 Приложения определенного интеграла	36
3.1 Вычисление площади плоской фигуры	36
3.2 Вычисление длины дуги кривой	38
3.3 Площадь поверхности тела вращения	40
3.4 Вычисление объема тела	40
3.5 Вычисление работы и давления	42
4 Вопросы для самоконтроля	43
5 Контрольные задания	44
Список литературы	54

Введение

Интеграл (от лат. Integer – целый), одно из важнейших понятий математики, возникшее в связи с потребностью, с одной стороны, отыскивать функции по их производным (например, находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой по скорости этой точки), а с другой – измерять площади, объёмы, длины дуг, работу сил за определённый промежуток времени и т.п. Соответственно с этим различают неопределённые и определённые интегралы, вычисление которых является задачей интегрального исчисления.

История понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур. Задачами о квадратуре той или иной плоской фигуры математики Древней Греции и Рима называли задачи на вычисление площадей. Латинское слово quadratura переводится как “придание квадратной формы”. Необходимость в специальном термине объясняется тем, что в античное время (и позднее, вплоть до XVIII столетия) еще не были достаточно развиты представления о действительных числах. Математики оперировали с их геометрическими аналогами или скалярными величинами, которые нельзя перемножать. Поэтому и задачи на нахождение площадей приходилось формулировать, например, так: «Построить квадрат, равновеликий данному кругу». Символ $\int$ введен Лейбницем (1675г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова summa). Само слово интеграл было предложено Я. Бернулли в 1690 г. Вероятно, оно происходит от латинского integro, которое переводится как «приводить в прежнее состояние, восстанавливать». В 1696 г. появилось название новой ветви математики-интегральное исчисление (calculus integralis), которое ввел И. Бернулли. Другие известные термины, относящиеся к интегральному исчислению, появились заметно позднее.

Определённый интеграл – одно из основных понятий математического анализа – является мощным средством исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах. В теории определённых интегралов интегрирование рассматривается как процесс обобщения суммирования на случай бесконечно большего числа бесконечно малых выражений. Таким образом, результатом определённого интегрирования (в случае его возможности) является некое число (в обобщениях, бесконечность).

Данное пособие посвящено основным методам интегрирования и применению их для нахождения неопределённых и определённых интегралов от различных классов функций. В начале каждого раздела приводятся краткие теоретические сведения, затем разбирается довольно большое количество примеров. Для самостоятельной работы в конце пособия приведены вопросы для самоконтроля и варианты типового задания.

1 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для данной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если в каждой точке этого отрезка её производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

Каждая непрерывная функция имеет бесконечное множество первообразных, отличающихся друг от друга на постоянную величину.

Пример 1. Функция $F(x) = \cos x$ является первообразной для функции $f(x) = -\sin x$ на всей числовой прямой, так как равенство $(\cos x)' = -\sin x$ выполняется при любом значении x .

Пример 2. Функция $F(x) = \ln|x|$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, так как равенство

$$(\ln|x|)' = \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{array} \right| = \frac{1}{x}$$

выполняется при значении $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Определение. Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$ (читается: неопределенный интеграл $f(x)$ по (на) dx) и записывают

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $\int$ - символ неопределенного интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, x - переменная интегрирования, C - произвольная постоянная.

Отыскание первообразной для данной функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на этом отрезке существует первообразная.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x) dx \right) = d(F(x) + C) = F'(x) dx = f(x) dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = F(x) + C.$$

$$4. \int [\alpha \cdot f_1(x) \pm \beta \cdot f_2(x)] dx = \alpha \int f_1(x) dx \pm \beta \int f_2(x) dx$$

$$5. \text{ Если } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ и } u = \varphi(x), \text{ то } \int f(u) du = F(u) + C.$$

Таблица основных интегралов

$$1. \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad (k \neq -1),$$

$$1.1 \int dx = x + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

1.2 Методы интегрирования неопределенного интеграла

1.2.1 Метод непосредственного интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования – это интегрирование с помощью свойств, таблицы основных интегралов и тождественных преобразований подынтегральной функции.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int (3x^4 - 2x^2 + 5x - 1)dx$

Решение. Применяем свойство4 и формулу 1 из таблицы интегралов:

$$\begin{aligned}\int (3x^4 - 2x^2 + 5x - 1)dx &= 3\int x^4 dx - 2\int x^2 dx + 5\int x dx - \int dx = \\ &= \frac{3x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x + C.\end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{3+5x-x^2}{x\sqrt{x}} dx$

Решение. Делим числитель на знаменатель, затем применяем свойство4 и формулу 1 из таблицы основных интегралов:

$$\begin{aligned}\int \frac{3+5x-x^2}{x\sqrt{x}} dx &= 3\int x^{-\frac{3}{2}} dx + 5\int x^{-\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= 3\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 5\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{6}{\sqrt{x}} + 10\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

Решение. Заменяем единицу в числителе подынтегральной функции выражением $\sin^2 x + \cos^2 x$ и применим формулы 7 и 8 таблицы интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$

Решение. Раскроем скобки и соберем степени с одинаковыми основаниями, представив подынтегральную функцию как сумму функций, интеграл от каждой из которых является табличным или почти табличным.

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 = x + 2x^{\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}}. \text{ Тогда}$$

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx = \int \left(x + 2x^{\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \int x dx + 2\int x^{\frac{1}{6}} dx + \int x^{-\frac{2}{3}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7} x^{\frac{7}{6}} + 3^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + C$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int (e^{5x} \cdot 2^x) dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int (e^{5x} \cdot 2^x) dx &= \int (e^5 \cdot 2)^x dx = \int (2e^5)^x dx = \frac{(2e^5)^x}{\ln(2e^5)} + C = \\ &= \frac{e^{5x} \cdot 2^x}{\ln 2 + \ln e^5} + C = \frac{e^{5x} \cdot 2^x}{5 + \ln 2} \end{aligned}$$

Свойство 5 позволяет значительно расширить таблицу основных интегралов с помощью приема подведения функции под знак дифференциала

$$\varphi'(x)dx = d[\varphi(x)].$$

Представление выражения $\varphi'(x)dx$ в вид $d[\varphi(x)]$ называется подведением $\varphi'(x)$ под знак дифференциала. Так, например, для любой дифференцируемой функции $f(x)$ имеем:

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{d[f(x)]}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int e^{\cos x} \sin x dx$

Решение. Используя свойство 5, получим:

$$\int e^{\cos x} \sin x dx = - \int e^{\cos x} d(\cos x) = -e^{\cos x} + C$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int \frac{x dx}{1+x^2}$

Решение. Так как $(1+x^2)' = 2x$, то достаточно числитель умножить на 2:

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C.$$

1.2.2 Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x) dx$. Сделаем замену переменной $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция

новой переменной t . Тогда дифференциал $dx = \varphi'(t)dt$ и формула замены переменной имеет вид

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt.$$

Вычислив полученный интеграл, следует заменить t на $t = \varphi^{-1}(x)$, обратную $\varphi(t)$.

Пример 10. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

Решение. Сделаем замену $\cos x = t$; $dt = -\sin x dx$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = -\int \frac{dt}{t^3} = -\int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$$

Примеры 11. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

Решение. Попробуем избавиться от квадратного корня, сделав замену переменной $x = t^2$. Тогда $dx = 2t dt$, $t = \sqrt{x}$.

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{2t \cdot dt}{t^2 + t} = 2 \int \frac{t dt}{t(t+1)} = 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2 \ln|t+1| + C = 2 \ln|\sqrt{x}+1| + C.$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^3 x}}$

Решение. Сделаем замену $\sin x = t$; $dt = \cos x dx$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^3 x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = \int t^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C$$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{2x^4 + 5}$

Решение. Сделаем замену $x^2 = t$; $dt = 2x dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{2x^4 + 5} &= \frac{1}{4} \int \frac{2xdx}{x^4 + \frac{5}{2}} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{5}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \operatorname{arctg} \left(t \sqrt{\frac{2}{5}} \right) + C = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{10}} \cdot \operatorname{arctg} \left(t \sqrt{\frac{2}{5}} \right) + C = \frac{1}{2\sqrt{10}} \cdot \operatorname{arctg} \left(x^2 \sqrt{\frac{2}{5}} \right) + C. \end{aligned}$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$

Решение. Сделаем замену $\arcsin x = t$, тогда $dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Получим

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(\arcsin x)^2} + C$$

1.2.3 Метод интегрирования по частям.

