МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Рудненский индустриальный институт

Б.А. Шалдыкова

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Рудный 2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.6.Я73
Ш18

Рецензенты:

Рамазанов М.И. - доктор физико-математических наук, Карагандинский государственный университет им. Е. Букетова
Ахманова Д.М. – кандидат физико-математических наук, Карагандинский государственный университет им. Е. Букетова
Смирнова С.В. – кандидат физико-математических наук, Рудненский индустриальный институт

Шалдыкова Б.А.
Обыкновенные дифференциальные уравнения.:
Ш 18 Учебное пособие/ Б.А. Шалдыкова – Рудный:
Рудненский индустриальный институт, 2013.- 68 с.

ISBN 9965-845-74-3

В учебном пособии кратко изложена теория обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотрены основные типы уравнений, их методы решения. Разобрано большое количество примеров, для самостоятельной работы приведены варианты контрольных заданий.

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.6.Я73

ISBN 9965-845-74-3

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Обыкновенные дифференциальные уравнения применяются для описания многих процессов реальной действительности. Трудно представить себе область науки или производства, в которой не возникала необходимость использования дифференциальных уравнений. Традиционным примером прикладной задачи, приводящей к простейшему обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, является задача о радиоактивном распаде вещества. Дифференциальные уравнения описывают процессы распространения тепла и диффузии газов. Изучение электромагнитных полей базируется на знаменитых уравнениях Максвелла. Фундаментальную роль в квантовой механике играет дифференциальное уравнение, называемое уравнением Шредингера. Опираясь на решение системы дифференциальных уравнений, был сконструирован автопилот. Дифференциальные уравнения использовались при создании аппарата "искусственная почка", поскольку процесс гемодиализа (т.е. очищения крови при помощи искусственной почки) описывается системой дифференциальных уравнений.

Если некоторая физическая величина оказывается меняющейся со временем под воздействием тех или иных факторов, то, как правило, закон ее изменения по времени описывается именно дифференциальным уравнением, т.е. уравнением, связывающим исходную переменную как функцию времени и производные этой функции. Независимой переменной в дифференциальных уравнениях может выступать не только время, ни другие физические величины: координата, цена продукта и т.д. Решение уравнения с анализом его зависимости от параметров задачи и начального состояния системы позволяет установить общие закономерности изменения исходной физической величины. В этой связи изучение обыкновенных дифференциальных уравнений в рамках курса высшей математики имеет принципиальное теоретическое и прикладное значения для подготовки современного специалиста.

В настоящем пособии кратко изложена теория дифференциальных уравнений, приведены основные типы уравнений, для которых решения можно найти аналитическим путем, указаны способы их решения, подробно разобраны соответствующие примеры. Для самопроверки в конце каждой темы приводятся теоретические вопросы. Для самостоятельной работы в конце пособия приведены контрольные вопросы и варианты типового задания.

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1 Основные понятия

Определение. Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Если искомая функция есть функция одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным. В общем случае обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 . \qquad (1.1)$$

В нем слева стоит функция, зависящая от аргумента x, искомой функции $y(x)$ и ее производных $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение. Например, $F(x, y, y', y'') = 0$ будет уравнением второго порядка, а уравнение (1.1) - уравнением n - го порядка.

Определение. Решением или интегралом дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая, при подстановке ее в уравнение, обращает его в тождество

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), .. \varphi^{(n)}(x)) = 0 .$$

Решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y)$ называется интегралом дифференциального уравнения. На плоскости, с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат, уравнение $\Phi(x, y) = 0$ определяет некоторую кривую, которая называется интегральной кривой дифференциального уравнения.

Общим решением (интегралом) дифференциального уравнения n-го порядка называется решение (интеграл) этого уравнения, зависящее от n произвольных постоянных. Решение, полученное при конкретных числовых значениях этих постоянных, называется частным решением дифференциального уравнения. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1.2)$$

Если из соотношения (1.2) можно выразить производную y', то это уравнение будет называться дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной

$$y' = f(x, y). \qquad (1.3)$$

Пусть требуется найти функцию $y(x)$, являющуюся решением уравнения (1.3) и удовлетворяющую условию

$$y(x_0) = y_0. \qquad (1.4)$$

Такая задача называется задачей Коши или начальной задачей, а условие (1.4) - начальным условием.

Теорема (О существовании и единственности решения). Если в уравнении (1.3) функция $f(x, y)$ и частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D плоскости (xOy), то в любой точке этой области (x_0, y_0) существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (1.3), удовлетворяющее условию $y = y_0$ при $x = x_0$.

Геометрически это означает, что существует и притом единственное решение $y(x)$ задачи Коши, график которого проходит через точку (x_0, y_0).

Определение. Функция $y = \varphi(x, C)$ называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка (1.3), если она удовлетворяет двум условиям:

1. При любых значениях произвольной постоянной C, принадлежащей некоторому множеству, функция $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения (1.3);

2. Какова бы ни была точка (x_0, y_0), лежащая внутри области D, существует единственное значение постоянной $C=C_0$, такое, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Всякое решение $y = \varphi(x, C_0)$ уравнения (1.3), получаемое из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретных значениях $C=C_0$, называется частным решением. Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

<u>Теоретические вопросы:</u>

1. Сформулируйте определение дифференциального уравнения первого порядка.

2.Что называется порядком дифференциального уравнения?

3. Запишите общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

4. Сформулируйте определение частного решения дифференциального уравнения первого порядка.
5. В чем суть задачи Коши?

1.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно представить в виде

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{1.5}$$

или

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{1.6}$$

Правая часть уравнения (1.5) представляет собой произведение двух множителей, каждый из которых является функцией только одного аргумента. Представим уравнение (1.5) в виде

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

и преобразуем его, предполагая $f_2(x) \neq 0$:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{1.7}$$

Интегрируя левую часть по переменной y, а правую по x, найдем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C. \tag{1.8}$$

Получили общий интеграл уравнения (1.5).

Уравнение типа (1.7) называется уравнением с разделенными переменными.

Перейдем к рассмотрению уравнения (1.6). Разделив обе части данного уравнения на выражение $N_1(y)M_2(x)$, приведем его к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Проинтегрируем $$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

В результате получили общий интеграл уравнения (1.6).

Пример 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $(3x-1)y' + y^2 = 0$.

Решение. Имеем дифференциальное уравнение 1- го порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, приведем уравнение к виду

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{3x-1} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{3}\ln|3x-1| = C.$$

Тогда, общий интеграл уравнения будет иметь вид:

$$\ln\left|\sqrt[3]{3x-1}\right| - \frac{1}{y} = C.$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $e^{x+y}dx + ydy = 0$ с начальным условием $y(0) = 0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, записанное через дифференциалы. Перепишем левую часть уравнения следующим образом

$$e^x e^y dx + ydy = 0.$$

Проведем разделение переменных и проинтегрируем

$$e^x dx + \frac{y}{e^y} dy = 0, \ \Rightarrow \int e^x dx + \int \frac{y}{e^y} dy = C.$$

Так как

$$\int \frac{y}{e^y} dy = \int ye^{-y} dy = \left| \begin{array}{l} \int udv = uv - \int vdu \\ u = y, dv = e^{-y}dy \\ du = dy, v = \int e^{-y}dy = -e^{-y} \end{array} \right| = -ye^{-y} + \int e^{-y} dy =$$

$$= -ye^{-y} - e^{-y} + C = -e^{-y}(y+1) + C,$$

то общий интеграл уравнения будет иметь вид:

$$e^x - e^{-y}(y+1) = C.$$

Для нахождения частного решения подставим начальное условие $y(0)=0$ в найденный общий интеграл уравнения:

$$e^0 - e^0(0+1) = C \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Тогда искомый частный интеграл:

$$e^x - e^{-y}(y+1) = 0.$$

Теоретические вопросы:

1. Написать общий вид дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
2. Как решается дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными?
3. Какие из приведенных уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными

а) $3y(x-y) = 4x(x+2y)y'$

б) $yy' + x = 1$

в) $2xdy - ydx = 1$

г) $x^2dx + ydy = 0$

д) $y' - 3y = e^{2x}y^2$

1.3 Однородные уравнения первого порядка. Уравнения, приводящиеся к однородным

Определение. Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n-го измерения относительно переменных x и y, если выполняется соотношение

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y),$$

где t - произвольное число, n - степень однородности.

Например, функция $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$ является однородной функцией измерения 2, так как

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + 2(ty)^2 - (tx \cdot ty) = t^2(x^2 + 2y^2 - xy) = t^2 f(x,y).$$

С понятием однородной функции связано понятие однородного дифференциального уравнения.

Определение. Уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.9}$$

называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка, если функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения. Однородное уравнение всегда можно представить в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.10}$$

и с помощью подстановки $y = tx$, где t –новая искомая функция от x, привести к уравнению с разделяющимися переменными:

$$x\frac{dt}{dx} = f(t) - t.$$

Дифференциальные уравнения

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{1.11}$$

с помощью замены

$$x = x_1 + \alpha\,, \quad y = y_1 + \beta \tag{1.12}$$

после соответствующего подбора значений постоянных α, β приводятся к однородному уравнению относительно x_1, y_1. Заменяя $dx = dx_1$, $dy = dy_1$ и подставляя (1.12) в уравнение (1.11), будем иметь

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2x_2 + b_2y_2 + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right).$$

Потребуем, чтобы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Тогда уравнение (1.11) становится однородным.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(xy - x^2)y' = y^2$.

Решение. Запишем данное дифференциальное уравнение в виде

$$y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0.$$

Функции $M(x,y)=y^2$ и $N(x,y)=x^2-xy$ - однородные функции второго измерения. Следовательно, данное дифференциальное уравнение является однородным. Представим уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}, \text{ или } \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}-1}.$$

Произведем замену неизвестной функции

$$\frac{y}{x}=t, \quad y=tx, \quad \frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}.$$

Подставляя в уравнение выражения для y и y' , получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$t+x\frac{dt}{dx}=\frac{t^2}{t-1}, \qquad \text{или} \qquad x\frac{dt}{dx}=\frac{t}{t-1}.$$

Разделив переменные, будем иметь

$$\frac{t-1}{t}dt=\frac{dx}{x}, \qquad \left(1-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{dx}{x}.$$

Отсюда, интегрированием находим

$$t-\ln|t|=\ln|x|+\ln|\tilde{N}|, \text{ или } \quad t=\ln|\tilde{N}xt|.$$

Возвращаясь к исходной функции y, получаем общее решение уравнения:

$$\frac{y}{x}=\ln|\tilde{N}y|, \text{ откуда } \quad y=\tilde{N}_1 e^{\frac{y}{x}}, \text{ где } C_1=\frac{1}{C}.$$

Пример 2. Решите дифференциальное уравнение $3x+y-2+y'(x-1)=0$.

