

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Рудненский индустриальный институт

Кафедра строительства и строительного материаловедения

Смирнова С.В.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

для студентов всех специальностей всех форм обучения

Рудный 2016

УДК 512.81(0758)
ББК 22.143 я73
С 50

Рецензенты:

Таджигитов А.А. – к.ф. – м.н., доцент, заведующий кафедрой «Математика и информатика» СКГУ им. М.Козыбаева

Шалдыкова Б.А. – к.ф. – м.н., старший преподаватель кафедры «Строительства и строительного материаловедения» Рудненского индустриального института

Смирнова С.В.

С 50 Элементы линейной алгебры: учеб. пособие / С.В.Смирнова – Рудный, 2016.
– 80 с.

ISBN 978-601-7554-41-5

В учебном пособии изложены вопросы линейной алгебры. Пособие содержит справочный материал и методические рекомендации по решению задач. Для самопроверки практических навыков в задания для самоконтроля в разных формах. Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей и всех форм обучения. Пособие будет активным помощником студентам и позволит им рационально организовать самостоятельную работу по изучению данной темы, активизировать участие на практических занятиях и СРСР. Рекомендуется для подготовки к ВОУД.

УДК 512.81(0758)
ББК 22.143 я73

© Рудненский индустриальный институт

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Матрицы	6
1.1 Основные определения	6
1.2 Действия над матрицами	7
2 Определители	10
2.1 Определители второго и более высоких порядков	10
2.2 Свойства определителей	14
2.3 Ранг матрицы	15
2.3 Обратная матрица	20
2.4 Решение матричных уравнений	22
3 Системы линейных алгебраических уравнений	24
3.1 Основные понятия и определения	24
3.2 Методы решения систем линейных уравнений	27
3.3 Однородная система линейных уравнений	31
4 Использование линейной алгебры в экономических задачах	32
Примеры решения задач	47
Вопросы для самоконтроля	54
Задания для самостоятельной работы	55
Ответы к заданиям	76
Список литературы	79

ВВЕДЕНИЕ

Первые элементы линейной алгебры следовали из практических вычислительных задач вокруг решения линейных уравнений, и были сформулированы ещё в древности. В «Началах» Евклида фигурируют две теории «линейного» характера: теория величины и теория целых чисел. Методы, сформировавшие линейную алгебру как самостоятельную отрасль математики, уходят корнями в другие разделы. Ферма в 1630-е годы, создав классификацию плоских кривых, ввёл в математику (ключевой для линейной алгебры) принцип размерности и разделил задачи аналитической геометрии по числу неизвестных (с одним неизвестным — отыскание точки, с двумя — кривой или геометрического места на плоскости, с тремя — поверхности). Эйлер, создал классификацию кривых по порядкам, обратив внимание на линейный характер преобразований координат, ввёл в оборот понятие аффинного преобразования (и само слово «аффинность»).

Первое введение понятия определителя для целей решения систем линейных уравнений относят к Лейбницу (1678 или 1693 год), но эти работы не были опубликованы. Также определитель обнаруживается в трудах Сэки Такакадзу 1683 года, в которых он обобщил метод решения систем линейных уравнений.

Но основной базой линейной алгебры стало фактически влившееся в раздел векторное исчисление, очерченное Гауссом в работах по геометрической интерпретации комплексных чисел (1831) и обретшее окончательную форму в трудах Мёбиуса, Грассмана и Гамильтона 1840-х — 1850-х годах. Понятие матрицы ввёл Сильвестр в 1850 году. Кэли обстоятельно разрабатывает матричное исчисление, публикуя в 1858 году «Мемуар о теории матриц» (англ. *Memoir on the theory of matrices*).

Со второй половины XX века с появлением компьютеров, развитием методов вычислительной математики и компьютерной алгебры в рамках линейной алгебры получило бурное развитие вычислительное направление — отыскание методов и алгоритмов, обеспечивающих эффективное решение задач линейной алгебры с использованием вычислительной техники. Сформировался самостоятельный раздел вычислительной линейной алгебры (англ. *numerical linear algebra*), а решение задач линейной алгебры стало одной из важных практических составляющих использования компьютеров. В 1950-е — 1960-е годы крупные исследования в области вычислительной линейной алгебры опубликованы Фаддеевым и Уикинсоном, значительные результаты в 1970-е — 2000-е годы получены Марчуком, Самарским, Годуновым, Голубом (англ. *Gene H. Golub*), Аксельсоном.

Данное учебное пособие является дополнением к учебникам и учебным пособиям по математике. Предназначено для студентов всех специальностей и всех форм обучения.

При подготовке пособия автор руководствовалась принципом повышения уровня математической подготовки студента. Все основные вопросы освещены достаточно подробно.

В учебном пособии представлен учебный материал по линейной алгебре. Цель разработки данного пособия автором – дать студенту наиболее полный объем актуальной информации и математических знаний в доступной и понятной форме.

Структура учебного пособия следующая. Всего 4 главы. Каждая глава разбита на параграфы. Параграф содержит справочный материал (основные определения, формулы и т.п.), необходимый для осмысления темы. Приводятся методические рекомендации по решению определенного круга задач, алгоритмы их решения.

Для каждой главы содержатся типовые задачи не только с решениями, но и для самостоятельной работы, позволяющие достаточно полно охватить учебный материал.

Для обеспечения оценки уровня подготовленности студентов в настоящее время используются методы тестирования, в частности, с применением современных компьютерных технологий. Поэтому наряду с традиционными контрольными заданиями, в пособии предлагается достаточный объем тестовых заданий. Варианты тестов предложены как с одним правильным ответом, так и с несколькими правильными ответами. Проверить вычисления можно по предложенным в конце пособия ответам.

Для самоконтроля студентам предлагается ответить на вопросы.

В конце пособия приводится список литературы.

Приведенные задания для контрольной работы и тесты могут быть эффективно использованы при подготовке к различным проверочным работам, в том числе к ВОУД.

1 Матрицы

1.1 Основные определения

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащая m строк и n столбцов. Каждый элемент матрицы a_{ik} имеет два индекса: i – номер строки и k – номер столбца. Строки нумеруются слева направо, начиная с номера 1, столбцы нумеруются сверху вниз, начиная с номера 1. Краткая форма записи матрицы:

$$A = (a_{ik})_{m,n}.$$

Элемент a_{ik} стоит на пересечении i – строки и k – столбца.

Также, говорят, что матрица — математический объект, записываемый в прямоугольной таблице, в ячейках которой расположены элементы произвольного заранее выбранного (основного) поля — это могут быть целые, вещественные или комплексные числа, векторы, рациональные функции — в зависимости от приложений и задач.

Матрица называется квадратной порядка n , если она состоит из n строк, и n столбцов. Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол. Побочной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, ведущая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Матрица размера $1 \times n$ называется матрицей-строкой, а матрица размера $m \times 1$ - матрицей-столбцом.

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. А матрица размера $m \times n$, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается через 0. Элементы с одинаковыми индексами называют элементами главной диагонали. Если число строк равно числу столбцов, то есть $m = n$, то матрицу называют квадратной порядка n .

Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называются диагональными и записываются так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Треугольной матрицей n -го порядка называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичной называется квадратная матрица n -го порядка, у которой элементы главной диагонали равны единице, а все остальные элементы – нули:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называются равными, если $a_{ik} = b_{ik} \quad \forall i = 1, \dots, m$
 $\forall k = 1, \dots, n$.

1.2 Действия над матрицами

Над матрицами можно выполнять различные действия: складывать, вычитать, умножать на число, перемножать между собой, возводить в степень. Операции деления нет.

Суммой матриц $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называется матрица

$$A + B = (a_{ik} + b_{ik})_{m,n}.$$

Разностью матриц $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называется матрица

$$A - B = (a_{ik} - b_{ik})_{m,n}.$$

Из определения следует, что складывать и вычитать матрицы можно только одинаковых размеров.

Произведением матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$ на число λ называется матрица

$$\lambda A = (\lambda a_{ik})_{m,n}.$$

Для любых матриц одинакового размера и любых чисел λ и μ выполняются свойства:

$$1) A + B = B + A$$

$$2) A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$3) A + 0 = A$$

$$4) \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

$$5) \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$6) (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

Транспонированной для матрицы A называется матрица A^T , строки которой являются столбцами матрицы A , а столбцы – строками матрицы A .

Для того чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.

Пример 1. Транспонировать матрицу

$$D = (7 \ 3 \ -12 \ 0 \ 34)$$

Решение.

Строка здесь всего одна и, согласно правилу, её нужно записать в столбец:

$$D^T = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -12 \\ 0 \\ 34 \end{pmatrix} \text{ – транспонированная матрица.}$$

Транспонированная матрица обычно обозначается надстрочным индексом T или штрихом справа вверху.

Пример 2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Построить матрицу $C = 2A - 3B + A^T$.

Решение.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -6 & 2 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 3 & -6 \\ 0 & 15 & 9 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -14 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы $A = (a_{ik})_{m,p}$ на матрицу $B = (b_{jk})_{p,n}$ называется матрица D размера $m \times n$ с элементами

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Иными словами, для получения элемента, стоящего в i -ой строке результирующей матрицы и в k -ом ее столбце, следует вычислить сумму попарных произведений элементов i -ой строки матрицы A на k -ый столбец матрицы B .

Пример 3. Умножить матрицу

$$K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

на матрицу

$$L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 \end{pmatrix}$$

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример 4. Найти произведение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ на матрицу } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-4) & 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) & 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 & -2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) & (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{т.е. } A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 3 \\ 5 & -12 & 0 \\ -5 & 22 & -6 \end{pmatrix}.$$

В самом определении произведения матриц заложено, что число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Это – условие согласования матриц при умножении. Если оно нарушено, матрицы перемножить нельзя. Поэтому возможна ситуация, когда произведение AB существует, а произведение BA – нет. Кроме того, когда существуют оба произведения, то чаще всего они не совпадают, т.е. в большинстве случаев произведение матриц некоммутативно: $AB \neq BA$. Если

A, B, C – квадратные матрицы одинакового порядка и E – единичная матрица того же размера, то справедливы тождества:

- 1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$
- 2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C;$
- 3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C;$
- 4) $A \cdot E = E \cdot A = A.$

Пример 5 Найти значение многочлена $f(A) = 3A + B - 5E,$

где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Решение.

$$3A = 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad 3A + B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$3A + B - 5E = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 15 & 11 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 15 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$$

Пример 6 Вычислить $D = (AB)^T - C^2$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \\ 1 \cdot 7 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 23 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 10 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 13 & -20 \end{pmatrix}$$

2 Определители

2.1 Определители второго и более высоких порядков

Определитель (он же determinant (детерминант)) находится только у квадратных матриц. Определитель есть не что иное, как значение, сочетающее в себе все элементы матрицы, сохраняющееся при транспонировании строк или столбцов. Обозначаться он может как $\det(A)$, $|A|$, $\Delta(A)$, Δ , где A может быть как матрицей, так и буквой обозначающей ее. Найти его можно разными методами.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица 2-го порядка.

