ЭК

С. ҚАДЫРБЕКОВ

СЫЗЫҚТЫ АВТОМАТТЫ РЕТТЕУ ЖӘНЕ БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ТЕОРИЯСЫ

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ

С.ҚАДЫРБЕКОВ

СЫЗЫҚТЫ АВТОМАТТЫ РЕТТЕУ ЖӘНЕ БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ТЕОРИЯСЫ

АЛМАТЫ-1996
РЕСПУБЛИКАЛЫҚ БАСПА КАБИНЕТІ

С.Қадырбеков

Сызықты автоматты реттеу және басқару жүйелерінің теориясы /оқулық/. - Алматы. Республикалық баспа кабинеті. 1996 ж. 235 бет

ISBN 5-8380-1497-0

Техникалық жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған бұл оқулықта автоматты басқару жүйесінің негізгі сипаттамалары қарастырылған

Пікір жазған профессорлар: А.Бекбаев, Г.Токтабаев

Баспаға Қазақ ұлттық техникалық университетінің ғылыми-әдістеме[illegible] кеңесі ұсынған

ISBN 5-8380-1497-0

АЛҒЫ СӨЗ

Бұл оқулық автордың бірнеше жылдар бойында, Қазақ политехникалық институтының, қазіргі Қазақ Ұлттық техникалық университетінің студенттеріне оқылатын дәрістерінің негізінде жазылған. Кітап жазу барысында автор, техникалық жоғары оқу орындарындағы "Автоматика және техникалық жүйелердегі басқару" мамандығы үшін "Автоматты басқару теориясы" курстың бағдарламасын нұсқау етіп алған.

Кітап бес тараудан құрылады. Бірінші тарауда негізгі түсініктемелер мен тұжырымдаулар берілген. Бұл автоматты жүйелердің фундаменталды басқару принциптерімен, жұмыс істейтін әртүрлі алгоритмдермен таныстырады.

Екінші тарауда жүйелерді дифференциалдық теңдеулер, түрлендіру функциялары,уақыттық және жиілік сипаттамалар көмегімен жазылу тәсілдеріне арналған, сонымен қатар онда элементарды үзбелер, бір өлшемді және көп өлшемді жүйелердің структуралық схемаларын, графтарын түрлендіру ережелері туралы түсініктемелер беріледі. Сонымен қатар сызықты стационарлы жүйелерді күй теңдеулері түрінде жазылуы және жүйенің басқарылуы мен бақылауының анықтау әдістері жазылған.

Үшінші тарауда автоматты жүйелердің орнықтылық түсініктемесімен, орнықтылықтың алгебралық (Гурвиц,Льеонар-Шипар,Раус) критерийларымен, аргумент принципімен жиілік (Михайлов,Найквист) критерийларымен таныстырады. Сонымен бірге онда орнықтылықтың қорын анықтайтын әртүрлі әдістер беріледі.

Төртінші тарауда уақыттық және жиілік сипаттамалар бойынша жүйелердің сапасын бағалау мәселелері қарастырылады, түбірлік пен интегралдық бағалау тәсілдері беріледі,сонымен бірге жүйенің сапасын оның дәлдігі бойынша анықтау әдістері жазылып берілген.

Бесінші тарау жүйенің орнықтылығын қамтамасыз ету және оның сапасын жоғарлату мақсатымен сызықты басқару жүйелердің параметрлері мен коррекциялаушы тізбектерінің синтезінің әртүрлі әдістерімен таныстырады. Бұл тарауда түбірлік годографы әдісімен логарифмдік жиілік сипаттамалар бойынша әдісі және инварианттылық принципке негізделінген құрастырылған жүйенің синтездері қарастырылған.

Бұл кітапқа көлемі шектелінгендіктен , сызықты жүйелердің кездейсоқ әсердегі зерттеу мәселелері және сызықты импульсты жүйелердің теориясы енбеді.

Жұмыстың күрделі және ауыр себептерінен кітапты ақаусыз деуге болмайды. Әрбір көрсетілген кемшіліктерді автор шын ниетпен қабыл алады. Мұны толықтыру,кемелдендіру-болашақтың жұмысы.

1-ТАРАУ

АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ҚҰРУ ПРИНЦИПТЕРІ ТУРАЛЫ НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕМЕЛЕР

1.1 АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ АВТОМАТТЫ ЖҮЙЕЛЕР БОЙЫНША ЖАЛПЫ МАҒЛҰМАТТАР

Жүйелерде өтетін процестердің физикалық негізіне тәуелсіз техникалық (технологиялық, өндірістік) процестерді басқару мен бақылау функцияларын, адамның тікелей қатысуынсыз орындайтын,автоматты жүйелердің есептеу тәсілдері мен құру принциптерін зерттеумен шұғылданатын ғылыми-техникалық пән автоматты басқару теориясы (АБТ) делінеді. Ол сонымен бірге жалпы автоматика ғылымының негізгі бөлімі деп саналады, ал автоматика жүйелерімен бірге жүйенің бөлшектерін, элементтерін зерттеумен шұғылданады. Сонымен қатар автоматты басқару теориясы, осы шақта қарқынды дамуымен қалыптасу сатысында болатын, кибернетика, делінетін жалпы басқару теориясының негізі болып келеді.

Кибернетика деп әртүрлі қызмет атқаруға тағайындалған (жанды немесе жансыз негізді) объектілермен және күрделі дамып тұратын жүйелермен мақсатты бағытталған басқару туралы ғылымды айтуға болады.

Автоматты басқару мен автоматты реттеу теориясы халық шаруашылығының барлық саласында қандай болмасын автоматты және автоматтандырылған жүйелерді зерттеуге және жобалауға қажетті білімнің негізгі теориялық базасын береді.

Автоматты басқару теориясының ең алғашқы пайда болуын 1868 жылдан деп есептейді. Дәл сол кезде ағылшын физигі Джеймс Максвеллдың "Реттеушілер туралы" деген мақаласы басылды. Алайда бұл ғылыми мақала тәжірбе жүзінде қолдануын таппады. Белгілі орыс механигі және математигі И.А.Вышнеградскийдің "Тікелей әрекетті реттеуіштер туралы" (1872 ж) және "Реттеуіштердің жалпы теориясы" (1876 ж) деген еңбектерінде автоматты басқару теориясының негізі салынды.

Автоматты реттеу дегеніміз кейбір объектінің жағдайын сипаттайтын тағайындалған (берілген, тапсырылған) шаманы бір қалыпта қолдану немесе оны белгілі заң бойынша өзгерту процесі. Ол процесс обьектінің жағдайын немесе оған әрекет етіп тұратын ауытқушы әсерлерді өлшеу және реттеу органына әрекет ету арқылы іске асырылады. Мұнда ауытқушы әсер деп объектіні кейбір тұрақталынған жағдайынан шығаратын (ауытқытатын) және сырттан әрекет ететін әсерді айтады.

Автоматты басқару деп, басқару объектісінің әрекет етуінің жақсаруына немесе қолдануына басқару мақсатымен сәйкесті бағытталған, айналадағы орта және обьект туралы белгілі мағлұматтарға негізделіп, болуы мүмкіндіктердің көптігінен таңдалған әрекеттердің жиынтығын автоматты түрде іске асыруды айтады.

Басқару мен реттеу анықтамаларын салыстыра отырып, барлық реттеу мәселелері қарапайым жағдайда басқару мәселелеріне кіреді деп қорытуға болады.

АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ЖҮЙЕСІ ТУРАЛЫ НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕР. Автоматты жүйелер өзінің арналуына және конструкторлық орындалуына қарай әртүрлі болып келеді. Дегенмен олардың қайсысын болмасын екі негізгі бөлшектерге бөлуге болады: басқарылатын обьектіге, басқару құрылғыға (автоматты реттеуішке) . Оларды жүйенің функционалдық схемаларында көрсету үшін келесі шартты белгілерді қолданады.

1.1-сурет

Бұл жерде көрсетілген қысқарған белгілер: БО-басқарылатын обьект, БК-басқару құрылғысы (автоматты реттеуіш). Нұсқамалармен сигналдың өту бағыты көрсетілген.

Басқарылатын (реттелетін) обьект дегеніміз техникалық (технологиялық) процесті жүзеге асыратын құрылғы немесе құрылғылардың жиынтығы. Атап өтілген процесс арнайы ұйымдастырылған басқаруды қажет етеді.

Басқару объектісі жылжитын және жылжымайтын болуы мүмкін. Автоматты басқару жүйесінің жылжыйтын обьектісіне мына төмендегілер жатады: кемелер, поездар, ұшқыш аппараттар, ұшақтар, ракеталар, ғарыштық аппараттар, жасанды жер серіктері. Ал жылжымайтын обьектілерге агрегаттар немесе механизмдер, технологиялық пен энергетикалық процестер және тағы басқа жылжымайтын қондырғылар (бу қазандары, металл жұқартқыш стандар, агломерациялық машиналар, айнымалы пештер т.т.) жатады.

Басқару құрылғы, автоматты реттеуіш немесе жай реттеуіш деп белгілі заңға (алгоритімге, бағдарламаға) сәйкес басқарылатын объектіге әсер етіп тұратын техникалық құрылғыны айтады. Оған ұшақтағы және ракеталардағы автопилоттар, басқарушы электрондық есептеуіш машиналар, әртүрлі реттеу заңымен істейтін автоматты реттеуіштер мысал бола алады.

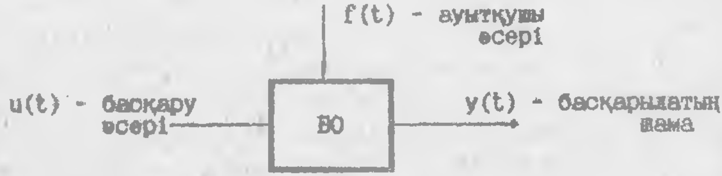
Қандай болмасын өндірістік қондырғыларда, машиналарда, аппараттарда немесе қозғалтқыштарда өтетін түрлі технологиялық процесті бір немесе бірнеше көрсеткіштермен сипаттауға болады.

Ондай көрсеткіштер әдетте әртүрлі механикалық, физикалық және химиялық шамалар болып келеді. Мысалы, қысым, деңгей, температура, жылдамдық, көлем, құрам тағы сол сияқтылар. Олар нақтылы жағдайға байланысты басқару процесінде бір заңға сәйкес өзгеруі немесе тұрақты болуы мүмкін. Басқару тәжірибесінде оларды процестің параметрлері, координаттары немесе басқарылатын обьектінің шығу шамалары деген атау қалыптасқан.

Басқарылатын параметрлер деп шығу параметрлерінің арасындағы параметрлерді айтады, егер олар бойынша реттеу процесі жүргізілсе. Шынында "параметр" деген терминді автоматты басқару теориясында қолданбай, айналып өтуге тырысады, себебі ол терминді әдетте құрылғының физикалық тұрақты шамаларын белгілеуге қолданады.

Реттелінетін (басқарылатын) шаманың өзгерісін тудыратын әсерлер басқару және ауытқушы әсеріне бөлінеді. Реттелетін шаманың өзгерту заңдылығын анықтайтын және басқару құрылғымен өндірілетін әсер - басқару әсері, ал басқару әсері мен реттелетін шама арасындағы байланысқа ықпал ететін барлық басқа әсерлер ауытқушы әсерлер болып келеді. Бұл жерде назар аударатын жай уақыт озған сайын жүктеменің өзгерісі ең негізгі ауытқу әсеріне жатады.

Объектіге әрекет ететін әсерлердің және реттелетін шамаларының саны бір-бірден болса, онда олар функционалдық схемаларда келесі түрде бейнеленеді



1.2-сурет

Басқару объектісінің кіру және шығу шамаларының кезеңдегі өзгеруі оның жағдайын сипаттайды, егер олардың саны бірден көп болса онда басқару объектісін көрсету үшін келесі шартты белгілер қолданады

а)

немесе келесі түрде

б)

1.3-сурет

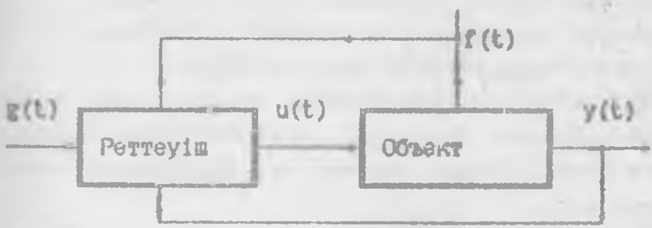
Бұл жерде $\bar{X}$, $\bar{Y}$-кіру және шығу әсерлерінің векторлары, яғни $\bar{X}=(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_m)$, $\bar{Y}=(y_1,y_2,\dots,y_i,\dots,y_n)$.

Басқару әсерлердің және басқарылатын шамалардың санына қарай басқару объектілер бір байланысты (1.2, а-сурет) немесе көп байланысты (1.3, а, б-сурет) объектілер делінеді.

Сонымен, өзара бірлесіп әрекет қылатын тікелей адамның қатынасынсыз басқарылатын объектімен автоматты басқару құрылғының жиынтығы автоматты басқару жүйесі болады.

Егер басқару әрекеттері туралы шешімдер адамдармен қабылданса, ал автоматты құрылғылар тек қана басқару мақсатымен нәтижесі туралы ақпаратты жинауға, өңдеуге оны елестетуге және әртүрлі мүмкін болатын шешімдердің варианттарын салыстырмалы анализдеуге қолданылса, ондай жүйе автоматтандырылған басқару жүйесі делінеді. Мұндай жүйенің белгісі оның басқару нұсқасында (контурында) электронды есептеуіш машинесінің бар болуы.

АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ЖҮЙЕСІНІҢ БЛОК СХЕМАСЫ. Басқарылатын процестер қандай объектілермен байланысты екеніне тәуелсіз олар әрдайым келесідей өтеді. Кейбір органдар(адамның сезім мүшелері не өлшегіш аспаптар) технологиялық процесс жағдайы туралы ақпарат (мағлұмат) қабылдайды. Ол ақпарат кейбір байланыс арналары (адамның нерв жүйесі, электр сымдар т.с.) арқылы қабылдаған ақпаратты басқару сигналына (адамның дене қимылына, басқару әрекетіне) түрлендіріп тұратын органға келіп түседі. Басқару сигналы технологиялық процестің жүрісіне әрекет етеді. Жалпы түрде автоматты басқару жүйесінің блок - схемасын келесідей көрсетуге болады.



1.4-сурет

Мұндағы; g(t)-реттелінетін шаманың тағайындалған мәні, u(t)-басқару әсері, f(t)-ауытқушы әсері, y(t)-реттелінетін шаманың (температураның, қысымның, жылдамдықтың т.с.с.) нақты мәні.

Жалпы жағдайда g(t) мен f(t) жүйенің кіру шамалары ал y(t) шығу шамасы болып келеді және олар вектор болулары мүмкін.

Суретке сәйкесті реттеуіштің кірісіне g(t) тағайындалған, y(t) реттелінетін және f(t) ауытқушы шамалар келіп түседі. Реттеуіш келіп түскен ақпарат бойынша u(t) басқару әсерін өндіріп басқарылатын объектіге әрекет етеді.

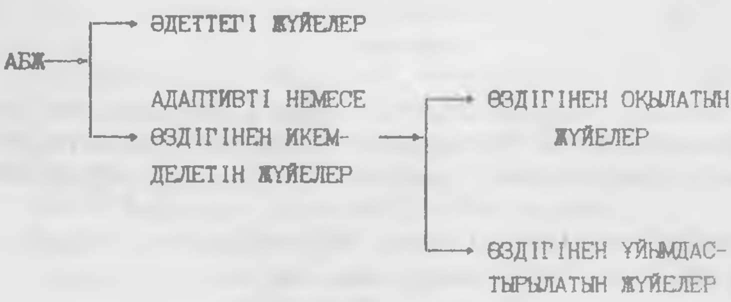
Процесс жүрісі туралы объектіден ақпарат алу үшін сезгіш элеметтер қолданылады,әдетте олар сәйкесті технологиялық шамаларының датчиктері болып келеді. Датчиктің міндеті-физикалық шаманы бір түрден екінші түрге түрлендіру. Мысалы, заттың деңгейін, оның қысымын, шығымын, температурасын сәйкесті электр сигналдарға түрлендіру.

1.2 АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРІН ЖІКТЕУ

Автоматты басқару жүйелерінің жіктеуі, жіктеу белгісінің таңдалуына байланысты, сондықтан олар әртүрлі жіктелуі мүмкін [1,8 27, 28]. Алайда оларды келесі белгілермен жіктеу қолайлы.

БАСҚАРУ ПРОЦЕСІНДЕГІ ҚОЛДАНЫЛАТЫН АҚПАРАТТЫҢ ТҮРІ БОЙЫНША. Басқару процесінде мұндай ақпараттың екі түрін ажыратады, олар бастапқы (априорлы) және жұмыс кезіндегі (апостериорлы) ақпараттар. Алғашқы ақпарат дегеніміз басқару объектісінің динамикалық және статистикалық қасиеттері туралы мағлұматтың жинағы. Егер объектінің статикалық және динамикалық қасиеттерін жазатын барлық теңдеулер және олардың коэффициенттері белгілі болса, онда бастапқы ақпарат толық делінеді.

Жүйенің жұмыс істеу барысындағы өзінің басқару процесінде қолданылатын,басқару объектісінің жағдайы туралы мағлұматтардың жинағы,жұмыс ақпараты делінеді.Бұл мағлұматтар сигнал түр-



1.5-сурет

іиде датчиктерден немесе өлшеуіш аспаптардан алынып, басқару процесін қажетті бағытта жүргізу үшін қолданылады.

Барлық автоматты басқару жүйелері, қолданылатын ақпаратының түрі бойынша төмендегіше жіктелінеді.

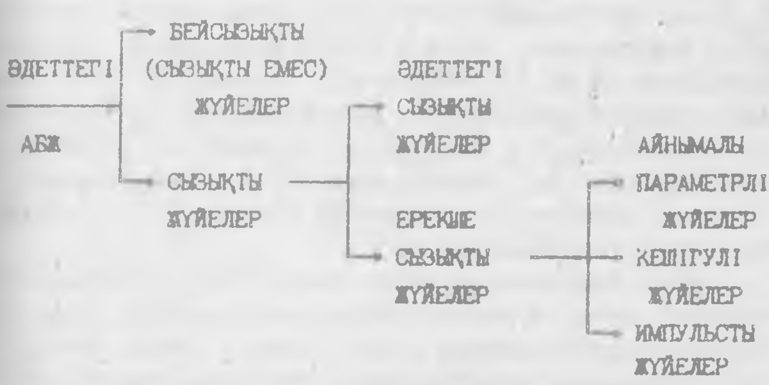
Әдеттегі жүйелер қажетті түрде өздерінің міндеттерін атқару үшін бастапқы ақпарат толық болуы керек, басқа жағдайда жүйелердің сапалары төмен болады.

Адаптивті жүйелердің істеуіне бастапқы ақпараттың толық болуы қажет емес, олар басқару объектісінің статикалық және динамикалық қасиеттері уақыт озған сайын өзгеріп тұрған жағдайда жұмыс істей алады.

Алайда әдеттегі де, адаптивті де жүйелер өзінің жұмыс барысында жұмыс ақпаратын қолданады.

Өнеркәсіптің әртүрлі тарауларында көбінесе кездесетін жүйелер әдеттегі жүйелер болып келеді, сондықтан олардың жіктеуін жалғастырайық.

СТАТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ДИНАМИКАЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРДЫҢ ТҮРІ БОЙЫНША. Бұл белгі бойынша барлық әдеттегі жүйелер келесідей жіктеледі.



1.6-сурет

Егер автоматты басқару жүйесі сызықты теңдеулермен жазылса, онда ол сызықты делінеді де қарсы жағдайда жүйе бейсызықты делінеді.

Бұл кітап сызықты жүйелерге арналғандықтан бұдан әрі тек қана әдеттегі сызықты жүйелердің жіктеуі қарастырылады.

БАСҚАРУ ТІЗБЕГІНІҢ ТҮРІ БОЙЫНША. Әдеттегі сызықты жүйелер басқару тізбегінің түрі бойынша, басқару тізбегі тұйықталған және тұйықталмаған жүйелерге жіктеледі, яғни келесідей:

ӘДЕТТЕГІ СЫЗЫҚТЫ ЖҮЙЕЛЕР
- басқару тізбегі түйықталмаған жүйелер
- басқару тізбегі түйықталмаған жүйелер

1.7-сурет

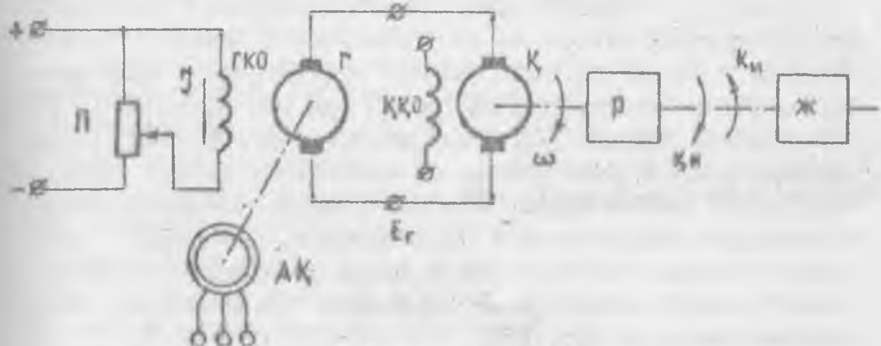
Тізбегі түйықталған автоматты басқару жүйелерде реттеуіш басқару әсерін өндіру үшін, басқарылатын шамасының нақты мәні туралы ақпарат пайдаланылады, ал тізбегі түйықталмаған жүйелерде ондай ақпарат пайдаланылмайды.

Екі түрлі жүйенің айырмашылығын түсіндіру үшін тұрақты тоқты қозғалтқыштың айналу санын реттейтін екі жүйені қарастырайық (1.8-СУРЕТ).

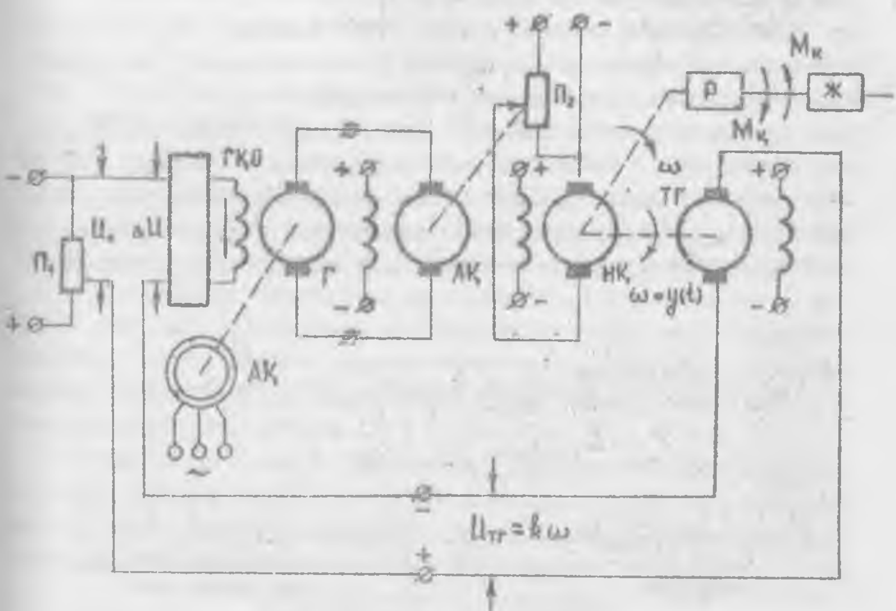
Бұл суретте тұрақты тоқты қозғалтқыштың айналу санын реттейтін тұйықталмаған жүйенің схемасы келтірілген. Схемадағы қысқаша белгілер: П - потенциометр, Г - генератор, ГҚО - генетордың қоздырғыш орамасы, Қ - қозғалтқыш, ҚҚО - қозғалтқыштың қоздырғыш орамасы, Р - редуктор, Ж - жүктеме, ω - бұрыштық айналу жылдамдығы, $К_m$ - кедергі моменті, $К_м$ - қимыл моменті, АҚ - үш фазалы айнымалы тоқты асинхроды қозғалтқыш, J - генератордың қоздырғыш орамасының тоғы.

Тізбегі түйықталмаған жүйеде басқару әсер потенциометрдің жылжымасын (жылжу бағдарлама бойынша болуы мүмкін), яғни генератордың қоздырғыш орамынан өтетін тоқтың J мәнін өзгертеді, ал ол өз кезеңінде магниттік ағынын яғни қозғалтқыштың айналым санын өзгертуге келтіріледі. Қарастырып отырған схеманың тұйықталған тізбегі жоқ. Яғни жүйеде ω - реттелетін шаманың нақты мәні туралы сигнал ешбір қолданылбайды.

Енді тұрақты тоқты қозғалтқыштың айналу санын реттейтін тұйықталған жүйенің келесі түрдегі схемасын қарастырайық (1.9-сурет). Бұл жерде келтірілген қысқартылған белгілер: $П_1$, $П_2$ - потенцициометрлер , К - күшейткіш, Г - генератор, АҚ - атқарушы қозғалтқыш, НҚ - негізгі қозғалтқыш, ТГ - тахогенератор



1.8-сурет



1.9-сурет

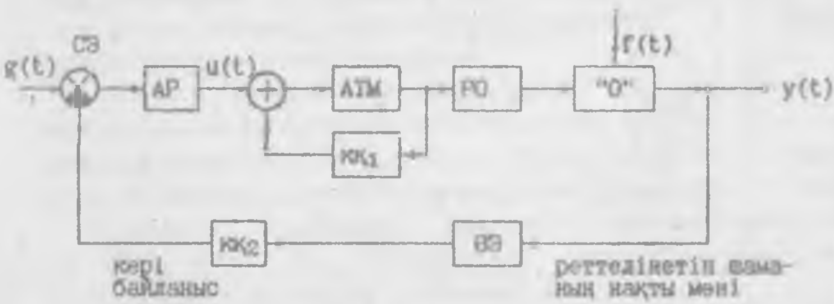
(өлшеу элементі), ГКО - қоздырғыш орамасы, Р - редуктор, Ж - жүктеме, Мқ, Мк - сәйкесті қозғалтушы және кедергі моменттері.

Тұйықталған және тұйықталмаған жүйелердің айырмашылығын 1.9 - суреттегі схеманың жұмыс істеуінің принципін қарастырып, Uтг потенциометр кернеуімен Uо (тағайындалған шамамен) салыстырылады. Егер негізгі электр қозғалтқыштың жылдамдығы тағайындалған шамадан ауытқып тұрса, онда екі кернеулердің тең болмағандығы. Мұндай жағдайда айырма кернеу ΔU,яғни қателік сигналы болады. Күшейткіш арқылы күшейтілген қателік сигналы генераторға әрекет етеді. Соңғысы атқарушы қозғалтқыш арқылы $П_2$ потенциометрдің тиегінің (жылжымасының, движогының) орнын өзгерте отырып, негізгі қозғалтқыштың жылдамдығын өзгертеді. Сөйтіп электр қозғалтқыштың жылдамдығы тағайындалған мәнге қайта келтіріледі.