Решение. Это дифференциальное уравнение, приводящееся к однородному. Представим уравнение в виде

$$y'=\frac{3x+y-2}{1-x}.$$

Положим $x=x_1+\alpha$, $y=y_1+\beta$, тогда $dx=dx_1$, $dy=dy_1$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{3x_1 + 3\alpha + y_1 + \beta - 2}{1 - x_1 - \alpha} = \frac{3x_1 + y_1 + (3\alpha + \beta - 2)}{-x_1 + (1-\alpha)}.$$

Подберем α и β так, чтобы

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta - 2 = 0 \\ 1 - \alpha = 0 \end{cases}.$$

Находим, что $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Тогда заданное уравнение принимает вид

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{3x_1 + y_1}{-x_1} = -3 - \frac{y_1}{x_1}$$

и будет являться однородным. Полагая $y_1 = tx_1$, получим

$$t'x_1 + t = -3 - t.$$

Откуда

$$\frac{dt}{dx_1} x_1 = -2t - 3.$$

Разделяем переменные

$$\frac{dt}{2t+3} = -\frac{dx_1}{x_1}.$$

Интегрируя, найдем

$$\frac{1}{2}\ln|2t+3| = -\ln|x_1| + C, \qquad x_1 \cdot \sqrt{\frac{2y_1}{x_1} + 3} = C_1, \text{ где } C_1 = e^C.$$

Учитывая, что $x_1 = x - 1$, $y_1 = y + 1$, возвращаемся к переменным x и y:

$$(x-1) \cdot \sqrt{\frac{2(y+1)}{(x-1)} + 3} = C_1$$

или

$$\sqrt{(x-1)(3x+2y-1)} = C_1, \quad (x-1)(3x+2y-1) = C_2, \qquad (C_2 = C_1^{\,2}).$$

Теоретические вопросы:

1. Какая функция называется однородной функцией n - го измерения?
2. Сформулируйте определение однородного дифференциального уравнения первого порядка
3. Изложите метод решения однородного уравнения первого порядка
4. Какая замена позволяет привести уравнение к однородному?
5. Какие из приведенных уравнений являются однородными:

а) $xy + y^2 = xy'$

б) $(2x-1)dx + (x+y)dy$

в) $x \cdot y' = x + 2y$

г) $y' = \dfrac{y}{x} + e^x$

д) $y' = x \cdot \sin\dfrac{y}{x} + y$

1.4 Линейные уравнения первого порядка

Определение. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной вида:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad , \tag{1.13}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ - заданные функции.

Если в частном случае $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (1.13) называется линейным однородным уравнением:

$$y' + P(x)y = 0. \tag{1.14}$$

Оно является уравнением с разделяющимися переменными и его общее решение имеет вид:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Рассмотрим два метода интегрирования линейного уравнения (1.13) - метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли. Для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения данным методом применим подстановку $y = u(x)v(x)$, причем функцию $u = u(x)$ будем считать новой неизвестной функцией, а функцию $v = v(x)$ мы выбираем произвольно. Эта подстановка дает

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

или

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) = Q(x).$$

Используя произвольный выбор функции v, подчиним ее условию

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dv}{v}=-P(x)dx, \quad \ln|v|=-\int P(x)dx.$$

Откуда $v=e^{-\int P(x)dx}$. Поэтому, имеем уравнение:

$$e^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{du}{dx}=Q(x).$$

Решая его, найдем функцию u:

$$u=C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Возвращаясь к переменной у, находим общее решение уравнения (1.13):

$$y=e^{-\int P(x)dx}(C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx).$$

Пример 1. Решить линейное уравнение $y'-2y=e^{2x}$.

Решение. Данное уравнение представляет собой линейное уравнение первого порядка. Произведем замену неизвестной функции $y(x)$, введя две новые функции $u(x)$ и $v(x)$ по формуле

$$y=uv, \quad y'=u'v+uv'.$$

Подставляя эти соотношения в заданное дифференциальное уравнение, имеем

$$u'v+uv'-2uv=e^{2x}.$$

Объединяем второй и третий члены:

$$u'v+u(v'-2v)=e^{2x}.$$

Приравнивая выражение в скобках нулю, получаем

$$v'-2v=0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}=2v, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v}=2dx.$$

После интегрирования, опуская произвольную постоянную, имеем

$$\ln|v| = 2x.$$

Потенцируя, находим

$$v = e^{2x}.$$

При таком выборе функции v преобразованное дифференциальное уравнение запишется в виде

$$u'e^{2x} = e^{2x}, \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = 1.$$

Откуда, после интегрирования, получим: $u = x + C$.
Искомое общее решение данного уравнения будет иметь вид

$$y = uv = (x + C)e^{2x} = xe^{2x} + Ce^{2x}.$$

Метод Лагранжа (метода вариации произвольных постоянных). Рассмотрим линейное однородное уравнение (1.14), общее решение которого имеет вид

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Суть метода вариации состоит в том, что постоянную C в полученном решении заменяем функцией $C(x)$. Решение уравнения (1.13) ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \qquad (*)$$

Для нахождения функции $C(x)$ подставляем y из последнего равенства в уравнение (1.13). Получаем:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

Откуда

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Подставим это значение $C(x)$ в (*):

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right).$$

Это есть общее решение линейного уравнения (1.13).

Пример 2. Решить линейное уравнение $y' + 2xy = x^3$ методом Лагранжа.

Решение. Решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение $y' + 2xy = 0$. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -2xdx\,.$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int 2xdx \;\;\Rightarrow\;\; \ln|y| = -x^2 + C \;\;\Rightarrow\;\; y = Ce^{-x^2}\,.$$

Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = C(x)e^{-x^2}\,, \qquad (**)$$

где $C(x)$ - неизвестная функция от x.
Продифференцируем последнее равенство

$$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2}\,. \qquad (***)$$

Подставляя (**) и (***) в исходное уравнение, получим

$$C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2} + 2C(x)xe^{-x^2} = x^3$$

или

$$C'(x)e^{-x^2} = x^3, \;\;\Rightarrow\;\; C'(x) = x^3e^{x^2}\,.$$

Найдем $C(x)$:

$$C(x) = \int x^3e^{x^2}dx = \begin{vmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{2}te^t dt = \begin{vmatrix} u = \frac{1}{2}t & dv = e^t dt \\ du = \frac{1}{2}dt & v = e^t \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}te^t - \int \frac{1}{2}e^t dt = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + C\,.$$

Итак, общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$\acute{o} = \left(\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + C\right)\mathring{a}^{-\tilde{o}^2} = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2}\,.$$

<u>Теоретические вопросы:</u>

1. Напишите общий вид линейного уравнения первого порядка
2. Выберите линейные уравнения из приведенных ниже:
   а) $x^2y' - 2xy = 3y$
   б) $y' = \dfrac{y}{x} + e^x$

в) $y' + \frac{y}{x} = 3\sqrt{x}$

г) $xy' = x + 2y^2$

д) $y' - \frac{2x}{y} = xe^{x^2}$

1.5 Уравнение Бернулли

Определение. Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{1.15}$$

где $n \neq 0$, $n \neq 1$, *P(x), Q(x)* - непрерывные функции от x, называется уравнением Бернулли.

Заметим, что если n=1, то уравнение (1.15) является уравнением с разделяющимися переменными. Решается уравнение Бернулли также как и линейное уравнение с помощью подстановки $y = uv$ или же сводится к линейному уравнению с помощью подстановки $z = y^{1-n}$.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли при $n = \frac{1}{2}$. Воспользуемся заменой переменных $z = y^{1-n} = y^{1/2}$. Тогда $y = z^2, y' = 2zz'$ и исходное уравнение принимает вид:

$$2zz' - \frac{4}{x}z^2 = xz, \quad \text{или} \quad z' - \frac{2}{x}z = \frac{1}{2}x.$$

Получили линейное уравнение, которое решим с помощью подстановки $z = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = \frac{1}{2}x.$$

Сгруппируем

$$u'v + u(v' - \frac{2}{x}v) = \frac{1}{2}x.$$

Полагаем

$$v' - \frac{2}{x}v = 0, \text{ тогда } \frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\ln v = 2\ln x, \quad \text{или} \quad v = x^2.$$

Теперь, подставив значение функции v в уравнение, решим его:

$$u'x^2 = \frac{1}{2}x, \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2x}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$u = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C, \quad \text{или } u = \ln\left|C\sqrt{x}\right|,$$

Тогда

$$z = x^2 \ln\left|C\sqrt{x}\right|,$$

и общее решение исходного уравнения принимает вид:

$$y = z^2 = (x^2 \ln\left|C\sqrt{x}\right|)^2 = x^4 \ln^2(C\sqrt{x}).$$

Пример 2. Решить уравнение $y' + 2y = y^2 e^x$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли с показателем $n = 2$. Сделаем замену неизвестной функции $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Тогда

$$u'v + uv' + 2uv = (uv)^2 e^x.$$

Сгруппируем

$$u'v + u(v' + 2v) = (uv)^2 e^x. \tag{*}$$

Найдем сначала функцию $v(x)$, которая обратила бы в нуль выражение, стоящее в скобках в левой части уравнения (*)

$$v' + 2v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -2v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -2dx$$

В результате интегрирования получаем

$$\ln|v| = -2x \quad \Rightarrow \quad v = e^{-2x}.$$

Подставим теперь полученную функцию $v(x)$ в уравнение (*) :

$$u'e^{-2x} = u^2 e^{-4x} e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u^2 e^{-x}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим функцию $u(x)$:

$$\int \frac{du}{u^2} = \int e^{-x} dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{u} = -e^{-x} + C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{e^{-x} - C}.$$

Теперь, можем записать общее решение дифференциального уравнения:

$$y = uv = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} - C} = \frac{1}{e^{2x}(e^{-x} - C)} = \frac{1}{e^{x} - Ce^{2x}}.$$

Теоретические вопросы:

1. Написать общий вид уравнения Бернулли
2. Какие из ниже приведенных уравнений являются уравнением Бернулли:
   а) $y' + y = e^{-x} y$
   б) $xy' + y = \dfrac{\sin x}{y^2}$
   в) $(1 - x^2)y' + xy = 1 + y^3$
   г) $(x^2 - 1)y' - \dfrac{x}{y} = x^3 - x$
   д) $y' = \dfrac{y}{x} - y^2$

1.6 Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1.16}$$

называют уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \equiv du$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1.17}$$

В этом случае $u(x, y) = C$ есть общий интеграл данного уравнения.
Функция $u(x, y)$ может быть найдена по формуле

$$u(x;y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy\,. \qquad (1.18)$$

Окончательной формулой общего интеграла уравнения в полных дифференциалах является

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C\,, \qquad (1.19)$$

где (x_0,y_0) - некоторая фиксированная точка.

