«Ақпараттық және телекоммуникациялық технологиялар: білім, ғылым, тәжірибе» атты II Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясы. - 2015. - II том. - 589-593 б.

ӘОК 519.6 : 004

Турусбекова Б.С., аға оқытушы

Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық зерттеу техникалық университеті,
Қазақстан, Алматы қаласы
Электрондық адрес: turusbekova78@mail.ru

Математикалық модельдердің жерасты гидравликасыныңтехникалық есептерін шешуде қолданылулары

Андатпа. Скважинаның дебиттерін анықтау, скважинаның үйлесімді орналасу жүйесін таңдау, мұнайлы контурлардың орналасуы және т.б. секілді жерасты гидравликасының техникалық есептері жоғарыдағы Лаплас теңдеулерінің шешімін табу мәселелеріне алып келеді. Кезкелген мұнай контуры үшін және скважинаның кезкелген орналасуы жағдайында бұл айтылған мәселелердің дәл шешімі жоқ. Бұл мақалада жоғарыда қарастырылған есептерді дұрыс геометриялық формада қарастырылады. Есептердің шешімі қарастырылатын облыстардың түрі мен қойылатын шекаралық шарттарға байланысты.

Түйін сөздер: сым темір, қысым, мұнай қатпары, бұрғылау, шекаралық шарттар, температура.

Алдымен математикалық модель деген не? Оның негізгі элементтері неден тұрады? деген секілді сауалдардың төңірегінде әңгіме қозғалық. Қандайда бір объектінің математикалық моделі деп, біз, теңдеулердің, теңсіздіктердің, логикалық қатынастардың және графиктердің гомоморфтық бейнелеуін түсінеміз. Гомоморфтық бейнелеу зерттеліп отырған объектінің элементтері мен модель элементтерінің аралығындағы қатынастарды біріктіреді. Басқаша айтқанда модель объектіні қысқа мерзім аралығында зерттеу үшін құрылған шартты бейне. Модельді зерттеу арқылы біз объект туралы жаңа мәліметтер аламыз. Сонымен қатар, модельдер кезкелген жағдайда қандай шешімді қабылдауға мүмкіндік береді.

Математикалық модельдердің негізгі элементтері туралы түсініктерді нақтылау үшін техника саласындағы практикалық мазмұнды есептер қарастыралық және олардың математикалық модельдерін құралық.

1. Шектің тепе-теңдік жағдайынан ауытқуын $u(x,t)$ арқылы белгілейік. Айталық ішек бастапқы уақытта тепе-теңдік жағдайда болсын және ішек тербелісінің бастапқы уақыттағы жылдамдығы белгілі деп ұйғаралық. Сонымен қатар осы ішектің сол жақ ұшы бекітілген және x шексіздікке ұмтылғанда ішек ауытқуы нөлге ұмтылсын делік. Осы ішектің тепе-теңдік жағдайынан ауытқуы $u(x,t)$-ны табу қажет?

Алдымен бұл есептің математикалық моделін құралық. Ол үшін осы есепті шығаруға қажетті түсініктер мен теңдеулерді және сол теңдеулерді қорытуға керекті заңдарға тоқталық.

Сейсмикалық толқындардың таралуы толқын теңдеуі арқылы өрнектеледі. Бұл теңдеу кернеумен серпінділік және Гук заңы мен Ньютонның екінші заңының арасындағы қатынастардың негізінде алынады.

Ньютонның екінші заңы бойынша

$$-\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial P}{\partial z},$$

мұндағы P - акустикалық қысым, U, oz осі бойынша ығысу, z, ρ - массаның тығыздығы. Гук заңы бойынша

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-\chi P.$$

Мұндағы χ - кернеуге қарағандағы сығылғыштық (бірлік ауданға әсер ететін күш) және керіліс (форма мен өлшемнің өзгеруі - деформация). k шамасы сығылғыштыққа кері шама және ол $k=1/c$ болады.

Жоғарыдағы теңдеулерді біріктіріп $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = z^2 w(t)\delta(z)$, толқын теңдеуін аламыз. Мұндағы $w(t)$ сигнал көзі, $\delta(z)$ - Дирактың дельта функциясы, v - толқынның таралу жылдамдығы $v = \frac{1}{\sqrt{\rho\chi}} = \frac{k}{\rho}$.

v жылдамдығының сығылғыштық пен тығыздыққа тәуелді екеніне көз жеткізу қиын емес. P-ны тапқаннан кейін теңдеуден U ығысуын анықтаймыз.