Определителем 2-го порядка (матрицы A) называется число

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 7. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} -11 & 4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = (-11) \cdot 12 - 4 \cdot 5 = -152.$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица 3-го порядка.

Определителем 3-го порядка (матрицы A) называется число, равное

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Правило треугольника - метод вычисления определителя матрицы третьего порядка. Это правило призвано внести в процесс вычисления определителя наглядность, уменьшив тем самым вероятность возникновения ошибки.



Пример 8. Вычислить определитель $\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ -2 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

Решение.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ -2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 7 + (-1) \cdot (-5) \cdot (-2) + 4 \cdot 6 \cdot 3 - (-2) \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) \cdot 7 - \\ - 6 \cdot (-5) \cdot 2 = 0 - 10 + 72 - 0 + 28 + 60 = 150.$$

При вычислении определителя используются следующие свойства:

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
3. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.
5. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число k , то сам определитель умножится на k .
6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.
7. Если все элементы i -й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} = b_j + c_j$, то определитель равен сумме определителей, у которых все строки, кроме i -ой, - такие же, как в заданном определителе, а i -я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j , в другом - из элементов c_j .
8. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Замечание. Все свойства остаются справедливыми, если вместо строк взять столбцы.

Минором элемента a_{ik} называется определитель M_{ik} , составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания из матрицы A i -ой строки и k -го столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} называется число, равное

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Определителем 3-го порядка (матрицы A) называется сумма произведений элементов первой строки матрицы на их алгебраические дополнения:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Данную формулу называют разложением определителя по первой строке.

Пример 9. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим миноры и алгебраические дополнения элементов 1-ой строки матрицы:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 7, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 7 = 7, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 35 = -35, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (-7) = -7.$$

Вычисляем искомый определитель: $\Delta(A) = 3 \cdot 7 + (-2) \cdot (-35) + 4 \cdot (-7) = 63$.

Определителем n -го порядка (высшего порядка) называется число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Пример 10. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Решение.

Вычисление данного определителя четвертого порядка можно свести к вычислению четырех определителей третьего порядка, разложив его по элементам первой строки. Вычисление можно упростить, если, используя свойства определителей, предварительно преобразовать исходный определитель таким образом, чтобы в какой-нибудь строке (каком-либо столбце) все элементы кроме одного оказались нулями.

Например, чтобы получить нули в первой строке данного определителя достаточно умножить все элементы первого столбца последовательно на -2, -3, -4, а затем прибавить их к соответствующим элементам второго, третьего и четвертого столбцов, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1-4 & 3 & \\ 3-4 & -1 & 2 & \\ 4 & 3-2 & -1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 11 \\ 3-10 & -10 & -10 & -10 \\ 4 & -5 & -14 & -1 \end{vmatrix}$$

Разложив последний определитель по элементам первой строки, получим один определитель третьего порядка

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ -10 & -10 & -10 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ -10 & -10 & -10 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix}$$

Теперь можно получить нули во второй строке, для чего достаточно умножить все элементы первого столбца на -1 и прибавить их к соответствующим элементам второго, третьего столбцов, а затем выполнить разложение по элементам второй строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -10 & 0 & 0 \\ -5 & -9 & -12 \end{vmatrix} = (-10) \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -9 & -12 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -9 & -12 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-3(-12) - 6(-9)) = 10 \cdot 90 = 900$$

Следовательно, $\Delta = 900$.

2. 2 Свойства определителей

Изложенные ниже свойства справедливы для любого n -го порядка.

1. Определитель не меняется при транспонировании, т.е. $\Delta(A^T) = \Delta(A)$.
2. Если две строки определителя поменять местами, то определитель меняет знак.
3. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.
4. Если все элементы какой-либо строки (столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.
5. Если в определителе две строки (два столбца) одинаковы или пропорциональны, то определитель равен нулю.
- 6.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7. Определитель не изменяется, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

8. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) на свои алгебраические дополнения равна самому определителю. Сумма произведений любой строки (столбца) на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равно 0.

9. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Способы практического вычисления определителей, основанные на том, что определитель порядка n может быть выражен через определители более низких порядков, дает следующая теорема.

Теорема 2.1 (разложение определителя по строке или столбцу).

Определитель равен сумме произведений всех элементов произвольной его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

В частности, если все элементы строки (или столбца), кроме одного, равны нулю, то определитель равен этому элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение.

Теорема 2.2 Если A и B – квадратные матрицы одного порядка, то

$$\Delta(A \cdot B) = \Delta(A) \cdot \Delta(B).$$

Рассмотрим прямоугольную матрицу. Если в этой матрице выделить произвольно k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k -го порядка.

Определитель этой матрицы называется минором k -го порядка матрицы A . Очевидно, что матрица A обладает минорами любого порядка от 1 до наименьшего из чисел m и n . Среди всех отличных от нуля миноров матрицы A найдется по крайней мере один минор, порядок которого будет наибольшим.

2.3 Ранг матрицы

Ранг матрицы представляет собой важную числовую характеристику. Наиболее характерной задачей, требующей нахождения ранга матрицы, является проверка совместности системы линейных алгебраических уравнений.

Наибольший из порядков миноров данной матрицы A , отличных от нуля, называется рангом матрицы. Если ранг матрицы A равен r , то это означает, что в

матрице A имеется отличный от нуля минор порядка r , но всякий минор порядка, большего чем r , равен нулю. Ранг матрицы A обозначается через $r(A)$.

Ранг матрицы находится либо методом окаймления миноров, либо методом элементарных преобразований. При вычислении ранга матрицы первым способом следует переходить от миноров низших порядков к минорам более высокого порядка. Если уже найден минор D k -го порядка матрицы A , отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры $(k+1)$ -го порядка, окаймляющие минор D , т.е. содержащие его в качестве минора. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k .

Ранг нулевой матрицы любых размеров равен нулю.

Если в матрице произвольных размеров есть хотя бы один ненулевой элемент, то её ранг не меньше единицы.

Ранг матрицы – это максимальное количество линейно независимых строк. Или: ранг матрицы – это максимальное количество линейно независимых столбцов. Да, их количество всегда совпадает. ранг матрицы не превосходит её минимальной размерности.

Элементарными называются следующие преобразования матрицы:

- 1) перестановка двух любых строк (или столбцов),
- 2) умножение строки (или столбца) на отличное от нуля число,
- 3) прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на некоторое число.

Две матрицы называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но их ранги равны. Если матрицы A и B эквивалентны, то это записывается так: $A \sim B$.

Канонической матрицей называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц (число которых может равняться нулю), а все остальные элементы равны нулю.

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к канонической. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на ее главной диагонали.

Например, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Четыре строки и пять столбцов. Минимальная размерность – четыре, следовательно, ранг данной матрицы заведомо не превзойдёт 4.

Первым методом нахождения ранга матрицы является метод перебора миноров. Вкратце опишем алгоритм решения этой задачи способом перебора

миноров. Если есть хотя бы один элемент матрицы, отличный от нуля, то ранг матрицы как минимум равен единице (так как есть минор первого порядка, не равный нулю).

Далее перебираем миноры второго порядка. Если все миноры второго порядка равны нулю, то ранг матрицы равен единице. Если существует хотя бы один ненулевой минор второго порядка, то переходим к перебору миноров третьего порядка, а ранг матрицы как минимум равен двум.

Аналогично, если все миноры третьего порядка равны нулю, то ранг матрицы равен двум. Если существует хотя бы один минор третьего порядка, отличный от нуля, то ранг матрицы как минимум равен трем, а мы преступаем к перебору миноров четвертого порядка. И так далее.

В качестве примера возьмём матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 9 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Поскольку в матрице есть ненулевые элементы, то её ранг не меньше единицы и, очевидно, что он не превосходит 4. Как действовать дальше?

Дальше необходимо начать перебор и вычисление миноров 2-го порядка. Если все миноры 2-го порядка окажутся нулевыми, то ранг матрицы равен единице. Но это крайне маловероятно, рано или поздно (чаще всего рано), встретится ненулевой минор $M_2 \neq 0$, и данный факт означает, что ранг матрицы не менее двух.

На следующем шаге последовательно перебираем и рассчитываем миноры 3-го порядка. Если все эти миноры равны нулю, то ранг равен 2. Если же встретился минор $M_3 \neq 0$, то делаем вывод о том, что ранг матрицы не менее трёх и переходим к следующему шагу.

Перебор и вычисление миноров 4-го порядка. Если все миноры 4-го порядка равны нулю, то ранг равен 3, если встретился минор $M_4 \neq 0$, то ранг равен 4. Таким образом, ранг матрицы равен максимальному порядку ненулевого минора.

Существуют другие методы нахождения ранга матрицы, которые позволяют получить результат при меньшей вычислительной работе.

Одним из таких методов является метод окаймляющих миноров. Алгоритм разберем на конкретной задаче:

Пример 11. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Дана квадратная матрица «четыре на четыре», её ранг не больше четырёх. Поскольку есть ненулевые элементы, следовательно, ранг не менее единицы. Проверку миноров 2-го порядка начинаем с так называемого углового минора.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 0 & 5 \\ \boxed{2} & \boxed{4} & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

поэтому переходим к минору

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 5 \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{-1} & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \neq 0$$

Значит, ранг матрицы не менее двух. Что было бы нужно сделать, если бы и этот минор оказался нулевым? В этом случае рассматриваем минор

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & \boxed{5} \\ \boxed{2} & 4 & -1 & \boxed{0} \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Если он тоже равен нулю, то далее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{0} & \boxed{5} \\ 2 & 4 & \boxed{-1} & \boxed{0} \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

При необходимости (когда получились одни нули), следует продолжить перебор миноров по аналогичной схеме у:

1-й и 3-й строк;

1-й и 4-й строк;

2-й и 4-й строк;

3-й и 4-й строк – до тех пор, пока не повстречается минор, отличный от нуля.