Өнеркәсіптегі көптеген автоматты реттеу жүйелері тұйықталған контурлы жүйелер болып келеді.

ТАҒАЙЫНДАЛҒАН ШАМАНЫҢ ӨЗГЕРУ ТҮРІ БОЙЫНША. Бұл белгісі бойынша автоматты реттеу, жүйелерді стабилизациялау, бағдарламалы және қадағалаушы жүйелерге жіктеледі.

Автоматты басқару жүйелері әдетте структуралық схемаларымен көрсетіледі. Жүйенің структуралық схемасы көрнекі түрде оның құрамын және элеметтерінің аралығындағы байланыстарын бейнелейді. Структуралық схема арқылы жүйенің ішкі құрылымын анықтауға және жүйедегі өтетін динамикалық процестің сапасын



1.10-сурет

жақсартатын қосымша байланыстардың қосу орнын табуға мүмкіншілік береді.

Тұйықталған автоматты басқару жүйесінің толықтау функционалды структуралық схемасын қарастырайық (1.10-сурет).

Бұл структуралық схема үлгілі (типті) болып келетініне және оның 1.9-суреттегі келтірілген тұйықталған жүйеге сәйкестілігіне назар аудара кету қажет.

Қарастырылып отырған структуралық схемада $y(t)$ реттелетін шаманың нақты мәні, ӨЭ өлшеу элементімен өлшеніп, оның $g(t)$ тағайындалған мәнімен, яғни реттелінетін шаманың ұмтылуға тиісті мәнімен салыстырылады. СЭ - салыстыру элементте (сәйкеспеушілік датчикте) сәйкеспеушіліктің немесе реттеу қателігінің мәні $\varepsilon(t)=g(t)-y(t)$ анықталады. Ол қателік әдетте реттелінетін шаманың ауытқуы делінеді, ал ол ауытқу жүйеге әрекет етіп тұратын $f(t)$ сыртқы ауытқушы әсердің ықпалынан пайда болады. Егер жүйеге сыртқы ауытқушы әсер әрекет етпесе, онда ешқандай реттеудің қажеті жоқ.

Будан кейін табылған қателік бойынша АР автоматты реттеуіш өзінің реттеу алгоритмына (заңына) сәйкесті $U(t)$ басқарушы әсерін өндіреді. Ол әсер АТ атқару механизмімен РО реттеу органы арқылы келіп обьектіге әрекет етеді.

Әдетте тұйықталған жүйеге әртүрлі кері байланыстар және жүйенің сапасын жақсарту үшін енгізілетін $КҚ_1$, $КҚ_2$ коррекциялаушы құрылғылары кіреді. Ондай жүйенің мақсаты $y(t)$ реттелінетін шаманың нақты мәнімен оның $g(t)$ тағайындалған мәнінің аралығындағы айырымды, яғни жүйенің қателігін нольге келтіру.

Структуралық схемада көрсетілгендей $y(t)$ реттелінетін шаманың мәні ӨЭ - өлшеу элементі арқылы СЭ - салыстыру элементіне келіп түсетін тізбек негізгі кері байланыс тізбегі деп аталынады. Бұл негізгі кері байланыстан басқа жүйеде ішкі кері байланыстар болуы мүмкін.

Егер негізгі кері байланыстың сигналы $y(t)$ реттелінетін шаманың тек қана мәніне пропорциялы болса, ондай кері байланыс қатаң кері байланыс делінеді. Егер айтылған сигнал тек қана реттелінетін шаманың өзгерісіне пропорциялы болмай тағы да оның $(\dot{y}(t), \ddot{y}, \ldots)$ - туындыларына пропорциялы болса, онда ондай кері байланыс иілгіш кері байланыс делінеді.

Сонымен тұйықталған автоматты басқару жүйелері $g(t)$ тағайындалған шаманың өзгеру түрі бойынша келесідей жіктелінеді.

А. Тұрақтандыру (стабилизациялау) жүйелеріне, егер $g(t)=const$ болса, яғни реттелінетін шаманың тағайындалған мәні алдын ала белгілі болып және тұрақты болса. Жоғарыдағы 1.9-суретте көрсетілген жүйені автоматты тұрақтандыру, жүйенің мысалы ретінде айтуға болады. Егер бір $g(t)$ тағайындалған шама бойынша бір $y(t)$ шығу шамасы тұрақталынса онда ондай жүйе бір контурлы делінеді, егер тұрақталынатын шамалардың саны бірден көп болса, онда ондай жүйе көп контурлы делінеді.

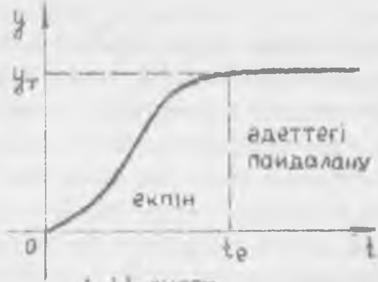
В. Бағдарламалы басқару жүйелеріне, егер $g(t)$ тағайындалған шаманың мәні уақыт озған сайын кейбір белгілі заң немесе бағдарлама бойынша өзгеріп тұратын болса, ондай жүйелердің бағдарламалары екі түрде берілуі мүмкін: уақыттық бағдарламадай, яғни уақыт бойынша берілгендей $g=g(t)$ немесе параметрлік бағдарламадай яғни бағдарлама жүйенің кейбір параметрлері бойынша берілгендей $g=g(S_1,S_2,...,S_n)$, мұндағы $S_1,S_2,..,S_n$ - обьектің кезектегі жағдайын сипаттайтын кейбір физикалық шамалар.

Уақыттық бағдарламаның мысалы ретінде реттелінетін қуатты обьектіні іске қосудағы, әдеттегі ұзақ мерзім істейтін режиміне шығару үшін, басталқы "екпіннің" дұрыс режимін қанағаттандыратын, реттелінетін шаманың өзгеру бағдарламасы болуы мүмкін. Мысалы қуатты қозғалтқыштың бұрыштық жылдамдығының автоматты реттеуіші, әдеттегі пайдалану режиміндегі $y_т$ тұрақталынған жылдамдығын (1.11-сурет) қолдануға ғана арналмай, тағы да қозғалтқышты іске қосқанда, қауіпті ауытқуға жібермеу үшін уақыт бойынша қажетті жылдамдықтың өсу режимін реттеуге арналуы мүмкін.

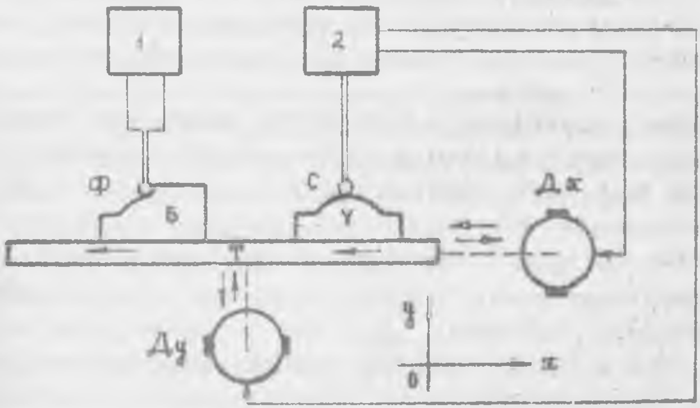
Егер белгілі температураға дейін қыздыру жылдамдығы белгілі режиммен ету қажет етілсе, және одан кейін сол температурада металл пеште ұзақ уақыт ұсталса, онда ұқсас уақыт бойынша бағдарлама металды термиялық өңдеуде берілуі мүмкін.

Бағдарламалы басқару жүйелері тұйықталмаған болуы мүмкін. Параметрлі бағдарламамен тұйықталмаған жүйенің мысалы ретінде бағдарламамен басқарылатын станоктағы тағайындалған нұсқасы бойынша фрезаның жылжу жүйесін қарастырайық (1.12-сурет). Өңделінетін В бұйым Т тақтаға бекітілетін. Ол тақтаға бұйымның қажетті нұсқасына сәйкесетін Y үлгі де бекітіледі.

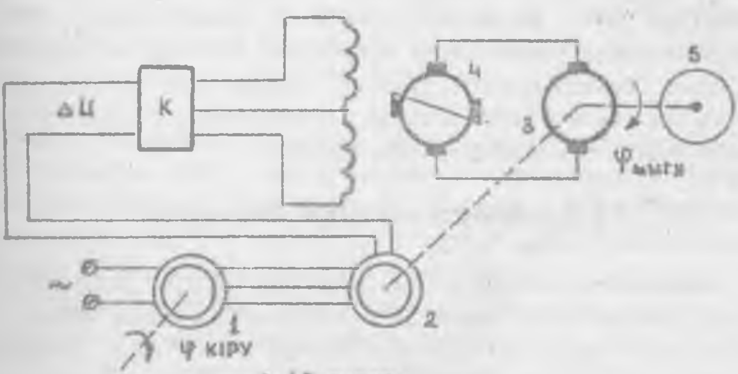
Өңдеу процесінде Т тақта В бұйыммен және Y үлгімен бірге



1.11-сурет



1.12-сурет



1.13-сурет

3-207

горизонталь (көлденең) осі бойынша $Д_x$ қозғалтқыш арқылы біркелкі жылжиды, мысалы, оңнан солға қарай. 1 станоктың Ф фрезасының вертикальді орны, өңделетін Б бұйымға қарай, $Д_y$ қозғалтқышпен басқарылатын тақтаның вертикальді орнымен анықталады. С-саусақ үлгінің нұсқасы бойынша сырғанап тұрады, ал 2-өлшегіш орган саусақты үлгі бойынша қысып тақтаның вертикальді орнын анықтап тұрады. Сөйтіп фрезаның вертикальді координаттары саусақтың координаттарымен, ал сонымен бірге бұйымның түрі үлгінің түрімен сәйкестендіріледі.

С. Қадағалаушы жүйелерге, егер g(t) уақыттың функциясы алдын ала белгісіз болса, әдетте қадағалаушы жүйеде y(x) реттелінетін шама кейбір сыртқы фактордың өзгеруінен пайда болатын g(t) тағайындалған шаманың өзгерісін қайталап "қадағалап" тұруы тиісті. Мысалы, басқарылатын әуе зеңбірегі, әуедегі нысананың маневрларын қадағалап, автоматты түрде бұрылып тұруы керек.Сондықтан мұндай жүйе қадағалаушы жүйе деп аталады.

Мысалы 1.13-суреттегі жеңілдетілген қадағалаушы жүйеде реттелетін шама 5-реттелінетін обьектісінің бұрылатын $\varphi_{шығу}$ бұрышы болып келеді. 3-атқару қозғалтқыш 4-электромашиналы күшейткіштен қоректенеді. Кіру әсер 1-сельсин-датчигіне беріледі, оның роторының алдын ала белгісіз $\varphi_{кіру}$ бұрылу бұрышындай.

Трансформаторлы схема бойынша қосылған 1-сельсин-датчикпен және 2-сельсин қабылдағыш, жүктемемен механикалық түрде байланысқан және $\Delta\varphi=\varphi_{кіру}-\varphi_{шығу}$ ауытқуға пропорционалды ΔU кернеу өндіреді. Ол қателік кернеуі К күшейткішпен және 4-электромашиналы күшейткішпен күшейтіліп 3-атқарушы қозғалтқыштың якорь орамасына келіп түседі, сонымен бір мезгілде 5-обьектіні (жүктемені) және сельсин қабылдағыштың роторын келіспеушілік нольге тең болғанша айналдырады.

1.3 АВТОМАТТЫ РЕТТЕУДІҢ ПРИНЦИПТЕРІ

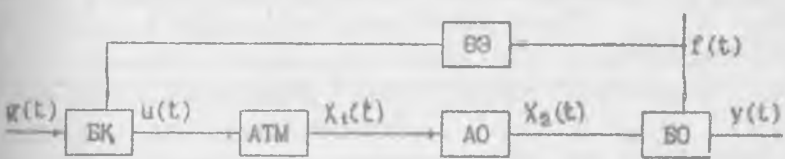
Автоматтты басқару теориясында екі негізгі автоматты реттеудің принциптерін ажыратады:реттелінетін шаманың ауытқуы бойынша реттеу принципі (Ползунов-Уаттың немесе кері байланысты принципі);ауытқушы әсер бойынша реттеудің принципі (Понселе - Сименс принципі).

Реттелінетін шаманың ауытқуы бойынша реттеу принципі реттелінетін шаманың нақты мәні тағайындалған шаманың мәнімен салыстырылады. Егер екі шаманың мәндері тең болмаса, онда ретеуіш олардың айырымына сәйкес реттеуші әрекетін өндіреді. Ол әрекеттің мақсаты табылған айырымды жою, яғни реттелінетін шаманы тағайындалған шамамен теңестіру.

Бұл принципті жұмыс істейтін жүйенің мысалы ретінде жоғарыда (1.9-сурет) қаралған тұрақты тоқты қозғалтқыштың айналу жылдамдығын реттейтін тұйықталған жүйені келтіруге болады.

Кері байланысты реттеу принципті жүйенің артықшылығы-реттелінетін объектіге әрекет етіп тұрған барлық сыртқы ауытқушы әсерлерді есепке алып тұрады, ал кемшілігі оның аз әрекеттігінде.

АУЫТҚУШЫ ӘСЕР БОЙЫНША РЕТТЕУ НЕМЕСЕ АУЫТҚУШЫНЫ КОМПЕНСАЦИЯЛАУ ПРИНЦИПІ. Ауытқушы әсердің нәтижесі реттелінетін шаманың өзгеруі болып келеді. Компенсациялау жүйесін іске асыру үшін, ауытқушы әсердің өлшеуі жеңіл болуы керек. Мұнда реттеу жүйесінің структуралық схемасын келесідей көрсетуге болады; (1.14-сурет).



1.14-сурет

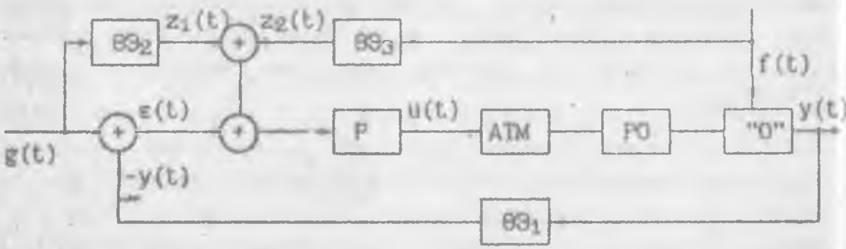
бұл жерде: ӨЭ- өлшеуіш элементі; БҚ - басқару құрылғысы; АТМ - атқару механизмі; АО - атқару органы; БО- басқарылатын обьект. Мұндай жүйенің жұмыс істеу принципі мынадай. Өлшеу элементі, басқарылатын объектіге әрекет етіп тұрған сыртқы ауытқушы әсерін өлшеп , басқарушы құрылғыға әкеп түсіреді. Соңғысы сол әсерге сәйкес басқарушы әсерді өндіреді. Басқарушы әсер реттеу механизмімен, атқару органы арқылы басқарылатын объектіге әрекет етеді. Ол әрекеттің мақсаты басқарылатын объектіге сыртқы ауытқушының жасап тұратын әсерін жою.

Бұл принципте істейтін жүйенің артықшылығы тез әрекеттігі. Ал кемшілігі барлық ауытқу әсерлерін өлшеуге мүмкіншілігі жоғында тұрады.

АУЫТҚУ ЖӘНЕ АУЫТҚУШЫ ӘСЕР БОЙЫНША РЕТТЕУ. Мұндай реттеу принципі қиылыстырылған принцип делінеді.

Қиылыстырылған реттеу принципіне негізделген жүйелерде жоғарыда қарастырылған екі реттеу принциптері кіреді. Бұл жағдайда қиыстырылған реттеу принципі жүйенің функционалдық схемасын 1.15-суреттегі түрдей көрсетуге болады.

Қарастырылып отырған жүйеде реттеуіш реттеу әсерін өндіру үшін тағайындаған шаманың, ауытқушы әсерінің және реттеу қателігінің өзгерулері туралы ақпараты қолданады. Яғни бір мезгілде кері байланыс реттеу принципімен бірге ауытқушы әсері бойынша реттеу принципі жүзеге асырылады.



1.15-сурет

Мұнда: $ӨЭ_1, ӨЭ_2, ӨЭ_3$ - өлшеу элементтері.
Мұндай жүйеде жоғарыдағы қарастырылған екі реттеу принциптердің артықшылықтары орынды болады.

1.4 СТАТИКАЛЫЛЫҚ ЖӘНЕ АСТАТИКАЛЫҚ АВТОМАТТЫ РЕТТЕУ ЖҮЙЕЛЕРІ

Тағайындалған және ауытқушы әсерлер автоматты реттеу жүйелеріне әрекет етіп тұрғанда, және де әсерлердің өзгеруі анықталынған шарттарға бағынса, онда жүйелердің тұрақталынған жағдайында қатесі бар болуына байланысты олар статикалық және астатикалық жүйелерге бөлінеді.

Жоғарыда (1.10-сурет) көрсетілінгендей жүйенің динамикалық қатесі болады:

$$\varepsilon(t)=g(t)-y(t) \ ,$$

ал жүйенің тұрақталынған жағдайында ол қате

$$\varepsilon_m=g_m-y_m \ ,$$

мұнда ε_m , g_m , y_m -сәйкесті қателіктің тағайындалған және реттелінетін шамалардың тұрақталған мәндері.

Яғни $\varepsilon(t)$ қателіктің тұрақталған мәні бойынша автоматты реттеу жүйелерінің статикалық не астатикалық түрі анықталады. Егер әрекет етіп тұрған $g(t)$ тағайындалған шама уақыт озған сайын кейбір тұрақты мәнге ұмтылғанда (1.16-сурет), тұрақталған ε_m жүйе қатесі де, тағайындалынған шаманың тұрақталған мәнінен тәуелді, кейбір тұрақты мәнге ұмтылса, онда автоматты реттеу жүйесі тағайындалған шамаға қарай статикалық делінеді. Яғни 1.16-сурет бойынша статикалық жүйеде тұрақталған жағдайда ε_m тұрақталған қатесі бар болады.

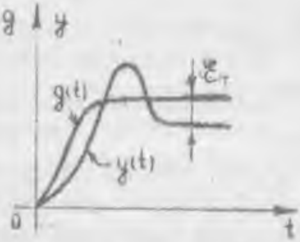
Егер әрекет етіп тұрған тағайындалған шама уақыт озған сайын кейбір тұрақты (1.17-сурет) мәнге ұмтылғанда, жүйенің тұрақталған қатесі, тағайындалған шаманың тұрақталған мәнінен тәуелсіз нольге ұмтылса, онда автоматты реттеу жүйесі тағайындалған шамаға қарай астатикалық деп аталынады. Яғни астатикалық жүйенің тұрақталған қатесі нольге тең.

Автоматты жүйелер статикалық және астатикалық жүйелерге тек қана тағайындалған шамаға қарай бөлінбей, дәл осылай ауытқушы әсерге қарай бөлінеді.

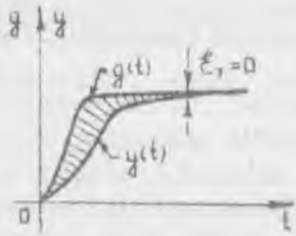
Егер әрекет етіп тұрған ауытқушы әсер уақыт озған сайын кейбір f_m тұрақты мәнге ұмтылғанда (1.18-сурет), тұрақталған реттеу қатесі де, ауытқушы әсердің мәніне тәуелді, кейбір ε_m тұрақты мәнге ұмтылса, онда автоматты реттеу жүйені ауытқушы әсеріне қарай статикалық жүйе деп аталынады. Ауытқушы әсеріне қарай астатикалық автоматты реттеу жүйелерінің тұрақталған жағдайында қателік нольге қарай ұмтылады (1.19-сурет).

Астатикалық жүйелер бір , екі және т.с.с. ретті болуы мүмкін. Егер тағайындалған шама уақыт озған сайын тұрақты болса, онда бірінші ретті астатикалық автоматты жүйе , реттеу процесін тұрақталған қатесіз атқарады. Бірақ егер тағайындалған шама тұрақты жылдамдықпен өзгеріп тұрса мұндай жүйеде қате пайда болады.

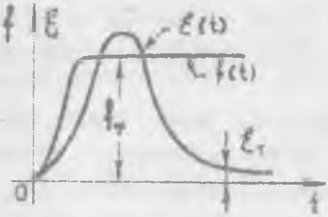
Тағайындалған шама тұракты болған жағдайда және ол шама



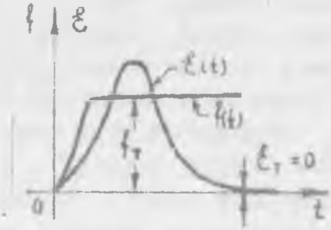
1.16-сурет



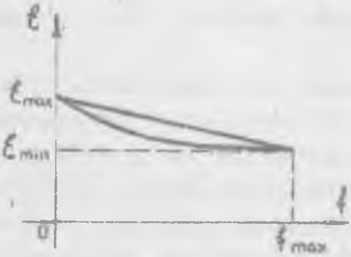
1.17-сурет



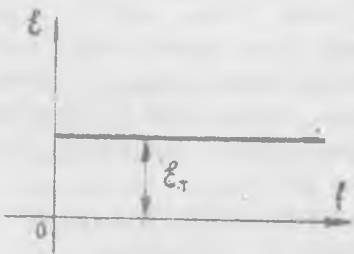
1.18-сурет



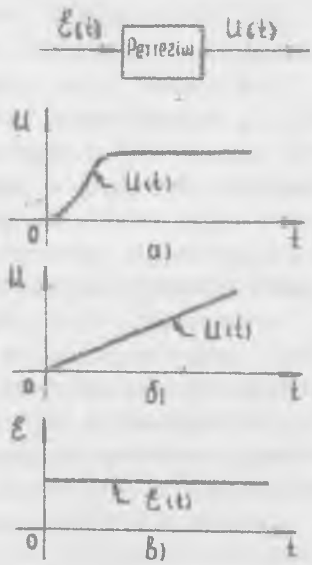
1.19-сурет



1.20-сурет



1.21-сурет



1.22-сурет

тұрақты жылдамдығымен өзгеріп тұрса да екінші ретті астатикалық жүйе, реттеу процесін тұрақты қатесіз атқарады. Бірақ мұндай жүйеде егер тағайындалған шама тұрақты үдеумен өзгеріп тұрса, тұрақталған қате пайда болады.

Статикалық жүйелерде тұрақталған реттеу қатенің әрекет етіп тұрған ауытқушы әсерінің тұрақталған мәнінен тәуелділігі кейбір қисықпен бейнеленеді, бірақ оны, ең болмағанда әсердің кейбір тұрақталған мәндерінің аралығында жуық көлбегей түзу сызықпен ауыстыруға болады (1.20-сурет). Астатикалық жүйелерге сәйкес тәуелдік абсцисса осіне параллельді сызық пен бейнеленеді (1.21-сурет). 1.20-сурет бойынша ауытқушы әсердің мәні нольден f_{max} - ға дейін өзгергенде реттеу қателігінің мәні ε_{max} - нан ε_{min} -ға дейін өзгереді. Бұл аралықтың кейбір мәні, мысалы орташа арифметикалық мәні

$$\varepsilon_o=\frac{\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min}}{2}$$

реттелетін шаманың ауытқуының номинальды мәні ретінде қабылданылады да келесі шама $\delta=\frac{\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min}}{\varepsilon_o}$ статизм немесе бірқалыпты еместігінің коэффициенті деп аталады. Кейде реттеу қателігінің номиналды мәні реттінде ε_o емес ε_{min} қабылдануы мүмкін, онда

$$\delta=\frac{\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min}}{\varepsilon_{min}}.$$

Астатикалық жүйелерде статизм коффициенті нольге тең, яғни 1.21-сурет бойынша $\delta=0$.

Реттеу қателігінің номинальды мәнін таңдауда принципиалды ешқандай айырмашылығы жоқ, себебі жақсы жобаланған жүйеде ε_{min}, ε_o, ε_{max} шамалар бір-бірінен аз айырылады, сондықтан әртүрлі номиналды мәнімен саналған статизм коэффициенттері шамамен бірдей болады, бірақ түсініспеушілік болмау үшін әрдайым қандай мән номиналды мән ретінде таңдалғанын айту қажетті.

Автоматты басқару жүйе бір мезгілде, мысалы, кейбір ауытқушы әсерге қарай статикалық болып, ал тағайындалған шамаға қарай астатикалық болуы мүмкін және керісінше болатынын атап өту маңызды. Сондықтан, мұндай жағдай түсініспеушілік тудыратын болса, онда жүйенің қандай нүктесіне әрекет салынатының көрсету қажет, егер сол нүктеге қарай жүйенің статикалығы не астатикалығы анықталатын болса.

Статикалық және астатикалық жүйелермен қатар статикалық және астатикалық реттеуіштер де болады (1.22-сурет). Жоғарыда айтылғандай реттеуіш $\varepsilon(t)$ жүйенің реттеу қатесі бойынша объектіге әрекет ететін кейбір алгоритмге сәйкесті $u(t)$ басқару әсерін өндіреді.

Егер реттеуіштің кірісіне бірлік сатылы әсер берілгенде (1.22, в-сурет) оның шығу шамасы уақыт озған сайын асимптоталық түрде тұрақты мәнге ұмтылса (1.22, а-сурет), ондай реттеуіш статикалық реттеуіштерге, ал шығу шамасы уақыт озған сайын шексізге ұмтылса (1.22, б-сурет), онда астатикалық реттеуіштерге жатады.

1.5. АВТОМАТТЫ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ НЕГІЗГІ БАСҚАРУ ЗАҢДАРЫ

Реттеу заңы немесе жалпы жағдайда басқару заңы деп, $\varepsilon(t)$ жүйе қателігі, $g(t)$ тағайындалған және $f(t)$ ауытқушы әсерлер бойынша басқару құрылғы (реттеуіш) (1.15-сурет) $u(t)$, басқарушы әрекетті қалыптастыратын математикалық тәуелділікті немесе алгоритмды атайды. Жалпы түрде ондай алгоритм келесідей жазылуы мүмкін

$$u(t) = F[\varepsilon(t), g(t), f(t)]$$

Мұнда,F- жалпы жағдайда $\varepsilon(t)$, $g(t)$, $f(t)$ шамалардан және олардың уақыт бойынша туындыларынан, интегралдарынан тәуелді кейбір бейсызықты функция.

Әдетте соңғы өрнек келесідей жазылады

$$u(t)= F_1(\varepsilon)+F_2(g)+F_3(f) .$$

бұл өрнектегі бірінші қосылғыш реттелінетін шаманың қатесі бойынша реттеу принципіне, ал екінші мен үшінші қосылғыштар ауытқушы әсер бойынша принципіне сәйкес.