Пример. Найти общий интеграл заданного уравнения $(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$.

Решение. В нашем уравнении $P(x,y)=2x+y, Q(x,y)=x+2y$. Проверим выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2x+y)=1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)=1\,.$$

Условие (1.17) выполнено, следовательно, заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем функцию $u(x,y)$

$$u(x;y)=\int_{0}^{x}(2x+y)dx+\int_{0}^{y}(x+2y)dy=(x^2+yx)\Big|_0^x+(xy+y^2)\Big|_0^y=$$
$$=x^2+yx+xy+y^2=C.$$

Следовательно, общим интегралом уравнения является

$$x^2+xy+y^2=C.$$

<u>Теоретические вопросы</u>:

1. Написать общий вид уравнения в полных дифференциалах
2. Какие из записанных ниже уравнений являются уравнениями в полных дифференциалах:

а) $\left(3ye^{3x}+1\right)dx+e^{3x}ydy=0$

б) $(2x^3-xy^2)dx-(2y^3-x^2y)dy=0$

в) $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$

г) $(3x^2y^2+7y)dx+2x^3ydy=0$

д) $(12x+5y-9)dx+(5x+2y-4)dy=0$

3.Определите тип приведенных ниже дифференциальных уравнений:

а) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2\ln x-3y}{x^2}$

б) $(1-y\sin x)dx+\cos xdy=0$

в) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$

г) $xyy'=y^2+2x^2$

д) $y'+xy=x^3y^3$

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1 Основные понятия

Определение. Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0 \tag{2.1}$$

или, если оно разрешено относительно старшей производной

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}). \tag{2.2}$$

Теорема. (Существования и единственности решения). Если в уравнении (2.2) функция $f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$ удовлетворяет следующим условиям:

а) непрерывна по всем своим аргументам $x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}$ в некоторой области D их изменения,

б) имеет непрерывные в области D частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y''}$, …, $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ по аргументам $y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}$,

то существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{2.3}$$

где значения $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y'_0$, $y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ содержатся в области D.

Условия

$$x=x_0,\ y=y_0,\ y'=y'_0,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$$

называются начальными условиями.

Задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ уравнения (2.2), удовлетворяющего начальным условиям (2.3), называется задачей Коши для уравнения (2.2). Для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ начальные условия имеют вид:

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0',$$

где x_0, y_0, y_0' - заданные числа. В этом случае теорема существования и единственности геометрически означает, что через данную точку $M(x_0, y_0)$ плоскости XOY с данным тангенсом угла наклона касательной y_0' проходит единственная кривая.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка (2.2) называется множество всех его решений, определяемое формулой $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, содержащей n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, таких, что, если заданы начальные условия (2.3), то найдутся такие значения $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$, что $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)$ будет являться решением уравнения (2.2), удовлетворяющим этим начальным условиям.

Любое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, называется частным решением дифференциального уравнения.

Если общее решение дифференциального уравнения задано в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

то оно называется общим интегралом этого уравнения.

Давая постоянным $C_1, C_2, \ldots, C_n$ конкретные допустимые числовые значения, получим частный интеграл дифференциального уравнения. График частного решения или интеграла называется интегральной кривой данного дифференциального уравнения.

Пример. Показать, что функция $y = e^{-x}(3\cos x - 2\sin x)$ является общим решением уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Решение. Найдем y' и y'':

$$y' = e^{-x}(-3\cos x + 2\sin x - 3\sin x - 2\cos x) = e^{-x}(-5\cos x - \sin x)$$

$$y'' = e^{-x}(5\cos x + \sin x + 5\sin x - \cos x) = e^{-x}(4\cos x + 6\sin x).$$

Теперь подставим значения производных y' и y'' в уравнение:

$$e^{-x}(4\cos x + 6\sin x + 2(-5\cos x - \sin x) + 2(3\cos x - 2\sin x)) = 0.$$

Раскрывая скобки и приведя подобные слагаемые, получим

$$e^{-x}\cdot 0=0 \quad \text{или} \quad 0\equiv 0\,.$$

Теоретические вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения n-го порядка.
2. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.
3. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения n-го порядка.
4. Что называется частным решением дифференциальное уравнение n-го порядка.

2.2 Диффереенциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования дифференциального уравнения высших порядков является метод понижения порядка. Суть метода заключается в том, что с помощью замены переменной данное уравнение сводится к уравнению, порядок которого ниже исходного.

Укажем некоторые виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Простейшим дифференциальным уравнением n - го порядка является уравнение, содержащее независимую переменную и производную n - го порядка:

$$y^{(n)}=f(x), \tag{2.4}$$

где $f(x)$ - дифференцируемая функция в интервале (a,b).

Последовательно интегрируя дифференциальное уравнение (2.4) n раз и каждый раз соответственно понижая порядок производной, получим

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1=\varphi_1(x)+C_1\,,$$
$$y^{(n-2)}=\int \varphi_1(x)dx+\int C_1dx+C_2=\varphi_2(x)+C_1x+C_2\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y=\varphi_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_n\,.$$

Последнее равенство является общим решением дифференциального уравнения (2.4).

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения $y^{IV}=\sin x$.

Решение. Проинтегрируем данное уравнение 4 раза:

$$y''' = \int \sin x dx + C_1 = -\cos x + C_1\,,$$

$$y'' = \int -\cos x dx + \int C_1 dx = -\sin x + C_1 x + C_2\,,$$

$$y' = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = \sin x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4\,.$$

2. Пусть дано дифференциальное уравнение, не содержащее искомой функции

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0\,. \tag{2.5}$$

С помощью подстановки $y^{(k)} = t(x)$, где t - новая неизвестная функция, можно понизить его порядок на k единиц, то есть привести к уравнению $(n-k)$ - го порядка:

$$F(x, t, t', t'', \ldots, t^{(n-k)}) = 0\,. \tag{2.6}$$

В частном случае уравнение второго порядка вида $F(x, y', y'') = 0$ с помощью подстановки $y' = t(x)$ приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$F(x, t, t') = 0\,.$$

Если в результате интегрирования дифференциального уравнения (2.6) имеем

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})\,,$$

то, возвращаясь к переменной y, получим

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})\,.$$

В результате интегрирования каждого из этих дифференциальных уравнений вводятся k новых произвольных постоянных. В итоге получаем общее решение дифференциального уравнения n - го порядка (2.5).

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $x^2 y'' + xy' = 1.$

Решение. Это дифференциальное уравнение не содержит явно функцию y. Пусть $y' = t(x)$, $y'' = t'$, тогда исходное уравнение примет вид

$$x^2 t' + xt = 1.$$

Получили линейное уравнение первого порядка, которое будем решать с помощью замены $t = uv$, тогда $t' = u'v + uv'$. Подставляя зачения t, t' в исходное уравнение и группируя, получим:

$$x^2 u'v + u(x^2 v' + xv) = 1. \qquad (*)$$

Приравняем выражение в скобках к нулю и найдем функцию *v:*

$$x^2 v' + xv = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Подставим найденное значение функции v в уравнение (*) и найдем функцию u:

$$x^2 u' \frac{1}{x} = 1, \quad du = \frac{dx}{x},$$

или

$$u = \ln|x| + C_1.$$

Тогда общим решением этого уравнения будет

$$t = \left(\ln|x| + C_1\right) \cdot \frac{1}{x}.$$

Возвращаясь к исходной функции и используя обратную подстановку $t = y'$, находим

$$y' = \left(\ln|x| + C_1\right) \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда

$$y = \int \frac{\ln|x|}{x} dx + C_1 \int \frac{dx}{x} = \frac{\ln^2|x|}{2} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

3. Рассмотрим дифференциальные уравнения, не содержащие явно независимой переменной:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (2.7)$$

Подстановка $y' = p$ позволяет понизить порядок уравнения на единицу. При этом p рассматривается как новая неизвестная функция от y: $p = p(y)$. Выражаем все производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ через производные от новой неизвестной функции p по y:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \text{ и т.д.}$$

Подставив эти выражения вместо $y', y'', ..., y^{(n)}$ в уравнение, получим дифференциальное уравнение $(n-1)$ порядка:

$$F(y, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0.$$

В частном случае дифференциальное уравнение второго порядка $F(y, y', y'') = 0$ с помощью замены $y' = p(y)$ приводится к дифференциальному уравнению первого порядка $F(y, p, p') = 0$.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$.

Решение. Данное уравнение не содержит независимой переменной x. Полагая $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$y\frac{dp}{dy}p - p^2 + p^3 = 0.$$

Разделим уравнение на $p \neq 0$. Если $p = 0$, $y' = 0$, значит $y = C$. Получим

$$y\frac{dp}{dy} - p + p^2 = 0, \quad y\frac{dp}{dy} = p - p^2.$$

Разделив переменные, проинтегрируем:

$$\frac{dp}{p - p^2} = \frac{dy}{y},$$

$$\ln\left|\frac{p}{p-1}\right| = \ln|C_1 y|$$

или

$$\frac{p}{p-1}=C_1 y\,.$$

Из этого равенства найдем p :

$$p=C_1 y(p-1)\,,\qquad p=\frac{C_1 y}{C_1 y-1}\,.$$

Учитывая, что $y'=p(y)$, получаем следующее уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1 y}{C_1 y-1},\qquad \frac{C_1 y-1}{C_1 y}dy=dx\,.$$

Интегрируем

$$\int\left(1-\frac{1}{C_1 y}\right)dy=\int dx+C_2\,,$$

$$y-\frac{1}{C_1}\ln|y|=x+C_2\,.$$

Если обозначить $-\frac{1}{C_1}=\overline{C_1}$, то общий интеграл уравнения примет вид :

$$y+\overline{C_1}\ln|y|=x+C_2$$

Теоретические вопросы:

1. Как решается дифференциальное уравнение $y^{(n)}=f(x)$?
2. Какая подстановка позволяет понизить порядок дифференциального уравнения $F(x,y',y'')=0$?
3. Каким образом можно понизить порядок дифференциального уравнения $F(y,y',y'')=0$?
4. Какие из данных уравнений допускают понижение порядка:
   а) $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$
   б) $y''=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$
   в) $y''+2y'+3y=x^2+1$
   г) $y'''=y'-3$
   д) $2xy'y''=(y')^2+1$

3 ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1 Основные понятия

Определение. Линейным дифференциальным уравнением n - го порядка называется уравнение вида

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + b_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + b_n(x)y = g(x), \tag{3.1}$$

где $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x)$ и $g(x)$ - заданные функции от x, причем $b_0(x) \neq 0$ для всех значений x из той области, в которой рассматривается уравнение (3.1). Оно содержит искомую функцию y и все ее производные лишь в первой степени. Функции $b_0(x)$, $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x)$ называются коэффициентами уравнения (3.1), а функция $g(x)$ - его свободным членом.