Если все миноры 2-го порядка оказались нулевыми, то ранг равен 1.

Но в нашем случае уже на втором шаге обнаружен «хороший» минор, и теперь мы переходим к рассмотрению миноров третьего порядка.

Рассмотрим

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

который будет входить во все рассматриваемые миноры высших порядков:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 - 0 + 2 \cdot (4 - 4) = -2 \neq 0$$

Значит, ранг матрицы не менее трёх. Если бы этот минор оказался равным нулю, то следовало бы вычислить определитель из «синих» и «коричневых» чисел. Других миноров 3-го порядка, которые содержат младший ненулевой минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

нет.

Вывод: максимальный порядок ненулевого минора равен трём, значит, ранг равен 3.

Возможно, не все до конца осмыслили данную фразу: минор 4-го порядка равен нулю, но среди миноров 3-го порядка нашёлся ненулевой – поэтому максимальный порядок ненулевого минора и равен трём.

Возникает вопрос, а почему бы сразу не вычислить определитель? Ну, во-первых, в большинстве заданий матрица не квадратная, а во-вторых, даже если и

получится ненулевое значение, то задание будет забраковано, так как необходимо провести стандартное решение «снизу вверх». А в рассмотренном примере нулевой определитель 4-го порядка и вовсе позволяет утверждать, что ранг матрицы лишь меньше четырёх.

2.4 Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A , если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Квадратная матрица A называется невырожденной, или неособенной, если ее определитель отличен от нуля, и вырожденной, или особенной, если $\Delta = 0$.

Теорема 2.3. Для того чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. чтобы $\Delta(A) \neq 0$.

Доказательство.

Достаточность. Дано: $\Delta(A) \neq 0$. Докажем, что обратной к матрице A является матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} & a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} & a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} \\ a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} & a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} & a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32} \\ a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} & a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} & a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Каждый из элементов главной диагонали равен определителю $\Delta(A)$, ибо представляет собой сумму произведений элементов одной из строк матрицы на свои алгебраические дополнения. Все остальные числа в результирующей матрице равны нулю.

Поэтому,

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} \Delta(A) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(A) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Совершенно аналогично доказывается, что $A \cdot A^{-1} = E$.

Это завершает доказательство достаточности.

Необходимость. Дано, что матрица A^{-1} существует. Надо доказать, что $\Delta(A) \neq 0$. Допуска, что $\Delta(A) = 0$, мы бы получили из равенства $A \cdot A^{-1} = E$, $\Delta(A) \cdot \Delta(A^{-1}) = \Delta E$, откуда $\Delta(A) \cdot \Delta(A^{-1}) = 1$, что невозможно, ибо левая часть этого равенства есть 0.

Вычисление обратной матрицы по формуле для матриц высокого порядка очень трудоемко, поэтому на практике бывает удобно находить обратные матрицы с помощью метода элементарных преобразований.

Любую неособенную матрицу A путем элементарных преобразований только столбцов (или только строк) можно привести к единичной матрице E . Если совершенные над матрицей A элементарные преобразования в том же порядке применить к единичной матрице E , то в результате получится обратная матрица.

Удобно совершать элементарные преобразования над матрицами A и E одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту. Отметим еще раз, что при отыскании канонического вида матрицы с целью нахождения ранга матрицы можно пользоваться преобразованиями строк и столбцов. Если нужно найти обратную матрицу, в процессе преобразований следует использовать только строки или только столбцы.

Пример 12. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

Находим определитель матрицы A :

$$\Delta A = 2 \cdot 7 + (-1) \cdot (-10) + (-2) \cdot 11 = 2$$

Вычисляем алгебраические дополнения всех элементов данной матрицы.

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{31} = + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Теперь записываем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -10 & 4 & -4 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -10 & 4 & -4 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Значит, матрица A^{-1} найдена верно.

2.4 Решение матричных уравнений

Матричные уравнения - это уравнения, которые в качестве неизвестной содержат матрицу. Матричные уравнения, как и все остальные, бывают разных видов.

Матричные уравнения могут иметь вид:

$$AX = B, XA = B, AXB = C,$$

где A, B, C — задаваемые матрицы, X - искомая матрица.

Матричные уравнения решаются с помощью умножения уравнения на обратные матрицы. Например, чтобы найти матрицу X из уравнения $AX=B$, необходимо умножить это уравнение на A^{-1} слева.

Тогда:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Следовательно, чтобы найти решение X уравнения $AX=B$, нужно найти обратную матрицу A^{-1} и умножить ее на матрицу B , стоящие в правой части уравнения.

Уравнение $XA = B$.

$$XA = B \Leftrightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1} \Leftrightarrow XE = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}.$$

Уравнение $AXB = C$.

$$\begin{aligned} AXB = C &\Leftrightarrow A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1}A)X(BB^{-1}) = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow EXE = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1} \end{aligned}$$

Пример 13. Решить матричное уравнение, выполнить проверку

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - 2X = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. В правой части умножаем каждый элемент матрицы на три, а матрицу левой части переносим направо со сменой знака:

$$-2X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Преобразуем правую часть:

$$-2X = \begin{pmatrix} -3-1 & 3-(-3) \\ 0-8 & 12-0 \end{pmatrix}$$

$$-2X = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

Выразим X, для этого обе части уравнения умножим на $-\frac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2} \cdot (-2X) = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

Все числа матрицы делятся на 2, поэтому уместно избавиться от дроби. А заодно и от «минуса». Делим каждый элемент матрицы на -2 :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - 2X &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-4 & -3-(-6) \\ 8-8 & 0-(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пример 3. Решить матричное уравнение, выполнить проверку

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Для разрешения уравнения относительно X умножим обе его части на A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Таким образом, решение уравнения:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 \cdot 5 - 5 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \\ -4 \cdot 5 + 7 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \\ -4 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 41 \\ -31 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Проверка: подставим найденное значение X в левую часть исходного уравнения:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 41 \\ -31 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 \cdot 41 + 2 \cdot (-31) + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 41 + 3 \cdot (-31) + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 41 + 1 \cdot (-31) + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 60 \\ -12 \\ 48 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 Системы линейных алгебраических уравнений

3.1 Основные понятия и определения

Общая система из m линейных уравнений с n неизвестными записывается следующим образом:

(1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

При перестановке двух уравнений системы (1) она также заменяется на эквивалентную. Эти операции над системой уравнений сводятся к элементарным n - преобразованиям 1-го и 2-го типа над расширенной матрицей $\bar{A}$. Таким

образом, элементарные преобразования над системой (1) не меняют совокупности ее решений.

Система линейных уравнений называется совместной, или разрешимой, если она имеет, по крайней мере, одно решение. Система называется несовместной, или неразрешимой, если она не имеет решений.

Вопрос о совместности системы решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матриц A и ранг расширенной матрицы совпадают.

Для множества M решений системы линейных уравнений имеются три возможности:

- 1) $M = \emptyset$ (в этом случае система несовместна);
- 2) M состоит из одного элемента, т.е. система имеет единственное решение (в этом случае система называется определенной);
- 3) M состоит более чем из одного элемента (тогда система называется неопределенной). В третьем случае система (5.1) имеет бесчисленное множество решений.

Система имеет единственное решение только в том случае, когда $r(A) = n$. При этом число уравнений - не меньше числа неизвестных ($m \geq n$); если $m > n$, то $m-n$ уравнений являются следствиями остальных. Если $0 < r < n$, то система является неопределенной.

Пример 13. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases}$$

Решение.

Теорема Кронекера-Капелли – условие совместности системы. Матрица A -матрица, элементы которой есть коэффициенты при неизвестных. Найдем ранг матрицы A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0$$

Ранг равен 2. Составим расширенную матрицу A^* . Применим к ней элементарные преобразования, найдем ранг.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Ранг матрицы A^* равен 2. Система совместна. Имеет единственное решение $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Пример 14. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

Решение. Теорема Кронекера–Капели – условие совместности системы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}$$

Ранг равен 2.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы A^* равен 3. Система несовместна.

3.2 Методы решения систем линейных уравнений

1. Метод Крамера

Рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (2)$$

Теорема 1. Если определитель системы (2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Метод Крамера состоит в том, что мы последовательно находим главный определитель системы Δ и n вспомогательных определителей, которые получаются из определителя Δ заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Правило Крамера, которое дает исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы линейных уравнений: если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, если главный определитель системы и все вспомогательные определители равны нулю, то система имеет бесчисленное множество решений. Если главный определитель системы $D = 0$, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 4y - z = 3 \\ -x + 3y + 2z = 7 \\ 3x + 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

Решение. Вычисляем определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -21,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

Теперь воспользовавшись формулами Крамера, найдем значения неизвестных:

$$x = \frac{-21}{7} = -3, \quad y = \frac{14}{7} = 2, \quad z = \frac{-7}{7} = -1.$$

2. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Рассмотрим систему (2). Обозначим через A – матрицу коэффициентов этой системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

через $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матрицу-столбец из неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матрицу-столбец

свободных членов.

Принимая во внимание правило умножения матриц, можно заключить, что данная система уравнений эквивалентна матричному уравнению

$$A \cdot X = B \tag{1.3}$$

Теорема Если $\Delta(A) \neq 0$, то система (2) имеет единственное решение, определяемое равенством $X = A^{-1} \cdot B$.

Пример 16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -13 \\ x + 3y - z = -11 \\ 4x - 2y - 3z = -12 \end{cases}.$$

Решение. Выписываем матрицу системы $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ и находим обратную к

ней

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -14 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Остается лишь умножить эту матрицу на матрицу-столбец свободных членов:

$$X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -14 & 10 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = -1, y = -2, z = 4$.

3. Метод Гаусса

Рассмотрим матрицу $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$

Идея метода Гаусса состоит в том, чтобы над матрицей $\tilde{A}$ произвести элементарные преобразования, приводящие матрицу A к треугольному виду (прямой ход), а затем и к единичной матрице (обратный ход). Тогда в новой расширенной матрице на месте столбца свободных членов окажется решение исходной системы уравнений.