Есептің шартына сәйкес оның мынандай математикалық моделін құрамыз.

$$u\,(x,\,0) = 0,\; x \ge 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\,0) = xe^{-\frac{x}{a}},\;\; x \ge 0,$$

$$u\,(0,\,t) = 0,\;\; t \ge 0\,,$$

$$x \to \infty \text{ да } u(x,\,t) \to 0,\;\; t \ge 0$$

бастапқы және шекаралық шарттарын қанағаттандыратын

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\;\;\; x > 0,\;\; t > 0\,,$$

теңдеуінің шешімін, яғни ішектің тепе – теңдік жағдайынан ауытқуын табу қажет.

2. Трубопроводтың $x = 0$ бастапқы қимасындағы қысымы P_0 мен оның $x = l$ соңғы қимасындағы массалық жылдамдығы V_0 тұрақты болсын деп ұйғаралық. Айталық қандайда бір $t = 0$ уақыт моментінде трубопроводтың соңғы $x = l$ қимасы аяқ астынан (күтпеген жағдайда) жабылып қалсын. Осындай жағдайда қысымның таралуын айқындау үшін

$$P\big|_{t=0} = P_0 - 2av_0x,\;\; \frac{\partial P}{\partial t}\bigg|_{t=0} = c^2 v_0 \delta(x - e)$$

шарттарын қанағаттандыратын $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ теңдеуін шешуге тура келеді.

Осыған ұқсас көптеген техникалық мазмұнды есептердің шешімін табу мәселелерінде Дирактың дельта функциясы қолданылады.

3. Трубопроводтағы газдың немесе сұйықтың үздіксіз ағыны туралы есептерді қарастыруда Хевисайдтың бірлік функциясы пайдаланылады. Мысалы, газпроводындағы газ ағыны $P = P_0$ қысымы бойынша өтіп жатсын. Айталық $t = t_1$ уақыт моментінде қысым кенеттен P_1 мәнін қабылдаса, онда шекаралық шарт

$$P\big|_{x=0} = P_0 + (P_1 - P_0)H(t - t_1)$$

түрінде болады, ал $P = P_0$ мәнінен P_1 мәніне біртіндеп өзгерсе, онда шекаралық шарт

$$P\big|_{x=0} = P_0 + (P_1 - P_0)e^{-\alpha t}H(t - t_1)$$

түрінде болады.

4. Егерде электрлік желідегі кернеу немесе тік уақытқа байланысты синусоидалық емес периодтық заң арқылы өзгерсе, онда кейбір есептеулерде синусоидалық емес периодты функциялардың аналитикалық өрнектерін Фурье қатарының көмегі арқылы табуға тура келеді. Мысалы, мұндай жағдайлар келесі мәселелерде туындайды: сызықтық элементтері бар электрлік жүйеде синусоидалық емес ток, оған синусоидалық емес кернеу әсер еткенде пайда болады; синусоидалық емес ток пен кернеу электрлік жүйеде сызықтық емес вольтамперлік сипаттағы элементтердің бар болуынан пайда болады. Көбінесе бұл жағдайларда кезкелген периодты функцияны бір құрамдас бөлігі тұрақты, ал екінші құрамдас бөлігі еселі жиіліктері бар синусоидалық функциялардан құралған қосындылардан тұратын қатар ретінде өрнектеуге болады.

Сонымен бірге Фурье қатары математикалық физиканың бастапқы немесе шеткі шарттары берілген есептерін шешуде қолданылады. Сонымен қатар, резервуардағы сұйықтың сығылуынан пайда болатын қысым ағынын анықтауда, шығарушы скважиналардың температурасын айқындауда және бойлық тербелістерді зерттеу үшін қажетті бұрғылау колонналарының схемаларын есептеу мәселелерінде қолданылады.

5. Бүйір беттері сыртқы кеңістіктен оқшауланған біртекті цилиндрлік стерженді қарастыралық. Ox өсін стерженнің өсімен бағытталық және $u(x,t)$ арқылы t моментіндегі абсциссасы x болатын стержень қимасының температурасын белгілейік. Айталық x пен $x+\Delta x$ қимасының арасындағы стерженнің элементі болсын. Δt уақытты x пен $x+\Delta x$ қима аралығындағы температура өзгермейтіндей өте аз етіп таңдалық. Екі шетіндегі температурасы тұрақты қандайда бір стержень арқылы өтетін жылу мөлшері q осы температуралардың айырымына, стержень қимасының ауданына, уақыт аралығына пропорционал болатындығы тәжірибе жүзінде дәлелденген. Осы қағидаға сәйкес стерженнің AB элементіндегі жылу мөлшері q былай өрнектеледі:

$$q=\frac{k\cdot\left[u(x+\Delta x,t)-u(x,t)\right]\cdot s\cdot\Delta t}{\Delta x}=k\frac{\partial u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x}\cdot s\Delta t,\ \ (0<\theta<1),$$