Мұндай алгоритмдер, заңдар әдетте қарапайым мақсатты жүйелерде қолданылады, мысалы, реттеу қателігін минимумға келтіру және жүйенің орнықтылығының қорын қанағаттандыру мақсатымен. Олардың егжей-тегжейлі анализі және жіктеуі [1, 16, 17, 28] келтірілген.

Жалпы жағдайда жүйенің мақсатына сәйкес басқару алгорітмдер өте күрделі болуы мүмкін. Мысалы [9]-да технологиялық процестің кіру және шығу айнымалаларына теңсіздік түрінде шек қойылғандағы жылу режимінің кейбір белгілі критерийі бойынша оптималды басқару мәселесінің қойылуы беріледі. Мұндай мәселелердің қойылуына байланысты және қойылған шектердің түріне қарай, классикалық вариациялық әдістеріне негізделіп әлде максимум принципі деп аталатын, немесе динамикалық программалау әдістерін қолданып мәселе шешуінің алгоритімі, яғни басқару заңы анықталады. Қазіргі заманда автоматты басқару жүйелерінде мұндай заңдар басқарушы электрондық есептеуіш машине (БЭЕМ) немесе басқарушы микро- ЭВМ арқылы іске асырылады [32]. Мұндай оптималды басқару алгоритмдердің толық анализі [26] берілген.

Мұнда тек қана басқару құрылымның реттелінетін шаманың ауытқуы бойынша өндіретін көп тараған сызықты заңдар қарастырылады, яғни

$$u(t) = F[\varepsilon(t)]$$

түрлі заңдар. Олар келесі түрде болады.

ПРОПОРЦИОНАЛДЫҚ ЗАҢ (П деп белгіленетін). Бұл заң бойынша

$$u(t) = k_1\varepsilon(t)$$

мұнда k_1 - реттеуіштің беріліс (күшейткіш) коэффициенті, ал оның кері шамасы реттеуіштің статизмі делінеді.

Реттеуіштің статизмі өскен сайын реттеу статизмі де өседі.

ИНТЕГРАЛДЫҚ ЗАҢ. (И деп белгіленеді). Мұндай заң келесі түрдегідей болып келеді

$$\frac{du}{dt} = k_2\varepsilon(t) \text{ немесе } u(t) = k_2\int_0^t\varepsilon(t)dt \text{ , } k_2 = \frac{1}{T_и}$$

мұндағы $T_и$- тұрақтының өлшемі уақыт, сондықтан ол интегралдаудың уақыттық тұрақтысы делінеді. Интегралдау реттеуіш астатикалық реттеуіш болып келеді, сондықтан жоғарыда айтылған астатикалық реттеу дәл осындай реттеуішпен жүзеге асырылады.

Сонымен осы қарастырылған заңдар негізгі басқару заңдары болып келеді. Ал іс жүзінде бұл заңдардан құрылған аралас заңдар қолданылады. Оларға келесі заңдар жатады.

ПРОПОРЦИОНАЛДЫ-ИНТЕГРАЛДЫҚ ЗАҢ (ПИ деп белгіленетін). Бұл заң бойынша

$$u(t) = k_1\varepsilon(t) + k_2\int_0^t\varepsilon(t)dt$$

4-207

кейде мұндай заңды интегралды коррекциялаумен пропорционалды заң деп атайды. Аттас ПИ реттеуіш астатикалық реттеуді іске асырады. Шынымен, егер соңғы теңдеуді келесідей жазсақ

$\frac{du}{dt} = k_1\frac{d\varepsilon}{dt} + k_1\varepsilon$ онда тепе-теңдік жағдайда және тұрақты өрекетте $du/dt=0$; $d\varepsilon/dt=0$ болулары керек, бұдан тепе-теңдік тек қана $\varepsilon=0$ болғанда болуы мүмкін.

ПРОПОРЦИОНАЛДЫ ИНТЕГРАЛДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЗАҢ. (ПИД деп белгіленетін). Аттас реттеуіш келесі математикалық тәуелділікті іске асырады:

$$u(t) = k_1\varepsilon(t) + k_2\int_0^t\varepsilon(t)dt + T_д\frac{d\varepsilon}{dt}$$

мұнда $T_д$- дифференциалдаудың уақыттық тұрақтысы. ПИД реттеуіш астатикалық реттеуді қамтамасыз етеді . Реттеу заңына $\varepsilon(t)$ туындысын есептеу процесінің сапасын жоғарылату мақсатында енгізіледі.

Сонымен қарастырылған заңдар стандартты деп аталатын заңдардың тобына жатады. Стандартты заңды өнеркәсіпті реттеуіштер құрылысында әдетте k_1, k_2, $T_д$ - параметрлерін кең аралықта өзгерту мүмкіншілігі алдын ала ескерілген. Сондықтан [16] берілген таңдау мен жоба есебін жүргізу әдістерін қолдана отырып өнеркәсіпті реттеуішін нақты объектіге икемдеуге болады.

2 - ТАРАУ

АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖАЗЫЛУЫ

2.1 АВТОМАТТЫ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Жүйе жобалау стадиясында әдетте басқару процесі дифференциалдық, интегралдық немесе алгебралық теңдеулер арқылы зерттеледі, яғни математикалық жазу (бейнелеу) немесе математикалық моделі (үлгісі) арқылы.

Мұндай зерттеудің мақсаты анализ немесе синтез мәселесін шешу. Бірінші жағдайда жүйе өзінің структурасымен және параметрлерімен беріледі де зерттеу мақсаты оның қасиеттерін яғни тезәрекеттігін (шапшаңдығын), орнықтылығын және дәлдігін анықтау. Екінші жағдайда керісінше жүйенің қажетті қасиеттері беріледі де, яғни жүйеге қойылатын сапа талаптары, ал зерттеу мақсаты сол қойылған талаптарды қанағаттандыратын жүйенің структурасымен параметрлерін анықтау.

Жалпы түрде жүйенің зерттеу тәртібі екі жағдайда болады жүйенің матиматикалық жазуын кірістіреді, ол арқылы өтпелі және тұрақтанған режимдер зерттелінеді.

Жүйенің математикалық жазуында инерционды жүйелер және үздіксіз жүйелердің инерционды элементтері әдетте дифференциалдық, интегралдық теңдеулермен жазылады, оларды динамика теңдеулері деп атайды. Инерционды емес элементтер және сыртқы әсерлер тұрақты түрде әрекет етіп тұрғанда жүйенің тұрақталынған режимі, алгебралық теңдеулермен жазылады, оларды статика теңдеулері деп атайды.

Егер де жүйенің параметрлері шоғырланған деп есептеген болса, онда динамикалық теңдеулер жай дифференциалдық теңдеулер болып келеді. Егер де жүйенің параметрлері шоғырланған болмай, үлестірілген болса, онда жүйенің математикалық моделі дербес дифференциалдық теңдеулер болып келеді.

Басқару жүйесінің динамикалық теңдеулерін құруында, яғни оның математикалық үлгісін анықтауда күрделі жүйе шартты түрде, жеке әрекеті бағытталған үзбелерге (буындарға, элементтерге) бөлінеді, одан кейін уәбедегі өтетін процесті анықтайтын физикалық заңға негізделіп олардың әрқайсысына сәйкес теңдеу құрылады. Барлық жүйе уәбелері үшін құрылған динамикалық теңдеулерінің жиынтығы, аралық айнымалы шаралар жойылғаннан кейін, жүйедегі басқару процесінің математикалық моделі болып келеді.

Уәбе әрекеті бағытталған делінеді, егер ол, әрекетті бір бағытта ғана алып барса, яғни кірісінен шығысына қарай, сонымен уәбенің жағдайының өзгеруі оның алдағы тұрған уәбеге ешқандай әсер етпейді. Жүйенің әрекеті бағытталған уәбелерге бөлінуінің нәтижесінде уәбелердің математикалық моделін құруға басқа уәбелермен байланыстарын есепке алмай жүргізуге болады.

Жекеленген жүйе уәбегінің теңдеуін құрастырғанда бірінші кезекте ондағы өтетін физикалық процестердің анализі жүргізіледі, уәбенің кіру әсерлері және шығу шамалары анықталады. Одан кейін уәбедегі өтетін процестерге бағынатын физикалық заңдар айқындалады. Ондай заңдар келесідегідей болуы мүмкін:

- деңгейі, қысымы реттелінетін объектілерге (уәбелерге), ол зат сақталу заңы (материалдық баланс теңдеуі); температурасы реттелетін объектілерге, ол жылу энергиясының сақталу заңы (жылылық баланс теңдеуі) ; айналым саны, айналым жылдамдығы реттелінетін объектілерге, ол екінші Ньютон заңы.

Бұл заң бойынша егер массасы m-ға тең қатты денеге Fқ қимыл күші, және Fк - кедергі күш әрекет етіп тұрса онда, ол дененің үдеуі екі күштің айырмына тура пропорциялы және оның массасына кері пропорциялы. Яғни,

$$a = \frac{F_қ - F_к}{m}$$, бірақ $a = \frac{dv}{dt}$ екенін еске алсақ онда былай жазуға болады

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_қ - F_к}{m} \quad \text{немесе}$$

$$m\frac{dv}{dt} = F_қ - F_к$$

бұл жерде v - дененің сызықтық жылдамдығы, t- уақыт.

Дербес жағдайында мысалы, қозғалтқыштың айнымалы санын реттейтін жүйедегі обьектінің негізгі Ньютонның екінші заңының теңдеуі айнымалы қозғалысқа былай жазылады:

$$J\frac{d\omega}{dt} = Mқ - Mк$$

мұндағы: ω - қозғалтқыш білігінің бұрыштық жылдамдығы;

J - қозғалтқыш білігіне келтірілген инерция моменті;

Мқ- білікке салынған қимыл моменті;

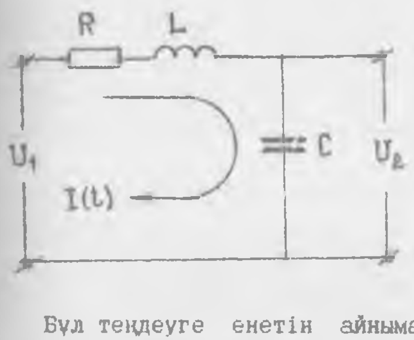
Мк- қозғалтқыштың білігіндегі кедергі моменті;

Бұдан кейін негізгі теңдеулерге кіретін айнымалы шамалардың тәуелді болатын факторлары анықталады және ол тәуелдікті сипаттайтын өрнектер белгіленеді. Соңғылары аналитикалық функциялар, әлде графикалық түрінде берілуі мүмкін. Олар көп жағдайларда бейсызықты тәуелділіктер болып келеді. Табылған өрнектерді негізгі теңдеуге қойып үабенің (дербес жағдайда реттелінетін объектінің) бейсызықты теңдеуін анықтауға болады.

Мысалы: соңғы теңеу үшін Мқ білікке салынған қимыл моменті және Мк қозғалтқыштың білігіндегі кедергі моменті қандай шамалардан тәуелді және қандай өрнеклен анықталатынын тауып көрсету қажет.

Егер жүйенің жекеленген үабесі кейбір электр тізбегі болып келсе, онда үабеде өтетін процестерді анықтайтын негізгі физикалық заңдар ол Кирхгорф пен Ом заңдары болады.

Мысал ретінде келесі түрде электр тізбегін қарастырайық.



Егер U_1 кернеуді кіру әсері ретінде, ал U_2 шығу шамасы ретінде алсақ. Онда Кирхгоф заңы бойынша U_1 тізбекке берілетін кернеу R-активты, L- индуктивты және С-сыйымдылық кедергілердегі, сейкесті U_r, U_l және U_c кернеу түсулерінің қосындысына тең, яғни $U_1 = U_r + U_l + U_c$.

Бұл теңдеуге енетін айнымалы шамаларды I ток шамасы арқылы жазып табамыз:

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I(t)dt = U_1$$

немесе $I = C(dU_2)/(dt)$ екінін есепке алып соңғы теңдеуді жазуға болады:

$$LC\frac{d^2U_2}{dt^2} + RC\frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1$$

Сонымен, табылған теңдеу қарастырылып отырған үзбенің шығу шамасын оның туындыларын кіру шамасымен байланыстырады, басқаша айтқанда, үзбедегі өтетін процестерді математикалық түрде жазады, яғни оның математикалық үлгісі болып келеді.

Демек, автоматты жүйенің дифференциалдық теңдеуін табу оның әр үзбесінің теңдеуін табуға, одан кейін жүйенің структуралық схемасын құрып және аралығындағы айнымалы шамаларды жойып тұтас жүйе үшін теңдеуін алуға келтіреді.

Көптеген қарапайым үзбелердің теңдеулері әртүрлі әдебиетте келтіріледі, мысалы, [30] жетпіске жуық үзбелердің теңдеулері берілген. Алайда, нақты басқару объектері көп есе күрделі болып келеді әсіресе химиялық, металлургиялық т.с.с. объектілер, сондықтан олардың математикалық үлгісін табу мәселесі дербес зерттеу тақырыбы болып келеді және объектідегі өтетін физикалық процесіне байланысты ғылым саласында нақты білімді қажет етеді.

Қазіргі уақытта технологиялық процестерді автоматтандыру объекті ретінде математикалық жазуындағы жұмыс жүргізуінде екі тенденция байқалады. Біріншісі технологиялық процесте өтетін физика-химиялық құбылыстардың көрінісін жазатын теориялық, (гноегологиялық) модельді табуын мақсат етеді. Екіншісі технологиялық процестің басқару жүйесін жасап шығару мәселесінен себеп болатын талаптарға бейімделетін, математикалық жазуын жасап шығаруын болжайды.

Технологиялық процестердің математикалық жазуын анықтауының барлық әртүрлі әдістері мен принциптерін екі топқа бөлуге болады. Біріншісі берілген технологиялық процеске тиісті физикалық химиялық, биологиялық, экономикалық және баска заңдылықтардың теориялық анализіне негізделген әдістерді біріктіреді. Олар алдағы пайдалану тәжірибесін талдап қорытуын, логикалық анализінің принциптерін, физикалық эксперименттi, математиканың, физиканың және химия теңдеулерін қолданады. Бұл жағдайда табылған модельдер, зерттелетін технологиялық процеске тиісті физика-химиялық, биологиялық, экономикалық құбылыстардың көрінісін барабар (адекватті) қамтып көрсетеді.

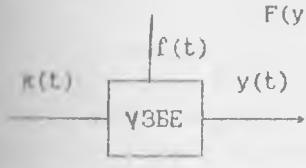
[10] жұмысты бұндай модельдерді құру әдісі берілген және сол әдіске негізделіп қызыл шламды айнымалы пеште пісіру технологиялық процестің математикалық моделі құрылған. Табылған модельдің структурасы [11-13] жұмыстарда келтірілген. [14,15] жұмыстарда ұқсас объектілердің математикалық модельдері табылған.

Идентификация деген ат алған технологиялық процестердің математикалық жазуы әдістерінің екінші тобы, технологиялық процестердің координаттарының өлшеулерін арнаулы өңдеу әдісіне сүйенеді. Өзінің бөталысы бойынша обьектіге ұқсас модельдерге келтіре отырып бұл әдістер басқару процесінің талаптарын барынша есепке алады.

2.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ СЫЗЫҚТАНДЫРУ

Жалпы жағдайда жүйелердің үзбелері, басқару обьектілері бейсызықты, еркін ретті дифференциалдық теңдеулермен жазылады. Мысал ретінде екінші ретті дифференциалдық теңдеумен жазылатын жүйе үзбесін қарастырайық (2.1-сурет).

$$F(y,y,y,x,x)+f(t)=0 \qquad (2.1)$$



2.1-сурет

мұндағы: y - үзбенің шығу шамасы; x пен f - кіру шамалары; y, x-уақыт бойынша бірінші туындылары; y-уақыт бойынша екінші туынды.

Еркін кіру әсерлерде, үзбедегі өтетін процестерді математикалық түрде жазатын (2.1) теңдеу динамикалық теңдеу деп аталады. x=x ,f=f тұрақты кіру шамаларында үзбеде біраз уақыттан кейін процесс тұрақталды дейік, онда шығу шамасы y=y мәнінде тұрақталынады. Бұл жағдайда (2.1) теңдеу келесідей жазылады

$$F(y\ ,\ 0,\ 0,\ x\ ,\ 0)\ +\ f\ =\ 0 \qquad (2.2)$$

Бұл теңдеу статикалық немесе тұрақталынған режимді жазады, сондықтан статика теңдеуі деп аталады.

Жалпы жағдайда үзбенің (2.1) динамика теңдеуі бейсызықты болып келеді. Әдетте реттеу процесін зерттегенде үзбе теңдеуін сызықтандыруға болады (егер де ондай мүмкіншілік болмаса онда зерттеу барысында бейсызықты жүйелердің теориясының әдістері қолданылады). Бейсызықты теңдеулерді сызықтыққа түрлендіретін процесті сызықтандыру деп атайды.

Әдетте автоматты жүйе кейбір тағайындалған режимді қолдайды. Мұндай режимде үзбелердің кіру мен шығу шамалары белгілі заң бойынша өзгеріп тұрады. Дербес жағдайда стабилизациялық жүйелерде олардың мәні тұрақты болады. Бірақ жүйеге ауытқушы әсерлердің әрекет етіп тұруының себебінен ол шамалардың шынындағы мәні тағайындалған режимдегі мәндеріне тең болмайды, яғни шамалардың нақты мәні тағайындалған режимдегі мәндерінен ауытқып тұрады. Әдеттегі жүйелерде ондай ауытқу аз болады. Сондықтан осы жағдай бейсызықты теңдеулерді сызықтандыруға мүмкіндік береді. Бейсызықты (2.1) теңдеуді сызықтандыру үшін оны Тейлор қатарына жіктейді. Сызықтандыруды жеке әрбір үзбеге өткізуге болады.

Сондықтан сызықтандыру процесті үзбенің (2.1) түрдегі теңдеуінің мысалында қарастырайық. Ол үшін тұрақталынған тағайындалған режимдегі айнымалы шамалардың мәндерін келесідей белгілейік.

$$y = y_o, \quad \ddot{y} = \ddot{y}_o, \quad \dot{x} = \dot{x}_o,$$
$$\dot{y} = \dot{y}_o, \quad x = x_o, \quad f = f_o \qquad (2.3)$$

Енді (2.1) теңдеудің сол жағын Тейлор қатарына (2.3) нүктеде жіктеп және аздығы жоғары ретті мүшелерін елемей оны келесі түрде жазайық

$$F(y_o, \dot{y}_o, \ddot{y}_o, x_o, \dot{x}_o) + (y-y_o)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_o + (\dot{y}-\dot{y}_o)\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_o +$$
$$+ (\ddot{y}-\ddot{y}_o)\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_o + (x-x_o)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_o + (\dot{x}-\dot{x}_o)\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_o + f_o + (f-f_o) = 0 \quad (2.4)$$

Мұндағы дербес туындылардың ноль белгілері, ол олардың (2.3) нүктеде алынатынын білдіреді. Жүйеде тағайындалған режим тұрақталынғанда, (2.1) теңдеу келесі түрде болады

$$F(y_o, \dot{y}_o, \ddot{y}_o, x_o, \dot{x}_o) + f_o = 0 \qquad (2.5)$$

Енді (2.4) теңдеуге келесі белгілерді енгізейік:

$$\Delta y = y - y_0, \qquad \Delta\dot{y} = \dot{y} - \dot{y}_0, \qquad \Delta\ddot{y} = \ddot{y} - \ddot{y}_0,$$

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta\dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_0, \qquad \Delta f = f - f_0,$$

$$a_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_0 \qquad a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 \qquad a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$$

$$b_0 = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \qquad b_1 = -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0 \qquad c_0 = -1$$

Онда (2.4) теңдеуден (2.5) теңдеу алынып үзбенің келесі сызықтандырылған динамикалық теңдеуі табылады

$$a_0\Delta\ddot{y} + a_1\Delta\dot{y} + a_2\Delta y = b_0\Delta x + b_1\Delta\dot{x} + c_0\Delta f \qquad (2.6)$$

Бұл дифференциалдық теңдеу (2.1) теңдеу сияқты қарастырылып отырған автоматты жүйенің үзбесіндегі өтетін динамикалық процестерді жазады. Бірақ бұл теңдеудің бұрынғысынан айырмашылығы келесіде: бұл теңдеу жуықтау болып келеді, себебі оның шығару процесінде жоғары ретті аз мүшелері еленбеген; теңдеудегі уақыттан белгісіз функциялар алғашқы x, y, f толық шамалар болмай олардың тұрақталынған тағайындалған режимнен Δy, Δx, Δf ауытқулары болады; нәтижесінде табылған теңдеу $\Delta f, \Delta x, \Delta\dot{x}, \Delta y, \Delta\dot{y}$, $\Delta\ddot{y}$ ауытқулар бойынша сызықты $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_0$, ... тұрақты коэффициенттері (немесе айнымалы коэффициенттерімен егер t уақыт айқын түрде (2.1)-ге кірсе, және тұрақталмаған процесс $y_0(t), x_0(t), f_0(t)$ айнымалы шамалармен анықталса, мысалы бағдарламалы реттеуде) болып келеді.

(2.6) теңдеу үзбенің ауытқуларында жазылған дифференциалдық теңдеуі деп аталады. Жүйенің барлық үзбелеріне дәл осындайды жүргізіп, нәтижесінде реттеу процесінің ауытқудағы сызықтандырылған (кейде "вариациядағы" делінетін) теңдеуі табылады.

Сызықты теңдеулермен жазылатын үзбелер мен жүйелер сәйкесті сызықты үзбелер және сызықты жүйелер деп аталады.

(2.6) теңдеудің анықтауы келесі болжауда жүргізілген: шығу және кіру шамаларының ауытқулары жеткілікті аз деп; F функцияның, тағайындалған режимге сәйкесті нүктелердің төңірегінде барлық өз аргументтері бойынша дербес туындылары бар деп. Егер бұл шарттардың ең болмаса біреуі орындалса, онда сывиқтандыруды жүргізуге болмайды.

Сызықты автоматты басқару жүйесі немесе оның үабесі стационарлық делінеді, егер олар тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеумен жазылса. Егер де ол теңдеудің коэффициенттері уақыт озған сайын өзгеріп тұрса, яғни тұрақты болмаса ондай жүйелер немесе үабелер стационарлық емес деп аталады.

СЫЗЫҚТАЛЫНҒАН ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ЖАЗЫЛУ ТҮРЛЕРІ. Әдетте (2.6)сызықталынған теңдеудің жазуын жеңілдету үшін оны Δ белгісіз жазылады, бірақ ол теңдеудегі айнымалы шамалар олардың тұрақталынған режимнен ауытқуы емес екені ескертіледі, яғни (2.6) теңдеу келесідей жазылады

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\dot{x} + b_1x + c_0f, \qquad (2.7)$$

бірақ бұл теңдеудегі айнымалы шамалар олардың тұрақталынған жағдайдағы мәндерінен ауытқуы болып келеді. Келешекте айнымалы шамалардың нақты мәні мен олардың ауытқуының арасындағы айырмашылыққа аса мән берілмейді, себебі бұл кітапта тек қана сызықты жүйелер қарастырылады және (2.7) теңдеу сызықты болып келеді, ал кейбір жағдайда оны ескеру керек болса онда бұл жағдай қосымша айтылатын болады.

Автоматты басқару теориясында қазіргі уақытта сызықтандырылған теңдеудің жазуының бірнеше түрлері қолданылады.

СТАНДАРТТЫ ТҮРДЕ ЖАЗУ. Әдетте сызықты тұрақты коэффициентті екіден жоғары емес ретті дифференциалдық теңдеулер стандартты түрде жазылады. Ондай жазуда шығу шамасы және оның туындылары теңдеудің сол жақ бөлігіне, ал кіру шамасы өзінің туындыларымен оң жақ бөлігіне, және шығу шамасы бірге тең коэффициентімен жазылады. Егер теңдеудің оң жағында бірнеше кіру шамалары туындылармен болса, онда әр кіру шамасы өзінің туындысымен топқа біріктіріледі де сәйкесті кіру шамасының алдындағы коэффициент жақшаның сыртына шығарылады.

Сызықтандырылған (2.7) теңдеу стандартты түрде келесідей жазылады

$$T^2_0\ddot{y} + T_1\dot{y} + y = k_1(T_2\dot{x} + x) + k_2f \qquad (2.8)$$

мұндағы: $T^2_0 = \dfrac{a_0}{a_2}$, $\quad T_1 = \dfrac{a_1}{a_2}$, $\quad k_1 = \dfrac{b_1}{a_2}$,

$T_2 = \dfrac{b_0}{b_1}$, $\quad k_2 = \dfrac{c_0}{a_2}$.

T_0, T_1, T_2 -тұрақты шамалардың өлшемдігі, уақыт өлшемі болып келеді, сондықтан олар уақыт тұрақтысы деп аталады, ал k_1, k_2 беріліс коэффициенттері делінеді. Егер (2.7) негізгі теңдеуге у енбесе, яғни $a_0 = 0$ болса, онда стандартты түрдегі теңдеуде у туындының алдындағы коэффицент бірге тең болу керек.

ОПЕРАТОРДЫ ЖӘНЕ ӨЛШЕМСІЗ ТҮРДЕ ЖАЗУ. (2.8) теңдеуге кіруші айнымалы шамалар және коэффиценттер белгілі өлшемдерімен болады. Бірақ бұл жағдай жүйенің анализін жүргізгенде әсіресе бірнеше жүйелерді бірге қарастырып, оларды салыстырғанда айтарлықтай ыңғайсыздыққа келтіреді. Сондықтан айтылған жағдайларда жүйенің математикалық жазуын өлшемсіз түрде жазу ыңғайлы болып келеді.

Ол үшін (2.8) теңдеуге дифференциалдау операциясына р белгісін қолданайық, яғни мынадай дифференциалдау операторларын ендірейік

$$\frac{d}{dt} = p, \quad \frac{d^i}{dt^i} = p^i .$$

онда (2.8) теңдеу жазылады

$$T^2{}_0 p^2 y + T_1 p y + y = k_1(T_2 p x + x) + k_2 f. \qquad (2.9)$$

Дифференциалдық теңдеулерді жазғанда және оларды түрлендіргендер дифференциалдау операторды алгебралық көбейткіштей қарастыруға болады, ал ру өрнекті коммутативті қасиетсіз көбейтіндідей, яғни ру орнына ур деп жазуға болмайды. Бұл ескертуді еске алып, (2.9) теңдеуді келесідей жазайық:

$$(T^2{}_0 p^2 + T_1 p + 1)y = k_1(T_2 p + 1)x + k_2 f. \qquad (2.10)$$

(2.9) және (2.10) теңдеулердің жазуы операторлы түрдегі жазуы делінеді.

Салыстырмалы бірліктегі айнымалы шамаларды келесідей белгілейік:

$$y_c = y/y_0, \quad x_c = x/x_0 , \quad f_c = f/f_0,$$

мұндағы y_0, x_0, f_0- сәйкесті шамалардың максималды немесе номиналды мәндері.