Пример 17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ x + 4y + z = -11 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и начнем ее преобразование с того, что поставим на первое место в первой строке 1, для чего достаточно поменять местами первую и третью строки. Затем под этим элементом получим нули:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & -11 \end{array} \right) C_1 \Leftrightarrow C_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} C_2 - 3C_1 \\ \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & -11 & -5 & 38 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array} \right) \sim$$

Создадим 1 на месте второго диагонального элемента. С этой целью сначала умножим вторую строку на 4, а затем от полученной вычтем третью строку, умноженную на 5. Далее продолжаем движение к треугольной, а затем и к единичной матрице:

$$4C_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & -44 & -20 & 152 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array} \right) C_2 - 5C_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -25 & 22 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim C_3 + 9C_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -25 & 22 \\ 0 & 0 & -224 & 224 \end{array} \right) - \frac{2}{224} C_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -25 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{array}{ccc} \text{C}_2 + 25\text{C}_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & \text{C}_1 - 4\text{C}_2 \\ \sim & & \sim \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & \end{array}$$

ОТВЕТ: $x = 2, y = -3, z = -1$.

3.3 Однородная система линейных уравнений

Однородной называется система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ясно, что $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ – есть решение такой системы. Это решение называется тривиальным.

Следствие. Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы $\Delta = 0$.

4 Использование линейной алгебры в экономических задачах

Использование элементов алгебры матриц является одним из основных методов решения многих экономических задач. Особенно этот вопрос стал

актуальным при разработке и использовании баз данных: при работе с ними почти вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики - матричная алгебра - имеют чрезвычайно важное значение для экономистов. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное - компактной матричной форме.

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, таблица распределения ресурсов по отдельным отраслям экономики (таблица 1).

Таблица 1 - Таблица распределения ресурсов

Ресурсы	Отрасли экономики	
	Промышленность	Сельское хозяйство
Электроэнергия	5,3	4,1
Трудовые ресурсы	2,8	2,1
Водные ресурсы	4,8	5,1

Может быть записана в компактной форме в виде матрицы распределения ресурсов по отраслям:

$$A = \begin{pmatrix} 5,3 & 4,1 \\ 2,8 & 2,1 \\ 4,8 & 5,1 \end{pmatrix}$$

В данной записи, например, матричный элемент $a_{11} = 5,3$ показывает, сколько электроэнергии употребляет промышленность, а элемент $a_{22} = 2,1$ - сколько трудовых ресурсов потребляет сельское хозяйство.

Рассмотрим следующую задачу: пусть предприятие выпускает продукцию трех видов: P_1 , P_2 , P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2 . Нормы расхода сырья характеризуются матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

где каждый элемент a_{ij} ($i = 1,2,3$; $j = 1,2$) показывает, сколько единиц сырья j -го типа расходуется на производство единицы продукции i -го вида.

План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C = (100 \ 80 \ 130)$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) - матрицей столбцом:

$$B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Рассмотрев задачу, получили: затраты 1-го сырья составляют $S_1 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730$ ед. и 2-го - $S_2 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение:

$$S = C \cdot A = (100 \quad 80 \quad 130) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (730 \quad 980)$$

Тогда общая стоимость сырья $Q = 730 \cdot 30 + 980 \cdot 50 = 70900$ ден. ед. может быть записана в матричном виде: $Q = S \cdot B = (CA)B = (70900)$.

Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т.е. матрицу:

$$R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$$

а затем общую стоимость сырья:

$$Q = C \cdot R = (100 \quad 80 \quad 130) \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (70900)$$

На этом примере мы убедились в выполнении ассоциативного закона произведения матриц: $(CA)B = C(AB)$.

Достоинства матриц состоят в том, что они используют широкий набор стратегически значимых переменных; указывают направление движения ресурсов. Среди недостатков этого инструмента: не обеспечивает реальных рекомендаций по разработке специфических стратегий; по ней невозможно определить сферы бизнеса, которые готовы стать победителями. Также матрицы позволяют с минимальными затратами труда и времени обрабатывать огромный и весьма разнообразный статистический материал, различные исходные данные, характеризующие уровень, структуру, особенности социально-экономического комплекса.

Рассмотрим еще одно применение матриц в экономике — задачу межотраслевого баланса.

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем, а с другой — потребителем продукции, выпускаемой

другими отраслями. Возникает довольно непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида. Впервые эта проблема была сформулирована в виде математической модели в 1936 г. в трудах известного американского экономиста В.В.Леонтьева, который попытался проанализировать причины экономической депрессии США 1929-1932 гг. Эта модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

Балансовые соотношения

Для простоты будем полагать, что производственная сфера хозяйства представляет собой n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени; в ряде случаев такой единицей служит год.

Балансовая модель производства является одной из наиболее простых математических моделей. Она записывается в виде системы уравнений, каждое из которых выражает требование равенства (баланса) между количеством продукции, производимой отдельным экономическим объектом, и совокупной потребностью в этом продукте. Под экономическим объектом обычно понимают так называемую «чистую прибыль».

Например, чтобы правильно отразить взаимосвязи между машиностроением и металлургией, необходимо исключить продукцию металлургической и других отраслей из продукции машиностроения, а в продукции металлургической промышленности не учитывать произведенные на металлургических заводах продукты машиностроения и других отраслей.

Таким образом, продукция «чистой отрасли» складывается из продукции специализированных предприятий, очищенной от непрофильных ее видов, и продукции, соответствующей профилю данной отрасли, но произведенной на предприятиях, относящихся к другим отраслям

Балансовые модели основываются на понятии межотраслевого баланса, который представляет собой таблицу, характеризующую связи между отраслями (экономическими объектами) экономической системы.

Предположим, что экономическая система состоит из n взаимосвязанных отраслей $P_1, P_2, \dots, P_n$. Валовой продукт i -й отрасли обозначим через X_i (X_1 – валовой продукт P_1

X_2 – валовой продукт P_2 , ..., X_n – валовой продукт P_n). Конечный продукт каждой отрасли обозначим буквой Y с индексом, соответствующим ее номеру (Y_i – конечный продукт P_i). Отрасли взаимосвязаны, т.е. каждая из них использует продукцию других отраслей в качестве сырья, полуфабрикатов и т. п.

Пусть X_{ij} – затраты продукции i -й отрасли на производство продукции P_j . Условно чистую продукцию i -й отрасли обозначим V_i .

Если перечисленные показатели представлены в межотраслевом балансе в тоннах, литрах, километрах, штуках и т. д., то говорят о межотраслевом балансе в натуральном, выражений. Мы же договоримся, что под X_i , Y_j , V_j и X_{ij} будем понимать выраженную в некоторых фиксированных ценах стоимость соответствующей продукции. Такой баланс называется стоимостным. Всю информацию об экономической системе сведем в таблицу – межотраслевой баланс (таблица 2).

Таблица 2 - Анализ общей структуры межотраслевого баланса

Отрасли	P_1	P_2	...	P_i	...	P_n	Итого	Конечный	Валовой продукт
P_1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1i}	...	X_{1n}	ΣX_{1j}	Y_1	X_1
P_2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2i}	...	X_{2n}	ΣX_{2j}	Y_2	X_2
...	...	...	...	I квадрант			...	II квадрант	
P_i	X_{i1}	X_{i2}	...	X_{ii}	...	X_{in}	ΣX_{ij}	Y_i	X_i
...									
P_n	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{ni}	...	X_{nn}	ΣX_{nj}	Y_n	X_n
Итого	ΣX_{k1}	ΣX_{k2}	...	ΣX_{ki}	...	ΣX_{kn}	$\Sigma \Sigma X_{kj}$	ΣY_k	ΣX_k
Условно чистая продукция	V_1	V_2	...	V_i	...	V_n	ΣV_j	IV квадрант	
			III квадрант						
Валовой продукт	X_1	X_2	...	X_i	...	X_n	ΣX_j		

Первый квадрант. В таблице каждая отрасль представлена двояким образом. Как элемент строки, она выступает в роли поставщика производимой ею продукции, а как элемент столбца – в роли потребителя продукции других отраслей экономической системы.

Если P_1 – производство электроэнергии, а P_2 – угольная промышленность, то X_{12} – годовые затраты электроэнергии на

производство угля, а X_{21} – аналогичные затраты угля на производство электроэнергии. P_1 выступает как поставщик электроэнергии и как потребитель угля. Отрасль P_1 является также потребителем собственной продукции. Электроэнергия стоимостью X_{11} денежных единиц используется внутри отрасли на обеспечение работы электротехники, на освещение производственных помещений и т. д. Аналогичный смысл имеет X_{22} и все X_{ii} . В общем случае, $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ii}, \dots, X_{in}$ – объемы поставок продукции i -й отрасли отраслям, входящим в экономическую систему. Сумма этих поставок

$$X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in} = \sum X_{ij}$$

выражает суммарное производственное потребление продукции P_i и записывается в i -й строке $(n + 1)$ -го столбца таблицы. В нашем примере

$$X_{11} + X_{12} + \dots + X_{1n} = \sum X_{1j}$$

есть суммарное производственное потребление электроэнергии, а

$$X_{21} + X_{22} + \dots + X_{2n} = \sum X_{2j}$$

– суммарные затраты угля на производственные нужды отраслей, входящих в экономическую систему.

Посмотрим теперь на P_i как на элемент столбца. В столбце с номером i расположены объемы текущих производственных затрат продукции отраслей, входящих в экономическую систему, на производство продукции i -й отрасли. В $(n + 1)$ -й строке указанного столбца записана сумма текущих производственных затрат P_i за год:

$$\sum_{k=1}^n X_{ki} = X_{1i} + X_{2i} + \dots + X_{ni}$$

Просуммировав первые n элементов $(n + 1)$ -й строки, получим величину текущих производственных затрат всех отраслей:

$$\sum_{k=1}^n X_{k1} + \sum_{k=1}^n X_{k2} + \dots + \sum_{k=1}^n X_{kj} + \dots + \sum_{k=1}^n X_{kn} = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n X_{kj}) \quad (3)$$

Сумма первых n элементов $(n + 1)$ -го столбца

$$\sum_{k=1}^n X_{1j} + \sum_{k=1}^n X_{2j} + \dots + \sum_{k=1}^n X_{ij} + \dots + \sum_{k=1}^n X_{nj} = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n X_{kj}) \quad (4)$$

есть стоимость продукции всех отраслей, которая была использована на текущее производственное потребление.

Нетрудно убедиться в том, что суммы (3) и (4) состоят из одних и тех же слагаемых (всех X_{kj}) и поэтому равны между собой:

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n X_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X_{kj} \right) \quad (5)$$

Равенство (5) означает, что текущие производственные затраты всех отраслей равны их текущему производственному потреблению. Число $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n X_{kj}$ есть так называемый промежуточный продукт экономической системы.