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Для применения этой формулы подынтегральное выражение разбиваю на две части, одну из которых принимают за u , а другую за dv так, чтобы интеграл вычислялся проще, чем исходный.

Рассмотрим некоторые типы интегралов, легко вычисляемых методом интегрирования по частям. Всюду далее будем обозначать $P_n(x)$ - произвольный многочлен степени n с действительными коэффициентами a_k , $k = 0, \dots, n$:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Тип 1. Интегралы вида $\int P(x) e^{\alpha x} dx$, $\int P(x) \sin \beta x dx$, $\int P(x) \cos \beta x dx$

В этих интегралах за u нужно принять $P_n(x)$, за dv - соответственно выражения $e^{\alpha x} dx, \sin \beta x dx, \cos \beta x dx$.

Пример 15. Вычислить интеграл $\int x \cos 3x dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int x \cos 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos 3x dx, v = 1/3 \sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3} x \sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x dx = \\ &= \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C \end{aligned}$$

Пример 16. Вычислить интеграл $\int (2x + 3) e^{2x} dx$

$$\text{Решение. } \int (2x + 3) e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x + 3 \quad du = 2 dx \\ dv = e^{2x} dx \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(2x+3)e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} 2dx = \frac{1}{2}(2x+3)e^{2x} - \int e^{2x} dx = \\
&= \frac{1}{2}(2x+3)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C = (x+1)e^{2x} + C
\end{aligned}$$

Пример 17. Вычислить интеграл $\int (x^2 + 2x + 3) \sin x dx$

Решение.

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + 2x + 3) \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 2x + 3, \quad du = (2x + 2)dx \\ dv = \sin x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\
&= -(x^2 + 2x + 3) \cos x - \int -(2x + 2) \cos x dx = -(x^2 + 2x + 3) \cos x + \\
&+ \int (2x + 2) \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x + 2, \quad du = 2dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right| = -(x^2 + 2x + 3) \cos x + \\
&+ (2x + 2) \sin x - \int 2 \sin x dx = -(x^2 + 2x + 3) \cos x + (2x + 2) \sin x + 2 \cos x + C = \\
&= -(x^2 + 2x + 1) \cos x + (2x + 2) \sin x + C
\end{aligned}$$

Тип 2. Интегралы вида $\int P_n(x) \ln ax dx$, $\int P_n(x) \arcsin ax dx$, $\int P_n(x) \arccos ax dx$, $\int P_n(x) \arctg a dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arcctg} x dx$.

В этих интегралах за u следует принимать указанные в интегралах трансцендентные функции, а за dv — выражение $P_n(x) dx$.

Пример 18. Вычислить интеграл $\int x \ln x dx$

$$\begin{aligned}
\text{Решение. } \int x \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \\
&= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C
\end{aligned}$$

Пример 19. Вычислить интеграл $\int \arctg \sqrt{5x-1} dx$

Решение.

$$\begin{aligned}
\int \arctg \sqrt{5x-1} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arctg \sqrt{5x-1}, du = \frac{1}{1+(\sqrt{5x-1})^2} \cdot \frac{5dx}{2\sqrt{5x-1}} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = \\
&= x \arctg \sqrt{5x-1} - \int \frac{5x dx}{2\sqrt{5x-1}(1+5x-1)} = x \arctg \sqrt{5x-1} - \int \frac{dx}{2\sqrt{5x-1}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} - \frac{1}{10} \int \frac{d(5x-1)}{\sqrt{5x-1}} = x \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} - \frac{1}{10} \cdot 2\sqrt{5x-1} + C = \\
&= x \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} - \frac{1}{5} \sqrt{5x-1} + C.
\end{aligned}$$

В) интегралы вида $\int e^{ax} \cdot \sin bxdx$, $\int e^{ax} \cdot \cos bxdx$.

Эти интегралы находятся двукратным интегрированием по частям.

Пример 20. Найти $\int e^{4x} \cdot \sin 2xdx$.

$$\begin{aligned}
\text{Решение. } \int e^{4x} \sin 2xdx &= \left| \begin{array}{l} u = e^{4x}, \quad du = 4e^{4x} dx \\ dv = \sin 2xdx, \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{2} e^{4x} \cos 2x + 2 \int e^{4x} \cos 2xdx = \left| \begin{array}{l} u = e^{4x}, \quad du = 4e^{4x} dx \\ dv = \cos 2xdx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{2} e^{4x} \cos 2x + 2 \left(\frac{1}{2} e^{4x} \sin 2x - 2 \int e^{4x} \sin 2xdx \right).
\end{aligned}$$

или

$$\int e^{4x} \sin 2xdx = -\frac{1}{2} e^{4x} \cos 2x + e^{4x} \sin 2x - 4 \int e^{4x} \sin 2xdx.$$

В правой части последнего соотношения стоит искомый интеграл $\int e^{4x} \sin 2xdx$. Переносим его в левую часть, получим

$$(1+4) \int e^{4x} \sin 2xdx = \frac{e^{4x} (2 \sin 2x - \cos 2x)}{2}.$$

Отсюда

$$\int e^{4x} \sin 2xdx = \frac{e^{4x} (2 \sin 2x - \cos 2x)}{10} + C.$$

При необходимости формулу интегрирования по частям применяют последовательно несколько раз.

1.3 Интегрирование рациональных функций

1.3.1 Рациональные дроби

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и

$Q_n(x)$ - многочлены соответственно степени m и n . Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена числителя ниже степени многочлена знаменателя; в противном случае дробь называется

неправильной. Если дана неправильная дробь, то, разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть этой дроби. Дробь равна целой части плюс остаток, деленный на знаменатель:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{P_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $M_{m-n}(x)$ - многочлен, а $\frac{P_r(x)}{Q_n(x)}$ - правильная дробь.

Таким образом, интегрирование рациональных дробей сводится к нахождению интегралов от многочлена и правильной рациональной дроби. Интегрирование правильной рациональной дроби производится разложением дроби в сумму простейших дробей.

Пример 21. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx$

Решение. Поделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \hline x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x & x \\ \hline -x - 5 & \end{array}$$

Таким образом, дробь может быть представлена в виде

$$\frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = x - \frac{x + 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

Теперь вычислим интеграл

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx = \int \left(x - \frac{x + 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \right) dx = \int x dx - \int \frac{x + 5}{(x + 1)^3} dx.$$

Решим последний интеграл отдельно:

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 5}{(x + 1)^3} dx &= \left| \begin{array}{l} x + 1 = t \\ x = t - 1 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t - 1 + 5}{t^3} dt = \int \frac{t + 4}{t^3} dt = \int t^{-2} dt + 4 \int t^{-3} dt = \\ &= -\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} = -\frac{1}{x + 1} - \frac{2}{(x + 1)^2} + C = -\frac{x + 3}{(x + 1)^2} + C \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходному интегралу, имеем

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx = \int x dx - \int \frac{x + 5}{(x + 1)^3} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x + 3}{(x + 1)^2} + C.$$

1.3.2 Интегрирование простейших рациональных дробей

Простейшими дробями называются дроби вида

$$\frac{A}{x-a}; \frac{A}{(x-a)^k}; \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

где A, B, a, p, q - постоянные, причём $p^2 - 4q < 0$, и $k = 1, 2, \dots$

Рассмотрим интегралы от простейших дробей первых трёх типов.