Разделив уравнение (3.1) на $b_0(x) \neq 0$ и обозначив

$$\frac{b_1(x)}{b_0(x)} = a_1(x),\ \ldots,\ \frac{b_n(x)}{b_0(x)} = a_n(x),\ \frac{g(x)}{b_0(x)} = f(x),$$

запишем уравнение (3.1) в виде приведенного уравнения:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x). \tag{3.2}$$

Если $g(x) \neq 0$, то уравнение (3.2) называется линейным неоднородным или уравнением с правой частью. Если свободный член $g(x) = 0$, то уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \tag{3.3}$$

и называется линейным однородным или уравнением без правой части.

Рассмотрим основные свойства линейных однородных уравнений, ограничиваясь уравнениями 2-го порядка.

Теорема 1. Если функции y_1 и y_2 - два частных решения линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{3.4}$$

то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.

Теорема 2. Если y_1 есть решение уравнения (3.4), то Cy_1, где С – постоянный множитель, также будет решением этого уравнения.

Определение. Два решения уравнения (3.4) y_1 и y_2 называются линейно независимыми на отрезке [a, b], если их отношение на этом отрезке не является постоянным, то есть если

$$\frac{y_1}{y_2} \neq const .$$

В противном случае решения называются линейно зависимыми. Иными словами, два решения y_1 и y_2 называются линейно зависимыми на отрезке [a, b], если существует такое постоянное число λ, что $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ при $a \leq x \leq b$. В этом случае $y_1 = \lambda y_2$.

Пример. Являются ли функции $y_1 = tgx$, $y_2 = ctgx$, $y_3 = \sin 2x$ линейно независимыми.

Решение. Функции y_1 и y_2 линейно независимы, так как их отношение

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{tgx}{ctgx} = tg^2 x \neq const .$$

Функции y_1 и y_3 также линейно независимы:

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{tgx}{\sin 2x} = \frac{tgx}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{2\cos^2 x} \neq const .$$

Определение. Если y_1 и y_2 функции от x, то определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

называется определителем Вронского или вронскианом данных функций.

Теорема 3. Если решения y_1 и y_2 уравнения (3.4) линейно независимы на отрезке [a, b], то определитель Вронского, составленный для этих решений, не обращается в нуль ни в одной точке указанного отрезка.

Определение. Совокупность любых двух линейно независимых частных решений y_1 и y_2 уравнения (3.4) определяет фундаментальную систему решений этого уравнения.

Теорема 4. Если y_1 и y_2 – два линейно независимых решения уравнения (3.4) , то

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 , \tag{3.5}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, есть его общее решение.

Теоретические вопросы:

1. Дайте определение линейного дифференциального уравнения n- го порядка (однородного и неоднородного).
2. Дайте определение линейно независимых и линейно зависимых функций.
3. Какой вид имеет общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка
4. Сформулируйте свойства решений линейного однородного уравнения

3.2 Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{3.6}$$

где p и q – постоянные действительные числа.

Чтобы найти общий интеграл этого уравнения, достаточно найти два линейно независимых частных решения. Простой метод нахождения частных решений уравнения с постоянными коэффициентами предложил Л. Эйлер. Этот метод, который называется методом Эйлера, состоит в том, что частные решения ищутся в виде

$$y = e^{kx}, \qquad \text{где } k = \text{const}. \tag{3.7}$$

Тогда

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx}.$$

Подставляя в уравнение (3.6) вместо y'', y' и y их значения, получим:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то, очевидно,

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3.8}$$

Следовательно, если k будет удовлетворять уравнению (3.8), то e^{kx} будет решением уравнения (3.6). Уравнение (3.8) называется характеристическим уравнением по отношению к уравнению (3.6).

Заметим, что для составления характеристического уравнения достаточно в уравнении (3.6) вместо y'', y' и y написать соответственно k^2, k и 1.

Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня; обозначим их через k_1 и k_2. При этом дискриминант равен

$D=\frac{p^2}{4}-q$, а корни равны $k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, $k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

Возможны следующие случаи:

1. Если D>0, то k_1 и k_2 – действительные, не равные между собой числа $(k_1 \neq k_2)$;

2. Если D<0, то k_1 и k_2 – комплексные числа;

3. Если D=0, то k_1 и k_2 – действительные и равные числа $(k_1 = k_2)$.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

1. Корни характеристического уравнения действительные и различные $(k_1 \neq k_2)$. В этом случае частными решениями будут функции

$$y_1=e^{k_1x}, \quad y_2=e^{k_2x}.$$

Эти решения линейно независимы, так как

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}}=e^{(k_2-k_1)x}\neq const.$$

Следовательно, общее решение имеет вид $y = C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$.

Пример 1. Решить уравнение $y''+3y'+2y=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $k^2+3k+2=0$. Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}, \quad k_1=-1, \quad k_2=-2.$$

Таким образом, линейно независимыми частными решениями для данного уравнения будут

$$y=e^{-x}, \quad y=e^{-2x},$$

а его общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

2. Корни характеристического уравнения действительные и равные. В этом случае $k_1 = k_2$.

Одно частное решение $y_1=e^{k_1x}$ получается на основании предыдущих рассуждений. Нужно найти второе частное решение, линейно независимое с первым (функция e^{k_2x} тождественно равна e^{k_1x} и поэтому не может рассматриваться в качестве второго частного решения).

Будем искать второе частное решение в виде $y_2=u(x)e^{k_1x}$, где $u(x)$ - неизвестная функция, подлежащая определению. Дифференцируя, находим

$$y_2' = u'e^{k_1x} + k_1ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u' + k_1u),$$

$$y''_2 = u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1{}^2ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u'' + 2k_1u' + k_1^2u)\ .$$

Подставляя выражения производных в уравнение (3.6), получаем

$$e^{k_1x} \cdot \left[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u\right] = 0\ .$$

Так как k_1 – кратный корень характеристического уравнения, то

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0\ .$$

Кроме того, $k_t = k_2 =- p/2$ или $2k_1 =-p$, $2к_1+p= 0.$

Следовательно, для того чтобы найти $u(x)$, надо решить уравнение $e^{k_1x}u'' = 0$, или $u'' = 0$. Интегрируя, получаем $u = Ax+B$. В частности, можно положить $A=1$, $B = 0$, тогда $u = x$. Таким образом, в качестве второго частного решения можно взять $y_2 = xe^{k_1x}$. Это решение линейно независимо с первым, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const.}$$

Поэтому общим решением будет функция

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)\ .$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$.

Составим характеристическое уравнение: $k^2 - k + \frac{1}{4} = 0$. Находим его корни $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$. Тогда общим решением будет

$$y = C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2xe^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}(C_1 + C_2x).$$

3. Корни характеристического уравнения комплексные, а именно:

$$k_1 = \alpha + \beta i\,, \qquad k_2 = \alpha - \beta i\,,\ \text{где}\ i = \sqrt{-1}\,,$$

и

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\ .$$

Частными решениями уравнения (3.6) будут

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}. \tag{3.9}$$

Однако эти решения можно преобразовать в выражения, которые не содержат мнимых величин. Представим функции (3.9) в следующем виде:

$$y_1 = e^{\alpha x+\beta xi} = e^{\alpha x}e^{\beta xi}, \quad y_2 = e^{\alpha x-\beta xi} = e^{\alpha x}e^{-\beta xi}.$$

Сложим эти равенства, а затем вычтем из первого второе, получим

$$y_1 + y_2 = e^{\alpha x}(e^{\beta xi} + e^{-\beta xi}),$$

$$y_1 - y_2 = e^{\alpha x}(e^{\beta xi} - e^{-\beta xi}).$$

Первое из полученных равенств умножим на $\frac{1}{2}$, второе – на $\frac{1}{2i}$:

$$\begin{cases} \dfrac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\dfrac{e^{\beta xi} + e^{-\beta xi}}{2}, \\ \dfrac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\dfrac{e^{\beta xi} - e^{-\beta xi}}{2i}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Согласно формулам Эйлера, имеем

$$\frac{e^{\beta xi} + e^{-\beta xi}}{2} = \cos\beta x, \quad \frac{e^{\beta xi} - e^{-\beta xi}}{2i} = \sin\beta x.$$

Поэтому равенства (3.10) примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ \dfrac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{cases} \tag{3.11}$$

$y_1 + y_2$ и $y_1 - y_2$ - частные решения уравнения (3.6), $\frac{y_1 + y_2}{2}$ и $\frac{y_1 - y_2}{2i}$ - также частные решения этого уравнения.

Итак, найдены два частных решения уравнения (3.6), представленные равенствами (3.11), причем эти решения линейно независимые.

Следовательно, общее решение уравнения (3.6) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x,$$

или

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \qquad (3.12)$$

Важным частным случаем решения (3.12) является случай, когда корни характеристического уравнения чисто мнимые.

Это имеет место тогда, когда в уравнении (3.6) $p = 0$, и оно имеет вид

$$y'' + qy = 0.$$

Характеристическое уравнение (3.8) принимает вид

$$k^2 + q = 0, \; q > 0.$$

Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm i\sqrt{q} = \pm i\beta, \quad \alpha = 0$.

Тогда решение (3.12) принимает вид

$$y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x.$$

Пример 3. Решить уравнение $y'' + 2y' + 2y = 0$

Решение. Напишем характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 2 = 0$ и найдем его корни $k_1 = -1 + i$, $k_2 = -1 - i$.

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Пример 4. Найти частное решение уравнения $y'' + 16y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 6$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 16 = 0$. Находим его корни: $k_1 = 4i$, $k_2 = -4i$.

Общим решением будет функция

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Найдем частное решение. Предварительно найдем производную

$$y' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий $x = 0, y = 0, y' = 6$:

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \quad 6 = -4C_1 \sin 0 + 4C_2 \cos 0.$$

Они равны $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{3}{2}$.