Элементы, стоящие на пересечении первых $(n + 1)$ строк и первых $(n + 1)$ столбцов, образуют первый квадрант (четверть). Это важнейшая часть межотраслевого баланса, поскольку именно в ней содержится информация о межотраслевых связях.

Второй квадрант расположен в таблице справа от первого. Он состоит из двух столбцов. Первый из них — столбец конечного потребления продукции отраслей. Под конечным потреблением понимают личное и общественное потребление, не идущее на текущие производственные нужды. Сюда включаются накопление и возмещение выбытия основных фондов, прирост запасов, личное потребление населения, расходы на содержание государственного аппарата и оборону, затраты по обслуживанию населения (здравоохранение, просвещение и т. д.), сальдо экспорта и импорта продукции. Во втором столбце представлены объемы валовой продукции отраслей. Суммарный (валовой) выпуск i -й отрасли определяется как

$$X_i = \sum_{j=1}^n X_{ij} + Y_i \quad (6)$$

Равенство (6) означает, что вся произведенная i -й отраслью продукция потребляется. Часть ее, в форме суммарного производственного потребления продукции P_i идет на производственные нужды отраслей, входящих в экономическую систему. Другая часть потребляется в форме конечного продукта.

Так, часть продукции угольной промышленности, как мы уже отмечали, используется внутри экономической системы, а другая — в качестве сырья, топлива — будет потреблена отраслями, не вошедшими в состав экономической системы, и составит часть экспорта страны, пойдет на отопление жилищ и т. п.

Квадранты I и II отражают баланс между производством и потреблением.

Ко второму квадранту относится также и та часть $(n+1)$ -й строки, в которой расположены суммарный конечный продукт

$$\sum_{k=1}^n Y_k = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

и суммарный валовой продукт

$$\sum_{k=1}^n X_k = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Третий квадрант расположен в таблице под первым. Он состоит из двух строк. Одна из них содержит объем валового продукта по отраслям, а другая – условно чистую продукцию отраслей $V_1, V_2, \dots, V_n$. В состав условно чистой продукции входят амортизационные отчисления, идущие на возмещение выбытия основных фондов, заработная плата, прибыль и т.д. Она определяется как разность между валовым продуктом отрасли и суммой ее текущих производственных затрат. Так, для P_i имеет место равенство

$$X_i = V_i + \sum_{k=1}^n X_{ki} \quad (7)$$

Первый и третий квадранты отражают стоимостную структуру продукции каждой отрасли. Так, равенство (7) показывает, что стоимость валового продукта X_i i -й отрасли складывается из стоимости той части продукции отраслей системы, которая была использована для производства X_i , из амортизационных отчислений, затрат на оплату труда, из чистого дохода отрасли, из стоимости ресурсов, не производящихся внутри экономической системы, и т.д.

Используя равенства (6) и (7), подсчитаем суммарный валовой продукт.

Из (6) следует, что

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X_{ij} \right), \quad (8)$$

а из (7) получаем:

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n X_{ki} \right) \quad (9)$$

Вторые слагаемые в правых частях равенств (8) и (9) выражают одну и ту же величину – промежуточный продукт. Отсюда и из равенства левых частей (8) и (9) делаем вывод о равенстве первых слагаемых:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n V_i \quad (10)$$

Итак, суммарный конечный продукт равен суммарной условно чистой продукции.

Четвертый квадрант непосредственного отношения к сфере производства не имеет, поэтому мы его заполнять не будем.

В IV квадранте показывается, как полученные в сфере материального производства первичные доходы населения (заработная плата, личные доходы членов кооперативов, денежное довольствие военнослужащих и т. д.), государства (налоги, прибыль с производства государственного сектора и т. д.), кооперативных и других предприятий перераспределяются через различные каналы (финансово-кредитную систему, сферу обслуживания, общественно-политические организации и т. д.), в результате чего образуются конечные доходы населения, государства и т. д.

Выводы:

1. Межотраслевой баланс – это таблица, характеризующая связи между экономическими объектами, входящими в экономическую систему.

2. Различают межотраслевой баланс в натуральном и стоимостном выражении.

3. Межотраслевой баланс состоит из четырех квадрантов. I квадрант – его важнейшая часть. В нем содержится информация о межотраслевых связях.

4. Вся произведенная внутри экономической системы продукция потребляется. Часть ее в форме суммарного производственного потребления идет на производственные нужды отраслей, входящих в экономическую систему. Другая часть потребляется в форме конечного продукта.

5. I и II квадранты отражают баланс между производством и потреблением.

6. I и III квадранты отражают стоимостную структуру продукции каждой отрасли.

7. Суммарный конечный продукт равен суммарной условно чистой продукции.

8. Межотраслевой баланс был построен по данным отчетного периода (например, истекшего года),

9. С построением балансовой таблицы завершается первый этап решения задачи методом математического моделирования: выявлены объекты изучения, установлены существенные связи между ними, собрана статистическая информация.

Пример 18.

Завершим составление баланса, располагая следующими данными об экономической системе, состоящей из трех

экономических объектов (например, P_1 – промышленность, P_2 – сельское хозяйство, P_3 – транспорт). Прочерки в таблице означают, что $X_{22} = X_{31} = 0$.

Таблица 3 – Исходные данные

Отрасли	P_1	P_2	P_3	Σ	Y	X
P_1	20	50			200	300
P_2	10	-	40			500
P_3	-				240	
Σ				310		
V		390				
X						

Решение.

1. Используем баланс между производством и потреблением продукции P_1 , для отыскания $\sum_{j=1}^3 X_{1j}$, а затем и X_{13} :

$$\sum_{j=1}^3 X_{1j} = X_1 - Y_1 = 300 - 200 = 100,$$

$$X_{13} = \sum_{j=1}^3 X_{1j} - X_{11} - X_{12} = 100 - 20 - 50 = 30$$

2. Аналогично, используя баланс между производством и потреблением продукции P_2 , найдем V_2 , предварительно подсчитав $\sum_{j=1}^3 X_{2j} = 10 + 0 + 40 = 50$: $Y_2 = X_2 - \sum_{j=1}^3 X_{2j} = 500 - 50 = 450$.

3. Значения X_1 и X_2 запишем на первых двух местах в последней строке таблицы (строка X). Таблица 4.

4. Найдем теперь

$$\sum_{j=1}^3 X_{3j} = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 X_{kj} - \sum_{j=1}^3 X_{1j} - \sum_{j=1}^3 X_{2j} = 310 - 100 - 50 = 160$$

$$5. X_3 = Y_3 + \sum_{j=1}^3 X_{3j} = 240 + 160 = 400$$

(использован баланс между производством и потреблением продукции P_3).

Таблица 4 – Расчетная таблица

Отрасли	P_1	P_2	P_3	Σ	Y	X
P_1	20	50	30	100	200	300
P_2	10	-	40	50	450	500
P_3	-				240	
Σ				310		
V		390				
X	300	500				

5.Теперь запишем величину X_3 в столбец X и строку X .

6.Суммарные затраты всех трех отраслей на производство

продукции первой отрасли $\sum_{k=1}^3 X_{1k} = 20 + 10 + 0 = 30$ запишем на первом месте в строке Σ .

7.Теперь можно найти условно чистую продукцию V_1 как разность между валовым выпуском $X_1=300$ и суммарными

затратами $\sum_{k=1}^3 X_{1k} = 30$: $V_1 = 300 - 30 = 270$

Таблица 5 – Расчетная таблица

Отрасли	P_1	P_2	P_3	Σ	Y	X
P_1	20	50	30	100	200	300
P_2	10	-	40	50	450	500
P_3	-			160	240	400
Σ	30			310		
V	270	390				
X	300	500	400			

7.Из равенства между суммарным конечным продуктом и суммарной условно чистой продукцией $\sum_{j=1}^3 Y_j = \sum_{j=1}^3 V_j$ получаем

величину $V_3 = \sum_{j=1}^3 Y_j - V_1 - V_2 = 200 + 450 + 240 - 270 - 390 = 230$

8. Теперь, когда строки V и X полностью заполнены, можно определить суммарные затраты на производство продукции второй

и третьей отраслей:

$$\sum_{k=1}^3 X_{k2} = X_2 - V_2 = 500 - 390 = 110,$$

$$\sum_{k=1}^3 X_{k3} = X_3 - V_3 = 400 - 230 = 170.$$

9. Завершит составление баланса вычисление затрат продукции третьей отрасли на производство продукции P_2 и на собственные производственные нужды P_3 :

$$X_{32} = \sum_{k=1}^3 X_{k2} - X_{12} - X_{22} = 110 - 50 - 0 = 60,$$

$$X_{33} = \sum_{k=1}^3 X_{k3} - X_{13} - X_{23} = 170 - 30 - 40 = 100.$$

Окончательно получаем:

Таблица 6 – Расчетная таблица

Отрасли	P_1	P_2	P_3	Σ	Y	X
P_1	20	50	30	100	200	300
P_2	10	-	40	50	450	500
P_3	-	60	100	160	240	400
Σ	30	110	170	310		
V	270	390	230			
X	300	500	400			

Построение балансовой модели

Используя производственные функции и балансовые уравнения, приходим к линейной балансовой модели:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + Y_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + Y_2 \\ \text{-----} \\ X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{in}X_n + Y_i \\ \text{-----} \\ X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n + Y_n \end{array} \right. \quad (11)$$

Как мы видим, система (11) содержит $n^2 + 2n$ величин: n^2 технологических коэффициентов a_{ij} , n конечных продуктов Y_i и n валовых продуктов X_j . Система линейна как относительно X_j , так и относительно Y_i .

Задачи, решаемые с помощью балансовой модели

Эта математическая модель имеет вид системы n линейных уравнений с $2n$ неизвестными. Первая группа неизвестных $X_1, X_2, \dots, X_n$ представляет объемы валовой продукции экономических объектов $P_1, P_2, \dots, P_n$, которую предстоит произвести в планируемом периоде. Вторую группу $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ составляют конечные продукты $P_1, P_2, \dots, P_n$, т. е. та часть валовой (или суммарной) продукции, которая в будущем пойдет на личное потребление, а также на производственное потребление за пределами изучаемой экономической системы (в других отраслях, регионах, странах).

Технологические коэффициенты a_{ij} считаем известными. А именно предполагаем, что они имеют те же значения, что и в отчетном периоде.