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

$$3. \text{ Рассмотрим интеграл } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx.$$

В знаменателе подынтегральной дроби выделим полный квадрат:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx, \text{ причём } q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Сделаем замену $x + \frac{p}{2} = t$, $x = t - \frac{p}{2}$, $dx = dt$. Положим $q - \frac{p^2}{4} = a^2$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{t^2 + a^2} dt = A \int \frac{t dt}{t^2 + a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|t^2 + a^2| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right) + C, \end{aligned}$$

возвращаясь к переменной x , получим

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{a}\right) + C.$$

$$\text{Пример 22. Вычислить интеграл } \int \frac{4x-3}{x^2-2x+6} dx$$

Решение. В знаменателе подынтегральной дроби выделим полный квадрат:

$$x^2 - 2x + 6 = (x^2 - 2x + 1) + 5 = (x-1)^2 + 5.$$

Сделаем замену $x-1 = t$. Тогда $x = t+1$ и $dx = dt$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6} dx &= \int \frac{4x-3}{(x-1)^2+5} dx = \int \frac{4(t+1)-3}{t^2+5} dt = \\
&= \int \frac{4t+1}{t^2+5} dt = 4 \int \frac{tdt}{t^2+5} + \int \frac{dt}{t^2+5} = 2 \ln|t^2+5| + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} + C = \\
&= 2 \ln|x^2-2x+6| + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{5}} + C.
\end{aligned}$$

1.3.3 Интегрирование правильных рациональных дробей

Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей производят следующим образом.

1) Знаменатель дроби разлагают на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = A_0(x-a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x-a_m)^{k_m} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_ex+q_e)^{s_e},$$

где $a_1 \dots a_m$ - действительные корни знаменателя кратностей $K_1 \dots K_m$,

$$x^2 + px + q = (x - x_j) \cdot (x - \bar{x}_j),$$

$x_j, \bar{x}_j$ - пара комплексно-сопряжённых корней кратностей $S_1, \dots, S_e$, причём

$$K_1 + \dots + K_m + 2S_1 + \dots + 2S_e = n$$

(n - степень знаменателя $Q(x)$).

2) Правильную рациональную дробь разлагают на простейшие дроби:

$$\begin{aligned}
\frac{P_1(x)}{Q(x)} &= \frac{P_1(x)}{A_0(x-a_1)^{K_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_ex+q_e)^{S_e}} = \\
&= \frac{A_1}{(x-a_1)^{K_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{K_1-1}} + \dots + \frac{A_{K_1}}{x-a_1} + \dots + \\
&+ \frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_ex+q_e)^{S_e}} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_ex+q_e)^{S_e-1}} + \dots + \frac{B_{S_e}x+C_{S_e}}{x^2+p_ex+q_e}
\end{aligned}$$

3) Неизвестные коэффициенты $A_1, A_2, \dots, B_1, C_1, \dots, B_{S_e}, C_{S_e}$ находят методом неопределённых коэффициентов: последнее равенство приводят к общему знаменателю и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях полученного тождества, получают систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. В случае, когда корни знаменателя действительные и различные, целесообразно определить коэффициенты, придавая в полученном тождестве переменной x значения, равные корням знаменателя. Часто, при решении приходится комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.

Примеры 23. Вычислить интеграл $\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx$

Решение. Дробь неправильная, т.к. степень многочлена числителя равна степени многочлена знаменателя. Выделяем целую часть

$$\begin{array}{r|l} \frac{2x^3 - 40x - 8}{2x^3 + 4x^2 - 16x} & \frac{x^3 + 2x^2 - 8x}{2} \\ \hline -4x^2 - 24x - 8 & \end{array}$$

Тогда интеграл принимает вид:

$$\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx = \int 2dx - \int \frac{4x^2 + 24x + 8}{x(x+4)(x-2)} dx.$$

Решим последний интеграл отдельно методом неопределенных коэффициентов.

$$\frac{4x^2 + 24x + 8}{x(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+4)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+4)}{x(x+4)(x-2)}.$$

Определим коэффициенты, придавая в полученном тождестве переменной x значения, равные корням знаменателя.

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 8 = -8A, \quad A = -1 \\ x=-4 & -24 = 24B, \quad B = -1 \\ x=2 & 72 = 12C, \quad C = 6 \end{array}$$

$$\frac{4x^2 + 24x + 8}{x(x+4)(x-2)} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x+4} + \frac{6}{x-2}$$

Возвращаясь к исходному интегралу, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx &= \int 2dx - \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x+4} + \frac{6}{x-2} \right) dx = 2x + \ln|x| + \\ &+ \ln|x+4| - 6\ln|x-2| + C = 2x + \ln \left| \frac{x(x+4)}{(x-2)^6} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 24. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x+2)^3(x-2)} dx$

Решение. Представим дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x+2)^3(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3} =$$

$$= \frac{A(x+2)^3 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)(x+2) + D(x-2)}{(x+2)^3(x-2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^3 + (6A+2B+C)x^2 + (12A-4B+D)x + (8A-8B-4C-2D)}{(x+2)^3(x-2)}$$

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 4 = (A+B)x^3 + (6A+2B+C)x^2 +$$

$$+ (12A-4B+D)x + (8A-8B-4C-2D)$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+B=1 \\ x^2 & 6A+2B+C=-6 \\ x & 12A-4B+D=7 \\ x^0 & 8A-8B-4C-2D=-4 \end{array}$$

Решая полученную систему, найдем неизвестные коэффициенты:

$$A = -\frac{3}{32}, B = \frac{35}{32}, C = -\frac{61}{8}, D = \frac{25}{2}.$$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x+2)^3(x-2)} = -\frac{3}{32(x-2)} + \frac{35}{32(x+2)} - \frac{61}{8(x+2)^2} + \frac{25}{2(x+2)^3}$$

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x+2)^3(x-2)} dx = -\int \frac{3}{32(x-2)} dx + \int \frac{35}{32(x+2)} dx -$$

$$- \int \frac{61}{8(x+2)^2} dx + \int \frac{25}{2(x+2)^3} dx =$$

$$= -\frac{3}{32} \ln|x-2| + \frac{35}{32} \ln|x+2| + \frac{61}{8} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} + C$$

Пример 25. Вычислить интеграл $\int \frac{x+4}{(x^2+2)(x^2+x+2)} dx$

Решение.

$$\frac{x+4}{(x^2+2)(x^2+x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} =$$

$$= \frac{A(x^3+2x) + B(x^2+2) + C(x^3+x^2+2x) + D(x^2+x+2)}{(x^2+2)(x^2+x+2)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (B+C+D)x^2 + (2A+2C+D)x + 2B+2D}{(x^2+2)(x^2+x+2)}$$

$$x+4 = (A+C)x^3 + (B+C+D)x^2 + (2A+2C+D)x + 2B+2D$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + B = 0 \\ x^2 & B + C + D = 0 \\ x & 2A + 2C + D = 1 \\ x^0 & 2B + 2D = 4 \end{array}$$

Решая систему, найдём $A=1, B=-1, C=-2, D=3$

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{(x^2+2)(x^2+x+2)} &= \frac{x-1}{x^2+x+2} + \frac{-2x+3}{x^2+2} \\ \int \frac{x+4}{(x^2+2)(x^2+x+2)} dx &= \int \frac{x+1}{x^2+x+2} dx + \int \frac{-2x+3}{x^2+2} dx = \\ &= \int \frac{x+1}{x^2+x+2} dx - \int \frac{2x}{x^2+2} dx + \int \frac{3}{x^2+2} dx = \\ &= \int \frac{x+1}{(x+1/2)^2 + 7/4} dx - \int \frac{2x}{x^2+2} dx + \int \frac{3}{x^2+2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+x+2| + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \ln|x^2+2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

1.4 Интегрирование простейших иррациональных функций

Если подынтегральная функция является иррациональной функцией, содержащей под знаком радикала выражение $ax+b$, то рекомендуется подстановка $ax+b=t^k$, где k – общий знаменатель дробных показателей степени выражений $ax+b$.

Пример 26. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+4)}$

Решение. Здесь x в степени $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Общий знаменатель равен 6.