Тогда, частное решение имеет вид: $y = \frac{3}{2}\sin 4x$.

Теоретические вопросы:

1. Какой общий вид имеют линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. В чем состоим метод Эйлера интегрирования однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами?
3. Как составляется характеристическое уравнение для заданного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
4. Как составляется общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
5. Какие из приведенных ниже уравнений являются линейными однородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y''+6y'+10y = 0$

б) $2y''-y'-y = e^{-x}(3x+1)$

в) $3y''-4y'+y = xe^{x}$

г) $y''+4y = x^2 + 3$

д) $y''-3y' = 2$

е) $xy''+y'-2y = 0$

3.3 Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{3.13}$$

где коэффициенты a_1 $a_2, \ldots, a_n$ - постоянные числа.

Частное решение уравнения (3.13) также ищем в виде $y = e^{kx}$, где k - постоянное число.

Характеристическим уравнением для (3.13) будет алгебраическое уравнение n-го порядка вида:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0. \tag{3.14}$$

Пусть k_1, k_2, …, k_n корни характеристического уравнения (3.14). Причем среди них могут быть и кратные. Возможны следующие случаи.

1. Пусть k_1, k_2, …, k_n - действительные и различные. Тогда общее решение однородного уравнения будет

$$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.

Решение. Решаем характеоистическое уравнение $k^3 + 2k^2 - k - 2 = 0$: $(k^3 + 2k^2) - (k + 2) = 0$, $k^2(k+2) - (k+2) = 0$, $(k+2)(k^2 - 1) = 0$, $k_1 = -2, k_2 = 1, k_3 = -1$.

Следовательно, общее решение

$$\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + C_n e^{-x}$$

2. Корни k_1, k_2, …, k_n - действительные, но среди них есть кратные. Пусть, например, k_1 = k_2 =…= $k_l = \tilde{k}$, то есть $\tilde{k}$ является l - кратным корнем уравнения (3.14), а все остальные $n - l$ корней различные. Тогда общее решение однородного уравнения будет

$$\bar{y} = C_1 e^{\tilde{k}x} + C_2 x e^{\tilde{k}x} + \ldots + C_l x^{l-1} e^{\tilde{k}x} + C_{l+1} e^{k_{l+1}x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

3. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные.

Пусть для определенности $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, $k_3 = \gamma + \delta i$, $k_4 = \gamma - \delta i$, а остальные корни действительные. Тогда общее решение

$$\bar{y} = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3 e^{\gamma x}\cos\delta x + C_4 e^{\gamma x}\sin\delta x + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y^{iv} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^{iv} + 2k^3 + 4k^2 - 2k - 5 = 0$. Представим это уравнение в виде $(k-1)(k+1)(k^2 + 2k + 5) = 0$. Корнями этого уравнения будут числа $k_1 = 1, k_2 = -1$, $k_3 = -1 + 2i, k_4 = -1 - 2i$.

Общее решение

$$\bar{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + e^{-x}(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$$

<u>Теоретические вопросы:</u>

1. Запищите формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n - го порядка с постоянными

коэффициентами в случае действительных различных корней характеристического уравнения. Приведите пример

2. Запищите формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n - го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных действительных корней характеристического уравнения. Приведите пример

3. Запищите формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n - го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения. Приведите пример

4 ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Пусть задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{4.1}$$

и соответствующее ему линейное однородное уравнение (3.4)

Справедлива следующее утверждение.

Теорема (Структура общего решения) Общее решение неоднородного уравнения (4.1) представляется как сумма какого-нибудь частного решения y^* этого уравнения и общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения

$$y = \bar{y} + y^* . \tag{4.2}$$

Доказательство. Докажем сначала, что функция (4.2) есть решение уравнения (4.1). Подставляя сумму $y = \bar{y} + y^*$ в уравнение (4.1) вместо *y,* будем иметь

$$(\bar{y} + y^*)'' + P(x)(\bar{y} + y^*)' + Q(x)(\bar{y} + y^*) = f(x),$$

или

$$(y''^* + P(x)y'^* + Q(x)y^*) + (\bar{y}'' + P(x)\bar{y}' + Q(x)\bar{y}) = f(x) \ .$$

Это равенство является тождеством, так как $\bar{y}'' + P(x)\bar{y}' + Q(x)\bar{y} = 0$ и $y''^* + P(x)y'^* + Q(x)y^* = f(x)$. Следовательно, $y = \bar{y} + y^*$ есть решение уравнения (4.1).

Докажем теперь, что это решение является общим, т.е. можно так выбрать входящие в него произвольные постоянные, что будут удовлетворяться любые начальные условия вида:

$$y\big|_{x=0} = y_0, \quad y'\big|_{x=0} = y_0'. \tag{4.3}$$

Согласно теореме о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения общее решение уравнения (3.4) можно представить в виде $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где y_1 и y_2 – линейно независимые решения этого уравнения. Тогда

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$$

и, следовательно, начальные условия (4.3) можно записать в виде

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y^*(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + y'^*(x_0) = y_1' \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_1' - y'^*(x_0) \end{cases}.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из этой системы линейных алгебраических уравнений однозначно при любых правых частях, т.к. определитель этой системы $\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$ есть значение определителя Вронского для линейно независимых решений уравнения (3.4) при $x = x_0$, а такой определитель отличен от нуля. Определив постоянные C_1 и C_2 из последней системы уравнений и подставив их в выражение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$, мы получим частное решение уравнения (4.1), удовлетворяющее заданным начальным условиям. Теорема доказана.

Таким образом, задача интегрирования уравнения (4.1) сводится к нахождению частного решения неоднородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Непосредственное нахождение частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, кроме случая уравнения с постоянными коэффициентами, причем со специальными свободными членами, представляет большие трудности. Поэтому для нахождения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения обычно применяют метод вариации произвольных постоянных, который всегда дает возможность найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения в квадратурах, если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения. Этот метод состоит в следующем.

Напишем общее решение однородного уравнения и будем искать частное решение неоднородного уравнения в форме (3.5), рассматривая C_1 и C_2 как некоторые пока неизвестные функции от x.

Продифференцируем равенство (3.5):

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2$$

Подберем искомые функции C_1 и C_2 так, чтобы выполнялось равенство

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \qquad (4.4)$$

Если учесть это дополнительное условие, то первая производная y' примет вид $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$. Дифференцируя теперь это выражение, найдем y'':

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'$$

Подставляя y, y' и y'' в исходное уравнение, получим

$$C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + p(C_1 y'_1 + C_2 y'_2) + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

или

$$C_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + C_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x)$$

Выражения, стоящие в первых двух скобках, обращаются в нуль, так как y_1 и y_2 — решения однородного уравнения. Следовательно, последнее равенство принимает вид

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x) \qquad (4.5)$$

Таким образом, функция (3.5) будет решением неоднородного уравнения в том случае, если функции C_1 и C_2 удовлетворяют системе уравнений (4.4) и (4.5), то есть если

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x) \end{cases}$$

Так как определителем этой системы является определитель Вронского для линейно независимых решений y_1 и y_2 уравнения, то он не равен нулю; следовательно, решая систему, мы найдем C_1 и C_2 как функции от x:

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x).$$

Интегрируя, получим

$$C_1 = \int \varphi_1(x)dx + \overline{C}_1, \quad C_2 = \int \varphi_2(x)dx + \overline{C}_2$$

где $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ - постоянные интегрирования.

Подставляя полученные выражения C_1 и C_2 в равенство (3.5), найдем интеграл, зависящий от двух произвольных постоянных $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$, то есть общее решение неоднородного уравнения.

Пример. Найти решение задачи Коши $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения $y'' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = i$, $k_2 = -i$ и общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Чтобы последнее выражение было решением данного уравнения, надо определить C_1 и C_2 как функции от x из системы

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = 1/\cos x \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем

$$C'_1 = -tgx, \quad C'_2 = 1,$$

Откуда, в результате интегрирования, получаем

$$C_1 = \ln|\cos x| + \overline{C}_1, \qquad C_2 = x + \overline{C}_2$$

Подставляя найденные функции в формулу $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, получаем общее решение неоднородного уравнения

$$y = \overline{C}_1 \cos x + \overline{C}_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x, \qquad (*)$$

где $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ - произвольные постоянные.

Теперь найдем частное решение данного уравнения. Для этого продифференцируем последнее равенство:

$$y' = -\overline{C}_1 \sin x + \overline{C}_2 \cos x - \sin x \ln|\cos x| + x\cos x. \qquad (**)$$

Подставим в равенства (*) и (**) заданные начальные условия $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$:

$$1 = \overline{C}_1 \cos 0 + \overline{C}_2 \sin 0 + \cos 0 \cdot \ln|\cos 0| + 0 \cdot \sin 0,$$

$$0 = -\overline{C}_1 \sin 0 + \overline{C}_2 \cos 0 - \sin 0 \cdot \ln|\cos 0| + 0 \cdot \cos 0.$$

Решая полученную систему, найдем значения постоянных $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$: $\overline{C}_1 = 1$, $\overline{C}_2 = 0$.

Итак

$$y = \cos x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

<u>Теоретические вопросы:</u>

1. Дайте определение линейного неоднородного дифференциального уравнения
2. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения
3. В чем состоит метод Лагранжа нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения?

4.2 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Пусть имеем уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (4.6)$$

где p и q – действительные числа.

Рассмотрим метод отыскания частного решения уравнения (4.6) в случае, когда правая часть $f(x)$ имеет специальный вид. Этот метод называется методом неопределенных коэффициентов и состоит в подборе частного решения в зависимости от вида правой части. Рассмотрим правые части следующего вида:

I. Пусть правая часть уравнения (4.6) представляет собой произведение показательной функции на многочлен, то есть имеет вид

$$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}, \qquad (4.7)$$

где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени. Тогда возможны следующие частные случаи.

а) Число α не является корнем характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$. В этом случае частное решение нужно искать в виде

$$y^*=(A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_n)e^{\alpha x}=Q_n(x)e^{\alpha x} \tag{4.8}$$

Действительно, подставляя y^* в уравнение (4.6) и сокращая все члены на множитель $e^{\alpha x}$, будем иметь:

$$Q''_n(x)+(2\alpha+p)Q'_n(x)+(\alpha^2+p\alpha+q)Q_n(x)=P_n(x), \tag{4.9}$$

где $Q_n(x)$ - многочлен степени n, $Q'_n(x)$ - многочлен степени n-1, $Q''_n(x)$ - многочлен степени n-2.