Если в системе (11) задать любые n из $2n$ неизвестных, то получим систему n линейных уравнений относительно оставшихся $n = 2n - n$ неизвестных.

В связи с этим возникают следующие три основные задачи:

1. По данному вектору-столбцу X , который будем называть вектором-столбцом объемов производства, найти вектор-столбец конечной продукции Y .
2. Обратная задача: по заданному вектору Y найти вектор X .
3. Смешанная задача: зная значения части X_i и Y_j , найти соответствующие Y_i и X_j .

Получения значений коэффициентов прямых
внутрипроизводственных затрат

Технологические коэффициенты, или, как их еще называют, коэффициенты прямых внутрипроизводственных затрат a_{ij} показывают, какое количество продукта i -й отрасли надо затратить на производство единицы валового продукта j -й отрасли. Коэффициенты прямых затрат считаются постоянными величинами в статических межотраслевых моделях.

Прежде всего возникает вопрос о том, каким образом можно получить значения коэффициентов a_{ij} .

Есть два основных пути.

1. Статистический. Коэффициенты a_{ij} определяются на основе анализа отчетных балансов за прошлые годы. Неизменность во времени коэффициентов прямых затрат в этом случае достигается подходящим выбором отраслей межотраслевого баланса. Как показывает практика, при правильном выборе достаточно крупных отраслей коэффициенты a_{ij} оказываются достаточно устойчивыми.

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}, i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где X_{ij} и X_j взяты из отчетного баланса.

2. Нормативный. Строится модель отрасли межотраслевого баланса. В этой модели отрасль рассматривается как совокупность отдельных производств, для каждого из которых уже разработаны нормативы затрат. Если заранее знать, какую продукцию будут выпускать производства отрасли, то по нормативам затрат можно рассчитать среднеотраслевые коэффициенты прямых затрат.

Определив коэффициенты a_{ij} , можно использовать систему (11) для решения сформулированных выше задач 1 – 3.

Технологические коэффициенты a_{ij} обладают следующими свойствами:

$$0 \leq a_{ij} \leq 1, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1, j = 1, 2, \dots, n.$$

Пример 19. Используя отчетный баланс:

1. Найдите a_{ij} .
2. Постройте систему балансовых уравнений.
3. По вектору $Y = (10, 20)$ найдите вектор X .
4. Найдите вектор Y , если $X = (50, 100)$.

Таблица 7 – Расчетная таблица

	P_1	P_2	Σ	Y	X
P_1	5	12	17	23	40
P_2	6	12	18	32	50

Решение.

$$1. \quad a_{11} = \frac{X_{11}}{X_1} = \frac{5}{40} = 0.125; \quad a_{12} = \frac{X_{12}}{X_2} = \frac{12}{50} = 0.240$$

$$a_{21} = \frac{X_{21}}{X_1} = \frac{6}{40} = 0.150; \quad a_{22} = \frac{X_{22}}{X_2} = \frac{12}{50} = 0.240.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & X_1 = 0.125X_1 + 0.240X_2 + Y_1; \\ & X_2 = 0.150X_1 + 0.240X_2 + Y_2. \end{aligned}$$

3. При $Y = (10, 20)$ система принимает вид:

$$\begin{aligned} 0.875X_1 - 0.240X_2 &= 10, \\ -0.150X_1 + 0.760X_2 &= 20. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим: $X_1 = 19.71$; $X_2 = 30.21$.

4. Если $X = (50, 100)$, то из системы получим:

$$Y_1 = 19.75; \quad Y_2 = 68.5.$$

Решение системы балансовых уравнений в матричной форме

Систему (11) заменим матричным уравнением:

$$Y = (E - A)X, \quad (12)$$

Система (12) позволяет по данному вектору-столбцу объемов производства найти вектор-столбец конечной продукции.

Для решения обратной задачи надо решить следующую систему:

$$X = (E - A)^{-1}Y, \quad (13)$$

где $(E - A)^{-1}$ – матрица, обратная матрице $(E - A)$.

Матрица A называется продуктивной, если существует неотрицательный вектор X^0 , такой, что $X^0 > A X^0$. Другими словами, если матрица A продуктивна, то для выпуска продукта каждой отрасли требуется затрат меньше, чем стоит сам продукт.

Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $B = (E - A)^{-1}$ неотрицательна.

Матрицу $B = ||b_{ij}||$ называют матрицей коэффициентов полных внутренних затрат. Коэффициент b_{ij} выражает стоимость той части валового продукта P_i , которая необходима P_i для выпуска ею единицы конечной продукции.

До сих пор мы говорили о затратах, распределении и потреблении продукции, произведенной экономическими объектами, входящими в данную экономическую систему. Однако, если экономическая система не охватывает всю экономику страны, то не исключена возможность того, что в процессе производства в

качестве сырья, полуфабрикатов и т. д. будут использоваться продукты, произведенные за ее пределами.

Особая роль принадлежит трудовым ресурсам и капиталовложениям. Эти два фактора производства всегда являются внешними по отношению к любой экономической системе. Тем не менее с помощью метода межотраслевого баланса можно определить затраты труда, капитала и других ресурсов, не производящихся внутри нее.

Примеры решения задач

Задача 1 Найти произведение $C = AB$ данных матриц

$$A(2,3) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B(3,2) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В, поэтому матрицу А можно умножить слева на матрицу В. По правилу умножения прямоугольных матриц элемент c_{ij} - расположенный на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы С, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В. Следовательно:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A(2,3) \cdot B(3,2) = C(2,2)$$

Задача 2 Вычислить $D = (AB)^T - C^2$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \\ 1 \cdot 7 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 23 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 10 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 13 & -20 \end{pmatrix}$$

Задача 3 Найти произведение матриц $C = AB$,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

$A(2 \times 3) \cdot B(3 \times 1) = C(2 \times 1)$, т.к. число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В, то произведение матриц АВ имеет смысл.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 4 Найти значение многочлена $f(A) = 3A^2 - 2A$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & -1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & -1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 27 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 27 & 10 \end{pmatrix} \quad 2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ -2 & 4 & 0 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = 3A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 6 & 27 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 27 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ -2 & 4 & 0 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 19 & 0 \\ -1 & -4 & -3 \\ -5 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

Задача 5 Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим по правилу треугольника

$$\Delta = 1(-1) \cdot (-5) + (-2)(-4)0 + 4(-3)3 - 0(-1)3 - 4(-2)(-5) - (-3)(-4)1 = 5 + 0 - 36 + 0 - 40 - 12 = -83.$$

Задача 6 Вычислить определитель примера 1 разложением по первой строке.

Найдем алгебраические дополнения.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -7, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -(-20) = 20$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -12$$

$$\Delta = 1 \cdot (-7) + (-2)20 + 3(-12) = -7 - 40 - 36 = -83.$$

Задача 7. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} - 3 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}.$$

Найдем алгебраические дополнения A_{12}, A_{13}

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -(15 - 60 + 45) = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 18 + 24 = 0$$

Задача 8 Найти обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

Решение. Вычислим алгебраические дополнения всех элементов данной матрицы

$$\begin{aligned} A_{11} &= +(-4) = -4 & A_{21} &= -(-2) = 2 \\ A_{12} &= -3 & A_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Найдем определитель $\Delta(A) = 1 \cdot (-4) - 3 \cdot (-2) = -4 + 6 = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Задача 9 Найти обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta(A) = -2, \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Задача 10 Даны матрицы A и B. Найти матрицу $C = 2A + B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Заметим, что наши матрицы – квадратные (число строк равно числу столбцов, это общее число 3 и есть порядок наших матриц). Матрицы A и B – треугольные, у матрицы A под главной диагональю все элементы нулевые. Это свойство матриц исчезнет при их сложении. Чтобы получить матрицу 2A, следует все элементы A умножить на 2.

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad 2A + B = C = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 11 Вычислить матрицу $C = 5A - B$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$5A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 10 \\ 0 & 20 & 5 \end{pmatrix}, \quad -B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -5+5 & -5+2 & 10+0 \\ 0+2 & 20-1 & 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 10 \\ 2 & 19 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 12 Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x - 2y = 3 \\ x - 5y + 5z = 11 \end{cases}$$

Решение.

Методом Крамера решаем неоднородную систему, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель системы $\neq 0$, т.е система имеет единственное решение.

Вычисляем определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 11 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 11 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 11 \end{vmatrix} = 16.$$

По формулам Крамера найдем значения неизвестных:

$$x = \frac{8}{8} = 1, \quad y = \frac{0}{8} = 0, \quad z = \frac{16}{8} = 2$$

Ответ: $x = 1, y = 0, z = 2$.

Задача 13 Решить систему матричным способом.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 4y + z = 5 \\ x + y + 4z = 12 \end{cases}$$

Решение. Матричным способом можно решать неоднородную систему, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель системы не равен 0, т.е. система имеет единственное решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{система имеет единственное решение.}$$

Найдем обратную матрицу к матрице A . Для этого найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A .

$$\begin{aligned} A_{11} &= 15, & A_{12} &= 7, & A_{13} &= -2 \\ A_{21} &= -3, & A_{22} &= 3, & A_{23} &= 0 \\ A_{31} &= -3, & A_{32} &= 1, & A_{33} &= 2 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 15 & -3 & -3 \\ -7 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $X = A^{-1} \cdot B$

$$X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 15 & -3 & -3 \\ -7 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 45 & -15 & -36 \\ -21 & +15 & +12 \\ -6 & +0 & +24 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Задача 14 Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -3x + y + 5z = 2 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы, затем под единицей в первой строке получим нули в первом столбце.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - 2C_1 \\ \\ \sim C_3 + 3C_1 \end{matrix} \begin{matrix} -C_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 11 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2C_2 + C_3 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \\ \frac{C_3}{17} \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - 3C_3 \\ C_1 - 2C_3 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} C_2 + C_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли складывать матрицы разного размера?
2. Как осуществляется операция умножения матрицы на число?
3. По какому правилу производится умножение матриц?
4. Что называется минором элемента квадратной матрицы?
5. Что называется алгебраическим дополнением элемента квадратной матрицы?
6. По какой формуле вычисляется определитель квадратной матрицы второго порядка?
7. По какой формуле вычисляется определитель квадратной матрицы третьего порядка?
8. Что называется обратной матрицей?
9. Для каких матриц существуют обратные?
10. Что называется теоремой Кронекера – Капелли?
11. Что такое формулы Крамера для решения систем линейных уравнений?
12. Для каких систем можно найти решение, используя формулы Крамера?
13. Какова схема решения систем линейных уравнений методом Гаусса?
14. Что называется рангом матрицы?
15. Перечислите методы нахождения ранга матрицы.
16. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ)
17. Перечислите свойства умножения матриц

Задания для самостоятельной работы

В данном разделе представлены задания для самостоятельной работы в разных формах: в виде контрольной работы по теме «Матрицы. Определитель» 2 варианта, самостоятельная работа по теме «Матрицы. Определитель», 20 вариантов, самостоятельная работа по теме «Решение систем линейных уравнений», 10 вариантов. Тест по теме «Линейная алгебра» с одним правильным ответом, 46 вопросов. Тест по теме «Линейная алгебра» с несколькими правильными ответами, 20 вопросов. В конце пособия представлены ответы для самопроверки на некоторые задания.