Полагаем $x=t^6$. Тогда $dx=6t^5 dt$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+4)} &= \int \frac{6t^5 dt}{(4+t^2)t^3} = 6 \int \frac{t^2 dt}{4+t^2} = 6 \int \left(1 - \frac{4}{4+t^2}\right) dt = \\ &= 6t - 12 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = 6\sqrt[6]{x} - 12 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C. \end{aligned}$$

Пример 27. Найти интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$

Решение. Сделаем подстановку $x+1=t^6$, тогда $x=t^6-1$, $dx=6t^5 dt$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx = \int \frac{t^6 - 1}{t^3 + t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{(t^6 - 1)t^3}{t + 1} dt = \\
& = 6 \int (t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - t^3) dt = 6 \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} \right) + C = \\
& = 6 \left(\frac{(x+1)^9}{9} - \frac{(x+1)^8}{8} + \frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + \frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^4}{4} \right) + C = \\
& = \frac{2}{3}(x+1)^9 - \frac{3}{4}(x+1)^8 + \frac{6}{7}(x+1)^7 - (x+1)^6 + \frac{6}{5}(x+1)^5 - \frac{3}{2}(x+1)^4 + C
\end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

С помощью элементарных преобразований этот интеграл сводится к табличным интегралам вида:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + k^2}} \quad \text{при } a > 0$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \quad \text{при } a < 0.$$

Пример 28. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}}$.

Решение. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{3}\right)^2}}$$

Пусть $x - \frac{1}{3} = t, dt = dx$, тогда

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{3} \arcsin t + C = \\
&= \frac{1}{3} \arcsin \left(x - \frac{1}{3}\right) + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x - 1}{3} + C.
\end{aligned}$$

1.5 Интегрирование тригонометрических функций

1.5.1 Универсальная тригонометрическая подстановка

Общего приёма интегрирования выражений, содержащих тригонометрические функции, не существует. Рассмотрим общий случай, когда подынтегральная функция является рациональной функцией относительно $\sin x$ и $\cos x$. Рекомендуется универсальная подстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

Для этого $\sin x$ и $\cos x$ выражают через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt$$

Пример 29. Найти интеграл $\int \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$

Решение. Полагаем $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2} &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}}{\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}\right)^2} = \\ &= \int \frac{4tdt}{\left(\frac{1+t^2+1-t^2-2t}{1+t^2}\right)^2 (1+t^2)^2} = \int \frac{4tdt}{(2-2t)^2} = \int \frac{tdt}{(1-t)^2} \\ \frac{t}{(t-1)^2} &= \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} = \frac{A(t-1)+B}{(t-1)^2} = \frac{At-A+B}{(t-1)^2} \\ t=1 &\left| \begin{array}{l} B=1 \\ A=1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Тогда интеграл принимает вид:

$$\int \frac{tdt}{(1-t)^2} = \int \frac{1}{t-1} dt + \int \frac{1}{(t-1)^2} dt = \ln|t-1| - \frac{1}{t-1} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} + C$$

Хотя универсальной подстановкой интеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$ всегда приводится к интегралу от рациональной функции, но очень часто это ведет к слишком громоздким вычислениям. Поэтому во многих случаях целесообразнее пользоваться другими подстановками:

а) интеграл вида $\int R(\sin x) \cos x dx$ с помощью подстановки $\sin x = t, \cos x dx = dt$ приводится к интегралу от рациональной функции

$$\int R(\sin x) \cos x dx = \int R(t) dt.$$

б) интеграл вида $\int R(\cos x) \sin x dx$ подстановкой $\cos x = t, \sin x dx = -dt$ сводится к интегралу от рациональной функции

$$\int R(\cos x) \sin x dx = -\int R(t) dt.$$

в) интеграл $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ с помощью подстановки $\operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}$ приводится к интегралу от рациональной функции

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

г) если в $\int R(\sin x, \cos x) dx$ функции $\sin x, \cos x$ в четных степенях, то подстановка

$$\operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

сводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции.

Пример 30. Вычислить интеграл $\int \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$

Решение. Для вычисления данного интеграла сделаем замену:

$$\operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Имеем

$$\int \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx = \int \frac{2t + 3}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2t + 3}{t^2 + 2} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{2t}{t^2+2} dt + 3 \int \frac{dt}{t^2+2} = \ln|t^2+2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \\
&= \ln|\operatorname{tg}^2 x + 2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

Пример 31. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}, \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} =$$

$$\int \frac{t^2+1}{t^3} dt = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^3} = \ln|t| - \frac{t^{-2}}{2} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + C$$

Пример 32. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x}$

Решение.

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x} = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{t^5} = -\int t^{-5} dt = -\frac{t^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{4\cos^4 x} + C$$

Пример 33. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos x dx}{3 - \sin x}$

$$\text{Решение. } \int \frac{\cos x dx}{3 - \sin x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{3-t} = -\ln|3-t| + C = -\ln|3 - \sin x| + C$$

1.5.2 Интегралы типа $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

- 1) подстановка $\sin x = t$, если n - целое положительное нечетное число;
- 2) подстановка $\cos x = t$, если m - целое положительное нечетное число;
- 3) формулы понижения порядка

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

если n и m - целые неотрицательные четные числа.

- 4) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, если $n + m$ - целое отрицательное четное число.

Пример 34. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

Решение.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} m=3, n=2 \\ \cos x = t, -\sin x dx = dt \end{array} \right| = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx = -\int (1 - t^2) t^2 dt = -\int (t^2 - t^4) dt = \\ &= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

Пример 35. Вычислить интеграл $\int \sin^4 x dx$

Решение.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} - 2 \cos 2x + \frac{\cos 4x}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right) + C.\end{aligned}$$

1.5.3 Интегралы вида $\int \sin ax \cos bxdx$, $\int \cos ax \cos bxdx$, $\int \sin ax \sin bxdx$

Эти интегралы вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

Пример 36. Найти интеграл $\int \sin 5x \cos 2x dx$

Решение.

$$\int \sin 5x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int [\sin 7x + \sin 3x] dx = -\frac{1}{14} \sin 7x - \frac{1}{6} \sin 3x + C.$$

1.5.4 Тригонометрическая подстановка

Интегралы типа $\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $\int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ приводятся к интегралам от функций, рационально

зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих тригонометрических подстановок:

$x = a \cdot \sin t$ или $x = a \cdot \cos t$ для первого интеграла;

$x = a \cdot \operatorname{tg} t$ или $x = a \cdot \operatorname{ctg} t$ для второго интеграла;

$x = \frac{a}{\sin t}$ или $x = \frac{a}{\cos t}$ для третьего интеграла.

Пример 37. Найти интеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

Решение. Так как это интеграл типа 1, то положим $x = 2 \sin t$. Тогда

$dx = 2 \cos t dt$, $t = \arcsin \frac{x}{2}$ и исходный интеграл имеет вид:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{4 \sin^2 t}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} \cdot 2 \cos t dt = \int \frac{4 \sin^2 t}{2 \cos t} 2 \cos t dt = \int 4 \sin^2 t dt = \\ &= 4 \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = 2(t - \frac{1}{2} \sin 2t) + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C, \end{aligned}$$

где $\sin t = \frac{x}{2}$, $\cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$, $\sin 2t = \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2}$.

Пример 38. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Решение. Данный интеграл относится ко второму типу, поэтому

положим $x = \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$, $t = \operatorname{arctg} x$. Получим интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{\cos^4 t dt}{\cos^2 t} = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) + C = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2}) + C = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}) + C. \end{aligned}$$

Пример 39. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Интеграл относится к 3 типу. Примем $x = \frac{1}{\cos t}$,

$dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} dt = \int \frac{\sin t \cos^2 t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} dt = \int \cos^2 t dt =$$

$$= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} + C.$$

Здесь $t = \arccos \frac{1}{x}$, $\sin 2t = 2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}$.

2 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

К понятию определенного интеграла приводят самые разнообразные задачи, связанные с определением площади плоской фигуры и объема тела вращения, отысканием работы переменной силы и нахождением величины перемещения при заданной переменной скорости, определением массы неоднородного тела с переменной плотностью и многие другие.

В следующих ниже пунктах напомним определение и сформулируем необходимые и достаточные условия существования определенного интеграла, перечислим его основные свойства, дадим методы вычисления и приведем приложения определенного интеграла к решению некоторых задач физики и механики.