Таким образом, слева и справа от знака равенства стоят многочлены n-*й* степени. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (число неизвестных коэффициентов равно $n+1$), получим систему $n+1$ уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$.

б) Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения.

Если бы в этом случае частное решение мы стали искать в форме (4.8), то в равенстве (4.9) слева получился бы многочлен $(n$-$1)$-*й* степени, так как коэффициент при $Q_n(x)$, т. е. $\alpha^2+p\alpha+q$, равен нулю, а многочлены $Q'_n(x)$ и $Q''_n(x)$ имеют степень, меньшую n. Следовательно, ни при каких $A_o, A_1, ..., A_n$ равенство (4.9) не было бы тождеством. Поэтому в рассматриваемом случае частное решение нужно брать в виде многочлена $(n+1)$-*й* степени, но без свободного члена

$$y^*=xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

в) Число α есть двукратный корень характеристического уравнения. Тогда в результате подстановки в дифференциальное уравнение функции $Q_n(x)e^{\alpha x}$ степень многочлена понижается на две единицы. И частное решение можно брать в форме

$$y^*=x^2Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''+2y'-3y=x^2e^x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2+2k-3=0$ имеет корни $k_1=-3$, $k_2=1$. Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения будет функция: $\bar{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^x$.

Так как правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $(Ax^2+Bx+C)e^x$ (т.е. вид $Ð_2(õ)e^x$), причем $\alpha=1$ является корнем характеристического уравнения $k^2+2k-3=0$, то частное решение будем искать в виде $ó^*=(Ax^2+Bx+C)xe^x$, $À, Â$ – неопределенные коэффициенты. Найдем производные первого и второго порядков и подставим их значения в заданное уравнение:

$$12Ax^2+(6A+8B)x+2B+4C=x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$$12A=1,\ \ 6A+8B=0,\ \ 2B+4C=0.$$

Откуда $A=\frac{1}{12}$, $B=-\frac{1}{16}$, $C=\frac{1}{32}$. Следовательно, $y^*=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}$, а общее решение имеет вид

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y''+y=x^2-1$.

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид: $k^2+1=0$, откуда $k_1=i$, $k_2=-i$. Тогда общее решение однородного уравнения $y''+y=0$ есть:

$$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Так как правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $(Ax^2+Bx+C)e^{0x}$ (т.е. вид $Ð_2(õ)e^{0x}$), причем $\alpha=0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будет выглядеть так:

$$y^*=Ax^2+Bx+C.$$

Находим неопределенные коэффициенты A, B и C. В результате получаем $A=1$, $B=0$, $C=-3$. Окончательно имеем следующее выражение для общего решения:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-3.$$

II. Пусть правая часть уравнения (4.6) имеет вид

$$f(x)=e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x) \qquad (4.10)$$

где *P (x)* и Q *(x)* – многочлены, то форма частного решения определяется так:

а) если число $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения следует искать в виде

$$y^* = e^{\alpha x}(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x), \tag{4.11}$$

где $\grave{A}(x)$ и $\hat{A}(x)$ — многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов *P(x)* и *Q(x);*

б) если число $\alpha+\beta i$ есть корень характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y^* = xe^{\alpha x}(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x). \tag{4.12}$$

Указанные формы частных решений (4.11) и (4.12) сохраняются и в том случае, когда в правой части уравнения (4.6) один из многочленов $Đ(x)$ и $Q(x)$ тождественно равен нулю, т. е. когда правая часть имеет вид $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ или $Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Частный случай. Пусть правая часть линейного уравнения второго порядка имеет вид

$$f(x) = P\cos\beta x + Q\sin\beta x \tag{4. 10'}$$

где P и Q - постоянные числа.

а) Если βi не является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x. \tag{4.11'}$$

б) Если βi является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$y^* = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x). \tag{4.12'}$$

Пример 3. Найти общий интеграл линейного неоднородного уравнения $y'' - 4y' + 5y = 6\sin x + 2\cos x$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 5 = 0$. Откуда $k_1 = 2 + i$, $k_2 = 2 - i$.

Следовательно, $\bar{y} = e^{2x}(C_1\sin x + C_2\cos x)$.

Правая часть уравнения $f(x)=6\sin x+2\cos x$ - произведение многочлена нулевой степени на $6\sin x+2\cos x$ ($\alpha=0,\ \beta=1$). Число $\alpha\pm\beta i=\pm i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде

$$y^{\bullet}=A\sin x+B\cos x.$$

Найдем $y'^{*}=A\cos x-B\sin x$, $y''^{*}=-A\sin x-B\cos x$. Подставив y^{*}, y'^{*} и y''^{*} в исходное уравнение, получим тождество

$$-A\sin x-B\cos x-4(A\cos x-B\sin x)+5(A\sin x+B\cos x)=6\sin x+2\cos x,$$

$$(-A+4B+5A)\sin x+(-B-4A+5B)\cos x=6\sin x+2\cos x.$$

Приравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$:

$$\begin{cases} 4A+4B=6 \\ -4A+4B=2 \end{cases},\qquad \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=1 \end{cases}.$$

Частное решение данного неоднородного уравнения

$$y^{*}=A\sin x+B\cos x=\frac{1}{2}\sin x+\cos x.$$

Тогда общее решение неодродного уравнения:

$$y=\bar{y}+y^{*}=e^{2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)+\frac{1}{2}\sin x+\cos x.$$

Для определения частного решения неоднородного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, найдем производную функции

$$y=e^{2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)+\frac{1}{2}\sin x+\cos x,$$

$$y'=e^{2x}(2C_1\sin x+2C_2\cos x-C_2\sin x+C_1\cos x+\frac{1}{2}\cos x-\sin x.$$

Подставим $x=0$, $y=0$, $y'=0$ в последние равенства и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_2+1=0 \\ C_1+2C_2+\dfrac{1}{2}=0 \end{cases}.$$

Решая систему, определяем $C_1 = \frac{3}{2}$, $C_2 = -1$. Тогда, частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид:

$$y = e^{2x} - e^{3x} - \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{5}{6}\cos 3x.$$

Пример 4. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 2$. Общее решение однородного уравнения есть

$$\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = e^{2x}(M\cos 6x + N\sin 6x)$, причем M = 0, N =1. Так как число $\alpha + \beta i = 2 + 6i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y^* = e^{2x}(A\cos 6x + B\sin 6x).$$

Найдем производные первого и второго порядков и подставив значения y'', y' и y в исходное уравнение, получим после приведения подобных членов

$$-36Ae^{2x}\cos 6x - 36Be^{2x}\sin 6x = e^{2x}\sin 6x.$$

Приравнивая коэффициенты при cos6x и sin6x, получим $-36A = 0$, $-36A = 0$. Отсюда $A = 0$, $B = -\frac{1}{36}$.

Следовательно, частное решение

$$y^* = -\frac{1}{36}e^{2x}\sin 6x,$$

а общее

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} - \frac{1}{36}e^{2x}\sin 6x.$$

Теоретические вопросы:

1. Как составляется общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
2. В чем заключается суть метода неопределенных коэффициентов?

3. Изложите правило для нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$- многочлен степени n.
4. Изложите правило для нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$
5. Какие из приведенных ниже уравнений представляют собой линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и имеют правую часть: а) вида I; б) вида II? Укажите степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$:

а) $y''+6y'+10y = e^{3x}x\sin 2x$

б) $2y''-y'-y = e^{-x}(3x+1)$

в) $3y''-4y'+y = xe^{x}$

г) $y''+4y = x^2+3$

д) $y''-3y' = e^{x}(2x^2-5x+1)$

е) $y''+y'-2y = 2\sin 3x + \cos 3x$

4.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (4.13)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $f(x)$- заданные непрерывные функции на (a,b).

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0. \qquad (4.14)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Общее решение линейного неоднородного уравнения n-го порядка (4.13) равно сумме какого-нибудь частного решения y^* этого уравнения и общего решения $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения (4.14), т.е. $y = \bar{y} + y^*$.

В общем случае интегрирование уравнения (4.13) может быть осуществлено методом вариации произвольных постоянных. Однако для правых частей специального вида частные решения иногда находятся проще, а именно:

I. Пусть в правой части дифференциального уравнения стоит функция $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, где *P (x)* - многочлен от *x;* тогда надо различать два случая:

а) если α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение можно искать в виде

$$y^* = Q(x)e^{\alpha x},$$

где *Q (x)*—многочлен той же степени, что и *P(x),* но с неопределенными коэффициентами;

б) если α есть корень кратности μ характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения можно искать в форме

$$y^* = x^{\mu}Q(x)e^{\alpha x},$$

где *Q (x)* - многочлен той же степени, что и *P(x).*

II. Пусть правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = P\cos\beta x + Q\sin\beta x,$$

где *P* и *Q* - постоянные числа. Тогда вид частного решения определяется следующим образом:

а) если число βi не является корнем характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x,$$

где *A* и *B* - постоянные неопределенные коэффициенты;

б) если число βi есть корень характеристического уравнения кратности μ, то

$$y^* = x^{\mu}(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$$

III. Пусть правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$$

где *P (x)* и Q *(x)* – многочлены от x. Тогда форма частного решения определяется так:

а) если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения следует искать в виде

$$y^* = e^{\alpha x}(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x),$$

где $\grave{A}(x)$ и $\hat{A}(x)$ — многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов *P(x)* и *Q(x);*

б) если число $\alpha + \beta i$ есть корень кратности μ характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y^* = x^{\mu} e^{\alpha x}(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x).$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 + 2k^3 + k^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 0$, $k_{3,4} = -1$. Находим общее решение однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$$

В правой части уравнения стоит многочлен 2-й степени, $\alpha = 0$ есть двукратный корень характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в форме $y^* = (Ax^2 + Bx + C)x^2$. Дифференцируя $\acute{o}^*$ четыре раза и подставляя полученные выражения в заданное уравнение, имеем

$$12Ax^2 + x(48A + 6B) + (24A + 12B + 2C) = x^2 + x - 1$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *x:*

$$\begin{cases} 12A = 1 \\ 48A + 6B = 1 \\ 24A + 12B + 2C = -1 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{12},\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, частное решение уравнения: $y^* = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

<u>Теоретические вопросы:</u>

1. Как зависит структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами от вида корней характеристического уравнения?
2. Как найти общее решение неоднородного линейного уравнения, если известно одно частное его решение и общее решение соответствующего однородного уравнения?