мұндағы жылу өткізгіштіктің ішкі коэффициенті деп аталатын пропорционалдық коэффициент, ал S көлденең қиманың ауданы. Δx-ті нөлге ұмтылдырып Δt уақыт аралығындағы x қимасы арқылы өтетін Q жылу мөлшерін аламыз, яғни

$$Q(x)=k\frac{\partial u}{\partial x}st.$$

Тағыда қима элементін қарастыралық. Осы элементтің Δt уақыт аралығындағы ΔQ жылу мөлшерінің төмендегі теңдік арқылы өрнектелетіндігіне көз жеткізу қиын емес, яғни

$$\Delta Q=Q(x+\Delta x)-Q(x)=k\cdot s\cdot\Delta t\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=$$

$$=k\cdot s\cdot\Delta t\cdot\Delta x\frac{\partial^2 u(x+\theta_1\Delta x,t)}{\partial x^2},\ \ (0<\theta_1<1).$$

Жылу ағыны температураның өсу бағытына кері болатындығы белгілі. Қиманы әрбір берілген температура моментінде бірдей мәндер қабылдайды және өте аз шама деп есептелік. Сонда

$$\Delta Q=cps\Delta x\left[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)\right]=cps\Delta x\Delta t\frac{\partial u(x,t+\theta_2\Delta t)}{\partial t},\qquad (0<\theta_2<1),$$

болады. Мұндағы c стержендегі заттың жылу сыйымдылығы, $\rho-$ тығыздық. Демек, $\rho\cdot s\cdot\Delta x$, AB элементінің массасы.

Жоғарыдағы теңдіктерден

$$c\rho\frac{\partial u(x,t+\theta_2\Delta t)}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u(x+\theta_1\Delta x,t)}{\partial x^2}.$$

теңдігін аламыз. Осы теңдіктен Δx пен Δt-ны нөлге ұмтылдырып шекке көшсек

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ 0<x<L,\ \ t>0,$$

теңдеуі шығады. Мұндағы $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$.

Соңғы теңдеу стержендегі жылудың таралу теңдеуі немесе жылу өткізгіштік теңдеуі деп аталады.

Мұнай қабаттары өте жоғары қысымдағы мұнаймен қорланған кеуек орта болып табылады. Қабаттың кезкелген нүктесінде p қысымының таралуы

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (x,\ y,\ z) \in \Omega.$$

түріндегі Лаплас теңдеуін қанағаттандырады.

Қабаттың қуаты h өте аз болған жағдайда z вертикаль өсіндегі қысымның өзгеруін елемеуге болады. Бұл жағдайда кеңістікте қаралған есептер жазықтықта қарастырылатын есептерге келтіріледі яғни Лаплас теңдеуі

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (x,\ y) \in G.$$

түрінде қарастырылады.

Скважинаның дебиттерін анықтау, скважинаның үйлесімді орналасу жүйесін таңдау, мұнайлы контурлардың орналасуы және т.б. секілді жерасты гидравликасының техникалық есептері жоғарыдағы Лаплас теңдеулерінің шешімін табу мәселелеріне алып келеді.

Кез келген кесінді мұнай контуры үшін және скважинаның кезкелген орналасуы жағдайында бұл айтылған мәселелердің дәл шешімі жоқ. Алайда Лаплас теңдеулеріне сәйкес жоғарыда қарастырылған есептерді дұрыс геометриялық формадағы облыстарда қарастыруға болады.

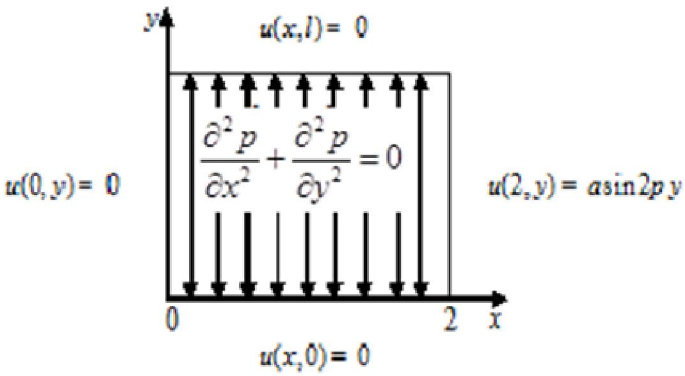
6. Мынандай есепті қарастыралық. Тіктөртбұрышты формадағы

$$G = \{(x, y): 0 < x < 2,\ 0 < y < 1\}$$

обылысы берілсін. Осы облыстың контурындағы p қысымы

$$\begin{aligned} p(x,0) &= 0, \quad 0 < x < 2, \\ p(x,1) &= 0, \quad 0 < x < 2, \\ p(0,y) &= 0, \quad 0 < y < 1, \\ p(2,y) &= a \sin 2p\, y, \quad 0 < y < 1. \end{aligned} \qquad (*)$$

шарттарын қанағаттандырсын. G облысындағы мұнай қабатының қысымын табу керек.