2.1 Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$. Выполним следующие действия.

1. С помощью точек $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ ($x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$) разобьем отрезок $[a; b]$ на n частичных отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$.

2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = (\overline{1, n})$ выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(\xi_i)$.

3. Умножим найденное значение функции $f(\xi_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего отрезка: $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

4. Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

которую называют интегральной суммой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

5. Найдем предел интегральной суммы S_n , когда $n \rightarrow \infty$ так, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$.

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n , который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x) dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Число a называется нижним пределом интеграла, b – верхним пределом интеграла. Отрезок $[a; b]$ называется отрезком интегрирования, x – переменной интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x) dx$ – подынтегральным выражением.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a; b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, называется интегрируемой на этом отрезке.

Укажем некоторые свойства определенного интеграла, вытекающие из его определения:

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$$

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = b - a.$$

2.2 Основные свойства определенного интеграла

1⁰. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

2⁰. Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от каждой из этих функций:

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \varphi(x) dx$$

3⁰. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

4⁰. Для любых трех чисел a, b, c , справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Свойство 4⁰ называется свойством аддитивности.

5⁰. Если функция $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

6⁰. Неравенство между непрерывными функциями на отрезке $[a; b]$, $(a < b)$ можно интегрировать. Так, если $f(x) \leq \varphi(x)$ при $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

7⁰. Если m и M - соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, $(a < b)$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b-a).$$

8⁰. Теорема о среднем значении. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ , что справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

2.3 Интеграл с переменным верхним пределом. Непосредственное вычисление определенного интеграла.

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то для любого $x \in [a; b]$ существует интеграл

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

который называется интегралом с переменным верхним пределом и является функцией от x с областью определения, совпадающей с отрезком $[a; b]$. Более того, функция $I(x)$ будет непрерывной на этом отрезке. Если же от подынтегральной функции $f(x)$ потребовать непрерывность в каждой точке отрезка, то функция $I(x)$ будет дифференцируемой на этом отрезке функцией.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то функция $I(x)$ дифференцируема на этом отрезке, причем

$$I'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x)$$

Следствие. Согласно определению первообразной функция $I(x)$ является первообразной (точнее одной из первообразных) для функции $f(x)$. Обозначив, как обычно, множество первообразных символом неопределенного интеграла, получим формулу

$$\int f(x)dx = I(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C,$$

устанавливающую связь между понятиями неопределенного и определенного интеграла и позволяющую получить простую формулу для вычисления

определенных интегралов, не прибегая к подсчету пределов интегральных сумм.

Теорема (Формула Ньютона-Лейбница). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ — какая-нибудь ее первообразная на этом отрезке. Справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^4 (x^{1/2} + x^{-1/2}) dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + 2\sqrt{x} \Big|_1^4 = \frac{2}{3}(\sqrt{4})^3 + 2\sqrt{4} - \frac{2}{3}(\sqrt{1})^3 - 2\sqrt{1} = \\ &= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int_1^{\pi/3} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \sin x \right) dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \sin x \right) dx &= 2tgx - \cos x \Big|_0^{\pi/3} = 2tg \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} - 2tg0 + \cos 0 = \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} - 0 + 1 = 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3} + 1}{2} \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_1^2 (3x^4 + 2x^2 - 5) dx$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_1^2 (3x^4 + 2x^2 - 5) dx &= 3 \int_1^2 x^4 dx + 2 \int_1^2 x^2 dx - 5 \int_1^2 dx = \\ &= \frac{3}{5} x^5 \Big|_1^2 + \frac{2}{3} x^3 \Big|_1^2 - 5x \Big|_1^2 = \frac{3}{5} (2^5 - 1) + \frac{2}{3} (2^3 - 1) - 5(2 - 1) = \frac{274}{15}. \end{aligned}$$

2.4 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема. Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке

$[\alpha; \beta]$, при этом $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

В определенном интеграле нет необходимости возвращаться к старой переменной.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Решение. Сделаем замену переменной $x = \sin t, dx = \cos t dt$. Определим новые пределы: если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 1$, то $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$.

Решение. Сделаем замену $t = x - \sin x, dt = (1 - \cos x) dx$. Новые границы интегрирования: $x_1 = \pi, t_1 = \pi$; $x_2 = 2\pi, t_2 = 2\pi$. Тогда

$$\int_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx = \int_\pi^{2\pi} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_\pi^{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

Приведем здесь два факта, упрощающих процесс вычисления определенных интегралов.

А) для любой интегрируемой на отрезке $[-a; a]$, ($a > 0$) функции $f(x)$, интеграл

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) - \text{четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная функция.} \end{cases}$$

Пример 6. Показать, что при любом $m, n \in \mathbb{N}$ интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi, & \text{при } m = n \\ 0, & \text{при } m \neq n \end{cases}$$

Решение. Пусть $m \neq n$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \\ &= \int_0^{\pi} \cos(m+n)x dx + \int_0^{\pi} \cos(m-n)x dx = \\ &= \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x = \frac{1}{m+n} (\sin(m+n)\pi - \sin 0) + \\ &+ \frac{1}{m-n} (\sin(m-n)\pi - \sin 0) = \frac{1}{m+n} \cdot 0 + \frac{1}{m-n} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\sin k\pi = \sin 0 = 0$

Пусть $m = n$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2mx) dx = \\ &= x + \frac{1}{2m} \sin 2mx \Big|_0^{\pi} = (\pi - 0) + \frac{1}{2m} (\sin 2m\pi - \sin 0) = \pi + 0 = \pi. \end{aligned}$$

Б) если функция $f(x)$ - непрерывная на $\mathbb{R}$ и периодическая с периодом T функция, т.е. $f(x+T) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, то для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

2.5 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть $u = u(x), v = v(x)$ - непрерывные и дифференцируемые функции на отрезке $[a; b]$, тогда $(uv)' = u'v + uv'$. Интегрируя обе части этого равенства, получим

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx,$$

или

$$\int_a^b uv' dx = \int_a^b (uv)' dx - \int_a^b u'v dx.$$

В окончательном виде получим: $\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du$

Пример 7. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi} x \cos x dx$.

Решение.

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos x dx \\ du = dx, \quad v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= \pi \sin \pi - 0 + \cos x \Big|_0^{\pi} = \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$$

Пример 8. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 x \ln^2 x dx$

Решение.

$$\int_1^2 x \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \ln x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left(2 \ln^2 2 - \frac{1}{2} \ln^2 1 \right) - \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= 2 \ln^2 2 - \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 \right) + \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = \ln^2 4 - \ln 4 + \frac{3}{4}.$$

2.6 Несобственные интегралы

В рассмотренных выше определенных интегралах пределы интегрирования были конечными числами. В ряде вопросов приходится отказаться от этого ограничения и иметь дело с определенными интегралами с бесконечными пределами.

2.6.1 Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, то его называют несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом (несобственным интегралом первого рода) от функции $f(x)$ и обозначают символом $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится. Если же указанный предел не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx,$$

где c - произвольное число.

Пример 9. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

Решение. По определению несобственного интеграла

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \ln x d(\ln x) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_2^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln^2 b - \ln^2 2) = +\infty. \end{aligned}$$

Значит, интеграл расходится.

Пример 10. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg(x+1) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg(x+1) \Big|_0^b = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 1 - \arctg(a+1)) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg(b+1) - \arctg 1) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

В некоторых задачах нет необходимости вычислить интеграл, достаточно лишь знать, сходится ли он или расходится.

Теорема (Признак сравнения). Если на промежутке непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то из

сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$.

Пример 11. Сходится ли интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$?

Решение. При $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ имеем $\frac{1}{x^2(1+3^x)} < \frac{1}{x^2}$, но интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ сходится. Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$ также сходится и его значение меньше единицы.

Теорема. Если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k, 0 < k < \infty, (f(x) > 0, \varphi(x) > 0),$$

то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ одновременно сходятся или расходятся (т.е. ведут себя одинаково в смысле сходимости).

Пример 12. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \ln \left| \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right| dx$.