3. Изложите правило нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью вида $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$- многочлен степени n.

Контрольные вопросы

1. Что называетсяобыкновенным дифференциальным уравнением?
2. Что такое порядок дифференциального уравнения?
3. Что называется решением дифференциального уравнения?
4. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка и укажите его геметрический смысл?
5. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка
6. Что такое частное решение? Как оно связано с формулой общего решения?
7. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод нахождения его общего решения. Приведите пример.
8. Дайте определение однородного дифференциального уравнения. Изложите метод нахождения его общего решения. Приведите пример.
9. Какое уравнение называется обобщенным однородным? Как оно интегрируется?
10.Какое уравнение называется линейным? В чем состоят метод Лагранжа и метод Бернулли нахождения общего решения линейного уравнения?
11. Дайте определение уравнения Бернулли. Изложите метод нахождения его общего решения. Приведите пример.
12. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения второго порядка
13. Изложите метод решения дифференциального уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$. Приведите пример.
14. Изложите метод решения дифференциального уравнения вида $y'' = f(x, ó')$. Приведите пример.
15. Изложите метод решения дифференциального уравнения вида $y'' = f(ó, ó')$. Приведите пример.
16. Дайте определение линейного дифференциального уравнения n-го порядка (однородного и неоднородного)?
17. Докажите основные свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения
18. Дайте определение линейно зависимых и линейно независимых функций и приведите пример.
19. Докажите, что для линейно зависимых функций определитель Вронского равен нулю
20.Сформулируйте теорему об общем решении линейного дифференциального уравнения второго порядка

21. Изложите метод нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известно одно его частное решение

22. Запищите формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае действительных различных корней характеристического уравнения. Приведите пример

23. Запищите формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае равных корней характеристического уравнения. Приведите пример

24. Запищите формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения. Приведите пример

25. Сформулируйте теорему об общем решении линейного неоднородного уравнения второго порядка

26. Как находится частное решение уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$?

27. Изложите правило нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью вида $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$- многочлен степени n.

28. Изложите правило нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

29. В чем состоит метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения?

Контрольные задания

1 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $3(x^2y+y)dy+x\sqrt{2+y^2}dx=0$ б) $(x-y)ydx=x^2dy$

в) $y'\cos x+y\sin x=1$ г) $y'+xy=xy^2$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $x^5y'''+x^4y''=1$

б) $4y^3y''=y^4-1$, $y(0)=\sqrt{2}$, $y'(0)=1/2\sqrt{2}$

3. Решить задачу Коши $y''-6y'+8y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

4. Записать вид частного решения дифференциального уравнения
$y''-8y'-84y=f(x)$, где $f(x)=e^{6x}+x^2$

5. Решить уравнение

а) $y''-3y'+2y=e^{2x}$

б) $y''-7y'=(x-1)^2$

в) $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 2x$

2 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $x\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}y\cdot y'=0$ б) $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

в) $xy'+y=e^{-x}$ г) $y'+2xy=2x^3y^3$

2. Решить задачу Коши

а) $x^4y''+x^3y'=4$

б) $y^3y''+1=0$, $y(1)=-1$, $y'(1)=-1$

3. Решить задачу Коши $y''-10y'-24y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y''+14y'+33y=f(x)$, где $f(x)=e^{-3x}(x^2-1)$

5. Решить уравнение

а) $y'' + 2y' + y = (2x+1)e^{-x}$

б) $y'' + 9y = 6e^{3x}$

в) $y'' - y' = e^{2x}\cos x$

3 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $y(1+\ln y) + xy' = 0$ б) $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$

в) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$ г) $xy' + y = y^2 \ln x$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $(1+x^2)y'' + 2xy = 12x^3$,

б) $y'' = 2y^3$, $y(0) = -1$, $y'(-1) = 1$.

3. Решить задачу Коши $y'' + y' - 20y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' - 5y = f(x)$, где $f(x) = 2\sin\sqrt{5}x$

5. Решить уравнение

а) $y'' - y = (x+3)e^{-x}$

б) $y'' - 3y' = 2 - 6x$

в) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$

4 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + 2x = 0$ б) $(x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0$

в) $y' = \dfrac{y+1}{x}$ г) $y' - ytgx + y^2\cos x = 0$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $xy''' + 2y' = 0$,

б) $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.

3. Решить задачу Коши $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' + 8y = f(x)$, где $f(x) = e^{\sqrt{8}x}(2x+3)$

5. Решить уравнение

а) $y'' - y = \sin x + \cos x$

б) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

в) $y'' - 2y' - 3y = (8x - 14)e^{-x}$

5 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $\dfrac{y}{\ln y} + xy' = 0$

б) $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$

в) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

г) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $-xy''' + 2y'' = 2/x^2$,

б) $y^3 y'' + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2.$

3. Решить задачу Коши $y'' + 7y' + 10y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6.$

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' - 8y' + 15y = f(x)$, где $f(x) = 5e^{3x}$

5. Решить уравнение

а) $y'' + y = \sin x + \cos x$

б) $3y'' + 4y' = 8x + 6$

в) $y'' + 3y' + 2y = (2x+1)e^{-x}$

6 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $\sqrt{y^2 - 1} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$

б) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x} + 1$

в) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$

г) $y' + y = xy^3$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $y''' ctg 2x = 2y''$,

б) $y^3 y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}.$

3. Решить задачу Коши $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' - y' - 110y = f(x)$, где $f(x) = 3\cos 10x$

5.Решить уравнение
а) $y'' + 4y = 3\sin 2x + \cos 2x$
б) $y'' + 2y' + 10y = xe^x$
в) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\sin x$

7 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения
а) $\sqrt{9 - x^2}\,y' + xy^2 - x = 0$
б) $y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$
в) $xy' + y = 3$
г) $3xy' - 2y = \dfrac{x^2}{y^2}$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения
а) $(1 + \sin x)y''' = y'\cos x$,
б) $y'' = 2\sin^3 y\cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 1$

3. Решить задачу Коши $y'' - 12y' + 36y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' - 9y' - 22y = f(x)$, где $f(x) = 5xe^{2x}$

5. Решить уравнение
а) $y'' + 9y = 3\sin 3x - \cos 3x$
б) $y'' - y = xe^x$
в) $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$

8 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения
а) $yy'\sqrt{5 - x^2} - \sqrt{2 - y^2} = 0$
б) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
в) $xy' - 2y = x^3e^x$
г) $(1 + x^2)y' - xy = x^2y^2$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения
а) $x^3y''' + x^2y'' = 1$,

б) $y^3 y'' + 4 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.

3. Решить задачу Коши $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения $y'' - 5y' - 36y = f(x)$, где $f(x) = -5\cos 4x$

5. Решить уравнение

а) $y'' - 2y' + y = e^{-x}(3\sin x + 2\cos x)$

б) $y'' - 2y' + y = 2e^x$

в) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x-5)e^x$

9 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $\sqrt{1+y^2}dx - ydy = x^2 ydy$

б) $y' = \dfrac{2x+y}{2x}$

в) $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$

г) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}(x+1)^3 y^3$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $ctgx \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{chx} = 0$,

б) $y'' = 8y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

3. Решить задачу Коши $y'' + 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения $y'' + y' - 20y = f(x)$, где $f(x) = 4x^2$

5. Решить уравнение

а) $y'' - 4y' + 4y = x^2 - 3x + 2$

б) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$

в) $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$

10 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

б) $y' = \dfrac{xy+y^2}{x^2}$

в) $xy' + y = x + 1$

г) $x^2 y' + 2x^3 y = (1+2x^2)y^2$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $x^2y'' + xy' = 1$,

б) $y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

3. Решить задачу Коши $y'' + 14y' + 33y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' - 5y' + 6y = f(x)$, где $f(x) = x^3 + 2$

5. Решить уравнение

а) $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}(3x - 1)$

б) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$

в) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$

11 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$ б) $y' = \dfrac{y^2}{x^2 + xy}$

в) $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$ г) $y' + 2xy = 2x^3y^3$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $7xy'' = 7y'$,

б) $y^3y'' = 4(y^4 - 1)$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

3. Решить задачу Коши $y'' - 8y' + 15y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' - 12y' + 36y = f(x)$, где $f(x) = 4xe^{6x}$

5. Решить уравнение

а) $y'' - 8y' + 16y = (2x + 1)e^{4x}$

б) $y'' - 4y' + 3y = 12\sin x - 4\cos x$

в) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$

12 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}\,y' = 0$ б) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$

в) $y' + 2y = x^2 + 2x$ г) $3y^2 y' + x + y^3 = 0$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения
а) $xy''' + y'' = x + 1$,
б) $y^3 y'' + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.

3. Решить задачу Коши $y'' + 4y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' + 2y' - 15y = f(x)$, где $f(x) = e^x(2\cos 3x + \sin 3x))$

5. Решить уравнение
а) $2y'' - y' = 15xe^{3x}$
б) $y'' + y = \sin x$
в) $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$

13 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения
а) $2xdx - ydy = 3x^2 ydy - xy^2 dx$ б) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$
в) $(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1$ г) $y' = xy^2 + 3xy$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения
а) $tgx \cdot y''' = y'' + 1$,
б) $y'' = 18y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.

3. Решить задачу Коши $y'' + 15y' + 56y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' - 6y' + 8y = f(x)$, где $f(x) = e^{2x}(5x + 3)$

5. Решить уравнение
а) $y'' + 4y = 2\sin 2x$
б) $y'' + 6y' + 5y = e^{-x}$
в) $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$

14 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $(1+e^x)yy' = e^x$ б) $x^2y' + y^2 = xyy'$

в) $x\ln x \cdot y' - y = x^3(3\ln x - 1)$ г) $xy' - 4y = x^3\sqrt{y}$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $xy''' + y'' = 1$,

б) $y'' = 50\sin^3 y\cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 5$.