Задание 1 Контрольная работа по теме «Матрицы. Определитель»

Вариант 1

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

1.1 Найти: а) $3A + 5B$ б) B^2 в) B^3 г) BA д) AE е) A^{-1}

1.2 Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A , если $f(x) = 2x^2 - 4$

2 Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Найти: AB

4. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

4.1 Вычислить алгебраическое дополнение A_{12}

4.2 Вычислить минор M_{23}

4.3 Вычислить определитель Δ

Вариант 2

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

1.1 Найти: а) $5A + 4B$ б) A^2 в) A^3 г) AB д) EA е) B^{-1}

1.2 Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A , если $f(x) = x^2 - 2x + 1$

2 Решить матричное уравнение: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ Найти: AB

4. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

4.1 Вычислить алгебраическое дополнение A_{21}

4.2 Вычислить минор M_{14}

4.3 Вычислить определитель Δ

Вариант 3

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

1.1 Найти: а) $5A - 2B$ б) A^2 в) B^3 г) AB д) EA е) A^{-1}

1.2 Найти значение многочлена $f(B)$ от матрицы B , если $f(x) = 3x^2 + 5$

2 Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ Найти: AB

4. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

4.1 Вычислить алгебраическое дополнение A_{13}

4.2 Вычислить минор M_{21}

4.3 Вычислить определитель Δ

Задание 2 Самостоятельная работа по теме «Матрицы. Определитель»

Даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Необходимо

1. Найти матрицу C .
2. Найти определитель матрицы C .
3. Найти матрицу, обратную к матрице C .
4. Найти произведение матриц A и C .

Таблица 8 – Исходные данные

№ вар	C	№ вар	C
1	2	3	4
1	$2A-3B + A^T$	11	$-2A+B+2A^T$
2	$A+2B+B^T$	12	$-3A+4B-3B^T$
3	$-2A-B+2A^T$	13	$-A+3B+4A^T$
4	$3A-B+B^T$	14	$2A+4B-B^T$
5	$A-3B+2A^T$	15	$3A-B+A^T$

Продолжение таблицы 8

1	2	3	4
6	$3B-2A-B^T$	16	$2A+5B-2A^T$
7	$2A+B-A^T$	17	$3A-B-3B^T$
8	$2B-2A+3B^T$	18	$4A+2B-A^T$
9	$4A+B-2A^T$	19	$2A+3B+2A^T$
10	$-2A+4B+B^T$	20	$2A-3B-B^T$

Задание 3 Самостоятельная работа по теме «Решение систем линейных уравнений». Решить систему тремя способами:

- 1) методом Крамера
- 2) матричным методом
- 3) методом Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{31}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Таблица 9 - Исходные данные

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1	1	2	3	2	1	-1	3	2	2	14	1	13
2	2	-3	1	5	-1	-1	1	3	4	8	10	3
3	2	-3	1	5	1	-2	1	-1	1	0	-1	3
4	2	3	1	3	-1	-1	5	2	4	6	1	11
5	3	-1	2	2	1	-1	5	3	7	13	0	28
6	3	-1	2	7	0	1	-1	3	2	10	22	2
7	1	3	-1	2	-1	4	3	2	5	3	5	10
8	2	-1	4	7	3	-1	5	-2	-3	7	3	4
9	2	3	-4	3	-1	2	4	3	-3	1	12	9
10	4	4	-3	3	-1	2	5	3	-1	-7	7	-2

Задание 3 Тест по теме «Линейная алгебра» с одним правильным ответом

1. Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

- а) 13
- б) -10
- в) 14
- г) 7
- д) -7

2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $2A+5$

- а) $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$
- б) $\begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$
- в) $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$
- г) $\begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$
- д) $\begin{pmatrix} -11 & 15 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$

3. Система линейных уравнений называется несовместной, если:

- а) она имеет хотя бы одно решение
- б) не имеет ни одного решения
- в) имеет множество решений
- г) имеет единственное решение
- д) имеет два решения

4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти A^2 .

- а) $\begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
- б) $\begin{pmatrix} 19 & 4 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$
- в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} -17 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

5. При перестановке двух столбцов величина определителя:

а) не изменится

б) равна нулю

в) меняет свой знак на противоположный

г) равна единице

д) увеличится в два раза.

6. Найти произведение матриц $A \cdot B$, где $A = (2 \ 4 \ 0)$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

а) $(3 \ 0 \ 1)$

б) (10)

в) (-2)

г) -10

д) $(-2 \ 12 \ 0)$

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти A^2 .

а) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

в) (4)

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

8. Найти алгебраическое дополнение A_{21} матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

а) 0

б) 1-

в) 2

г) -2

д) 3

9. Найти обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Единичной матрицей является матрица:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

11. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти A^2 .

а) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

в) (4)

г) $\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. Величина определителя не изменится от:

- а) перестановки строк
- б) умножения строки на число $\neq 0$
- в) транспонирования
- г) перестановки столбцов
- д) умножения столбца на число $\neq 0$.

13. Вычислить определитель
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

- а) 5
- б) 10
- в) -10
- г) -2
- д) 2

14. Найти произведение матриц: $A = (1 \ 0 \ 2); \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- а) $(2 \ 0 \ 0)$
- б) 2
- в) (2)
- г) $(3 \ 1 \ 2)$
- д) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

15. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$ Найти AB .

- а) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
- б) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
- в) -22
- г) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
- д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

16. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$ Найти A_{12} .

- а) -1
- б) 1
- в) 3
- г) -3
- д) 5

17. Если матрица B является обратной к матрице A то:

- а) $AB = E$
- б) $B/A = E$
- в) $AB = 1$
- г) $A/B = E$
- д) $A + B = E$

18. Решение матричного уравнения $BX = A$ ищем в виде:

- а) $X = AB$
- б) $X = A/B$
- в) $X = B^{-1}A$
- г) $X = A^{-1}B$
- д) $X = A^{-1}B^{-1}$

19. Если размеры матриц A и B соответственно равны (3×4) и (4×5) , то размеры $C = A \cdot B$ равны:

- а) (3×4)
- б) (4×4)
- в) (4×5)
- г) (3×5)
- д) (5×5)

20. Складывать можно только матрицы:

- а) квадратные
- б) одинаковых размеров
- в) разных размеров
- г) размерами $A(m \times n)$, $B(n \times \ell)$
- д) любых размеров

21. Умножать можно только матрицы

- а) квадратные
- б) одинаковых размеров
- в) разных размеров
- г) размерами $A(m \times n)$, $B(n \times \ell)$
- д) любых размеров

22. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- а) -6
- б) -12
- в) 12
- г) 70
- д) -72

23. Найти матрицу $3A$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

- а) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 0 \\ 3 & 12 & -6 \end{pmatrix}$
- б) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
- в) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
- г) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
- д) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

24. Найдите произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

- а) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$
- б) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$
- в) $\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$
- г) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- д) $\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

25. Найдите A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

- а) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$
- б) $\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$
- в) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

26. Решите систему линейных уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

а) (1; -2; 3)

б) несовместна

в) (1; 0; 1)

г) (0; 1; 1)

д) (с; 2с - 3; -3с + 4)

27. Решите систему линейных уравнений
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

а) (1; -2; 3)

б) несовместна

в) (1; 0; 1)

г) (0; 1; 1)

д) (с; 2с - 3; -3с + 4)

28. Решите систему линейных уравнений
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y - z = 0 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

а) (1; -2; 3)

б) несовместна

в) (1; 0; 1)

г) (0; 1; 1)

д) (с; 2с - 3; -3с + 4)

29. Решите систему линейных однородных уравнений
$$\begin{cases} 3x - 5y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

а) (-6; -3; 1)

б) (0; 1; -1)

в) (0; 0; 0)

г) (1; 0; 1)

д) (-6с; -3с; с)

30. Если $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, то значение многочлена $f(x) = 5x + 2$ от матрицы А есть

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 27 \end{pmatrix}$

$$б) \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 7 & 27 \end{pmatrix}$$

$$в) \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 5 & 27 \end{pmatrix}$$

$$г) \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 7 & 27 \end{pmatrix}$$

$$д) \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$$

31. Указать размер матрицы – произведения $C = A(2,3) \cdot B(3,3)$

а) 2,3

б) 3,3

в) 4,4

г) 5,6

д) 6,9

32. Алгебраическое дополнение A_{32} определителя $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ равно

а) 72

б) -72

в) -18

г) 18

д) -14

33. При перестановке двух строк, величина определителя:

а) не изменится

б) равна нулю

в) меняет свой знак на противоположный

г) равна единице

д) увеличится в два раза

34. Вычислить алгебраическое дополнение A_{22} определителя $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

а) 11

б) 1

в) 18

г) -2

д) 2

35. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

- а) -11
- б) 11
- в) 12
- г) -12
- д) 10

36. Если все элементы какой-либо строки умножить на один и тот же множитель $\lambda \neq 0$, то величина определителя:

- а) не изменится
- б) будет равна нулю
- в) изменит свой знак на противоположный
- г) будет равна единице
- д) изменится в λ раз.