Онда салыстырмалы бірлікте, яғни өлшемсіз түрде (2.10) теңдеу келесідей жазылады $(T^2{}_0 p^2+T_1 p+1)y_c=k_{1c}(T_2 p+1)x_c+k_{2c}f_c$

мұндағы $\quad k_{1c} = k_1 x_0/y_0, \quad k_{2c} = k_2 f_0/y_0.$

ТҮРЛЕНДІРУ ФУНКЦИЯЛАРЫ АРҚЫЛЫ ЖАЗУ. Жоғарыда табылған

(2.10) теңдеуді белгілейік $Q(p)=T^2{}_0p^2+T_1p+1$; $R_1(p)=k_1(T_2p+1)$; $R_2(p)=k_2$. Бұл белгілерді қолданып (2.10) теңдеуді жинақылау түрде жазуға болады

$$Q(p)y = R_1(p)x + R_2(p)f \tag{2.11}$$

мұндағы $Q(p)$ (шығу шамасындағы дифференциалдау операторы) меншікті оператор деп аталады, ал $R_1(p)$ мен $R_2(p)$ (кіру шамаларының дифференциалдау операторы) әсер етуші операторлар деліне-ді.

Әсер етуші операторының меншікті операторға қатынасы түрлендіру функция немесе оператордағы түрлендіру функция деп аталынады.

(2.7) теңдеумен немесе,бәрі бірдей (2.10), (2.11) теңдеулермен жазылған үзбе екі түрлендіру функциялармен сипатталады: X кіру шамасы бойынша $W_1(p)$ түрлендіру функциясымен

$$W_1(p) = \frac{R_1(p)}{Q(p)} = \frac{k_1(T_2p+1)}{T^2{}_0p^2+T_1p+1} \tag{2.12}$$

және f кіру шамасы бойынша $W_2(p)$ түрлендіру функциясымен

$$W_2(p) = \frac{R_2(p)}{Q(p)} = \frac{k_2}{T^2{}_0p^2+T_1p+1} \tag{2.13}$$

Бұл түрлендіру функцияларды қолданып, (2.7) теңдеуді былай жазуға болады

$$y = W_1(p)x + W_2(p)f \tag{2.14}$$

Сонымен соңғы түрлендіру функциялар арқылы жазылған теңдеу, негізгі (2.7) теңдеудің жинақылау, шартты жазуы болып келеді.

Автоматты басқару теориясында жоғарыда қарастырылған операторлы түрдегі түрлендіру функциясынан басқа Лаплас кескіні түріндегі түрлендіру функциясы туралы түсініктемемен көп пайдаланады.

2.3 ЛАПЛАС ТҮРЛЕНДІРУІ ЖӘНЕ ОНЫҢ НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ

Бұл параграфта, сызықты дифференциалдық теңдеумен жазылатын жүйелердің қарастыруында қолданатын Лаплас түрлендіруінен негізгі мағлұматтар берілген.

$x(t)$ функциясы барлық $[0,\infty]$ оң сан жақты осінде анықталған дейік, және бөлікті дифференциалданатын болып $t<0$ болғанда $x(t)=0$ болсын дейік, сонымен қатар M мен C оң сандар $x(t) \leq Me^{Ct}$ теңсіздікті $0 \leq t \leq \infty$ болғанда қанағаттандыратын болсын дейік, онда келесі формуламен анықталатын шама Лаплас кескіні делінеді

$$X(p) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}dt \qquad (2.15)$$

(2.15) қатынас t нақты айнымалы x(t) функциясына $p = c + j\omega$ кешендік (комплекстік) айнымалы X(p) функциясын бір мәнді сәйкестіреді.

Сонымен x(t) функциясын оригинал деп атайды да, ал X(p) функциясын Лаплас кескіні дейді және X(p) функциясы x(t) функцияның Лаплас кескіні екенін келесідей жазылады

$$x(t) \leftrightarrow X(p) \quad \text{немесе} \quad X(p) \leftrightarrow x(t)$$

Кейде төменгідей символикалық жазуын қолданады

$$X(p) = L\{x(t)\},$$

мұндағы L Лаплас операторы.

Белгілі Лаплас кескіні бойынша оригинал табу үшін келесі формула қолданады

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)e^{pt}dp$$

бұл Лапластың кері түрлендіруі деп аталынады.

Символикалық түрде Лапластың кері түрлендіруі келесідей жазылады

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\}$$

бұл жерде L^{-1} Лапластың кері операторы.

Лаплас түрлендіруінің теориясының тікелей мақсаты оригинал бойынша Лаплас кескінін табу

$$L\{x(t)\} = X(p)$$

Ал Лаплас кескіні бойынша оригиналды табу, Лаплас түрлендіруінің теориясының кері мақсаты

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\}$$

Лаплас кескінінің қолдануы жүйенің жоба есебін елеулі жеңілдетеді.

.нді Лаплас түрлендіруінің негізгі қасиеттерін қарастырайық:

СЫЗЫҚТЫҚ ҚАСИЕТ. Егер $x_1(t) \leftrightarrow X_1(p)$, ал $x_2(t) \leftrightarrow X_2(p)$ жә- не α мен β тұрақты шамалар болса, онда

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \leftrightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

немесе

$$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} \leftrightarrow \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\}.$$

ОРИГИНАЛДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ. Егерде $x(t) \leftrightarrow X(p)$ және $\dot{x}(t) \ldots x^{(n)}(t)$ оның туындыларын функция оригиналдар болса, яғни жоғарыда айтылған үш қасиеті болса, онда

$$L\{\dot{x}(t)\} = pX(p) - X(0)$$
$$L\{\ddot{x}(t)\} = p^2X(p) - pX(0) - \dot{X}(0)$$
$$L\{\dddot{x}(t)\} = p^3X(p) - p^2X(0) - p\dot{X}(0) - \ddot{X}(0)$$

Жалпы жағдайда n ретті туындысы $x^{(n)}(t)$ функция оригинал болса, онда

$$L\{x^{(n)}(t)\} = p^nX(p) - p^{n-1}X(0) - p^{n-2}\dot{X}(0) - \cdots - X^{(n-1)}(0)$$

мұндағы

$$X(0) = \lim_{x \to 0} x(t) \ , \quad k = 0 \div (n-1)$$

Егерде бастапқы шарттары нольдік болса, яғни

$$X(0) = X^{(1)}(0) = X^{(1)}(0) = X^{(n-1)}(0) = 0$$

онда соңғы формула келесідей жазылады

$$L\{x^{(n)}(t)\} = p^nX(p)$$

Сонымен нольдік бастапқы шарттардан оригиналды дифференциялау кескінді p-ға көбейтуге сәйкес .

ОРИГИНАЛДЫ ИНТЕГРАЛДАУ. Оригиналды интегралдау кескінді p-ға бөлуге саяды, яғни

$$L\left\{\int_{\varnothing}^{t} x(t)dt\right\} = \frac{X(p)}{p} \ .$$

КЕШІГУ ТЕОРЕМАСЫ. (Функцияны кешікпелі аргументімен түрлендіру). τ қандай оң сан болмаса да

$$L\{ x(t - \tau)\} = e^{-p}X(p).$$

ЖИЫРУ ТЕОРЕМАСЫ (КЕСКІНДІ КӨБЕЙТУІНІҢ ТЕОРЕМАСЫ). Егер $x_1(t) \leftrightarrow X_1(p)$, ал $x_2(t) \leftrightarrow X_2(p)$ болса, онда

$$X_1(p) \cdot X_2(p) \leftrightarrow \int_{\varnothing}^{t} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = \int_{\varnothing}^{t} x_1(t - \tau)x_2(\tau)d\tau.$$

Теңдеудің оң жағының интегралы $x_1(t)$ және $x_2(t)$ фукциялардың жиыруы делінеді де $x_1(t) * x_2(t)$ белгіленеді:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{\varnothing}^{t} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{\varnothing}^{t} x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau.$$

ШЕКТІ МӘНДЕР ТУРАЛЫ ТЕОРЕМАЛАР. Егер $X(p) \leftrightarrow x(t)$ онда

$$x(0) = \lim_{p\to 0} pX(p) \quad \text{және егерде } x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

бар болса, онда

$$x(\infty) = \lim_{p\to 0} pX(p).$$

ЖІКТЕУ ТЕОРЕМАСЫ. Егер $X(p) = A(p)/B(p)$ функция бөлшекті-рационалды болса, және алымындағы көп мүшенің дәрежесі бөліміндегі көп мүшенің дәрежесінен аз болса, онда оның оригиналы $1(t)$ көбейтілген келесі функция болады

$$x(t) = \sum_{k=1}^{L} \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} [X(p)(p-p_k)^n e^{pt}],$$

мұндағы p_k $B(p)$ теңдеудің түбірлері, ал n_k - олардың еселіктері және L - әр түрлі түбірлердің саны. Егер теңдеудің барлық түбірлері қарапайым болса, онда жіктеу формуласы жазылады:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p t},$$

мұндағы n $B(p)$ көпмүшеліктің дәрежесі, $B'(p_k) = \left.\frac{dB}{dt}\right|_{p=p_k}$

ҮЗБЕНІҢ ТЕҢДЕУІН ЛАПЛАС КЕСКІНІ ТҮРІНДЕ ЖАЗУ. Үзбенің теңдеуін Лаплас кескіні түріндегі түрлендіру функциясы арқылы жазуға болады.

Үзбенің Лаплас кескіні түріндегі түрлендіру функциясы деп, оның шығу шамасының кескініне кіру шамасының кескінінің, бастапқы нольдік шарттар орындағандағы, қатнасын айтады. Егер үзбеде (жүйеде) бірнеше кіру шамалар болса, онда қандай болса да бір кіру шамасы бойынша түрлендіру функциясы анықталғанда, басқа кіру шамалар нольге тең деп жорамалданады.

(2.8) теңдеуімен жазылған үзбенің Лаплас кескіні түрінде түрлендіру функциясын анықтайық. Ол үшін бұл теңдеудің екі жағын Лаплас кескіні түрінде жазайық

$$L\{T^2_0y^{(2)} + T_1y^{(1)} + y\} = L\{k_1(T_2x^{(1)} + x) + k_2f\}$$

Бастапқы нольдік шарттарындағы Лаплас түрлендіруінің сызықтық және оригиналды дифференциалдау қасиеттерін (Лаплас түрлендіруінің 1 және 2 қасиеттерін) қолданып анықтайық

$$(T^2_0p^2 + T_1p + 1)Y(p) = k_1(T_2p + 1)X(p) + k_2F(p) \qquad (2.16)$$

мұндағы : $Y(p) = L\{y(t)\}$; $X(p) = L\{x(t)\}$; $F(p) = L\{f(t)\}$.

Делік $F(p) = 0$ онда

$$W_1(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt}{\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt} = \frac{k_0p+k_1}{T_0^2p^2+T_1p+1} \qquad (2.17)$$

мұнда $k_0 = k_1T_2$ және бұл үзбенің X кіру арнасы бойынша түрлендіру функциясы болады. Ал үзбенің f кіру арнасы бойынша түрлендіру функциясын табу үшін делік, $X(p) = 0$ онда

$$W_2(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{\int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt}{\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt} = \frac{k_2}{T_0^2p^2+T_1p+1} \qquad (2.18)$$

Лаплас кескіні түріндегі (2.17), (2.18) үзбенің түрлендіру функциялары операторлы түрдегі (2.12), (2.13) түрлендіру функциялармен беттесетініне назар аудару қажет. Бұл ұқсастық тек қана сыртқы көріністен және ол орынды тек стационарлы үзбелерге. Егер үзбелер стационарлы болмаса, яғни (2.8) теңдеудің коэффициенттерінің мәні уақыттан тәуелді болса, онда (2.17), (2.18) өрнектер дұрыс емес болады, себебі мұндай жағдайда шығу және кіру шамаларының Лаплас кескіндері басқаша болады.

Анықталынған (2.17), (2.18) түрлендіру функцияларын қолданып (2.16) теңдеудің Лаплас кескіні түрінде жазуға болады

$$Y(p) = W_1(p)X(p) + W_2(p)F(p) \qquad (2.19)$$

Бұл теңдеу бастапқы (2.8) теңдеуге адекватты болады, тек қана нольдік шарттар орындалғанда. Егер бастапқы шарттар нольдік болмаса, онда (2.16) және (2.19) теңдеулермен үзбенің математикалық жазуы ретінде қолдануға болмайды, себебі ол теңдеулерді шығарғанда $t<0$ болғанда $x(t)=0$ және $f(t)=0$ деп жорамалданған.

2.4 УАҚЫТТЫҚ СИПАТТАМАЛАР

Үзбелер мен олардың қосылыстарының және тұтастай автоматты басқару жүйелердің қасиеттері олардың сипаттамаларымен анықталады. Сипаттамалар статикалық және динамикалақ болуы мүмкін.

Статикалық сипатамалар үзбенің немесе жүйенің тұрақталынған жағдайдағы шығу мен кіру шамаларының аралығындағы тәуелділікті анықтайды және (2.2) теңдеумен жазылады.

Динамикалық сипаттамалар үзбелер мен жүйелердің өтпелі процестегі қасиеттерін анықтайды. Өз кезеңінде динамикалық сипаттамалар уақыттық (уақыт бойынша) және жиілік сипаттамаларға бөлінеді.

Бұл сипаттамалар эксперименттік жолымен анықталуы немесе (2.1), (2.2) теңдеулер,не түрлендіру функциялары арқылы құрылуы мүмкін.

Уақыттық және жиілік сипаттамалар бір мәнді үзбенің (жүйенің) теңдеулерімен байланысты, сондықтан олар үзбенің динамикалық қасиеттерінің теңдеулерімен қатар, толық жазуы болып келеді.

Негізгі уақыттық сипаттамалар өтпелі және импульсты өтпелі сипаттамалар болып келеді.

ӨТПЕЛІ СИПАТТАМА. Жүйенің нольдік бастапқы шарттарында кірісіне бірлік сатылы әсер берілгендегі оның шығу шамасының өзгеруін бейнелейтін функция, өтпелі функция деп аталады. Әдетте өтпелі функциясы $h(t)$ деп белгіленеді. Басқаша айтқанда $h(t)$ функция жүйенің бастапқы нольдік шарттарында бірлік сатылы әсеріне жүйенің беретін реакциясын (жауабын) бейнелейтін функция.

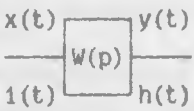
Аналитикалық түрде бірлік сатылы әсерді Хейвисайдтың бірлік функциясымен бейнелеуге болады.

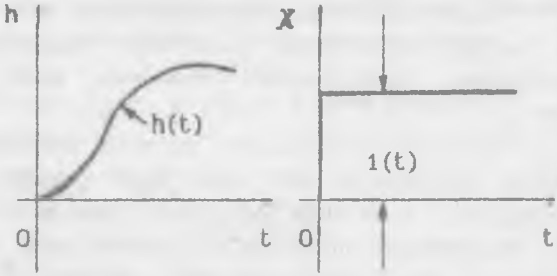
$$1(t) = \begin{cases} 1 \text{ егер } t>0 \text{ болса} \\ 0 \text{ егер } t<0 \text{ болса} \end{cases}$$

Егер $W(p)$ жүйенің (үзбенің) түрлендіру функциясы болса (2.2-сурет), онда сатылы әсермен өтпелі функцияның графигі 2.2 суреттегідей болады. $h(t) = y(t)$ функция бойынша салынған

207

график өтпелі сипаттама деп аталады.





2.2 - сурет 2.3 - сурет

Лаплас түрлендіруін қолданып және W(p) түрлендіру функциясын біле отырып, өтпелі h(t) функциясын табайық Түрлендіру функциясының тұжырымдауымен жазуға болады

$$Y(p) = W(p)X(p) \qquad (2.20)$$

Қарастырылып отырған жағдайда:

$$X(p) \leftrightarrow x(t) = 1(t) \leftrightarrow 1/p$$

Онда шығу шамасының Лаплас кескіні немесе өтпелі функциясының кескіні тең болады

$$Y(p) = h(p) = W(p)/p \ (2.21)$$

Лапластың кері түрлендіруін қолдана отырып h(t) өтпелі функциясын, яғни жүйенің бірлік сатылы әсерге беретін реакциясын табайық

$$L^{-1}\{h(p)\} = h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{W(p)}{p}\,e^{-pt}dp \quad (2.22)$$

Сонымен жүйенің түрлендіру функциясы бойынша h(t) өтпелі функциясын табу үшін түрлендіру функцияны P-ға бөліп, одан кейін табылған өрнектің оргиналын, яғни h(t) функциясын табу керек. Табылған функция бойынша өтпелі сипаттама құрылады.

ИМПУЛЬСТЫ ӨТПЕЛІ СИПАТТАМА. (Салмақ функциясы, салмақтық функция). Бастапқы нольдік шарттарындағы жүйенің (үзбенің) импульсты кіру әсеріне беретін реакциясын бейнелейтін функцияны импульсты өтпелі функциясы деп атайды. Мұндай функцияны w(t) деп белгілейді. Импульсты өтпелі функцияның графигі импуль-

...ті өтпелі сипаттамасы делінеді.

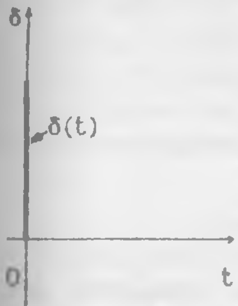
Бірлік импульсты функция немесе Дирактың дельта функциясы бірлік сатылы функциясының туындысы болып саналады, яғни

$$\delta(t)=1'(t).$$

Дельта функция $t=0$ нүктеде шексіздікке ұмтылады, ал барлық басқа жерде нольге тең, яғни оны аналитикалық түрде жазуға болады

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \text{ егер } t=0 \text{ болса} \\ 0 \text{ егер } t\neq 0 \text{ болса} \end{cases} \qquad (2.23)$$

Мұндай функцияның графигі 2.4-суреттегідей болады, ал оның ауданы бірлік ауданға тең, яғни



2.4 - сурет

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$$

Басқаша айтқанда дельта функциясы шексіз жіңішке және шексіз биік бірлік ауданды импульс деп дәлелдеуге болады және оның Лаплас кескіні табылады

$$L\{\delta(t)\} = L\left\{\frac{d1(t)}{dt}\right\} = pL\{1(t)\}\} = 1,$$

яғни $L\{\delta(t)\} = \delta(t) = 1$. Мұндай жағдайда егер жүйенің түрлендіру функциясы $W(p)$ болса, онда $w(t)$ импульсті өтпелі функциясының Лаплас кескіні $w(p)$ мынаған тең

$$w(p) = W(p)\delta(t) = W(p) \qquad (2.24)$$

яғни жүйенің кірісіне импульсты әсер берілгенде оның шығу шамасының Лаплас кескіні түрлендіру функциясына тең.

Сонымен белгілі түрлендіру функция бойынша $w(t)$ импульсты өтпелі функциясын анықтау үшін түрлендіру функциясының оригиналын табу керек, яғни

$$L^{-1}\{w(p)\} = w(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(p)\, e^{-pt}dp \qquad (2.25)$$

табылған функция бойынша импульсты өтпелі сипаттама құрылады.

Салмақтың және өтпелі функциялардың аралығындағы байланысты оңай көрсетуге болады. Жоғарыда көрсетілген (2.21) теңдеуді былай жазуға болады

$$ph(p) = W(p)$$

немесе (2.24) есепке алынып жазылады

$$ph(p) = w^{*}(p) \qquad (2.26)$$

Лаплас кескінін P-ға көбейту, оригиналды дифференциалдауға сай болғандықтан (2.26) жазуға болады

$$\frac{dh}{dt} = w(t) \quad \text{немесе} \quad h(t) = \int_0^t w(t)dt$$

Жүйенің түрлендіру функциясы салмақтық функциямен Лапластың интегралдау түрлендіруімен байланысты, яғни

$$W(p) = w^{*}(p) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-pt}dt$$

Өз кезеңінде h(t) өтпелі функция, түрлендіру функциясымен Карсон түрлендіруімен байланысты, яғни

$$W(p) = p \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt}dt$$

Салмақтық және өтпелі функциялар түрлендіру функция сияқты, бастапқы нольдік шарттардағы жүйенің толық сипаттамалары болып келеді. Олар бойынша еркін кіру әсерінде шығу шамасын бір мәнді анықтауға болады. Шынымен, (2.20) теңдеуге сүйеніп және жиыру теоремасына (Лаплас түрлендіруінің бесінші қасиетіне) негізденіп жазуға болады

$$y(t) = \int_0^t w(t - \tau)x(\tau) = \int_0^t w(\tau)x(t - \tau)d\tau.$$

Бұл формула (2.20) теңдеу сияқты әділетті тек қана нольдік бастапқы шарттарда.

Қортындысында инженерлік жоба есебінде кескін бойынша оның оригиналын іздеу үшін, (2.22), (2.25) Лапластың кері түрлендіру формулалары қолданылмай, P кешендік шаманың бөлшекті-рационалды функциясы болатын әртүрлі кескіндер үшін жасалған оригиналдар кестесімен қолданылатынын атап өту маңызды.

Мысалы [19] кескін мен оригиналдар сәйкесетін 678 формулалар келтірілген. Кейде инженерлік жоба есебінде кескінді Лоран қатарына жіктеп одан кейін оригиналдың жуық мәндерін табу жеткілікті болады.

2.5 ЖИІЛІК СИПАТТАМАЛАР

Сызықты стационарлы жүйелердің (үзбелердің) жазуында жиілік сипаттамалардың маңызы зор болып келеді. Жиілік сипаттамалар деп жүйенің гармоникалық әсеріне беретін реакциясын сипаттайтын формулалармен графиктерін айтады.

Сызықтық жүйелерге суперпозиция принципі әділетті, бұл принцип бойынша егер $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ бірнеше кіру әсерлері бір уақытта үзбеге әрекет етіп тұрса, онда жүйенің (үзбенің) $y(t)$ реакциясы әр әсерге бөлек беретін реакцияларының қосындысына тең, яғни егер $y_i(t)$ жүйенің i-інші кіру шамасымен тудырған реакциясы болса, онда

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)$$

Бұл жағдай жүйенің зерттеуін тек қана бір кіру шамамен жүргізуімен шектелгенге мүмкіншілік береді.

Сондықтан жүйенің кірісіне берілген сигнал гармоникалық сигнал болсын дейік, яғни

$$x(t) = x_0\cos\omega t \qquad (2.27)$$

мұнда x_0 - гармоникалық сигналдың амплитудасы, ал ω оның бұрыштық жиілігі.

Тұрақталынған режимде сызықты жүйенің шығысында осыған ұқсас сол жиіліктен гармоникалық сигнал болады, бірақ жалпы жағдайда сигнал кіру шамасына қарай фаза бойынша φ бұрышқа ығысқан болады. Сондықтан шығу шамасы үшін жазуға болады

$$y(t) = kx_0\cos(\omega t + \varphi) = y_0\cos(\omega t + \varphi) \qquad (2.28)$$

мұндағы k - беріліс коэффициенті, φ - фаза ығысу, $y_0 = kx_0$ шығу шамасының амплитудасы.

Гармоникалық сигналды символикалық түрде жазу үшін Эйлер формуласын пайдаланайық

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t; \quad e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

немесе $\cos\omega t = 1/2\ (e^{jwt} + e^{-jwt})$.

Олай болса (2.27) кіру сигналын былай жазуға болады:

$$x(t) = \frac{x_0}{2}\,(e^{jwt} + e^{-jwt}) = x_1(t) + x_2(t),$$

мұндағы $x_1(t) = \frac{x_0}{2}\,e^{jwt}$, $x_2(t) = \frac{x_0}{2}\,e^{-jwt}$,

яғни кіру сигналы екі сигналдың қосындысынан тұрады.

Дәл осылай шығу шамасына жазылады

$$y(t) = \frac{y_0}{2}\,(e^{j(wt+\ )} + e^{-j(wt+\ )}) = y_1(t) + y_2(t),$$

мұнда $y_1(t) = \frac{y_0}{2}\,e^{j(wt+\ )}$, $y_2(t) = \frac{y_0}{2}\,e^{-j(wt+\ )}$.

Жоғарыда айтылғандай сызықты жүйелерге суперпозиция принципі әділетті, сондықтан сызықты жүйеде $x_1(t)$ және $x_2(t)$ құрушыларының бөлек өтуін қарастыруға болады. Сонымен қатар шығу шамасында $y_1(t)$ құрушысын беретін тек қана $x_1(t)$ кіру құрушысының өтуін қарастыру жеткілікті екенін, оңай көрсетуге болады. $x_2(t)$ мен $y_2(t)$ аралығындағы қатынас дәл $x_1(t)$ мен $y_1(t)$ аралығындағы қатынастай табылады. Сондықтан мұнан былайғы қарастыруда $\cos\omega t = e^{jwt}$ символикалық жазуын пайдаланайық (кейде $\sin\omega t = e^{jwt}$ символикалық жазу қолданылады) Онда

$$x(t) = x_0\cos\omega t = \frac{x_0}{2}\,e^{jwt} = Xe^{jwt} \qquad (2.29)$$

$$y(t) = y_0\cos(\omega t+\varphi) = \frac{y_0}{2}\,e^{j(wt+\ )} = Ye^{j(wt+\ )} \qquad (2.30)$$

мұнда $X = x_0/2$, $Y = y_0/2$ символикалық жазудағы кіру және шығу шамаларының амплитудалары. Бұл қысқартылып жазудың символикалығы e^{-jwt} көбейткішпен құрушыларды елемеуде.

АМПЛИТУДА-ФАЗАЛЫҚ ЖИІЛІК СИПАТТАМА. Жүйенің (үзбенің) кіру және шығу гармоникалық шамаларының қатынасын табу үшін оның түрлендіру функциясы болсын дейік

$$W(p) = \frac{k_0p+k_1}{T^2_0p^2+T_1p+1} \qquad (2.31)$$

онда дифференциалдық теңдеуі төменгідей жазылады

$$T^2{}_0y'' + T_1y' + y = k_0x' + k_1x \qquad (2.32)$$

(2.29) және (2.30) өрнектерден туындыларды анықтайық:

$x'(t) = j\omega Xe^{j\omega t}$, $y'(t) = j\omega Ye^{j(\omega t+\varphi)}$, $y''(t) = (j\omega)^2Ye^{j(\omega t+\varphi)}$,

Кіру шама мен шығу шамасын және сәйкесті олардың туындыларын бастапқы (2.32) теңдеуге қойып жазуға болады:

$$T^2{}_0(j\omega)^2Ye^{j(\omega t+\varphi)} + T_1(j\omega)Ye^{j(\omega t+\varphi)} + Ye^{j(\omega t+\varphi)} =$$

$$= k_0(j\omega)Xe^{j\omega t} + k_1Xe^{j\omega t}$$

Бұдан $e^{j\omega t}$ ортақ көбейткішке қысқартылғаннан кейін табамыз

$$\frac{X}{Y}\,e^{j\varphi} = \frac{k_0(j\omega)+k_1}{T^2{}_0(j\omega)^2+T_1(j\omega)+1} \qquad (2.33)$$

мұндағы $W(j\omega)$ кешендік сан болып келеді, оның модулы шығу шамасының амплитудасының кіру шаманың амплитудасына қатынасына тең, ал аргумент шығу шамамен кіру шамасының арасындағы фазалық ығысуына тең, яғни

$$\mathrm{mod}\ W(j\omega) = |W(j\omega)| = Y/X$$

$$\arg W(j\omega) = \varphi$$

$W(j\omega)$ функция амплитуда- фазалық жиілік функциясы немесе жиілік түрлендіру функциясы, не кешендік беріліс коэффициенті деп аталады.