Решение. Интеграл $\int_1^{+\infty} \ln \left| \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \right| dx$ сходится, так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится и

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left| \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right|}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left| 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right|}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

2.6.2 Интеграл от разрывной функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют несобственным интегралом от разрывной функции (несобственным интегралом второго рода) и обозначают символом $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом, по определению,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится. Если же указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв во внутренней точке c отрезка $[a, b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В этом случае интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Примеры 13. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$

Решение. Функция $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ непрерывна при $1 < x \leq 2$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{1+\varepsilon}^2 \sqrt{x-1} dx + \int_{1+\varepsilon}^2 (x-1)^{-1/2} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} (x-1)^{3/2} + 2(x-1)^{1/2} \right) \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} (2-1)^{3/2} + 2(2-1)^{1/2} - \frac{2}{3} (1+\varepsilon-1)^{3/2} - 2(1+\varepsilon-1)^{1/2} \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} - 2\varepsilon^{1/2} \right) = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Значит, интеграл сходится.

Пример 14. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^2 \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$.

Решение. Функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}} &= \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}} + \int_1^2 \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon_2}^2 \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}} = \\
&= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^{1-\varepsilon_1} (x^2-1)^{-\frac{4}{5}} d(x^2-1) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{1+\varepsilon_2}^2 (x^2-1)^{-\frac{4}{5}} d(x^2-1) = \\
&= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left(\frac{5}{2} (x^2-1)^{\frac{1}{5}} \Big|_0^{1-\varepsilon_1} \right) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left(\frac{5}{2} (x^2-1)^{\frac{1}{5}} \Big|_{1+\varepsilon_2}^2 \right) = \\
&= \frac{5}{2} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left[((1-\varepsilon_1)^2-1)^{\frac{1}{5}} - (-1)^{\frac{1}{5}} \right] + \frac{5}{2} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left[(3)^{\frac{1}{5}} - ((1+\varepsilon_2)^2-1)^{\frac{1}{5}} \right] = \frac{5}{2} (1+\sqrt[5]{3})
\end{aligned}$$

Значит, интеграл сходится.

3 ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

3.1. Вычисление площади плоской фигуры

3.1.1 Кривые заданы в прямоугольных координатах.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, ($f(x) \geq 0$), прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox , вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Если фигура ограничена кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ на отрезке $[a, b]$, то площадь этой фигуры определяется по формуле:

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx, \text{ причем } f_1(x) \geq f_2(x)$$

Примеры 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 1$, $x = 3$ и осью Ox .

Решение.

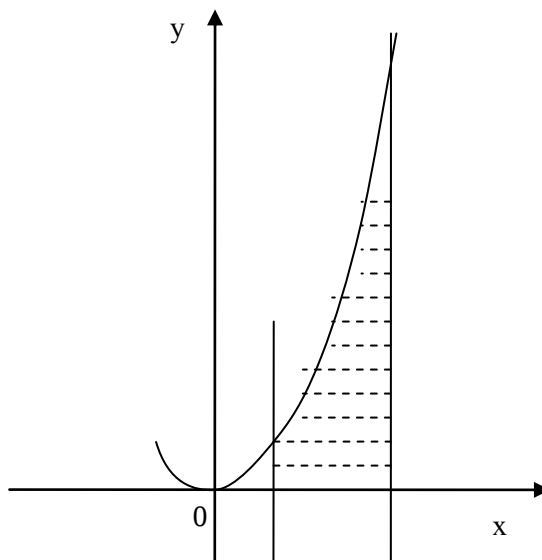


Рисунок 2 – Площадь плоской фигуры

Найдем площадь искомой фигуры

$$S = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \text{ (37B.ед.)}.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$.

Решение. Найдем точки пересечения кривых $x = y^2 - 1$, $x = 9 - y^2$:

$$y^2 - 1 = 9 - y^2 \Rightarrow 2y^2 = 10 \Rightarrow y^2 = 5 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5}.$$

Тогда площадь фигуры будет равна:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (9 - y^2 - y^2 + 1) dy = 2 \int_0^{\sqrt{5}} (10 - 2y^2) dy = 2 \left(10y - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{5}} = \\ &= 4 \left(5\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3} \right) = 20\sqrt{5} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 20\sqrt{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{40\sqrt{5}}{3} \text{ (37B.ед.)}. \end{aligned}$$

3.1.2. Кривые заданы параметрическими уравнениями

Пусть кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\alpha \leq t \leq \beta$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то площадь фигуры определяется по формуле:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = a \cos t, y = b \sin t$ (эллипс).

Решение. Эллипс расположен симметрично относительно обеих осей, следовательно, можно вычислить сначала 1/4 часть площади данной фигуры. Вычислим площадь той части фигуры, которая расположена в первом квадранте.

Найдем пределы интегрирования для переменной t из условий:

$$\begin{aligned} 0 &= a \cos t, & t_1 &= \frac{\pi}{2} \\ a &= a \cos t, & t_2 &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -4ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 2ab \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab. \end{aligned}$$

3.1.3. Кривые заданы в полярных координатах.

Пусть в полярной системе координат задана кривая уравнением $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ - непрерывная функция при $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Тогда площадь криволинейного сектора OAB , ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и радиус-векторами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ находится по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = a \cos 3\varphi$.

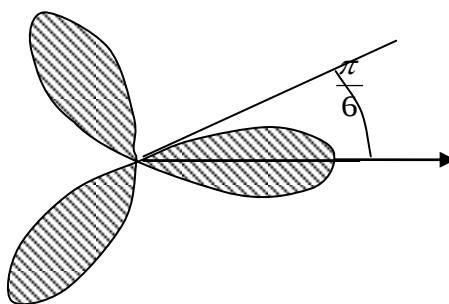


Рисунок 3- Трехлепестковая роза

Решение. Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т.е. $\frac{1}{6}$ часть всей площади фигуры:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (a \cos 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi d\varphi = \frac{1}{4} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{6} + 0 \right) = \frac{\pi a^2}{24}. \end{aligned}$$

Откуда $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

3.2 Вычисление длины дуги кривой

3.2.1 Уравнение кривой задано в прямоугольных координатах

Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывную производную, то длина дуги этой кривой будет определяться формулой:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Пример 5. Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{x^3}$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(4,8)$.

Решение. Найдем производную

$$y' = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

и подставим ее в формулу, тогда

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1) \approx 9,07$$

3.2.2 Уравнение кривой задано в параметрической форме

Если уравнение кривой задано в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

где $x(t), y(t)$ - непрерывные функции с непрерывными производными и $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$, то длина дуги находится по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Пример 6. Найти длину дуги кривой $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

Решение. Найдем производные $x'(t), y'(t)$:

$$x'(t) = 2 \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t) = -6 \cos^2 t \sin t$$

$$y'(t) = 2 \cdot 3 \sin^2 t \cdot \cos t = 6 \sin^2 t \cos t$$

Тогда

$$\begin{aligned} l &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{(-6 \cos^2 t \sin t)^2 + (6 \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{36 \cos^4 t \sin^2 t + 36 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 6 \int_0^{\pi/4} \sqrt{36 \cos^2 t \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\pi/4} 6 \sin t \cos t dt = 3 \int_0^{\pi/4} \sin 2t dt = -\frac{3}{2} \cos 2t \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{3}{2} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

3.2.3 Уравнение кривой задано в полярных координатах

Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$. Предположим, что $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда длина дуги находится по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

Пример 7. Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

Решение. Кардиоида симметрична относительно полярной оси. Найдем половину длины кардиоиды:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}l &= \int_0^{\pi} \sqrt{(a(1+\cos \varphi))^2 + (a(-\sin \varphi))^2} d\varphi = a \int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos \varphi} d\varphi = \\ &= a \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 4a.\end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{1}{2}l = 4a$. Следовательно, $l = 8a$.