3. Решить задачу Коши $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' - 7y' + 6y = f(x)$, где $f(x) = e^{2x}(x-3)$

5. Решить уравнение

а) $y'' + 9y = 12\cos 3x$

б) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$

в) $y'' + y = 2\cos 3x + \sin 3x$

15 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $2(x^2y + y)dy + \sqrt{4+y^2}dx = 0$ б) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$

в) $(1-x^2)y' + xy = 1$ г) $xy' + y = -x^2y^2$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $tgxy^{IV} = y'''$,

б) $y'' = 2\sin y\cos^3 y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3. Решить задачу Коши $y'' - 8y' - 84y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' + 7y' + 10y = f(x)$, где $f(x) = e^{-2x}\cos x$

5. Решить уравнение

а) $y'' - 5y' + 4y = (1-x)e^{4x}$

б) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$

в) $y'' - 5y' = 25e^{-x}$

16 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $(1+e^{-x})yy'=e^{x}$

б) $y(2x^2-y^2)=2x^3y'$

в) $2xy'-y=3x^2$

г) $y'=\dfrac{y}{x}-2xy^2$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $xy'''-y''+\dfrac{1}{x}=0$,

б) $y''=32\sin^3 y\cos y$, $y(1)=\pi/2$, $y'(1)=4$

3. Решить задачу Коши $y''-8y'+15y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2.$

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y''+y'-6y=f(x)$, где $f(x)=-3e^{2x}$

5. Решить уравнение

а) $y''-6y'+9y=2\sin 3x+\cos 3x$

б) $y''+2y'-3y=x^2e^{x}$

в) $y''-49y=14e^{7x}$

17 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $5xdx+2ydy=x^2ydy-5xy^2dx$

б) $xy'-y=xtg\dfrac{y}{x}$

в) $y'-2xy=2xe^{x^2}$

г) $2x^2y'-4xy=y^2$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $ctgx\cdot y''+y'=ctgx$,

б) $y''=98y^3$, $y(1)=1$, $y'(1)=7$

3. Решить задачу Коши $y''-10y'+24y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=0.$

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y''-10y'-24y=f(x)$, где $f(x)=x^2+3x-2$

5. Решить уравнение

а) $y''+25y=5\sin 5x$

б) $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$

в) $y''+2y'+y=4x^2$

18 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $4xdx - ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$ б) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

в) $(xy + x^2 y^3)y' = 1$ г) $y' - y\sin x = y^2 e^{\cos x}$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$,

б) $y'' y^3 - 49 = 0$, $y(3) = -7$, $y'(3) = -1$

3. Решить задачу Коши $y'' - 9y' - 22y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' - 8y' + 15y = f(x)$, где $f(x) = e^{5x}(5x+3)$

5. Решить уравнение

а) $y'' + 16y = 2\sin 4x$

б) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$

в) $y''' - y' - 4y' + 4y = (7-6x)e^x$

19 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $(1+e^x)y' = ye^x$ б) $(\sqrt{xy} + y)dx = xdy$

в) $xy' - 2y = 2x^4$ г) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2}$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $xy''' + y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

б) $4y^3 y'' = 16y^4 - 1$, $y() = \sqrt{2}/2$, $y'(0) = 1/\sqrt{2}$

3. Решить задачу Коши $y'' + 2y' - 15y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' + 15y' + 56y = f(x)$, где $f(x) = e^{-8x}(\sin x + 2\cos x)$

5. Решить уравнение

а) $y'' - 3y' + 2y = (4x+3)e^{2x}$

б) $y'' + y = \sin x$

в) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$

20 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $6xdx - 3ydy = x^2 ydy - 10xy^2 dx$ б) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

в) $(2x+1)y' = 4x + 2y$ г) $y' + xy = x^3 y^3$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $x^4 y'' + x^3 y' = 1$,

б) $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

3. Решить задачу Коши $y'' - 5y' - 36y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения $y'' + 5y' - 14y = f(x)$, где $f(x) = xe^{2x}$

5. Решить уравнение

а) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \sin 2x$

б) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$

в) $y'' - 5y' + 4y = e^{4x}$

21 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$ б) $(2x^2 + xy)y' = xy + y^2$

в) $x(y' - y) = e^x$ г) $y' + 2y = y^2 e^x$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $(x+1)y''' + y'' = x + 1$,

б) $y'' = 72y^3$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 6$

3. Решить задачу Коши $y'' + 14y' + 33y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения $y'' - 6y' = f(x)$, где $f(x) = 5x^3 + 3$

5. Решить уравнение

а) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$

б) $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$

в) $y''' - y'' = 6x + 5$

22 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $x\sqrt{4 + y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$ б) $(2y - 3x)y' + 4x - 3y = 0$

в) $y = x(y' - x\cos x)$ г) $(1 - x^2)y' + 2xy = xy^2$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $tgx \cdot y''' = 2y''$,

б) $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$

3. Решить задачу Коши $y'' - 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' + 16y = f(x)$, где $f(x) = 5\sin 4x$

5. Решить уравнение

а) $y'' + 16y = 3\cos 4x$

б) $y'' + 4y' = 12x^2 - 2x + 2$

в) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$

23 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $2xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$ б) $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$

в) $x^2y' + xy + 1 = 0$ г) $y' - \dfrac{y}{x+1} = y^{-1}$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$,

б) $y'' = 18\sin^3 y\cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 3$

3. Решить задачу Коши $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения
$y'' + 25y = f(x)$, где $f(x) = e^x(3\sin 5x + 2\cos 5x)$

5. Решить уравнение

а) $y'' + 4y' + 8y = e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)$

б) $y'' - 6y' + 9y = 4xe^x$

в) $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$

24вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $y(e^x - 1)dy - y^2 e^x dx = 0$ б) $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$

в) $y' + y\cos x = \sin 2x$ г) $y' + xy = xy^2$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $ctg\, 2x \cdot y''' + 2y'' = 0$,

б) $4y^3 y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2/\sqrt{2}$, $y'(0) = 1/\sqrt{2}$

3. Решить задачу Коши $y'' - y' - 110y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения $y'' - 4y = f(x)$, где $f(x) = e^{2x}(2x + 1)$

5. Решить уравнение

а) $y'' - 10y' + 25y = 5e^{5x}$

б) $y'' + 2y' = 36\cos x$

в) $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$

25 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $x\sqrt{4 + y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$ б) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$

в) $y' - \dfrac{3}{x}y = x^3 e^x$ г) $y' + 2xy = 2x^3 y^3$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $tg\, 5x \cdot y''' - 5y'' = 0$,

б) $y'' = 50y^3$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 5$.

3. Решить задачу Коши $y'' + 15y' + 56y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения $y'' + 9y = f(x)$, где $f(x) = \sin 3x + \cos 3x$

5. Решить уравнение

а) $y''+9y=3\sin 5x+2\cos 5x$

б) $y''-3y'=e^{3x}-18x$

в) $y'''-y''-5y'-3y=-(8x+4)e^{x}$

26 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $xydy+y^2(x+1)dx=0$ б) $(y^4-3x^2)dy=-xydx$

в) $y'-\dfrac{y}{1-x}=\dfrac{e^{4x}}{1-x}$ г) $xy'+y=y^2\ln x$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $tgx\cdot y''-y'+\dfrac{1}{\sin x}=0$,

б) $y''y^3+25=0$, $y(2)=-5$, $y'(2)=-1$.

3. Решить задачу Коши $y''+8y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения $y''-10y'-24y=f(x)$, где $f(x)=2\sin 3x$

5. Решить уравнение

а) $y''+4y=3\sin 3x+2\cos 3x$

б) $y'''-4y''+5y'-2y=(16-12x)e^{x}$

в) $y''+y'-2y=-3e^{-2x}$

27 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $e^{y}(1+x^2)dy-2x(1+e^{y})dx=0$ б) $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$

в) $y'-\dfrac{y}{2x+1}=e^{3x}\sqrt{2x+1}$ г) $y'-ytgx+y^2\cos x=0$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $xy'''+y''=\sqrt{x}$,

б) $y''+18\sin y\cos^3 y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$

3. Решить задачу Коши $y''+y'-6y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=-1$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения $y'' + y = f(x)$, где $f(x) = 4\sin x + \cos x$

5. Решить уравнение
а) $y'' + 64y = 8\sin 8x$
б) $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$
в) $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$

28 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения
а) $(1 - x^2)y' + xy^2 = 0$
б) $4xy^2dx = (3x^2y - y^3)dy$
в) $xy' = x + 2y$
г) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения
а) $2xy''' = y''$,
б) $y'' = 8\sin^3 y\cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 2$

3. Решить задачу Коши $y'' - 10y' - 24y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$.

4.Запишите вид частного решения дифференциального уравнения $y'' + 3y' = f(x)$, где $f(x) = e^{3x}(2\sin x + 5\cos x)$

5. Решить уравнение
а) $y'' + 100y = 10\sin 2x$
б) $y'' - 2y' + y = (2x + 5)e^{2x}$
в) $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$

29 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения
а) $y'ytgx = 4 + y^2$
б) $(2y - 5x)dx + xdy = 0$
в) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$
г) $x^2y' - 2xy = 3y^2$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения
а) $xy''' + y'' + x = 0$,
б) $y'' = 50\sin^3 y\cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 5$.

3. Решить задачу Коши $y'' - 8y' + 15y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения $y'' - 5y' = f(x)$, где $f(x) = (2x+6)e^{5x}$

5. Решить уравнение

а) $y'' + 4y' + 3y = 5e^{-3x}$

б) $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$

в) $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^{x}$

30 вариант

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

а) $(1+x^2)ydy - (xy^2 + x)dx = 0$

б) $xy' = \dfrac{xy - y^2}{x}$

в) $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}$

г) $y' + \dfrac{y}{x} = 2xy^3$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

а) $x\ln x \cdot y''' = y''$,

б) $y''y^3 + 16 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$

3. Решить задачу Коши $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

4. Запишите вид частного решения дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, где $f(x) = e^{2x}(\sin x + \cos x)$

5. Решить уравнение

а) $y'' + 3y' + 2y = 5xe^{-x}$

б) $y'' - y' = e^{2x}\cos x$

в) $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С.Бугров, С.М. Никольский. - М.: Наука, 1981. – 448с.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: учеб. пособие / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высшая школа, 1980. – 304 с.
3. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н.М. Матвеев. - М.: Росвузиздат, 1962. – 291 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, Т. 2: учеб. пособие для втузов / Н.С.Пискунов. - М.: Наука, 1985. – 560с.
5. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс, 2009.- 608с.
6. Пономарев К.К. Специальный курс высшей математики. Дифференциальные уравнения, краевые задачи, интегральные уравнения: учеб. пособие / К.К.Пономарев. – М.: Высшая школа, 1974. – 367 с.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. - М.: Наука, 1970. - 96с.

Св. план 2013 - 2014 уч. год.

Багит Абитовна Шалдыкова

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Подписано в печать
Тираж экз. Формат 21х30/2. Бумага листовая для ксероксной техники.
Печать ксероксная. Объем уч.-изд.л. Заказ №

Издание Рудненского индустриального института
Редакционно-издательский центр РИИ
г. Рудный, ул. 50 лет Октября, 58