Егер (2.33) пен (2.33) салыстырса, онда оңай байқауға болады жиілік түрлендіру функциясын табу үшін ешқандай күрделі математикалық түрлендіру жасау керек емес екенін, яғни оны белгілі түрлендіру функциясы бойынша табу үшін түрлендіру функциясында Р белгісін $(j\omega)$-мен алмастыру керек.

Ондай формалды алмастыруды жүзеге асыру келесі жағдайға негізделінеді, яғни гармоникалық сигналдың жүйеден өтуін қарастыра отырып, табылған жиілік түрлендіру функциясының түрі түрлендіру функциясына ұқсас, егер онда Р белгісін $(j\omega)$ белгісіне алмастырса.

Сонымен бірге жиілік түрлендіру функцияны шығу шамасының Фурье кескінімен кіру шамасының Фурье кескінінің қатынасы ретінде қарастыруға болады, яғни

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{\int_{\varnothing}^{\infty} y(t)e^{-p\omega t}dt}{\int_{\varnothing}^{\infty} x(t)e^{-p\omega t}dt} = W(p)|_{p=j\omega}$$

Бұл өрнек Лаплас түрлендіруінен Фурье түрлендіруіне өткенде (2.17) өрнектен тікелей шығады, демек бұл жағдайда да жиілік түрлендіру функциясы түрлендіру функциясы бойынша оңай табылады, егер түрлендіру функциясында P белгісін (jω) белгісіне алмастырса.

Жалпы жағдайда бір кіру шамасымен сызықты стационарлы жүйенің теңдеуі былай жазылады:

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\dots+a_n)y = (b_0p^m+b_1p^{m-1}+\dots+b_m)u \qquad (2.34)$$

Тұжырымдама бойынша оның түрлендіру функциясы мынаған тең болады

$$W(p) = \frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\dots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\dots+a_n} \qquad (2.35)$$

Ал ω нақты айнымалының кешендік функциясы болып келетін жиілік түрлендіру функциясы мынаған тең

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\dots+b_m}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\dots+a_n} \qquad (2.36)$$

W(jω) функцияны кешендік болғандығынан, келесі түрде көрсетуге болады

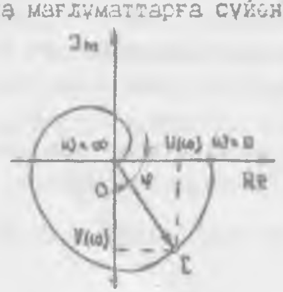
$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \qquad (2.37)$$

мұндағы

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \qquad (2.38)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)} + k\pi\ ,\ k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots \qquad (2.39)$$

(2.39) формула бойынша φ(ω) есептегенде k-нің мәні қосымша мағлұматтарға сүйеніп анықталады. Кешендік жазықтықта W(jω) жиілік түрлендіру функциясы OC векторды анықтайды, оның ұзындығы (модулы) A(ω)-ға тең, ал аргументі φ(ω)-ға тең. ω жиіліктің нольден шексізге дейін (кейде -∞- пен + ∞ дейін) өзгергендегі вектордың ұшы сызатын қисық сызық амплитуда-фазалық жиілік сипаттама деп



аталады.

$W(j\omega)$ жиілік түрлендіру функциясының $U(\omega) = ReW(j\omega)$ нақты (заттық) белігі жене $V(\omega) = ImW(j\omega)$ жорымал белігі, сейкесті нақты жене жорымал жиілік функциялары делінеді. Бұл функциялардың графиктері сейкесті нақты жиілік сипаттама жене жорымал жиілік сипаттама деп аталады.

$A(\omega) = |W(j\omega)|$ модулді амплитудалық жиілік функциясы деп, ал оның графигін амплитудалық жиілік сипаттама деп айтылады. $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ - аргументті фазалық жиіліктік функциясы жене оның графигі фазалық жиілік сипаттама делінеді.

Демек, гармоникалық есерде орнықты жүйелерде, етпелі процесс еткенінен кейін, шығу шамасы да гармоникалық заңмен езгереді, бірақ басқа амплитудамен жене жиілікпен. Сонымен бірге шығу жене кіру шамалардың амплитудаларының қатнасы жиілік түрлендіру функциясының модулына тең, ал фаза ығысуы оның аргументіне тең. Сондықтан амплитудалық жиілік сипаттамасы, кіру гармоникалық ерекеттің жиілігінің езгеруінен амплитудалардың қатнасының езгеруін керсетеді, ал фазалық жиілік сипаттамасы шығу шаманың фазасының кіру шамасының фазасына қарай ығылысуын керсетеді.

ЛОГАРИФМДІК ЖИІЛІК СИПАТТАМАЛАР. Аталған сипаттамалардан басқа, инженерлік жоба есебінде кеңінен логарифмдік жиілік сипаттамалар (ЛЖС) пайдаланылады,олар логарифмдік амплитудалық жиілік сипаттамалар (ЛАЖС) жене логарифмдік фазалық жиілік сипаттамалар (ЛФЖС).

Жиілік түрлендіру функциясының (2.37) ернегін логарифмдесек

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega) \qquad (2.40)$$

екен жиілік түрлендіру функциясының логарифмы кешендік шамаға тең. Оның нақты белігі модулының логарифмы , ал жорамал белігі фазасы болып келеді. Практикалық жоба есептеулерде ондық логарифмдерімен қолдануы жене жеке ЛАЖС мен ЛФЖС құруы қолайлы.

Логарифімдік жиілік сипаттамалар құрылысында қолданатын терминология акустикадан ауысып алынған.

Егер екі жиілік бір-бірінен айырмашылығы 10 есе болса, яғни $\omega_2/\omega_1=10$ болса, онда олардың айырмашылығы 1 декадаға тең делінеді

$$\lg\frac{\omega_2}{\omega_1} = \lg 10 = 1 \ [\text{декада}]$$

Егерде $\omega_2/\omega_1=100$ болса онда олардың айырмашылығы 2 декадаға тең делінеді.

$$\lg\frac{\omega_2}{\omega_1} = \lg 100 = 2 \ [\text{декада}]$$

Егерде екі (мысалы үзбенің шығу және кіру) сигналдың P_1 мен P_2 қуаттарының қатынасы 10-ға тең болса, онда олардың айырмашылығы 1 белге тең деп айтылады, егер 100 болса, онда 2 белге, егер 1000 болса, онда 3 белге және т.с.с.. Басқаша айтқанда

$$\lg\frac{p_2}{p_1} = \lg 10 = 1 \ [\text{Бел}].$$

Алайда, гармоникалық сигналдың қуаты амплитудасының квадратына пропорционалды болғандықтан, яғни $p_1=x^2$, $p_2=y^2$, жазуға болады

$$\lg\frac{p_2}{p_1} = \lg\left|\frac{y}{x}\right|^2 = \lg|W(j\omega)|^2 = 2\lg|W(j\omega)| \ [\text{Бел}] \quad (2.41)$$

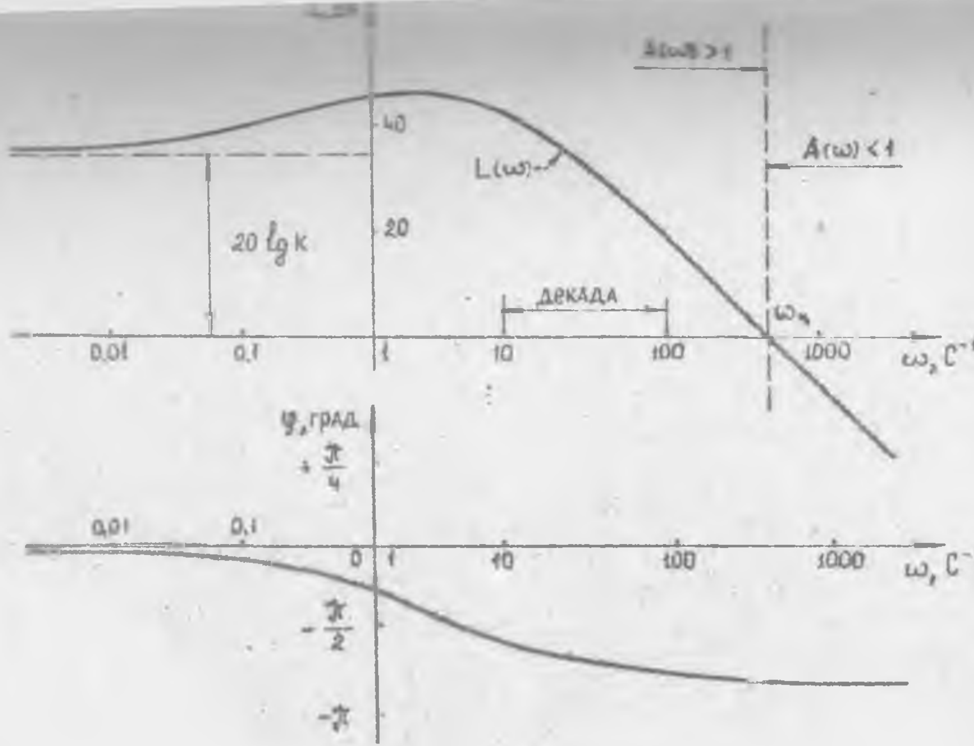
Жиілік түрлендіру функциясының модулының логарифмын $L(\omega)$ деп белгілейік, және 1 белде 10 децибел бар екенін еске алып (2.41) жазуға болады.

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg \mathrm{mod}\, W(j\omega) \ [\text{дБ}] \quad (2.42)$$

$L(\omega)$ функциясын логарифмдік амплитудалық жиілік функциясы деп аталады. Ал $L(\omega)$ функция бойынша салынған графикті логарифмдік амплитудалық жиілік сипаттама (ЛАЖС) делінеді.

Фазалық жиілік функциясының жиіліктің логарифмінен тәуелді қылып салынған графигін логарифмдік фазалық жиілік сипаттамасы (ЛФЖС) деп аталады.

ЛАЖС құрылғыда ордината осі бойынша децибел өлшеу бірлікпен $L(\omega)$ шамасы (2.5-сурет), ал абсцисса осі бойынша $\omega[c^{-1}]$ жиіліктік логарифм масштабында салынады. Абсцисса осі бойынша


A(ω) > 1
40
A(ω) < 1
L(ω)
20 lg K
20
ДЕКАДА
ω
0,01
0,1
1
10
100
1000
ω, C⁻¹
φ, град
+ π/4
0,01
0,1
0
1
10
100
1000
ω, C⁻¹
− π/2
−π

2.5-сурет

бірқалыпты бірлік декада болып келеді, яғни декада дегеніміз жиілік мәні он есе өсуіне сәйкесетін қандай болмасын осьтің кесіндісі. ЛАЖС абсцисса оспен қиылысқан нүктенің қию жиілігі $\omega_к$ деп аталынады.

Координат бас нүктесін әдетте $\omega = 1$ нүктеде орналастырады, себебі $\lg 1 = 0$. Ал $\omega = 0$ нүкте $-\infty$ жатады. Алайда, бізге қажетті жиілік диапозонына байланысты координат бас нүктесін басқа (ω=0,1; ω=10; т.б.) нүктеде алуға болады. Абциоса осі ($L(\omega)$=0) (2.42) бойынша А=1 мәнге сәйкесетінін, яғни сигналдың амплитудасы үзбеден натурал шамасымен өтетінін есте сақтау маңызды. ЛАЖС жоғарыдағы жарты жазықтық А > 1 мәндерге (амплитуданың күшеюіне), төменгі жарты жазықтық А < 1 мәндерге (амплитуданың әлсіреуіне) сәйкеседі.

ЛФЖС салғанда φ бұрышы ординат осі бойынша масштабпен бұрышты градуста есептелінеді (2.6-сурет). Абсцисса осі бойынша логарифмдік масштабпен бұрынғыдай ω жиілік салынады (ω=$\lg\omega$).

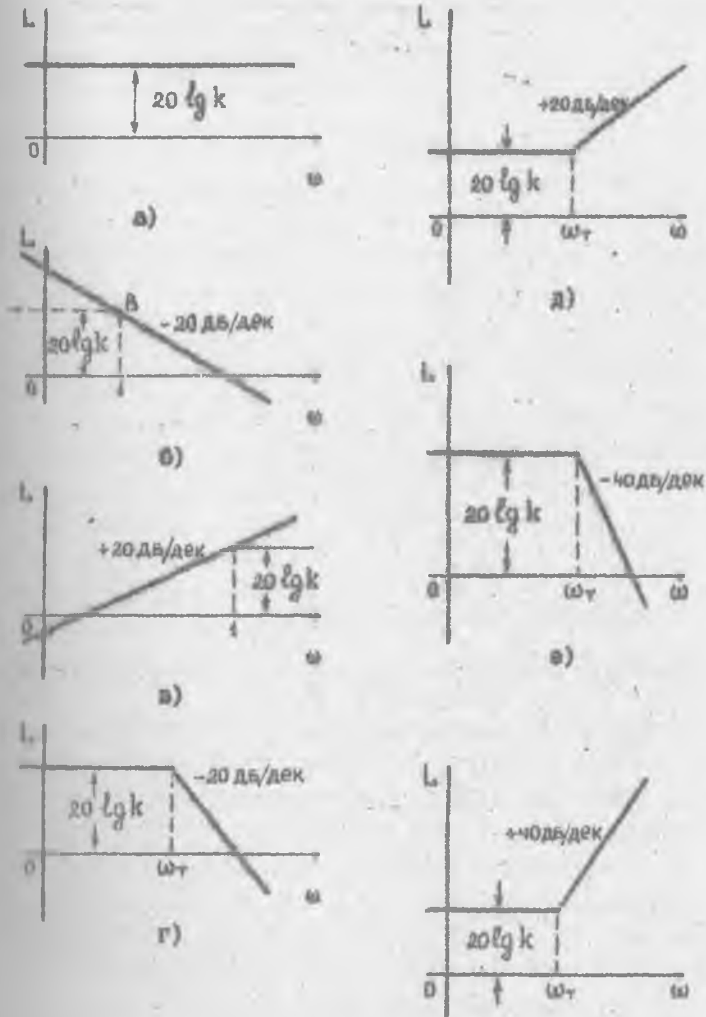
Логарифмдік жиілік сипаттамалардың ыңғайлылығы кішкентай графикпен кең жиілік диапозонды қамтуға болуында. Және де жиілік қасиеттерінің өзгеруін аз, орта және жоғарғы жиіліктерде бірдей көрнекі бақылауға болады. Кішкентай графикпен амплитуданың да кең диапазонда өзгеруі қамтылады.

Бұдан басқа ЛАЖС, біраз аралықтарын жоғары дәлдікпен түзу сызықтармен-асимптоталармен алмастыруға мүмкін болып шықты. Олар 20 дб бір декадаға еселі оң және теріс ылдилы болады, яғни 0 дб/дек;-20 дб/дек;-40 дб/дек;...,+20 дб/дек;+40 дб/дек.

Кейбір үлкен емес жиілік аралығында көп жағдайларда ЛАЖС қисығымен елемеуге болады. Онда ЛАЖС түзу кесінділермен (асимптоталармен) бейнеленеді де, асимптоталық ЛАЖС деп аталады. Оны құру үшін тек қана өте қарапайым есептеулер керек болады.

Жиілік түрлендіру функциясының А(ω) модулымен келесі мәндерінде ЛАЖС ең тек (характерлі) түрлері болады:

1) А(ω)=k. Бұл жағдайда $L(\omega)=20\lg k$ тұрақты шама болып келеді де, ал ЛАЖС абсцисса осіне параллельді түзу болады (2.6а-сурет);


L
20 lg k
0
ω
а)
B
-20 дБ/дек
б)
+20 дБ/дек
в)
-20 дБ/дек
$\omega_т$
г)
+20 дБ/дек
д)
-40 дБ/дек
е)
+40 дБ/дек
ж)

2.6-сурет

2) $A(\omega)=k/\omega$. Онда $L(\omega)=20\lg k-20\lg\omega$. $\omega=1$ болғанда және бір декада бойына $L(\omega)$ 20 дб кемітіледі. ЛАЖС (1;20 $\lg k$) координатты В нүктенің үстінен өтетін -20 дб/дек ылдимен түзу болады. (2.6,б-сурет);

3) $A(\omega) = k\omega$. Бұл жағдайда $L(\omega)=20\lg k + 20\lg\omega$. Тура алдындағы жағдайда, $\omega=1$ болғанда $L(\omega)=20\lg k$. Одан кейін ω ұлғаюмен $L(\omega)$ 20 дб/дек ұлғаяды. ЛАЖС 20 дб/дек ылдимен түзу сызық болып келеді, (1; $20\lg k$) координаты В нүктесінің үстінен өтетін (2.6в-сурет);

4) $A(\omega) = \dfrac{k}{\sqrt{1 + \omega^2T^2}}$. Олайда болса $L(\omega)=20\lg k-10\lg(1 + \omega^2T^2)$.

Аз жиілікте, яғни $\omega^2T^2 \ll 1$ болғанда $L(\omega)\approx 20\lg k$. Бұл абсцисса осіне параллельді төменгі жиілікті асимптота. Үлкен жиілікте, яғни $\omega^2T^2 \gg 1$ болғанда $L(\omega)\approx 20\lg k - 20\lg\omega T$. Бұл -20 дб/дек кемитін жоғарғы жиілікті асимптота. Демек, асимптоталық ЛАЖС $\omega_T=1/T$ түйіндес жиілікте қосылатын екі асимптоталардан құрастырылады (2.6,г-сурет), себебі бұл жиілікте екі асимптоталардың да теңдеулері қанағаттандырылады;

5) $A(\omega)=k\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$. Мұндай жағдайда $L(\omega)=20\lg k+10\lg(1+\omega^2\tau^2)$.

Алдындағы қарастырылған жағдайдай, асимптотикалық ЛАЖС $\omega_T=1/\tau$ түйіндес жиілікте қосылатын екі асимптотадан құрылады, бірақ жоғарыдағы жиілікті асимптотаның ылдиы оң +20 дб/дек болады (2.6,д-сурет)

6)

$$A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{(1+\omega^2T^2)+(2\omega\xi T)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4T^4}};$$

мұндағы $\xi<1$. Бұл жағдайда $L(\omega)=20\lg k-10\lg[1+\omega^2 2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4T^4]$. Аз, яғни $\omega\to 0$ жиілікте $L(\omega)=20\lg k$, ал жоғары жиілікте, яғни $\omega\to\infty$ $L(\omega)=20\lg k-40\lg\omega T$. Асимптоталық ЛАЖС алдағы екі жағдайдай $\omega_T=1/T$ түйіндес жиілікте қосылатын, екі асимптоталардан құрастырылады. Төменгі жиіліктік асимптотасы абцисса осіне параллельді (2.6,е-сурет), ал жоғарыдағы жиіліктік -40дб/дек теріс ылдида болады;

7) $A(\omega)=k\sqrt{(1+\omega^2\tau^2)+(2\omega\zeta\tau)^2}=\sqrt{1+\omega^2 2\tau^2(2\zeta^2-1)+\omega^4\tau^4}$,

мұндағы $\zeta<1$. Мұндай жағдайда $L(\omega)=20\lg k-10\lg[1+\omega^2 2\tau^2(2\zeta^2-1)+\omega^4\tau^4]$. Асимптоталық ЛАЖС қайтадан $\omega_T=1/\tau$ түйіндес жиілікте қосылатын екі асимптотадан құрылады (2.6,ж-сурет). Төменгі жиілік асимптотасы абсцисса осіне параллельді, ал $L(\omega)=20\lg k+40\lg\omega\tau$ жоғарғы жиіліктік асимптотасы +40 дБ/дек оң жылдыйда болады.

2.6 ТИПТІК ДИНАМИКАЛЫҚ ҮЗБЕЛЕР

Автоматты басқару жүйелері, жоба есебінің процесінде, әдетте динамикалық үзбелерге бөлшектендіріледі. Физикалық негізі конструкциясы, қуаты және басқа сипаттамалар бойынша әртүрлі, бірақ бір түрдей дифференциалдық теңдеулермен жазылатын жүйе элементтері бірдей динамикалық үзбелер болып келеді, яғни динамикалық үзбеге дегенде оның математикалық жазуы (үлгісі) түсініледі. Мұндай термин үзбенің түрлендіру функциясы оның физикалық негізін емес, тек қана динамикалық қасиеттерін бейнелейтін болғандықтан қабылданылған.

Әр динамикалық үзбеде тек қана бір кіру және бір шығу шамасы болуы мүмкін, сондықтан бірнеше кіру немесе шығу шамаларымен элементтер, кіру және шығу шамаларының санына сәйкесті динамикалық үзбелерге бөлінеді.

Күрделі динамикалық үзбелерді қарапайым құрашы бөліктерге, яғни түрлендіру функциясының алымындағы және бөліміндегі р-дан көпмүшеліктердің дәрежесі екіден аспайтын, тіпті динамикалық үзбелерге бөлшектеуге ыңғайлы болып келеді.

Динамикалық үзбенің түрлендіру функциясын жалпы жағдайда төмендегі көбейткіштердің көбейтіндісіндей көрсетуге болады:

$$k;\ p^{\nu};\ \frac{1}{Tp+1};\ \frac{1}{T^2p^2+2T\xi p+1};\ \tau p+1 \text{ және } \tau^2p^2+2\zeta\tau p+1 \qquad (2.43)$$

мұндағы $k,\ \nu,\ T,\ \xi,\ \tau,\ \zeta$ - тұрақты шамалар және де $k>0$; ν - оң немесе теріс тұтас сан болуы мүмкін; $T>0$; $0<\xi<1$; $\tau>0$;

2.1 кесте

Типтік динамикалық үзбелер

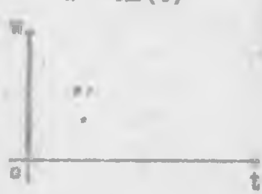
Үзбенің типі		Дифференциалдық теңдеуі	Түрлендіру функциясы $W=W(p)$
Позициялы үзбелер	Идеальды күшейткіш (инерционды емес)	$y=kx$	$W=k$
	Бірінші ретті апериодты (инерционды)	$(Tp+1)y=kx$	$W=\frac{k}{Tp+1}$
	Екінші ретті апериодты (инерционды)	$(T_2^2p^2+T_1p+1)y=kx$ мұнда $T_1 \geq 2T_2$	$W=\frac{k}{T_2^2p^2+T_1p+1}=\frac{k}{(T_3p+1)(T_4p+1)}$, мұнда $T_{3,4}=\frac{1}{2}(T_1 \mp \sqrt{T_1^2-4T_2^2})$
	Тербелмелі	$(T^2p^2+2\xi Tp+1)y=kx$ мұнда $0<\xi<1$	$W=\frac{k}{T^2p^2+2\xi Tp+1}$
	Консервативті	$(T^2p^2+1)y=kx$	$W=\frac{k}{T^2p^2+1}$
Интегралдаушы үзбелері	Интегралдаушы (идеалды)	$py=kx$	$W=\frac{k}{p}$
	Интегралдаушы (инерционды)	$p(Tp+1)y=kx$	$W=\frac{k}{p(Tp+1)}$
	Изодромды	$py=k(\tau p+1)x$	$W=\frac{k(\tau p+1)}{p}=k_1+\frac{k}{p}$, мұнда $k_1=k\tau$

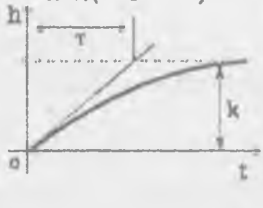
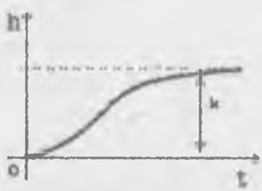
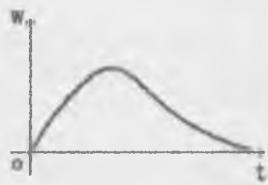
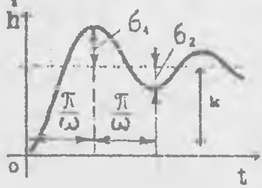
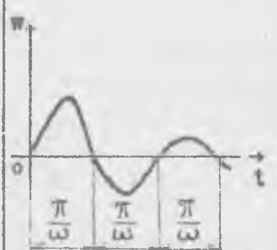
2.1 кестенің жалғасы

Үзбенің типі		Дифференциалдық теңдеуі	Түрлендіру функциясы $W=W(p)$
Интеграл-даушы үзбе-лер	Изодромды екінші ретті	$p^2y=k(\tau^2p^2+2\xi\tau p+$ $+1)x$, мұнда $0<\xi<1$	$W=\frac{k}{p^2}(\tau^2p^2+$ $+2\xi\tau p+1)=k_2+$ $+\frac{k_1}{p}+\frac{k}{p}$, мұнда $k_1=k2\xi\tau$, $k_2=k\tau^2$
Диффе-ренциал-даушы үзбе-лер	Дифференциалдаушы (идеалды)	$y=kpx$	$W=kp$
	Дифференциалдаушы (инерционды)	$(Tp+1)y=kpx$	$W=\frac{kp}{(Tp+1)}$
	Форстау (идеалды)	$y=k(\tau p+1)x$	$W=k(\tau p+1)$
	Форстау (идеалды) екінші ретті	$y=k(\tau^2p^2+2\xi\tau p+$ $+1)x$, мұнда $0<\xi<1$	$W=k(\tau^2p^2+$ $+2\xi\tau p+1)$

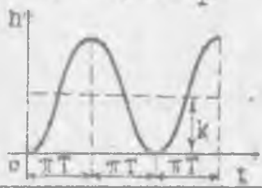
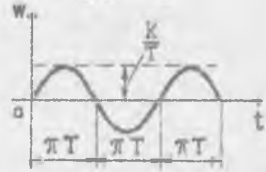
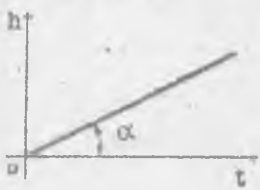
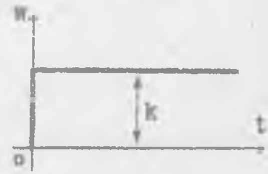
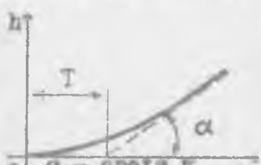
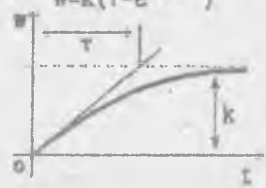
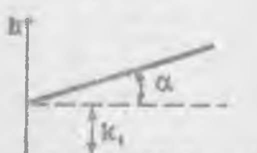
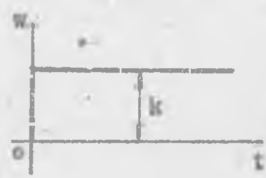
2.2 кесте