3.3 Площадь поверхности тела вращения

Пусть дана поверхность, образованная вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси ОХ. Функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a; b]$. Тогда поверхность тела вращения будет равна:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

3.4 Вычисление объема тела

3.4.1 Объем тела по площадям параллельных сечений

Пусть в пространстве дано тело, заключенное между плоскостями $x = a$, $x = b$. Пусть площадь каждого сечения, перпендикулярного к оси ОХ, будет известна и равна $S(x)$. Причем $S(x)$ – функция непрерывная на отрезке $[a; b]$. Тогда объем тела находится по формуле:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Пример 8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, \quad z = 7, z = 0.$$

Решение. По условию задачи эллипсоид пересечен двумя плоскостями $z = 7, z = 0$. В сечении будем иметь эллипс с полуосями

$$a = 4\sqrt{1 - \frac{z^2}{196}}, \quad b = 3\sqrt{1 - \frac{z^2}{196}}.$$

Найдем площадь сечения:

$$S(z) = \pi ab = 12\pi \left(1 - \frac{z^2}{196}\right).$$

Следовательно,

$$V = \int_a^b S(z) dz = \int_0^7 12\pi \left(1 - \frac{z^2}{196} \right) dz = 12\pi \left(z - \frac{z^3}{588} \right) \Big|_0^7 =$$

$$= 12\pi \left(7 - \frac{7^3}{588} - 0 \right) = 12\pi \left(7 - \frac{7}{12} \right) = 77\pi (\text{куб.ед.})$$

3.4.2 Объем тела вращения

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x)$, отрезком $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a$, $x = b$. Полученная от вращения фигура называется телом вращения. Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox , проведенной через произвольную точку X оси Ox , есть круг с радиусом $y = f(x)$. Следовательно, $S(x) = \pi y^2$. Тогда объема тела вращения равен:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Пример 9. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$, $x = 1$.

Решение.

$$V = \pi \int_0^1 x dx = \frac{\pi x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично получим формулу объема тела вращения криволинейной трапеции вокруг оси Oy :

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

3.5 Вычисление работы и давления.

Работа переменной силы $x = f(x)$, действующей в направлении оси Ox на отрезке $[x_0, x_1]$, вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Для вычисления силы давления жидкости при меняется закон Паскаля, согласно которому давление жидкости на площадку равно площади S ,

умноженной на глубину погружения h , плотность ρ и ускорение силы тяжести g , т.е.

$$P = g \cdot \rho \cdot S \cdot h$$

Пример 10. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение. По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению X , т.е. $F = kx$, где k - коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $X = 0,01$ м. Следовательно, $100 = k \cdot 0,01$, откуда $k = 10000$. Следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа равна:

$$A = \int_0^{0,05} 10000 x dx = 5000 x^2 \Big|_0^{0,05} = 5000 \cdot (0,0025 - 0) = 12,5 \text{ (Дж)}.$$

Пример 11. Определить величину давления воды на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус R , а центр O находится на свободной поверхности воды.

Решение. Воспользуемся полученной формулой для нахождения давления жидкости на вертикальную пластинку. В данном случае пластинка ограничена линиями $y_1 = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y_2 = \sqrt{R^2 - x^2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} P &= g \cdot \rho \int_a^b \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2} \right) \right) x dx = 2g\rho \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot x dx = \\ &= 2g\rho \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2} d(R^2 - x^2) = -g\rho \frac{2(R^2 - x^2)^{3/2}}{3} \Big|_0^R = \\ &= -\frac{2}{3} g\rho (0 - R^3) = \frac{2}{3} g \cdot \rho \cdot R^3. \end{aligned}$$

4 Вопросы для самоконтроля

1. Что называется первообразной функции?
2. Каким свойством обладают первообразные одной и той же функции?
3. Что называется неопределенным интегралом?
4. Какими свойствами обладают неопределенные интегралы?
5. Что такое интегрирование подстановкой?
6. Что такое интегрирование по частям?
7. Что называется простейшей дробью?
8. Как выделить целую часть рациональной дроби?
9. Как разложить дробь на простейшие?

10. Как вычислить интеграл от рациональной дроби?
11. Что такое определенный интеграл?
12. Какими свойствами обладает определенный интеграл?
13. Что такое формула Ньютона-Лейбница?
14. Как осуществляется замена переменной в определенном интеграле?
15. Как осуществляется интегрирование по частям в определенном интеграле?
16. Как найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными явно?
17. Как найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически?
18. Как найти объем тела с известными площадями поперечных сечений?
19. Как найти длину дуги отрезка кривой, заданной явно?
20. Как найти длину дуги отрезка кривой на плоскости, заданной параметрически?
21. Как найти длину дуги отрезка кривой в пространстве, заданной параметрически?

5 Контрольные задания

Вариант 1

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \left(\frac{x^7}{2} + \frac{5}{x^5} \right) dx; & \text{б) } \int x \cdot \operatorname{arctg} x dx; & \text{в) } \int \frac{x-7}{x^2+4x+13} dx; \\ \text{г) } \int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx; & \text{д) } \int \frac{dx}{(1-\cos x)\sin^2 x}. & \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\begin{array}{ll} \text{А) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx; & \text{б) } \int_0^{16} \sqrt{256-x^2} dx. \end{array}$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x-1, \quad y = 5-x.$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Вариант 2

1. Вычислить неопределенные интегралы.

А) $\int (x^5 + 2\sqrt{x^3}) dx$; б) $\int (1-x)e^{-3x} dx$;

в) $\int \frac{x-8}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx$; г) $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx$; д) $\int \frac{\cos x dx}{2+\cos x}$.

2. Вычислить определенные интегралы

а) $\int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx$; б) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad y = 2x + \frac{5}{2}.$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Вариант 3

1. Вычислить неопределенные интегралы.

А) $\int \frac{(x^2 \sqrt{x} - 3)^2}{x} dx$; б) $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$; в) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx$;

г) $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx$; д) $\int \frac{dx}{(1+\cos x) \sin^2 x}$

2. Вычислить определенные интегралы.

А) $\int_0^1 \arctg x dx$; б) $\int_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 16x, \quad y = x$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t) \\ y = 4(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Вариант 4

1. Вычислить неопределенные интегралы.

А) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x \cdot \sqrt{x}} dx;$

б) $\int \arcsin x dx;$

в) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx;$

г) $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2} dx;$

д) $\int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$

2. Вычислить определенные интегралы.

А) $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x} dx;$

б) $\int_0^1 \frac{dx}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = x, \quad y = x^2$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Вариант 5

1. Вычислить неопределенные интегралы.

А) $\int \frac{(x-1)^2}{x} dx;$

б) $\int (x^2 - 6x)e^{-x} dx;$

в) $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29} dx;$

г) $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6} dx;$

д) $\int \frac{(\cos x - \sin x) dx}{(1 + \sin x)^2}$

2. Вычислить определенные интегралы.

А) $\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x dx;$

б) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = -x^2 + 8x, \quad y = x^2 + 18x - 12$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 10 \cos^3 t \\ y = 10 \sin^3 t \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Вариант 6

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А)} \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx; & \text{б)} \int (2+x)3^x dx; & \text{в)} \int \frac{x+1}{5x^2+2x+1} dx; \\ \text{г)} \int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2} dx; & \text{д)} \int \frac{dx}{(1-\cos x)\cos x} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\begin{array}{ll} \text{А)} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (2-x)\sin 3x dx; & \text{б)} \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1} dx}{x^4} \end{array}$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 1 - x^2, \quad y = x^2$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$$

Вариант 7

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А)} \int \frac{x^3 - 3x^2 + x}{x^5} dx; & \text{б)} \int \frac{x}{\cos^2 x} dx; & \text{в)} \int \frac{x-5}{\sqrt{6+4x-x^2}} dx; \\ \text{г)} \int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx; & \text{д)} \int \frac{dx}{(1-\sin x)\sin x} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\begin{array}{ll} \text{А)} \int_{-1}^0 \arccos x dx; & \text{б)} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \end{array}$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 5, \quad y = x - 3$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Вариант 8

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А)} \int (x-1)(x^2+3)dx; & \text{б)} \int x^2 e^{2x} dx; & \text{в)} \int \frac{2x+3}{\sqrt{15+4x-4x^2}} dx; \\ \text{г)} \int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx; & \text{д)} \int \frac{\cos x dx}{(1+\sin x - \cos x)^2} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\text{А)} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{6x}{\sin^2 x} dx; \quad \text{б)} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + 1, \quad y = \frac{x^2}{2}, \quad y = 5$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Вариант 9