1-сурет. Тікбұрышты формадағы облыс

Біз жоғарыда мұнай қабатының кезкелген нүктесіндегі қысым p, Лаплас теңдеуін қанағаттандыратындығы туралы айтқанбыз. Олай болса бұл есепті төмендегідей тұжырымдауға болады:

(*) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 2,\ 0 < y < 1$$

Лаплас теңдеуінің G облысындағы шешімін табу керек.

7. Тағыда бір техникалық мазмұнды қарастыралық. $y = 0$ және $y = 1$ мәндерінде қысымы нөлге тең және x шексіздікке алыстағанда нөлге ұмтылатын, ал қатпардың сол жақ шетінде бірлік қысымды сақтайтын жазық жартылай қатпардағы қысымды анықтау қажет.

Алдымен есеп шартына сәйкес оның математикалық моделін құралық.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0,\ 0<y<1,\ x>0$$

теңдеуінің $0\le y\le 1,\ x\ge 0$ жазық жартылай қатпар облысының шекарасындағы қысымының мәндеріне сәйкес, яғни

1) $p(x,0)=0,\ x\ge 0;$

2) $p(x,1)=0,\ x\ge 0;$

3) x шексіздікке ұмтылғанда $p(x,y)$ нөлге ұмтылады,

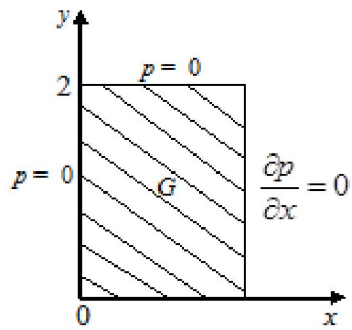
4) $p(0,y)=1,\ 0\le y\le 1,$

шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

8. Тағыда бір есепті қарастыралық. $G=\{0<x<1,\ 0<y<2\}$ облысында Лаплас теңдеуінің

$$p(x,0)=x,\ \ 0\le x\le 1,$$
$$p(x,2)=0,\ \ 0\le x\le 1,$$
$$p(0,y)=0,\ \ 0\le y\le 2,$$
$$\frac{\partial p(1,y)}{\partial x}=0,\ \ 0\le y\le 2$$

шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.



2 – сурет. Мұнай қатпарының қысымы

Әдебиет

1. Яглом И.М. Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Наука, 2007. - 311с.

2. Гусейнзаде М.А. и др. Применение обобщенных функций в задачах трубопроводного транспорта нефти и газа. – М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2011. - 247с.

3. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. – М.: Институт компьютерных исследований, 2010. - 157с.

References

1. I.M. Yaglom Mathematical structures and mathematical modeling. - Moscow: Nauka, 2007. - 311c.

2. Guseynzade MA et al., Application of generalized functions in problems of pipeline transport of oil and gas. - M.: State University of Oil and Gas. I.M. Gubkin, 2011. - 247c.

3. M. Muskat. Physical basis of petroleum engineering. - M.: Institute of Computer Science, 2010. - 157c.

Турусбекова Б.С., ст.преподаватель

Казахский Национальный Исследовательский технический университет имени К.И.Сатпаева,
Казахстан, город Алматы
Электронная почта: turusbekova78@mail.ru

Применение математической модели для решения технических задач подземной гидравлики

Резюме. Решение почти всех технических задач подземной гидравлики, как-то: определение дебитов скважин, выбор системы рациональной расстановки скважин, изучение явлений интерференции скважин, перемещение контуров нефтености и т.д. при строгой постановке сводится к решению соответствующих задач для уравнения Лапласа. В данной работе рассматривается вышеперечисленные задачи для уравнения Лапласа в областях, имеющих более или менее правильную геометрическую форму.
Ключевые слова: стержень, давление, нефтяные пласты, скважина, граничные условия, температура.

Tursbekova B.S., senior lecturer

Kazakh National Technical University named after K.I.Satpayev,
Kazakhstan, Almaty
Email: turusbekova78@mail.ru

The use of mathematical models for solving the technical problems of underground hydraulics

Resume. An almost all the technical problems of underground hydraulics, such as: determination of flow rates, the choice of a rational arrangement of wells, the study of interference phenomena wells, moving contours neftenosti etc. in a rigorous formulation reduces to solving the corresponding problems for the Laplace equation. In this paper we consider the above problem for the Laplace equation in domains with more or less regular geometric shape.
Keywords: rod, pressure, oil reservoirs, wells, boundary conditions, temperature.