Типтік динамикалық үзбелердің уақытша сипаттамалары

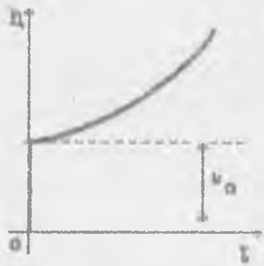
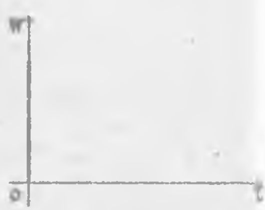
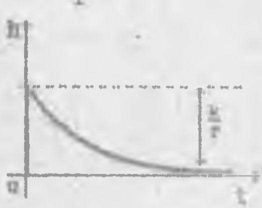
Үзбенің типі және оның түрлендіру функциясы $W=W(p)$	Өтпелі сипаттамасы $h=h(t)$	Импульсты өтпелі сипаттамасы $w=w(t)$
Идеалды күшейткіш (инерционды емес) $W=k$	$h=k$ 	$w=k\delta(t)$ 

Үзбенің типі және оның түрлендіру функцыясы $W=W(p)$	Өтпелі сипаттамасы $h = h(t)$	Импульсты өтпелі сипаттамасы $w = w(t)$
Бірінші ретті апериодты (инерционды) $W = \dfrac{k}{Tp + 1}$	$h=k(1-e^{-t/T})$ 	$w=\frac{k}{T}\, e^{-t/T}$ 
Екінші ретті апериодты (инерционды) $W=\dfrac{k}{T_2^2p^2+T_1p+1} = \dfrac{k}{(T_3p+1)(T_4p+1)}$, мұнда $T_{3,4} = \frac{1}{2}\left(T_1 \mp \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}\right)$	$h=k[1-\frac{1}{T_3-T_4}(T_3e^{-t/T_3} - T_4e^{-t/T_4})]$ 	$w = \frac{k}{T_3-T_4}\left(e^{-t/T_3} - e^{-t/T_4}\right)$ 
Тербелмелі $W=\dfrac{k}{T^2p^2+2\xi Tp+1}$ мұнда $0<\xi<1$	$h=k[1-\frac{1}{\omega T}e^{-\xi t/T}\sin(\omega t+\varphi)]$, мұнда $\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\xi\pi}{\omega T}$; $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{\omega T}{\xi}$; $\omega=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ $\sigma_1=ke^{-\xi\pi/\omega T}$ 	$w = \frac{k}{\omega T^2}\, e^{-\frac{\xi t}{T}} \sin \omega t$ 

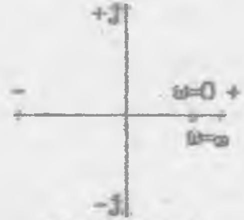
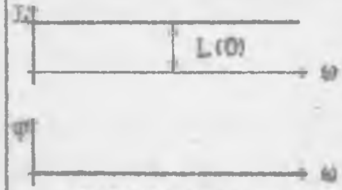
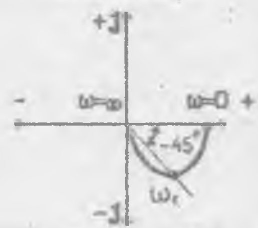
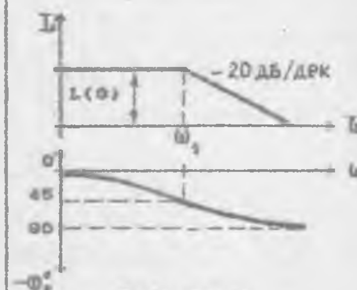
2.2 кестенің жалғасы

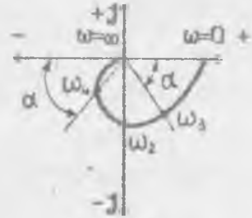
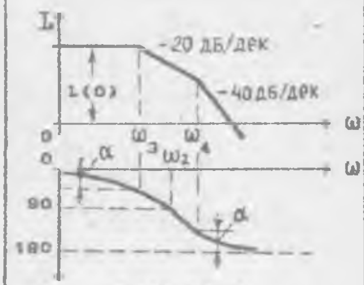
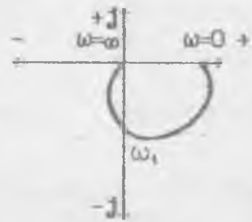
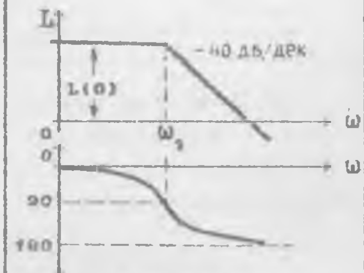
...бенің типі және ...ның түрлендіру функциясы W=W(p)	Өтпелі сипаттамасы $h = h(t)$	Импульсты өтпелі сипаттамасы $w = w(t)$
Консервативті $W = \dfrac{k}{T^2p^2+1}$	$h = k(1-\cos\frac{t}{T})$ 	$w = \frac{k}{T}\sin\frac{t}{T}$ 
Интегралдаушы (идеалды) $W = \dfrac{k}{p}$	$h = kT$ 	$w = k$ 
Интегралдаушы (инерционды) $W = \dfrac{k}{p(Tp+1)}$	$h = k(t-T(1-e^{-t/T}))$  $\alpha = \mathrm{arctg}\, k$	$w=k(1-e^{-t/T})$ 
Изодромды $W = \dfrac{k(\tau p+1)}{p} = k_1 + \dfrac{k}{p}$, мұнда $k_1=k\tau$	$h = k_1 + kt$  $\alpha = \mathrm{arctg}\, k$	$w = k_1\delta(t) + k$ 

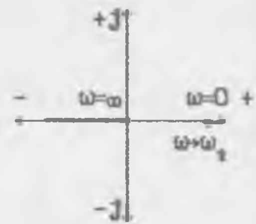
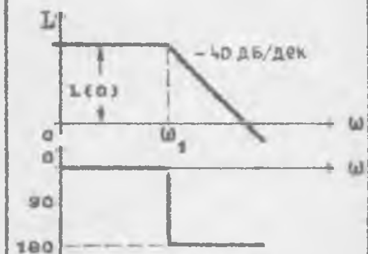
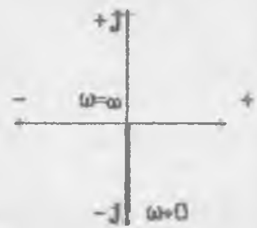
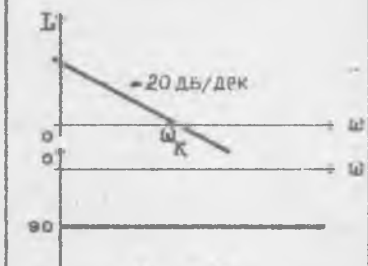
2.2 кестенің жалғасы

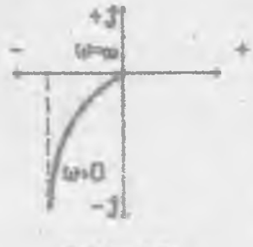
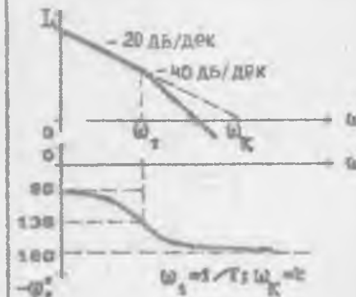
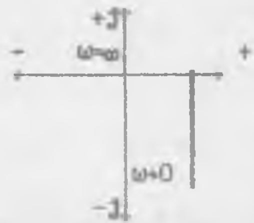
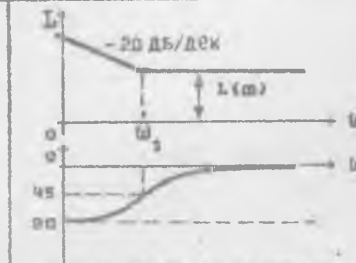
Үбенің тілі және оның түрлендіру функциясы W=W(p)	Өтпелі сипаттамасы h = h(t)	Импульсты өтпелі сипаттамасы w = w(t)
Изодромды екінші ретті $W=\frac{k(\tau^2p^2+2\xi\tau p+1)}{p^2}$ $=k_2+\frac{k_1}{p}+\frac{k}{p}$, мұнда $k_1=k2\xi\tau$, $k_2=k\tau^2$	$h = k_2+ k_1 t + kt^2$ 	$w = k_2\delta(t) + k_1+ 2kt$ 
Дифференциалдаушы (идеалды) $W = kp$	$h = k\delta(t)$ 	$w = kp\delta(t)$ 
Дифференциалдаушы (инерционды) $W = \frac{kp}{(Tp+1)}$	$h = \frac{k}{T} e^{-t/T}$ 	$w = \frac{k}{T}\delta(t) -$ $- \frac{k}{T^2} e^{-t/T}$ 

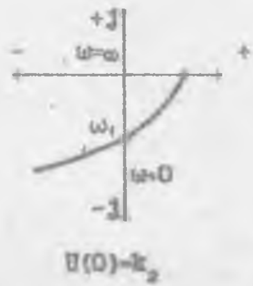
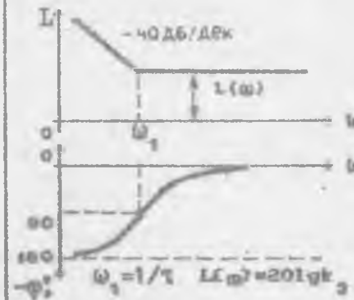
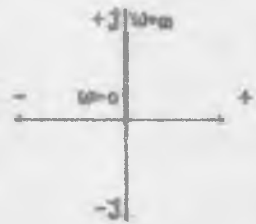
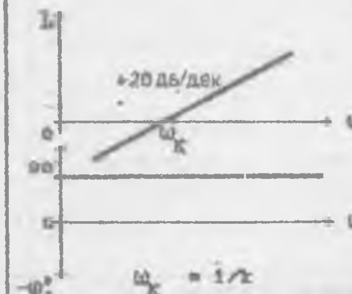
Типтік динамикалық буындардың жиілік сипаттамалары

Буынның типі және оның жиілік түрлендіру функциясы $W = W(j\omega)$	$A=A(\omega)$ амплитудалық, $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық, $U=U(\omega)$ нақты және $V=V(\omega)$ жорымал жиілік сипаттамалары	Амплитудалы - фазалық жиілік сипаттамасы	Логарифмдік сипаттамалары $L=L(\omega)$ асимптоталық амплитудалы-жиілік және $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық жиілік
Идеалды күшейткіш (инерционды емес) $W = k$	$A = k;\quad \varphi = 0^\circ;$ $U = k;\quad V = 0$	 $U(0)=U(\infty)=k$	 $L(0)=L(\omega)=20\lg k$
Бірінші ретті апериодты (инерционды) $W = \dfrac{k}{1 + j\omega T}$	$A=\dfrac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$; $\varphi=-\operatorname{arctg}\omega T$; $U=\dfrac{k}{1+\omega^2T^2}$; $V=-\dfrac{k\omega T}{1+\omega^2T^2}$	 $U(0)=k;\quad U(\omega_1)=\frac{k}{2};$ $V(\omega_1)=-\frac{k}{2};\quad \omega_1=\frac{1}{T}$	 $L(0)=20\lg k$

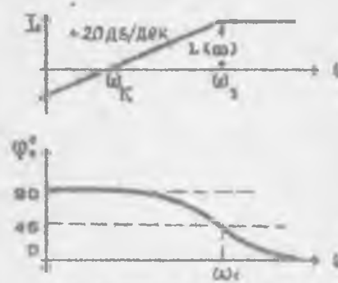
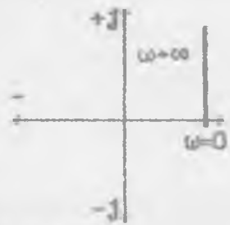
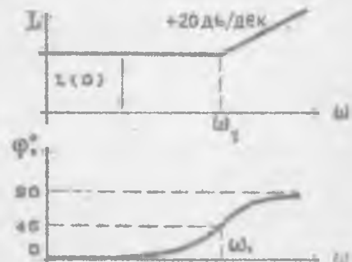
Үзбенің типі және оның жиілік түрлендіру функциясы $W = W(j\omega)$	$A=A(\omega)$ амплитудалық $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық, $U=U(\omega)$ нақты және $V=V(\omega)$ жорымал жиілік сипаттамалары	Амплитудалы – фазалық жиілік сипаттамасы	Логарифмдік сипаттамалары: $L=L(\omega)$ асимптоталық амплитудалы-жиілік және $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық жиілік
Екінші ретті апериодты (инерционды) $W=\dfrac{k}{(1-\omega^2T_2^2)+j\omega T_1}=$ $=\dfrac{k}{(1-\omega^2T_3T_4)+j\omega(T_3+T_4)}$ мұнда $T_{3,4}=\frac{1}{2}(T_1\mp\sqrt{T_1^2-4T_2^2})$	$A=\dfrac{k}{\sqrt{1+\omega^2(T_1^2-2T_2^2)+\omega^4T_2^4}}$ $\varphi=-\mathrm{arctg}\,\dfrac{\omega T_1}{1-\omega^2T_2^2}$ $U=\dfrac{k(1-\omega^2T_2^2)}{1+\omega^2(T_1^2-2T_2^2)+\omega^4T_2^4}$ $V=\dfrac{-k\omega T_1}{1+\omega^2(T_1^2-2T_2^2)+\omega^4T_2^4}$	 $U(0)=k$ $V(\omega_2)=\dfrac{kT_2}{T_1}$ $\omega_2=\dfrac{1}{T_2}$	 $L(0)=20\lg k$
Тербелмелі $W=\dfrac{k}{(1-\omega^2T^2)+j\omega\xi T}$ мұнда $0<\xi<1$	$A=\dfrac{k}{\sqrt{1+2\omega^2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4T^4}}$ $\varphi=-\mathrm{arctg}\,\dfrac{\omega\xi T}{1-\omega^2T^2}$ $U=\dfrac{k(1-\omega^2T^2)}{1+2\omega^2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4T^4}$ $V=\dfrac{-2k\omega\xi T}{1+2\omega^2T^2(2\xi^2-1)+\omega^4T^4}$	 $U(0)=k$ $V(\omega_1)=\dfrac{k}{2\xi}$ $\omega_1=\dfrac{1}{T}$	 $L(0)=20\lg k$

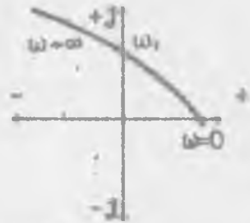
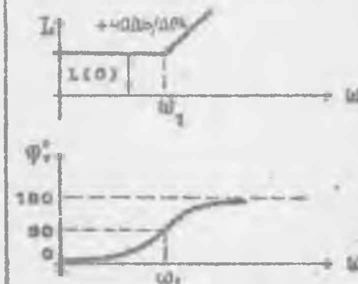
Үзбенің типі және оның жиілік түрлендіру функциясы $W = W(j\omega)$	$A=A(\omega)$ амплитудалық $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық, $U=U(\omega)$ нақты және $V=V(\omega)$ жорымал жиілік сипаттамалары	Амплитудалы – фазалық жиілік сипаттамасы	Логарифмдік сипаттамалары $L=L(\omega)$ асимптоталық амплитудалы-жиілік және $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық жиілік
Консервативті $W = \dfrac{k}{1-\omega^2T^2}$	$A=U=\dfrac{k}{1-\omega^2T^2}$ $\varphi = V = 0$	 $U(0)=k \quad \omega_1=\frac{1}{T}$	 $L(0)=20\lg k$
Интегралдаушы (идеалды) $W = \dfrac{k}{j\omega}$	$A = \dfrac{k}{\omega} \quad U = 0$ $V = -\dfrac{k}{\omega} \quad \varphi = -90^\circ$		 $\omega_K = k$

Үзбенің типі және оның жиілік түрлендіру функциясы $W = W(j\omega)$	$A=A(\omega)$ амплитудалық $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық, $U=U(\omega)$ нақты және $V=V(\omega)$ жорамал жиілік сипаттамалары	Амплитудалы – фазалық жиілік сипттамасы	Логарифмдік сипаттамалары: $L=L(\omega)$ асимптоталық амплитудалы-жиілік және $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық жиілік
Интегралдаушы (инерционды) $W=\dfrac{k}{-\omega^2T+j\omega}$	$A = \dfrac{k}{\omega\sqrt{1+\omega^2T^2}}$ $\varphi = -(90^\circ+\mathrm{arctg}\,\omega T)$ $U = \dfrac{-kT}{1+\omega^2T^2}$ $V = \dfrac{-k}{\omega(1+\omega^2T^2)}$	 $U(0)=-kT$	
Изодромды $W = \dfrac{k(j\omega\tau+1)}{j\omega} =$ $= k_1 + \dfrac{k}{j\omega}$, мұнда $k_1=k\tau$	$A = \dfrac{k}{\omega}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$ $\varphi = -90^\circ+\mathrm{arctg}\,\omega\tau$ $U = k\tau = k_1$ $V = -\dfrac{k}{\omega}$	 $U(0)=U(\infty)=k_1$	 $\omega_1=1/\tau \quad L(\infty)=20\lg k_1$

Үзбенің типі және оның жиілік түрлендіру функциясы $W = W(j\omega)$	$A=A(\omega)$ амплитудалық $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық, $U=U(\omega)$ нақты және $V=V(\omega)$ жорымал жиілік сипаттамалары	Амплитудалы – фазалық жиілік сипаттамасы	Логарифмдік сипаттамалары: $L=L(\omega)$ асимптоталық амплитудалы-жиілік және $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық жиілік
Изодромды екінші ретті $W=\frac{k[(1-\omega^2\tau^2)+j2\omega\xi\tau}{-\omega^2}=$ $=k_2+\frac{k_1}{j\omega}+\frac{k}{j\omega}$, мұнда $k_1=k2\xi\tau$, $k_2=k\tau^2$	$A=\frac{k}{\omega^2}\sqrt{1+2\omega^2\tau^2(2\xi^2-1)+\omega^4\tau^4}$ $\varphi=arctg\frac{k_1}{1-\omega^2\tau^2}-180°$ $U=\frac{k}{\omega^2}(1-\omega^2\tau^2)$ $V=\frac{k_1}{\omega}$		
Дифференциалдаушы (идеалды) $W=jk\omega$	$A=k\omega$ $U=0$ $V=k\omega$ $\varphi=90°$		

2.3 кестенің жалғасы

Үзбенің типі және оның жиілік түрлендіру функциясы $W = W(j\omega)$	$A=A(\omega)$ амплитудалық $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық, $U=U(\omega)$ нақты және $V=V(\omega)$ жорымал жиілік сипаттамалары	Амплитудалы - фазалық жиілік сипаттамасы	Логарифмдік сипаттамалары: $L=L(\omega)$ асимптоталық амплитудалы-жиілік және $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық жиілік
Дифференциалдаушы (инерционды) $W = \frac{jk\omega}{j\omega T+1}$	$A=\frac{k\omega}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$; $\varphi=90^\circ-\mathrm{arctg}\,\omega T$; $U=\frac{kT\omega^2}{1+\omega^2T^2}$; $V=\frac{k\omega}{1+\omega^2T^2}$	 $U(\omega_1)=\frac{k}{2T}$ $V(\omega_1)=\frac{k}{2T}$; $\omega_1=\frac{1}{T}$	 $L(\omega)=20\lg k/T$ $\omega_K=1/k$
Форстау (идеалды) $W=k(j\omega\tau+1)$	$A=k\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$; $\varphi=\mathrm{arctg}\,\omega\tau$; $U=k$ $V=k\omega\tau$	 $U(0)=U(\omega)=k$	 $L(0)=20\lg k$

Үзбенің типі және оның жиілік түрлендіру функциясы $W = W(j\omega)$	$A=A(\omega)$ амплитудалық $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық, $U=U(\omega)$ нақты және $V=V(\omega)$ жорымал жиілік сипаттамалары	Амплитудалы – фазалық жиілік сипаттамасы	Логарифмдік сипаттамалары $L=L(\omega)$ асимптоталық амплитудалы-жиілік және $\varphi=\varphi(\omega)$ фазалық жиілік
Форстау (идеалды) екінші ретті $W=k[(1-\omega^2\tau^2)+j2\omega\xi\tau]$	$A=k\sqrt{1+2\omega^2\tau^2(2\xi^2-1)+\omega^4\tau^4}$ $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{2\omega\xi\tau}{1+\omega^2\tau^2}$ $U=k\,(1-\omega^2\tau^2)$ $V=k\omega 2\xi\tau$	 $U(0)=k$ $V(\omega_1)=2\xi k \quad \omega_1=\dfrac{1}{\tau}$	 $L(0)=20\lg k \quad \omega_1=1/\tau$.

$0<\xi<1$. (2.43) көбейткіштер әртүрлі типтік динамикалық үзбелерді анықтайды. Олардың негізгілері 2.1-кестеде келтірілген. Онда динамикалық үзбелерінің дифференциалдық теңдеулері және түрлендіру функциялары берілген, негізгі қасиеттері бойынша олардың үш топқа бөлінуі көрсетілген: позициялық, интегралдаушы және дифференциалаушы. 2.2-кестеде уақыттық, ал 2.3-кестеде динамикалық үзбелердің жиілік сипаттамалары келтірілген.

ПОЗИЦИЯЛЫҚ ҮЗБЕЛЕР. Бұл үзбелер, консервативтіден басқа, әрқайсысының кірісіне тұрақты шама берілгенде бірәз уақыт өткеннен кейін шығу шамасының тұрақты мәні тұрақталумен сипатталады. Тұрақталынған шығу шамасымен кіру шамасының қатынасы үзбенің k беріліс коэффициенті деп аталады.

Инерционды емес (идеалды күшейткіш) үзбеде кіру шамасы секіртпелі түрде өзгергенде шығу шамасында ешқандай кешігусіз лезде өзгереді, яғни онда өтпелі процесс жоқ. Апериодты (инерционды) үзбеде шығу шамасы монотонды өседі. Өтпелі процестің ұзақтылығы үзбенің екінші уақыт тұрақтысы делінетін, T параметріне тәуелді. Неғұрлым уақыт тұрақтысы үлкен соғұрлым өтпелі процесте бәсеңдеу өтеді.

Екінші ретті үзбеде де өтпелі процесс монотонды, бірақ оның ұзақтылығы екі T_1 және T_2 уақыт тұрақтыларынан тәуелді.

Тербермелі үзбенің шығу шамасы өтпелі процесте тұрақталатын мәннің төңірегінде тербелінеді. Тербелістердің басылуы үзбенің үшінші ξ демпферлеу (тербелістерді басу) коэффициенті делінетін параметрден тәуелді. Дәлдеп айтқанда, тербелістердің басылу жылдамдығы басылу коэффициентпен $\alpha=\xi T^{-1}$ сипатталады, ал олардың бұрыштық жиілігі $\omega=\sqrt{1-\xi^2}\ T^{-1}$ тең болғанда амплитудалық жиіліктік сипаттама тек (үдеме) мәніне жетеді. Бұл мәндегі жиілік, резонансты жиілік делінеді.

Консервативті (өз жағдайын бір қалыпта сақтайтын) үзбе тербелмелі үзбенің дербес ($\xi=0$) жағдайы болып келеді және кірісінде тұрақты әсер әрекет етіп тұрғанда консервативті үзбе ешқашанда басылмайтын тербелістермен сипатталады.

ИНТЕГРАЛДАУШЫ ҮЗБЕЛЕРІ. Мұндай үзбелер тұрақты кіру әсерінде шығу шамасы шексіз өсуімен сипатталады. Идеалды интегралдаушы үзбенің k беріліс коэффициенті өсудің жылдамдығын анықтайды. Инерционды интегралдаушы (нақтылы интегралдаушы) үзбеде шығу шамасының пропорционалды өсу режимі лезде тұрақталынбайды, неғұрлым T уақыт тұрақтысы үлкен, соғұрлым кешігіп тұрақталынады.

Изодромды үзбелерде шығу шамасы бастапқы кезде секіртпелі түрде өзгереді де, одан кейін шексіз өседі. Бірінші ретті изодромды үзбенің k беріліс коэффициенті шығу шамасының кейінгі өсуінің жылдамдығын анықтайды, ал екінші ретті изодромды үзбенің шығу шамасы өсуінің тұрақты үдеуін анықтайды.

Көптеген нақтылы интегралдаушы элементтер кіру шамасының өзгеру диапазоны шектелінгенде ғана әрекет етеді.

ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУШЫ ҮЗБЕЛЕРІ. Тек қана кіру шамасының өзгеруін сезінеді. Мысалы, егер идеалды дифференциалаушы үзбенің кіру шамасы тұрақты жылдамдықпен өссе, онда шығу шамасы ол жылдамдыққа пропорциялы тұрақты деңгейде сақталады.

Іс жүзінде идеалды дифференциалаушы үзбелері болмайды олар әрдайым (қандай аз болса да) инерционды болады. Нақтылы (инерционды) дифференциалаушы үзбенің кіру шамасы сызықты өскенде, шығу шамасының тұрақты мәні лезде тұрақталынбайды, неғұрлым T уақыт тұрақтысы үлкен соғұрлым кешігіп тұрақталынады.

Форстау (жылдамдату, тездету) үзбелер позициясы мен дифференциалаушы үзбелердің қасиеттерін біріктіреді. Идеалды форстау үзбелері де іс жүзінде болмайды, олар шамалы болса да инерционды болады.

2.1-кестеде негізгі типтік динамикалық үзбелер көрсетілінген, бірақ олардан басқа интегралды-дифференциалаушы және минимальды-фазалы емес үзбелер болады.

ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛАУШЫ ҮЗБЕЛЕР. Мұндай үзбелердің түрлендіру функциясының түрі болады

$$W(p) = \frac{kR(p)}{Q(p)} \qquad (2.44)$$

мұндағы R(p) мен Q(p) - P бойынша бірінші немесе екінші ретті нормаланған көпмүшелер.

Көпмүшелердің түріне қарай және оладың коэффициенттерінің мәндеріне байланысты интегралды-дифференциалаушы үзбелер, бір жиілік диапазонда интегралдаушы, басқасында дифференциалаушы қасиеттерін білдіреді. Бұл түрде үзбелер коррекциялау құрылғылары ретінде кеңінен қолданылады.

БЕЙМИНИМАЛДЫ-ФАЗАЛЫ ҮЗБЕЛЕР. Үзбе минималды фазалы (ең аз фазалы) делінеді, егер оның түрлендіру функциясына барлық нольдері мен полюстерінің нақты бөліктері теріс немесе нольге тең болса, үзбе бейминимал- фазалық делінеді, егер оның түрлендіру функциясының ең болмаса бір нолінің немесе полюсінің нақты бөлігі оң болса.