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А)} \int \frac{x^2 - 2x + 10}{2\sqrt{x}} dx; & \text{б)} \int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx; & \text{в)} \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+2}} dx; \\ \text{г)} \int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx; & \text{д)} \int \frac{\cos x dx}{5+4\cos x} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\text{А)} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin x dx; \quad \text{б)} \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2x, \quad y - 3 = 0$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t) \\ y = 3(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$$

Вариант 10

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А) } \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx; & \text{б) } \int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx; & \text{в) } \int \frac{2x-5}{x^2+6x+13} dx; \\ \text{г) } \int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx; & \text{д) } \int \frac{(1+\sin x)dx}{1+\sin x+\cos x} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\text{А) } \int_0^1 x e^{2x} dx; \quad \text{б) } \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 1, \quad y = x + 1$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$$

Вариант 11

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А) } \int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx; & \text{б) } \int (x^2 + 5) \cdot 3^x dx; & \text{в) } \int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx; \\ \int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x} dx; & \text{д) } \int \frac{\cos x dx}{1+\sin x-\cos x} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\text{А) } \int_0^1 x \arctg x dx; \quad \text{б) } \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - x, \quad y = 0, \quad x = 2$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 6 \cos^3 t \\ y = 6 \sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$$

Вариант 12

1. Вычислить неопределенные интегралы.

А) $\int \frac{(1+x^2)^2}{\sqrt{x}} dx;$

Б) $\int x^2 \sin x dx;$

В) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{15+4x-4x^2}} dx;$

Г) $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)} dx;$

Д) $\int \frac{(1+\cos x)dx}{1+\sin x+\cos x}$

2. Вычислить определенные интегралы.

А) $\int_1^{e^4} \sqrt{x} \ln x dx;$

Б) $\int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 1, \quad y = x + 1$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$$

Вариант 13

1. Вычислить неопределенные интегралы.

А) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^3}{x} dx;$

Б) $\int e^x \sin x dx;$

В) $\int \frac{x}{x^2+x+1} dx;$

Г) $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x} dx;$

Д) $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x}$

2. Вычислить определенные интегралы.

А) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (x - \frac{\pi}{2}) \cos 2x dx;$

Б) $\int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2,5(t - \sin t) \\ y = 2,5(1 - \cos t) \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$$

Вариант 14

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А)} \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx; & \text{б)} \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx; & \text{в)} \int \frac{x-2}{x^2-4x+7} dx; \\ \text{г)} \int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x} dx; & \text{д)} \int \frac{(1+\sin x)dx}{(1-\sin x)^2} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\text{А)} \int_0^1 x e^x dx; \quad \text{б)} \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + x, \quad y = x + 1$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Вариант 15

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А)} \int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx; & \text{б)} \int x^4 \cdot \ln x dx; & \text{в)} \int \frac{5x+3}{x^2+2x+2} dx; \\ \text{г)} \int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x} dx; & \text{д)} \int \frac{\cos x dx}{1+\cos x + \sin x} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\text{А)} \int_0^{\pi/4} 3x \sin 4x dx; \quad \text{б)} \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x^2 + 3x + 6, \quad y = x + 2$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Вариант 16

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А)} \int \left(a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \right)^3 dx; & \text{б)} \int x^3 e^{x^2} dx; & \text{в)} \int \frac{x-4}{x^2+x+1} dx; \\ \text{г)} \int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x} dx; & \text{д)} \int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\text{А)} \int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx; \quad \text{б)} \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 4x - x^2, \quad y = x$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Вариант 17

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А)} \int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx; & \text{б)} \int x \cdot \sin 3x dx; & \text{в)} \int \frac{x-5}{x^2+2x+3} dx; \\ \text{г)} \int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x} dx; & \text{д)} \int \frac{\cos x dx}{1+\cos x - \sin x} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\text{А)} \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx; \quad \text{б)} \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x = y^2, \quad x = 1, \quad y = 0$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$$

Вариант 18

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А)} \int (7\sqrt{x} + 5x^3)^2 dx; & \text{б)} \int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx; & \text{в)} \int \frac{2x+3}{x^2+4x+5} dx; \\ \text{г)} \int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x} dx; & \text{д)} \int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x - \sin x)^2} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\text{А)} \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx; \quad \text{б)} \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2} dx}{x^4}$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = (x-1)^2, \quad y = x+1$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Вариант 19

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\begin{array}{lll} \text{А)} \int \frac{x+2x^2+5}{x^2\sqrt{x}} dx; & \text{б)} \int x \cdot \arctg 2x dx; & \text{в)} \int \frac{2x+1}{x^2+4x+20} dx; \\ \text{г)} \int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x} dx; & \text{д)} \int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x + \sin x)^2} \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\text{А)} \int_1^e \ln^2 x dx; \quad \text{б)} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x^2 + 1, \quad y = x + 2, \quad y = 1.5$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$$

Вариант 20

1. Вычислить неопределенные интегралы.

$$\text{А) } \int \frac{(1-x)^3}{x^3 \sqrt{x}} dx; \quad \text{б) } \int x^3 \arctg x dx; \quad \text{в) } \int \frac{2x-5}{x^2+2x+13} dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx; \quad \text{д) } \int \frac{(1-\sin x)dx}{(1+\cos x)\cos x}$$

2. Вычислить определенные интегралы.

$$\text{А) } \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} dx; \quad \text{б) } \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 4x, \quad x^2 = 4y$$

4. Вычислить длину дуги кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1, 2: учеб. пособие / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980. – 326 с.
2. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А.Путко – ЮНИТИ, 2006. – 479с.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П.Минорский – М.: Высшая школа, 2004. – 304 с.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): учеб. пособие для втузов / Л.А. Кузнецов. - М.: Высш. Школа, 1983. – 175с.
5. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. Специальные курсы: учебник / А.Д Мышкис – СПб: Лань, 2002. – 235с.
6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие для вузов / Г.Н. Берман. – СПб.: Лань, 2006. – 384с.
7. Виленкин И.В. Высшая математика: учеб. пособие/ И.В. Виленкин, В.М. Гробер. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2004.-416 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, Т. 1, 2: учеб. пособие для втузов / Н.С.Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 456с.
9. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие / Я.С.Бугров, С.М. Никольский – М.: Наука, 1985. – 432с.
10. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: учеб. пособие / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980. – 326 с.
11. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: учеб. пособие / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980. – 304 с.
12. Гусак А.А. Высшая математика. Учебник / А.А.Гусак. – Минск: ТетраСистем, 2003. – 189с.
13. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс/ Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 608с.
14. Ильин В.А. Основы математического анализа: / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк – М.: Наука, 1982. – 324с.
15. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов./ А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович – М.: «Наука», 1971. – 173 с.
16. Хасеинов К.А. Каноны математики: учебник/ К.А.Хасеинов. – Алматы.: ММШ, 2003. – 686с.
17. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.1-3/ Под общ.ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 2001. –304 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Рудненский индустриальный институт

Рассмотрено на заседании кафедры СиСМ
Протокол № _____ 2015г.
Заведующий кафедрой _____ О.А. Мирюк

Одобрено на заседании МК ФЭиС
Протокол № _____ от _____ 2015г.
Председатель МКФ _____ О.А. Акмалова

Утверждено и рекомендовано к изданию на заседании УМС
Протокол № _____ от _____ 2015г.
Председатель УМС _____ Л.Л. Божко

Кафедра строительства и строительного материаловедения

Шалдыкова Б.А.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ISBN 978-601-7554-23-1

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рудный 2015

Багит Абитовна Шалдыкова

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие

Подписано в печать

Тираж 8 экз. Формат 21х30/2. Бумага листовая для ксероксной техники.

Печать ксероксная. Объем 3,5 уч.-изд.л. Заказ №

Издание Рудненского индустриального института

Редакционно-издательский центр РИИ

г. Рудный, ул. 50 лет Октября, 58