37. Если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, то величина определителя:

- а) не изменится
- б) будет равна нулю
- в) изменит свой знак на противоположный
- г) будет равна единице
- д) изменится в λ раз

38. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

- а) 5
- б) 15
- в) -45
- г) 45
- д) -9

39. Найдите произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

- а) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$
- б) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$

40. Вычитать можно только матрицы

а) квадратные

б) одинаковых размеров

в) разных размеров

г) размерами $A(m \times n)$, $B(n \times \ell)$

д) любых порядков

41. Решение матричного уравнения $AX = B$ ищем в виде:

а) $X = B/A$

б) $X = A/B$

в) $X = B^{-1}A$

г) $X = A^{-1}B$

д) $X = A^{-1}B^{-1}$

42. Если размеры матриц A и B соответственно равны (5×4) и (4×5) , то размеры $C = A \cdot B$ равны

а) (5×4)

б) (4×4)

в) (4×5)

г) (3×5)

д) (5×5)

43. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^{-1} , обратную к матрице A

а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10}$

44. Выберите нулевую матрицу

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

45. Найти значение y из системы
$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$$

а) 3

б) 2

в) -2

г) 1

д) -1

46. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

а) (1; 3; 1)

б) (1; 1; 1)

в) (3; 1; 1)

г) несовместна

д) (1; 1; 0)

Задание 4 Тест по теме «Линейная алгебра» с несколькими правильными ответами

1. Найти $C - D$, если $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$:

А) $\begin{pmatrix} 2^0 & 1 \\ -2 & -2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

В) $\begin{pmatrix} 2^3 & 1 \\ 1 & -2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -1 & -2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2^0 & -2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

F) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & -2^2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

G) $\begin{pmatrix} 8 & 2^0 \\ 1 & -2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

2. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2 & x \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

а) $2^2 \cdot 2$

в) 9

с) $(-1)^3 8$

д) 8

е) -8

3. Найти C-2Д, если $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

а) $\begin{pmatrix} -6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

с) $\begin{pmatrix} -6 & 7 & -4 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix} -6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

4. Если в определителе поменять местами две строки, то:

А) ничего не измениться

в) определитель станет равным нулю

с) поменяет свое значение на противоположное

д) поменяет свое значение на взаимнообратное

е) станет равным единице

ф) в определителе нельзя менять местами строки.

5. Для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ укажите транспонированную:

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \text{Ln}1 & -7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

6. Найти минор M_{12} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

a) -3

в) $22\text{Ln}e$

c) -22

d) 9

e) 2^1

f) $88/4$

7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

a) 33

в) $-33/3$

c) $-22/2$

d) $22/2$

e) 11

f) -11

g) $33/3$

8. Найти $A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

A) $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -6 & 2 & 3^0 \\ 4 & -3^2 & 6 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 6 & 2^0 & 13 \\ 2^2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 6 & 3^2 & 2 \\ 6 & 3^0 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

9. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 21 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$

a) 30

в) 35

с) 49/7

d) 60/2

e) $7\sqrt{25}$

f) 65/5

g) 35/7

10. Вычислить $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) 3

в) $4 \cdot 1^0$

с) 0/7

d) $3 \cdot 0$

e) 0

f) 5

11. Найти A-B, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

A) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\text{B)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -2^3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{C)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{D)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & -7 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{E)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{F)} \begin{pmatrix} \sqrt{0} & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

12. Найти алгебраическое дополнение A_{12} определителя $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

- a) -6
- в) $6Lne$
- с) $-18/3$
- d) 9
- e) 6^1
- f) $18/2$

13. Определитель равен нулю, если:

- A) все элементы главной диагонали равны нулю
- B) соответствующие элементы двух параллельных рядов равны
- C) элементы строки пропорциональны элементам соответствующего столбца
- D) все элементы побочной диагонали равны нулю
- E) все элементы какого-либо ряда равны нулю.

14. Система $\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$

- A) вырожденная
- B) имеет бесконечно много решений
- C) совместна
- д) невырожденная
- е) неоднородная

15. Умножить можно матрицы:

- А) $A_{3 \times 4}$ и $B_{4 \times 5}$
- В) $A_{2 \times 3}$ и $B_{5 \times 3}$
- С) $A_{3 \times 3}$ и $B_{3 \times 2}$
- Д) $A_{3 \times 4}$ и $B_{3 \times 4}$
- Е) $A_{3 \times 4}$ и $B_{4 \times 3}$

16. Метод Крамера для решения линейных алгебраических систем линейных уравнений, можно применить, если:

- А) количество неизвестных больше количества уравнений в системе
- В) количество неизвестных меньше количества уравнений в системе
- С) основная матрица системы вырожденная
- Д) система однородная и основная матрица системы невырожденная
- Е) основная матрица системы невырожденная

17. Дана матрица A и обратная к ней A^{-1} . Тогда:

- А) $A \cdot A^{-1} = E$
- В) $AE = E$
- С) $(A^{-1})^{-1} = E$
- Д) $A^{-1} \cdot A = E$
- Е) $(A^{-1})^{-1} = A$

18. Верное утверждение: определитель сохранит свое значение, если:

- А) если общий множитель какого-либо ряда вынести за знак определителя
- В) умножить какой-либо ряд на отличное от нуля число
- С) умножить соответствующие элементы двух параллельных рядов
- Д) сложить элементы строк с элементами соответствующих столбцов
- Е) умножить элементы строк на элементы соответствующих столбцов
- Ф) поменять местами два параллельных ряда

19. Значение определителя $\begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ принадлежит интервалу:

- А) $(-8; -4)$
- В) $(-9; -6)$
- С) $(-13; -9)$
- Д) $(-12; -8)$
- Е) $(-11; -7)$

20. Матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ является решением уравнения

- А) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
- В) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЮ 1

Вариант 1

$$1.1 \quad \text{а) } 3A + 5B = \begin{pmatrix} 27 & 11 \\ 28 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } B^3 = \begin{pmatrix} 92 & 84 \\ 420 & 428 \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } AE = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B^2 = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 50 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } BA = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 27 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{е) } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$1.2 \quad f(X) = \begin{pmatrix} 32 & 12 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad X = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad AB = (0)$$

$$4.1 \quad A_{12} = -9 ; \quad 4.2 \quad M_{23} = 197 ; \quad 4.3 \quad \Delta = 0$$

Вариант 2

$$1.1 \quad \text{а) } 3A + 4B = \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 26 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } A^3 = \begin{pmatrix} 37 & 9 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } EA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } AB = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{е) } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$1.2 \quad f(A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad AB = (-1)$$

$$4.1 \ A_{21} = -31 \quad 4.2 \ M_{14} = 48 \quad 4.3 \ \Delta = -647$$

Вариант 3

$$1.1 \ a) \ 5A - 2B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \quad б) \ A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$в) \ B^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 14 & -8 \end{pmatrix} \quad г) \ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$д) \ EA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad е) \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$1.2 \ f(B) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$$

$$2 \ X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$3. \ AB = (19)$$

$$4.1 \ A_{13} = -146$$

$$4.2 \ M_{21} = -32$$

$$4.3 \ \Delta = 0$$

Таблица 10 - Ответы к тестам с одним правильным ответом

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
б	в	б	б	в	б	б	в	в	в
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
а	в	б	в	б	г	а	в	г	б
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
г	д	а	в	г	в	д	б	в	в
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
а	г	в	д	а	д	а	в	д	б
41	42	43	44	45					
г	д	б	г	д					

Таблица 11 - Ответы к тестам с несколькими правильными ответами

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e g	ce	c	c	b g	b f	d g	e	b e	c d e
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b e f	a c	b e	d c	a c e	e d	a e d	a	a	c f

Список литературы

1. Гусак, А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справ. пособие к решению задач / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2008. – 288 с.
2. Бурмистрова, Е.Б. Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной: Учебник для студ. высш. учеб. заведений / Е.Б. Бурмистрова, С.Г. Лобанов. – М.: ИЦ Академия, 2010. – 336 с.
3. Гомонов, С.А. Математика. Линейная алгебра: Учебно-справочное пособие / С.А. Гомонов. – М.: Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 144 с.
4. Горлач, Б.А. Линейная алгебра: Учебное пособие / Б.А. Горлач. – СПб.: Лань, 2012. – 480 с.
5. Демидович, Б.П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х т.Т. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учебное пособие для втузов / Б.П. Демидович. – М.: Альянс, 2011. – 480 с.
6. Епихин, В.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач: Учебное пособие / В.Е. Епихин, С.С. Граськин. – М.: КноРус, 2013. – 608 с.
7. Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. – М.: Проспект, 2012. – 400 с.
8. Канатников, А.Н. Линейная алгебра: Учебник для вузов / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко; Под ред. В.С. Зарубин. – М.: МГТУ им. Баумана, 2006. – 336 с.
9. Кожухов, И.Б. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х т.Т. 1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры: Учебное пособие для втузов / И.Б. Кожухов. – М.: Физматлит, 2009. – 288 с.
10. Кочетков, Е.С. Линейная алгебра: Учебное пособие / Е.С. Кочетков, А.В. Осокин. – М.: Форум, 2012. – 416 с.
11. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс: С контрольными работами: линейная алгебра; аналитическая геометрия; основы математического анализа; комплексные числа / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.
12. Михалев, А.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / А.А. Михалев, И.Х. Сабитов. – М.: ИЦ Академия, 2013. – 256 с.
13. Просветов, Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Задачи и решения: Учебно-практическое пособие / Г.И. Просветов. – М.: Альфа-Пресс, 2009. – 208 с.
14. Рудык, Б.М. Линейная алгебра: Учебное пособие / Б.М. Рудык. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 318 с.
15. Скрыдлова, Е.В. Линейная алгебра: Учебное пособие / Е.В. Скрыдлова, О.О. Белова. – Рн/Д: Феникс, 2012. – 142 с.
16. Шевцов, Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие / Г.С. Шевцов. – М.: Магистр
17. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – 2-е изд.,

- перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ, 2003. -471 с. Раздел I. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии
18. Просветов Г.И. Математика в экономике. Задачи и решения/Г.И.Просветов. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство "Экзамен", 2004. - 446 с.
19. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч.1/Д.Т.Письменный. - 6-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2006. - 288 с. Гл.I-IV.
20. Борович З.И. Определители и матрицы: Учеб. пособие для вузов. / З.И. Борович. - 2-е изд. - М.: Наука, 1988. – 448 с.
- 21.Солодовников А.С. Математика в экономике. Учебник ч. 1 М. / А.С. Солодовников, В.А.Бабайцев , А.В.Браилов.- Финансы и статистика, 1998.-224 с.
- 22.Козак А.В Линейная алгебра. / А.В. Козак, В.С. Пилиди – М: Вузовская книга, 2001. – 240 с.
- 23.Кряквин В.Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях. / В.Д. Кряквин – М.: Вузовская книга, 2007. – 460 с.
- 24.Каганов М.И. Абстракции в математике и физике. / – М.И.Каганов, Г.Я. Любарский М.: Физматлит, 2005. – 580 с.