Еске салайық (2.44) түрлендіру функциясының нольдері деп $R(p)=0$ теңдеудің түбірлерін айтады, яғни түрлендіру функциясын нольге айналдыратын P мәндерін, ал полюстер деп $Q(p)=0$ теңдеудің түбірлерін , яғни түрлендіру функцияны шексізге айналдыратын P мәндерін.

Жоғарыда (2.1) кестеде көрсетілген барлық динамикалық үзбелер минимал фазалы болып келеді. Бейминимал фазалы үзбелерге ең алдыменен орнықсыз-түрлендіру функциясының ең болмаса бір полюсы оң болатын, үзбелер жатады. Бұл түрді үзбелердің түрлендіру функциялары мынадай:

$W(p)=\dfrac{k}{Tp-1}$ (орнықсыз апериодты); $W(p)=\dfrac{k}{T^2p^2+T_1p-1}$ және

$W(p)=\dfrac{k}{T^2p^2-T_1p+1}$ (орнықсыз екінші ретті апериодты);

$W(p)=\dfrac{k}{T^2p^2+2\xi Tp-1}$ және $W(p)=\dfrac{k}{T^2p^2-2\xi Tp+1}$ (орнықсыз тербелмелі).

Бейминимал-фазалы үзбелерге және түрлендіру функцияларының оң нольдерімен төмендегідей үзбелер жатады: $k(\tau p-1)$; $k(\tau^2p^2+2\zeta\tau p-1)$;және $k(\tau^2p^2-2\zeta\tau p+1)$.

Мысалы $W(p)= k(\tau p+1)$ түрлендіру функциялы форстау үзбенің жиілктік сипаттамалары мынадай: $A(\omega) = k\sqrt{1+ \omega^2\tau^2}$ және $\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\,\omega\tau$, ал $W(p)= k(\tau p-1)$ түрлендіру функциялы үзбенің жиіліктік сипаттамалары жазылады: $A(\omega) = k\sqrt{1+ \omega^2\tau^2}$ және

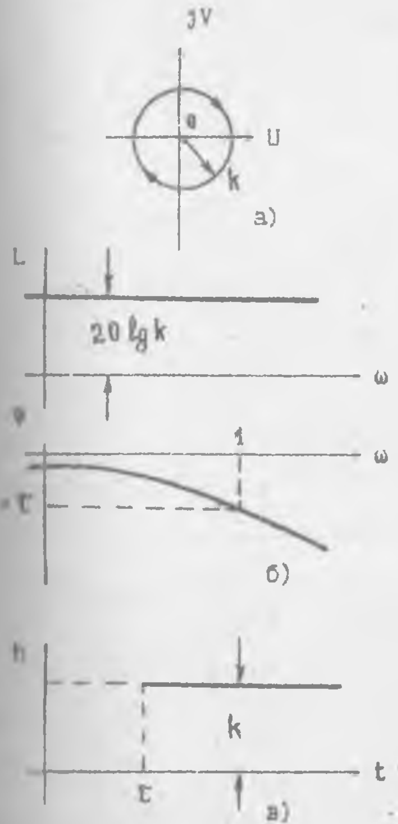
$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\omega\tau$. Бұл үзбелердің амплитудалық жиілік сипаттамалары бірдей, ал фаза ығысуы бейминимал фазалы үзбенің барлық $\omega<\infty$ мәндерінде көбірек, сондықтан олар солай аталады.

Интегралды-дифференциалдау үзбелердің арасында да бейминимал-фазалы үзбелер болуы мүмкін.

Элементарлы бейминимал- фазалы үзбелердің фазалық жиілік сипаттамалары 2.4-кестеде көрсетілген.

Шексіз сан солшыл полюстері бар үзбелерде бейминимал фазалы үзбелер болып келеді. Бұл дербес үзбелерге жататын таза кешігу үзбесі.

ТАЗА КЕШІГУ ҮЗБЕ. Мұндай үзбенің түрлену функциясы былай жазылады $W(p)=e^{-p}$, τ - кешігу уақыты.



2.7-сурет

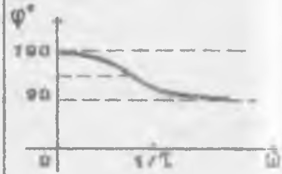
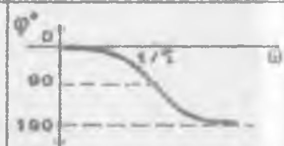
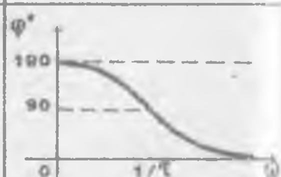
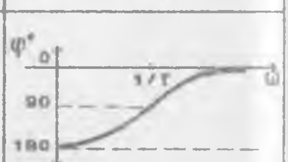
Жиіліктік түрлендіру функциясы $W(j\omega)=ke^{-jw} = k(\cos\omega\tau-j\sin\omega\tau)$. Басқа жиіліктік және уақытша функциялар жазылады:
$U(\omega) = k\mathrm{sos}\omega\tau$; $V(\omega) = -k\sin\omega\tau$;
$A(\omega)=k$; $\varphi(\omega)=-\omega\tau$; $L(\omega)=20\lg k$;
$h(t) = k(t-\tau)$; $w(t) = k\delta(t-\tau)$.
Амплитуда-фазалық жиілік сипаттамасы (2.7,а-сурет) центрі координат бас нүктесіндегі k радиусты шеңбер болады. Бұл сипаттаманың әр нүктесіне шексіз көптеген жиілік мәндері сәйкес. ЛАЖС (2.7,б-сурет) түрлендіру функциясы $W(p)=k$ инерционды емес үзбенің ЛАЖС беттеседі, ЛФЖ (2.7,б-сурет) $y=-\tau\cdot 10^{x}$ функцияның графигіндей.

Өтпелі сипаттамасы 2.7,в-суретте келтірілген.

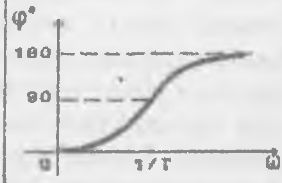
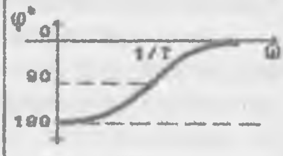
2.4-кесте

Элементарды бейминимал – фазалы үзбелер

($0 < \xi < 1$, $0 < \zeta < 1$)

Түрлендіру функциясы $W=W(p)$	Фазалық – жиілік сипаттамасы $\varphi(\omega)$	Логарифмдік фазалық жиілік сипаттамасы
$\tau p-1$	$180^\circ - \operatorname{arctg} \tau\omega$	
$1-\tau p$	$-\operatorname{arctg} \tau\omega$	
$\tau^2p^2 - 2\zeta\tau p + 1$	$-\operatorname{arctg} \dfrac{2\zeta\tau\omega}{1-\tau^2\omega^2}$	
$-\tau^2p^2 - 2\zeta\tau p - 1$	$180^\circ - \operatorname{arctg} \dfrac{2\zeta\tau\omega}{1-\tau^2\omega^2}$	
$\dfrac{1}{Tp-1}$	$-180^\circ + \operatorname{arctg} T\omega$	
$\dfrac{1}{1-Tp}$	$\operatorname{arctg} T\omega$	

2.4 кестенің жалғасы

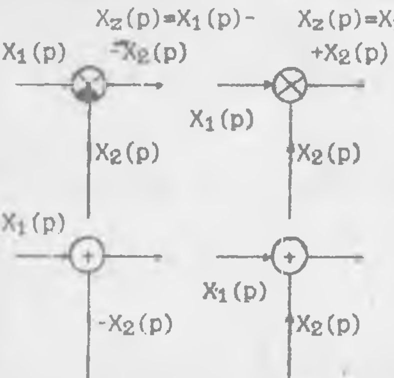
Түрлендіру функциясы $W=W(p)$	Фазалық - жиілік сипаттамасы $\varphi(\omega)$	Логарифмдік фазалық жиілік сипаттамасы
$\dfrac{1}{T^2p^2-2\xi Tp+1}$	$\operatorname{arctg}\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}$	
$\dfrac{1}{-T^2p^2+2\xi\tau p-1}$	$-180^\circ-\operatorname{arctg}\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}$	

2.7 СЫЗЫҚТЫ СТАЦИОНАРЛЫ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ СТРУКТУРАЛЫҚ СХЕМАЛАРЫ, ГРАФТАРЫ МЕН ТЕҢДЕУЛЕРІ

Сонымен динамикалық ызбелер туралы енгізілген түсініктемелер, автоматты жүйенің структуралық схемасын белгілі типті немесе типті емес түрлендіру функциялы динамикалық үзбелердің қиыстыруларымен көрсеткенге ыңғайлы. Структуралық схемада үзбе шартты түрде, кіру және шығу шамалары көрсетілген тік төртбұрыш түріндей белгіленеді және оның ішінде түрлендіру функциясы жазылады. Кейде түрлендіру функциясының орнына теңдеуі немесе үзбенің сипаттамасы көрсетіледі.

Егер түрлендіру функциялары кескіндер формасында берілсе, онда үзбелердің кіру және шығу шамалары кескін түрінде жазылады. Егерде түрлендіру функциясы операторлы түрде берілсе немесе дифференциалдық теңдеумен жазылса, онда кіру және шығу айнымалылары оригинал түрінде жазылады.

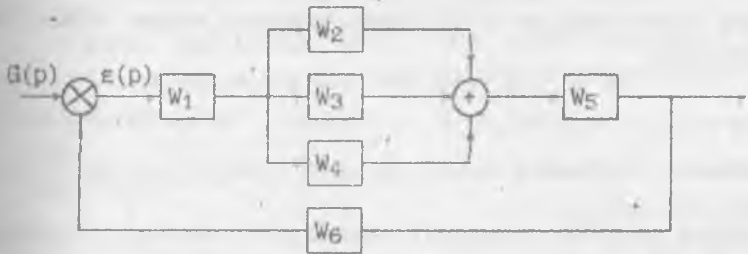
Структуралық схемаларда салыстыру үзбе 2.8,а-суреттегідей, ал қосындылау үзбе (қосымдылаушы) 2.8,б-суреттегідей бейнеленеді.



2.8-сурет

Структуралық схеманы іс жүзінде автоматты басқару жүйелерді зерттегенде, оларды жобалағанда кеңімен қолданады, себебі структуралық схема үзбелердің аралығындағы байланыстарды, сигналдың жүйеден өтуін және оның түрленуін көрнекі түрде көрсетеді. Структуралық схемасы жүйенің белгілі теңдеулеріне негізденіп құрылуы мүмкін, және керісінше, структуралық схема бойынша жүйенің теңдеуі анықталуы мүмкін. Бірақ бірінші жағдайда шешімдердің әр түрлі варианттары (әр түрлі структуралық схемалар) болуы мүмкін, ал екінші жағдайда әрдайым шешімі жалғыз ғана болады.

Жүйенің структуралық схемасы төмендегідей болсын дейік:



2.9-сурет

мұндағы $W_i(p)$, $(i=1\div6)$ - жүйенің динамикалық қасиеттерін көрсетіп тұратын үзбелердің түрлендіру функциялары.

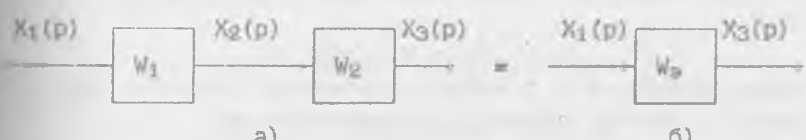
Жалпы жағдайда жүйені жобалау стадиясында жуықталған жүйенің түрлендіру функциясын білу қажет, яғни келесі функциясын

$$W_T(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = \frac{\int_{\varnothing}^{t} y(t)e^{-pt}dt}{\int_{\varnothing}^{t} g(t)e^{-pt}dt}$$

Оны табу үшін автоматты басқару теориясында структуралық схемаларының түрлендіру ережелері қолданылады. Сондықтан ондай негізгі ережелерін қарастырайық.

Структуралық схемаларда негізінде үш түрлі үзбелердің жалғауын ажыратады: тізбектей қосу; параллельді қосу; кері параллельді қосу (кері байланысты қосу).

1 ТІЗБЕКТЕЙ ҚОСУ. Үзбелер тізбектей қосылады деп айтылады, егер де соңынан тұрған үзбенің кіру шамасы алдындағы үзбенің шығу шамасы болып келсе, яғни



2.10 - сурет

Тізбектей қосылған үзбелерге жазуға болады

$$X_2(p)=W_1(p)X_1(p) \text{ және } X_3(p)=W_2(p)X_2(p)$$

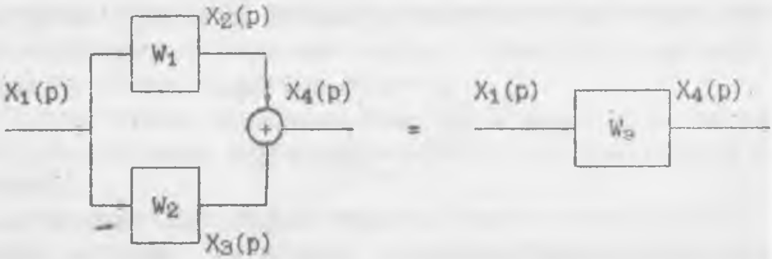
немесе соңғы теңдеуде $X_2(p)$ аралық айнымалы шаманы жойып табуға болады

$$X_3(p) = W_1(p)W_2(p)X_1(p) = W_э(p)X_1(p)$$

делік $W_э(p) = W_1(p)W_2(p)$ (2.10,б-сурет). Жалпы алғанда егерде n үзбелер тізбектей қосылса $W_э(p)=W_1(p)W_2(p)\cdots W_n(p)=\prod_{i=1}^{n} W_i(p)$

Тізбектей қосылған үзбелердің эквивалентті түрлендіру функциясы барлық үзбелердің түрлендіру функцияларының көбейтіндісіне тең.

2 ПАРАЛЛЕЛЬДІ ҚОСУ. Үзбелер параллельді қосылған деп айтылады, егер де кіру шамасы барлық үзбелерге ортақ болса, ал шығу шамалары қосылса, яғни



а) б)

2.11-сурет

Параллельді қосылуына жазуға болады

$$X_2(p) = W_1(p)X_1(p)$$
$$X_3(p) = W_2(p)X_2(p)$$
$$X_4(p) = X_3(p)+X_4(p)$$

немесе

$$X_4(p) = [W_1(p)+W_2(p)]X_1(p) = W_э(p)X_1(p),$$

яғни

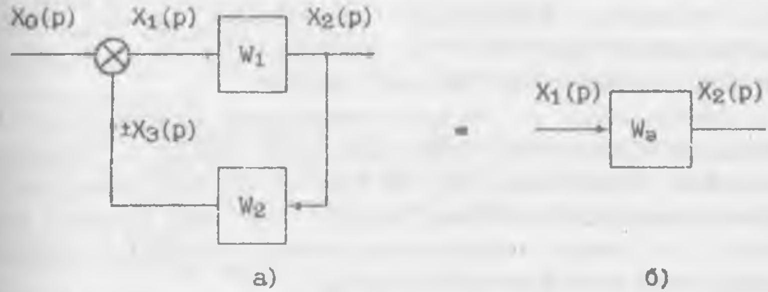
$$W_э(p) = W_1(p)+W_2(p)$$

Жалпы жағдайда егер n үзбелер параллельді қосылса, онда эквивалентті үзбенің түрлендіру функциясы болады

$$W_э(p) = W_1(p) + W_2(p) + \cdots + W_n(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p).$$

Параллельді қосылған үзбелердің эквивалентті түрлендіру функциясы барлық үзбелердің түрлендіру функцияларының қосындысына тең.

3 ҚАРСЫ ПАРАЛЛЕЛЬДІ ҚОСУ. Үзбе қарсы параллельді немесе кері қосылған деп айтылады, егер әр үзбенің шығысы басқа үзбенің кірісімен қосылса, яғни



2.12 - сурет

Мұндай қосылысқа болады

$$X_2(p) = W_1(p)X_1(p) \qquad (2.45)$$

$$X_3(p) = W_2(p)X_2(p) \qquad (2.46)$$

және

$$X_1(p) = X_0(p) \pm X_3(p) \qquad (2.47)$$

соңғы теңдеу тұйықтау теңдеуі деп аталады. Схемада "+" таңбасы оң кері байланысқа сәйкеседі де, ал "-" таңбасы теріс байланысқа. Яғни егер де X_3 кері байланыс сигналы X_0 кіру сигналымен қосылса $[X_1(p)=X_0(p)+X_3(p)]$ онда ондай кері байланыс оң кері байланыс, ал қарсы жағдайда $[X_1(p)=X_0(p)-X_3(p)]$ теріс кері байланыс делінеді.

Үзбелердің тізбектей қосылуына сәйкесетін (2.45) және (2.46) теңдеулерден табылады.

$$X_3(p) = W_1(p)W_2(p)X_1(p) \qquad (2.48)$$

(2.47) теңдеудегі $X_3(p)$ мәнінің орнына (2.48) қойып жазуға болады

$$X_1(p) = X_0(p) \pm W_1(p)W_2(p)X_1(p)$$

немесе

$$X_1(p)(1 \pm W_1(p)W_2(p)) = X_0(p)$$

әлде

$$X_1(p) = \frac{X_0(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)} \qquad (2.49)$$

Соңғыны (2.45) қойып біржолата табылады

$$X_2(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)} \cdot X_0(p) = W_э(p)X_0(p)$$

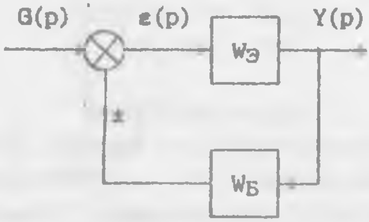
мұндағы

$$W_э(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)}$$

$W_1(p)$ түрлендіру функциясымен сипатталатын элемент тұйықталынған жүйенің тура бөлігі деп аталынады да, ал $W_2(p)$ мен сипатталатын элемент кері байланыс делінеді.

Сонымен кері немесе қарсы параллельді қосудың түрлендіру функциясы бөлшекке тең, оның алымы тура бөліктің түрлендіру функциясы болып келеді де, ал бөлгіші бір плюс тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясы болады, егер кері байланыс теріс болса, бір минус тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясы болады, егер кері байланыс оң болса.

Демек 1 және 2 ережелерді қолдана отырып 2.9-суреттегі структуралық схеманы келесі түрге келтіруге болады



2.13 - сурет

Мұнда $W_э(p) = W_1(p)[W_2(p) + W_3(p) + W_4(p)]$.Онда 3-ші ережеге негізделініп тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясын табамыз

$$W_T(p) = \frac{W_э(p)}{1 + W_э(p)W_б(p)}$$

теріс кері байланыс болса. Ал кері байланыс оң болса онда:

$$W_T(p) = \frac{W_э(p)}{1 - W_э(p)W_б(p)}$$

Онда $Y(p) = W_T(p)G(p)$ немесе жиыру теоремасына негізденіп жазуға болады

$$y(t) = \int_0^t W_T(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

немесе

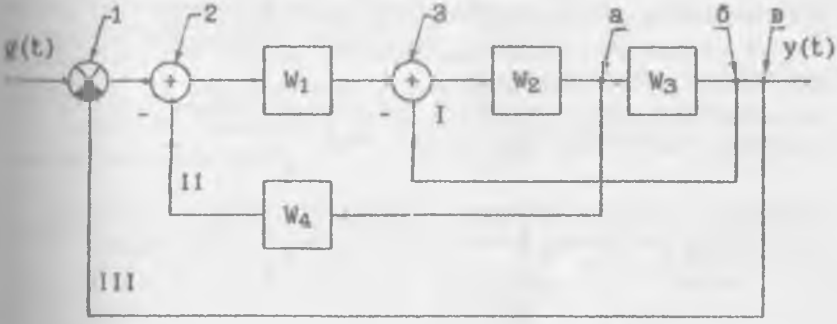
$$y(t) = \int_{0}^{t} W_T(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

мұнда $W_T(t) = L^{-1}\{W_T(p)\}$; $g(\tau) = L^{-1}\{G(p)\}$.

Жүйе бір контурлы делінеді (2.13-сурет), егер жүйенің негізгі кері байланыс тізбегін ажыратқанда үзбелер тізбектей қосылған болса, яғни ішінде кері байланысты және параллельді тізбектер болмаса.

Ал кері жағдайда ондай жүйе көп контурлы делінеді, яғни тұйықталған жүйе көп контурлы делінеді, егер оның ішінде негізгі кері байланысынан басқа ішкі кері немесе параллельді байланыстар болса.

Мысал ретінде келесі көп контурлы жүйенің структуралық схемасын келтіруге болады.

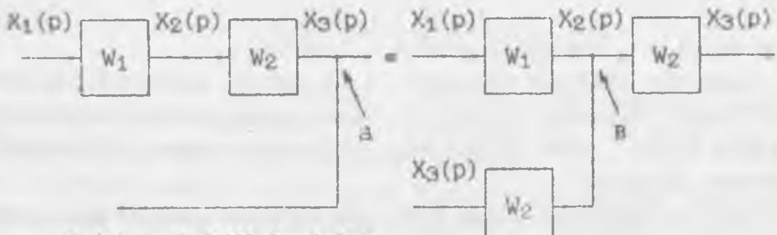


2.14 - сурет

Мұнда: 1-салыстыру, 2,3-қосындылау нүктелер; а,б,в-ақпаратты алу түйіндер; I,II - ішкі кері байланыс контурлары; III-негізгі кері байланыс контуры.

Бұл көп контурлы жүйенің ерекшелігі I-ші контур II-ші контурдың бөлігін қамтуында. Сондықтан мұндай жүйелер көп контурлы айқас байланысты делінеді. Бұл айқас байланыс жоғарыда қарастырылған ережелерді қолданып, тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясын табуға мүмкіншілік бермейді. Яғни қарастырылған ережелер жеткілікті емес, сондықтан қосымша ережелерді қарастырайық.

4 АҚПАРАТТЫ АЛУ ТҮЙІНІН ТАСЫМАЛДАУ ЕРЕЖЕСІ. Бұл ережені анықтау үшін келесі эквивалентті схемаларды қарастырайық

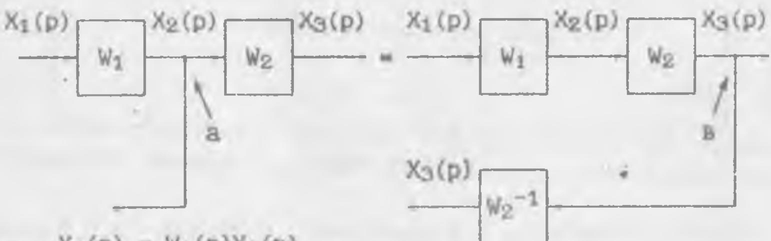


$X_3(p) = W_1(p)W_2(p)X_1(p)$

$X_3(p) = W_1(p)W_2(p)X_1(p)$

Демек егерде ақпаратты алу түйінінің тасымалдау бағыты сигнал жүру бағытына қарсы болса, онда тасымалданатын тізбекке үзбе қосылады, ал ол үзбенің түрлендіру функциясы ескі (а)түйінмен жаңа (в) түйіннің арасындағы үзбелердің түрлендіру функциясына тең болуы керек.

Ақпаратты алу түйінінің тасымалдау бағыты сигнал жүру бағытымен бағыттас болсын делік, яғни

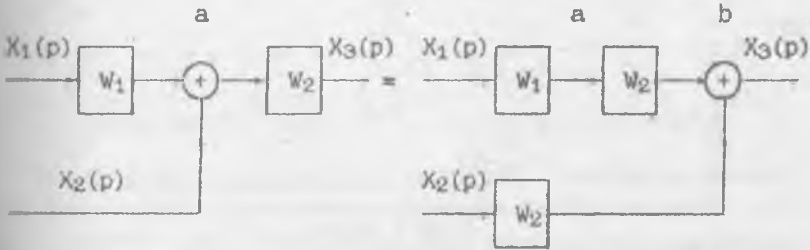


$X_2(p) = W_1(p)X_1(p)$

$X_2(p) = W_1(p)W_2(p)W_2^{-1}(p)X_1(p) =$
$= W_1(p)X_1(p)$

Онда бұл жағдайда тасымалданатын тізбекке үзбе қосылады да, ал оның түрлендіру функциясы ескі (а)түйінмен жаңа (в) түйіннің арасындағы үзбелердің кері түрлендіру функцияларына тең болуы керек.

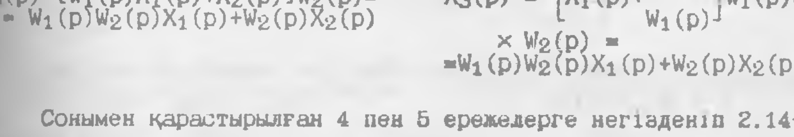
5 ҚОСЫНДЫЛАУ НҮКТЕСІНІҢ ТАСЫМАЛДАУ ЕРЕЖЕСІ. Егерде қосындылау нүктесінің тасымалдау бағыты сигнал жүру бағытымен бағыттас болса,онда тасымалданатын тізбекке үзбе қосылады, ал ол үзбенің түрлендіру функциясы ескі (а) нүктемен жаңа (в) нүктесінің арасындағы үзбелердің түрлендіру функцияларына тең болуы керек. Яғни



$X_3(p)=[W_1(p)X_1(p)+X_2(p)]W_2(p)=$
$= W_1(p)W_2(p)X_1(\quad W_2(p)X_2(p)$

$X_3(p) = W_1(p)W_2(p)X_1(p) +$
$+ W_2(p)X_2(p)$

Егерде қосын ау нүктесінің тасымалдау бағыты сигнал жүру бағытына кері са, онда тасымалданатын тізбекке үзбе қосылады да, ал оның түрлендіру функциясы ескі (а) нүктемен жаңа (в) нүктесінің арасындағы үзбелердің кері түрлендіру функцияларына тең болуы керек.



$X_3(p)=[W_1(p)X_1(p)+X_2(p)]W_2(p)=$
$= W_1(p)W_2(p)X_1(p)+W_2(p)X_2(p)$

$$X_3(p) = \left[X_1(p)+\frac{X_2(p)}{W_1(p)}\right]W_1(p)\times$$
$$\times W_2(p) =$$
$$=W_1(p)W_2(p)X_1(p)+W_2(p)X_2(p)$$

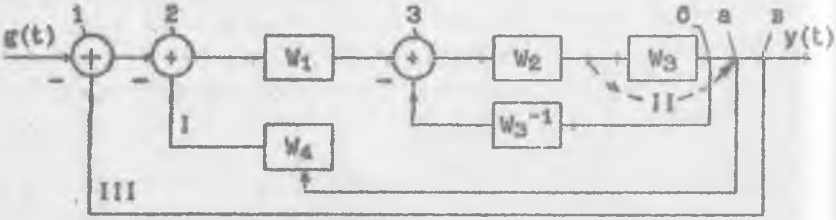
Сонымен қарастырылған 4 пен 5 ережелерге негізденіп 2.14-суреттегі структуралық схеманы түрлендіруге болады, оның мақсаты структурадағы айқас байланысты жою, яғни тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясының табуын жеңілдету.

Структураны түрлендіру үшін бірнеше варианттарды қолдануға болады. Мысалы: (а) түйінін (б) мен (в) түйіндердің арасына орналастыруға болады; (в) түйінін (а) түйіннің алдына ор-

11-207

наластыруға болады; (3)-қосындылау нүктені 1 мен 2 нүктелерінің арасына орналастыруға болады және т.б.

Егерде бірінші вариант жүзеге асырылса, онда структуралық схема келесідей болады.



2.15 - сурет

Бұл структуралық схемаға жазылады:

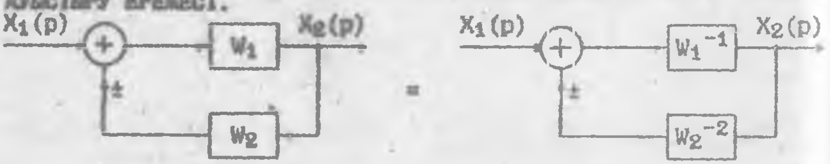
$$W_{II}(p) = \frac{W_2(p)W_3(p)}{1 + W_2(p)W_3(p)W_3^{-1}(p)}$$ - екінші контурдың түрлендіру функциясы;

$$W_I(p) = \frac{W_1(p)W_{II}(p)}{1 + W_1(p)W_{II}(p)W_4(p)}$$ - бірінші контурдың түрлендіру функциясы.

Енді тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясын табуға болады

$$W_T(p) = \frac{W_I(p)}{1 + W_I(p)} = \frac{Y(p)}{G(p)}.$$

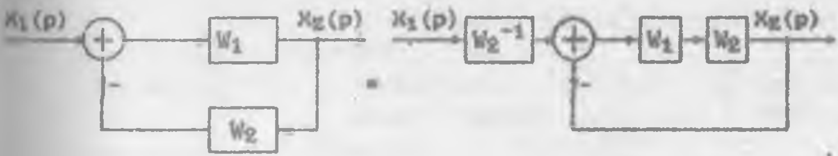
6 ТУРА ТІЗБЕК ПЕН КЕРІ ТІЗБЕКТІҢ ЗВЕНОЛАРІНІҢ ОРЫНДАРЫН АУЫСТЫРУ ЕРЕЖЕСІ.



$$X_2(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)} \cdot X_1(p) \qquad X_2(p) = \frac{W_2^{-1}(p)}{1 \pm W_2^{-1}(p)W_1^{-1}(p)} \cdot X_1(p) =$$

$$= \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)} \cdot X_1(p)$$

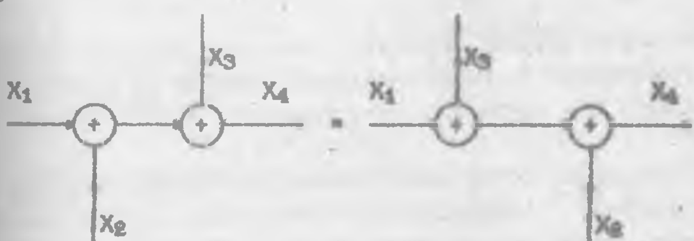
7 БІРЛІК КЕРІ БАЙЛАНЫСҚА АУЫСУ ЕРЕЖЕСІ. Кері байланыс бірлік делінеді, егер кері байланыстың түрлендіру функциясы бірге тең болса, яғни:



$$X_2(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} \cdot X_1(p) \qquad X_2(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} \cdot \frac{1}{W_2(p)} \cdot X_1(p)$$

Демек қарсы параллельді қосылған үзбелерді немесе ...йықталған жүйені бірлік кері байланысты түріне келтіру үшін ...ру тізбекке кері байланыстың кері түрлендіру функциясымен ...бе қосылады, ал жүйенің тура байланысына үзбе кері байланыс ...үрлендіру функциясымен қосылады.

8 ҚОСЫНДЫЛАУЫШТАРМЕН ТҮЙІНДЕРДІҢ ОРЫН АУЫСТЫРУ ЕРЕЖЕСІ. ...сындылау нүктелердің орындарын ауыстырғанда структуралық ...ема қосымша үзбелердің қосуынсыз түрлендіріледі (2.16-су...т).

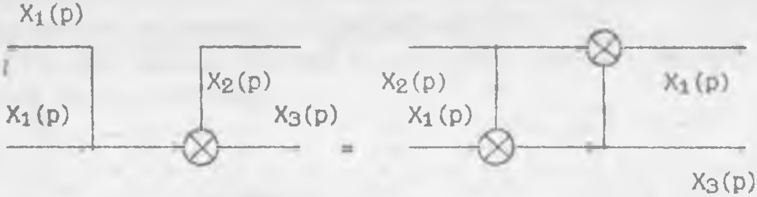


$X_4 = X_1 + X_2 + X_3$ $\qquad$ $X_4 = X_1 + X_2 + X_3$

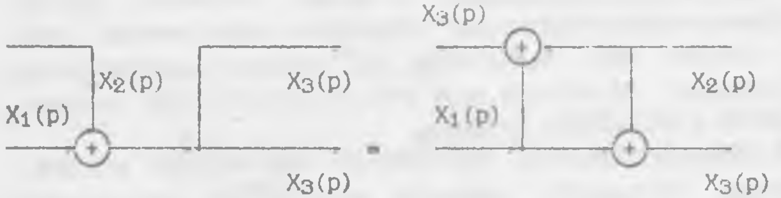
2.16 - сурет

Тура осылай ақпарат алу түйіндер орындарымен ауыстырыла...ды

Түйінді мен қосылғышты орындарымен ауыстырғанда, яғни ...йінді қосылғыш арқылы тасымалдағанда, тасымалдайтын тізбекке ...астыру немесе қосындау үзбе қосылады:



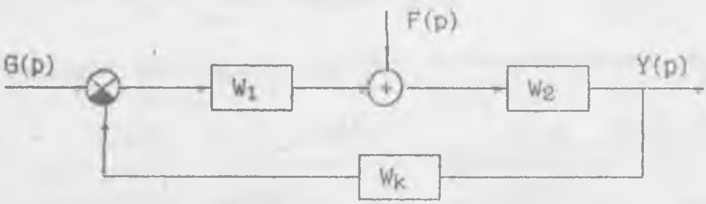
$X_3(p) = X_1(p) + X_2(p)$ $\qquad$ $X_3(p) = X_1(p) + X_2(p)$



$X_3(p) = X_1(p) + X_2(p)$ $\qquad$ $X_3(p) = X_1(p) + X_2(p)$

ТҰЙЫҚТАЛҒАН ЖҮЙЕНІҢ ТЕҢДЕУІ. Бұл жерде жоғарыда тұжырымдалған түрлендіру ережелерін қолданып, қандай да күрделі болмасын жүйені бір контурлы жүйеге келтіруге болатынын атап өту маңызды.

Бір басқарылатын шамамен автоматты жүйелер бір өлшемді жүйелер делінеді. Алайда жүйеге бір мезгілде бірнеше әсерлер әрекет етуі мүмкін. Мысалы келесі жүйеге бір мезгілде екі әсер әрекет етіп тұрады.



2.17-сурет

Мұнда: $W_1(p)$, $W_2(p)$ - жүйенің тура байланыстағы үзбелерінің түрлендіру функциялары;

$W_k(p)$ - кері байланыс үзбенің түрлендіру функциясы;

$G(p)$, $F(p)$ - тағайындалған шама мен ауытқылаушы әсердің Лаплас кескіндері (сыртқы әсерлер);

$Y(p)$ - реттелінетін шаманың Лаплас кескіні.

Бұл тұйықталған жүйенің теңдеуін табу үшін, суперпозиция принципіне негізденіп, әр әсер бойынша бөлек түрлендіру функциясын табуға болады. Одан кейін әр анықталған түрлендіру функциясы, сәйкесті шамалардың Лаплас кескіндеріне көбейтіледі де, қосылады. Сонымен, жоғарыда келтірілген жүйенің схемасын жазуға болады

$$W_g(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_k(p)},$$

Бұл $G(p)$ кіру шамасы бойынша түрлендіру функциясы. Ал $F(p)$ шамасы бойынша түрлендіру функциясы жазылады

$$W_f(p) = \frac{Y(p)}{G(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_k(p)}.$$

Онда екі кіру шамасымен бір өлшемді тұйықталған жүйенің теңдеуі мынадай болады:

$$Y(p) = W_g(p)G(p) + W_f(p)F(p). \qquad (2.50)$$

Бұл теңдеу жалпы түрде былай жазылуы мүмкін

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} +\dots+ a_ny = b_0g^{(m)} + b_1g^{(m-1)} +\dots+ b_mg +$$
$$+ c_0f^{(l)} + c_1f^{(l-1)} +\dots+ c_lf.$$

Немесе жиыру теоремасына негізденіп, Лаплас кескінінен оригиналға өтіп (2.50) жазуға болады:

$$y(t) = \int_{\varnothing}^{t} W_g(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_{\varnothing}^{t} W_f(\tau)f(t-\tau)d\tau, \qquad (2.51)$$

немесе эквивалентті түрде

$$g(t) = \int_{\varnothing}^{t} W_g(t-\tau)g(\tau)d\tau + \int_{\varnothing}^{t} W_f(t-\tau)f(\tau)d\tau, \qquad (2.52)$$

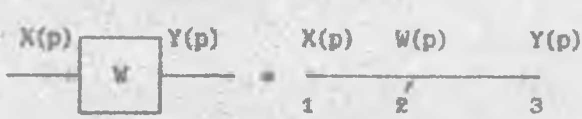
Бұл жерде: $w_g(t)=L^{-1}\{W_g(p)\}$; $w_f(t)=L_f^{-1}\{W(p)\}$; $g(t-\tau)$, $f(t-\tau)$ уақыт мерзіміне қарай τ уақытқа жылжыған кіру шамалар. (2.51), (2.52) теңдеулер тұйықталған жүйеге $g(t)$ тағайындалған шама мен $f(t)$ ауытқылаушы әсерлердің әрекет етіп тұруларының себебінен y(t) шығу шамасының өзгеру процесін бейнелейді. Бұл процесс елеулі түрде, сәйкесті $W_g(p)$ және $W_f(p)$ түрлендіру функцияларының оригиналдары болып келетін $w_g(t)$ және $w_f(t)$ уақыт функцияларынан тәуелді. $w_g(t)$ мен $w_f(t)$ функциялар автоматты жүйенің уақыт бойынша сипаттамаларын анықтайды.

АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРДІ СИГНАЛДЫҚ ГРАФПЕН ЕЛЕСТЕТУ. Автоматты басқару жүйелерді структуралық схемалармен елестету және эквиваленттік түрлендіру ережелерді қолдану маңызды түрде жоба есебін жеңілдетеді. Алайда, көп контурлы айқас байланысты жүйелердің жоба есебі.. жүргізгенде, қиындығы өжептәуір қалады. Оның үстіне қолайсыз есептен басқа, структуралық түрлендіру процесіндегі бірнеше рет схеманы қайталап сызуының қажеттігі айтарлықтай жоба есебін қолайсыздандырады. Сондықтан кейінгі кезде автоматты басқару теориясында жүйенің структуралық схемасын көрсету үшін графтардың теориясын қолданады.

Математикада граф дегенде қырлары және төбелері деп аталатын екі түрлі элементтердің еркін жиындары түсініледі. Әр графтың қырына екі төбе сәйкеседі және төбесінен басқа екі қырда ортақ нүкте болмайды. Кеңістікте әр графтың төбесіне нүкте, ал әр қырына түзу немесе қисық сызықтың кесіндісі сәйкеседі. Сонымен графтың қырының түрлендіру функциясы деп, ал оның екі төбесін үзбенің кіру және шығу шамаларының Лаплас кескіні деп түсінсе, онда автоматты жүйені граф түрінде көрсетуге болады, ал ондай граф сигналды граф деп аталады. Сигналды графта сигнал өту бағыты қырында нұсқамен көрсетіледі.

Мысалы элементтердің, үзбелердің және олардың жиі кездесетін қосылыстары келесідей көрсетіледі.

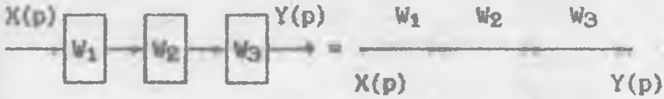
1. Қарапайым үзбе



мұнда 1,3-графтың төбелері, 2-графтың қыры және

$$Y(p) = W(p)X(p).$$

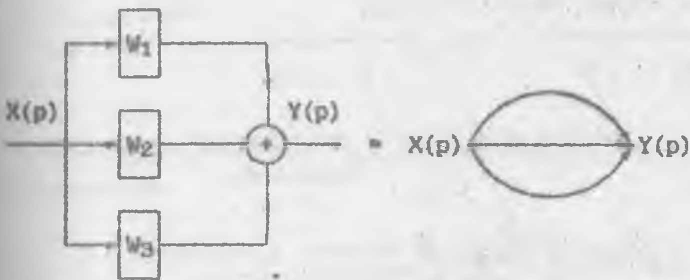
2. Тізбектей қосылған үзбелерге



Мұнда тізбекке жазылады

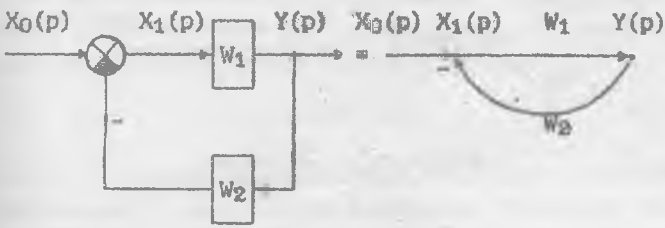
$$Y(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)X(p).$$

3. Параллельді қосылған үзбелерге



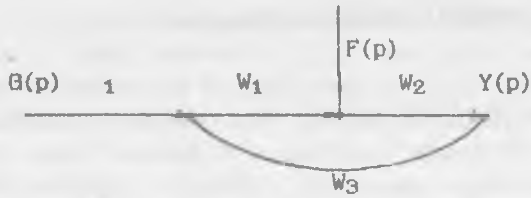
Мұндай қосылысқа $Y(p) = [W_1(p) + W_2(p) + W_3(p)]X(p)$.

4. Кері параллельді қосылысқан үзбелерге

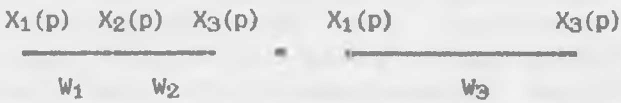


Бұл жағдайда $Y(p) = \dfrac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} \cdot X_0(p)$,

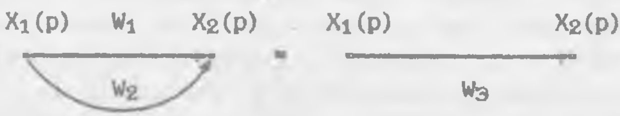
яғни жүйенің структуралық схемасымен оның сигналдық графымен тура сәйкестігі бар. Мысалы 2.7- суреттегі структуралық схема сигналдық граф түрінде былай болады:



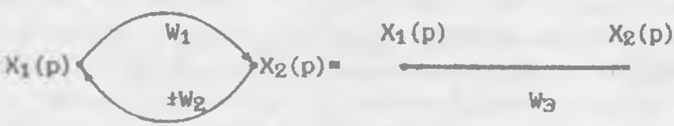
Сигналды графтардың түрлендіру ережелері структуралық схемаларды түрлендіру ережелеріне ұқсас. Мысалы:



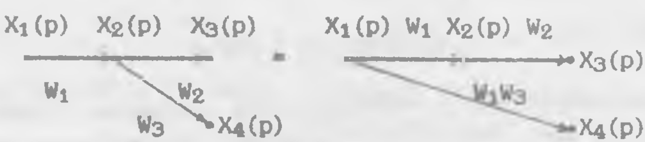
$W_э(p) = W_1(p)W_2(p)$ - эквиваленттi түрлендiру функциясы.

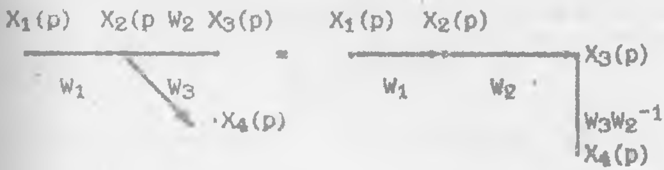


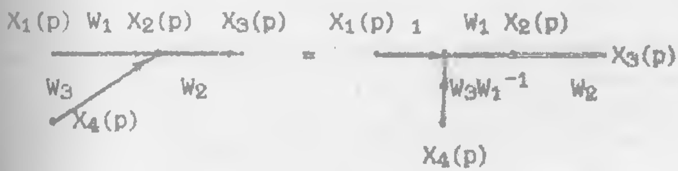
$$W_э(p) = W_1(p) + W_2(p)$$



$$W_э(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)}$$







Структуралық схемалар көрнекі болғандықтан келешекте соның қолданылады.

2.8 СТАЦИОНАРЛЫ, СЫЗЫҚТЫ АВТОМАТТЫ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ЖИІЛІК СИПАТТАМАЛАРЫ

Әдетте автоматты жүйелердің зерттеуі мен жобалауында тұйықталмаған жүйелердің (АФЖС) амплитуда - фазалық жеке (ЛСЖ) логарифмдік жиілік сипаттамалар қолданылады. Тұйықталмаған бір контурлы, ал кейде көп контурлы жүйелердің түрлендіру функциясын қиындықсыз келесідей түрге келтіруге болады

$$W(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p) , \qquad (2.53)$$

Мұндағы $W_i(p)$ - динамикалық үзбелердің түрлендіру функциялары. Бұл жағдайда жүйенің және үзбелердің жиілік түрлендіру функцияларының модульмен аргументтері

$$A(\omega) = |W(j\omega)| \qquad A_i(\omega) = |W_i(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} W(j\omega) \qquad \varphi_i(\omega) = \operatorname{arctg} W_i(j\omega)$$

комплекстік сандардың модульмен аргументтерінің ережесі бойынша төменгі қатынастармен байланысты

ГР.207

$$A(\omega) = \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega) \qquad (2.54)$$

$$\varphi(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega) \qquad (2.55)$$

Жүйенің нақты және жорымал жиілік функциялары теңдіктермен анықталады

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= A(\omega)\cos\varphi(\omega) \\ V(\omega) &= A(\omega)\sin\varphi(\omega) \end{aligned}\right\} \qquad (2.56)$$

Табылған (2.54-2.56) қатынастарды пайдаланып АФЖС құруға болады. (2.55) өрнектен айқын көрінеді

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} L_i(\omega) \qquad (2.57)$$

мұнда $L(\omega)$ және $L_i(\omega)$ - логарифмдік амплитудалық жиілік функциялар және тұжырымдау бойынша

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega), \quad L_i(\omega) = 20\lg A_i(\omega).$$

(2.56) және (2.57) өрнектерден, түрлендіру функциялары (2.53) түрге келтірілген жүйелердің ЛЖС мен ЛФЖС құру ережесі шығады: бөлек үзбелердің ЛЖС құрылады, одан кейін олар графикалық түрде қосылады.

Осыған ұқсас (2.57) өрнектің негізінде өзгеше және жеңілдеу ЛАЖС құру тәртібін тұжырымдауға болады. Оны ең алдымен нақты мысалда көрсетейік.

Болсын дейік

$$W(p) = \frac{100(p + 1)}{p^{\nu}(10p + 1)(0,01p^2 + 0,1p + 1)}$$

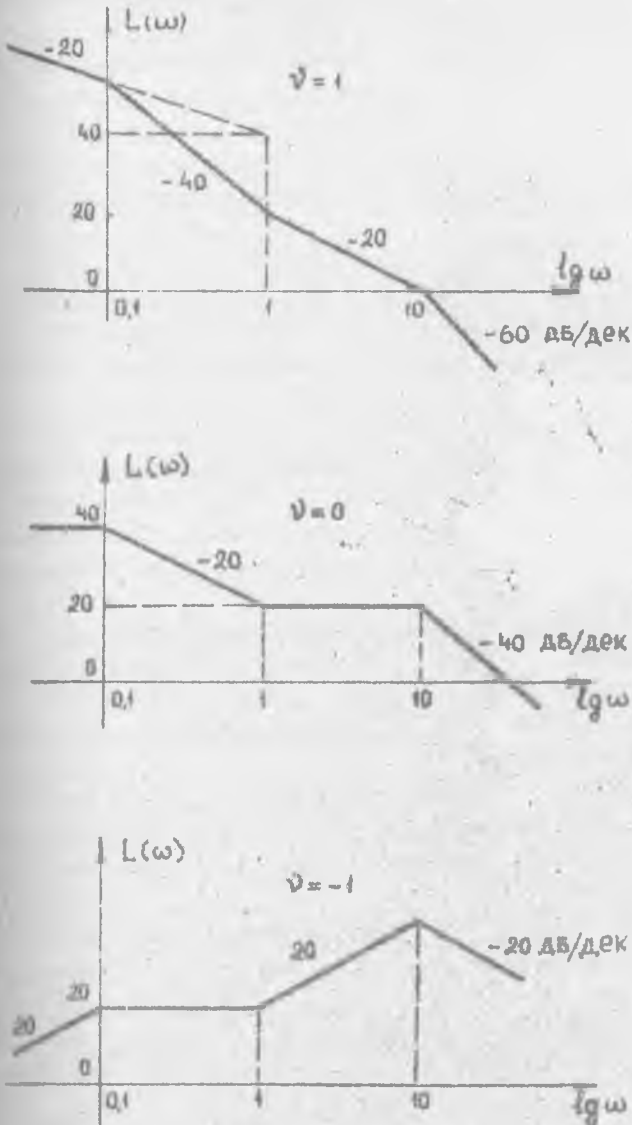
Логарифмдік амплитудалық жиілік функциясы

$$L(\omega) = 40 - \nu\lg\omega - 20\lg\sqrt{(10\omega)^2 + 1} + 20\lg\sqrt{\omega^2 + 1} -$$
$$- 20\lg\sqrt{(1-0,01\omega^2)^2 + (0,1\omega)^2}$$

Қарастырылып отырған жүйенің асимптоталық ЛАЖС (2.18,а,б,в) төрт асимптотадан тұрады, ал оның құру тәртібі келесідей.

Түйіндес жиіліктер есептелінеді

$$\omega_1 = 1/10 = 0,1; \ \omega_2 = 1; \ \omega_3 = 1/0,1 = 10.$$


L(ω)
-20
ν = 1
40
-40
20
-20
0
lg ω
0,1
1
10
-60 дБ/дек
L(ω)
40
ν = 0
-20
20
-40 дБ/дек
0
0,1
1
10
lg ω
L(ω)
ν = -1
20
-20 дБ/дек
20
20
0
0,1
1
10
lg ω

2.18 - сурет

Мұнда ω_1, ω_2 және ω_3 - апериодты, форстау және тербелмелі үабелердің сәйкесті түйіндес жиіліктері.

Ескертейік, динамикалық үабелердің асимптоталық ЛАЖС құрылғанда жиілік түйіндес жиіліктен аз болғанда түбірдің астында тек қана бірлік қалдырылады (басқа мүшелер еленбейді), ал жиілік түйіндес жиіліктен көп болғанда ω жоғары дәрежесімен мүше қалдырылады. Сондықтан қарастырылып отырған мысалда $\omega<\omega_1$ болғанда

$$L(\omega) \approx 40 - v20\lg\omega$$

Бұл бірінші асимптотаның теңдеуі. Осы теңдеу бойынша бірінші асимптота -20 дБ/дек көлбеуімен $\omega=1$ және $L(\omega)=20\lg k$ координатты нүктенің үстінен өткізіледі. Ол бірінші түйіндес жиілікте бітеді.

$\omega_1<\omega<\omega_2$ болғанда табылады $L(\omega)\approx 40-v\lg\omega-20\lg 10\omega =$ $=20-v\lg\omega-20\lg\omega$. Бұл екінші асимптотаның теңдеуі. Оның көлбеуі -20 дб/дек өзгереді және апериодты үабемен себептелінеді. Екінші асимптота бірінші асимптотаның соңынан, оның теңдеуіне сәйкес(-v20-20) дб/дек көлбеуімен екінші түйіндес жиілікке дейін өткізіледі.

$\omega_2<\omega<\omega_3$ болғанда $L(\omega)\approx 20-v20\lg\omega-20\lg\omega+20\lg\omega=20-v\lg\omega$. Бұл үшінші асимптотаның теңдеуі. Оның көлбеуі 20 дб/дек өзгереді және форстау үабемен себептелінеді. Үшінші асимптота екінші асимптотаның соңынан -v20 дБ/дек көлбеуімен үшінші түйіндес жиілікке дейін өткізіледі.

$\omega>\omega_3$ болғанда $L(\omega)=20-v20\lg\omega-40\lg 0,1\omega=60-v20\lg\omega-40\lg\omega$. Бұл соңғы төртінші асимптотаның теңдеуі. Оның көлбеуі,үшінші асимптотаға қарағанда -40дб/дек өзгереді және тербелмелі үабемен себептелінеді.

Енді егер жүйенің түрлендіру функциясы (2.53) түрдей жазылса, онда асимптоталық ЛАЖС құру жалпы ережесін тұжырымдағанға қиын емес.

Асимптоталық ЛАЖС құру ережесі.

1. Түйіндес жиіліктер мен 20lgk мәндері есептелінеді, мұнда $k = \prod_{i=1}^{n} k_i$ үабелердің коэффициенттерінің көбейтіндісіне тең жүйенің беріліс коэффициенті.

2. $\omega=1$ және $L=20Lgk$ координат нүкте арқылы өтетін бірінші түйіндес жиілікке дейін -v20 дБ/дек көлбеуімен бірінші асимптота құрылады.

3. Бірінші асимптотаның соңынан екінші түйіндес жиілікке дейін екінші асимптота өткізіледі. Оның көлбеуінің 20, -20, 40 немесе -40 дб/дек өзгеруі ω_1 түйіндес жиілік қандай үабеге сәйкесті екеніне байланысты: форстауға ма, апериодттыға ма, екінші ретті форстауға ма немесе тербелмелі үабеге ме.

4. Әр кезекті асимптота екіншіге ұқсас құрылады. Ал (i+1)-ші асимптотаның көлбеуінің өзгеруі ω_i түйіндес жиіліктің қандай динамикалық үабенікі болып келетініне байланысты.

Егер кейбір түйіндес жиілік еселі болып келсе және оның еселігі l болса, яғни l бірдей динамикалық үабелер болса, онда бұл жиілікте көлбеудің өзгеруі, сәйкесті қарапайым жиілікке салыстырып қарағанда, l рет көп болады.

Кішкентай (ξ<0,4) демпферлау коэффициентпен тербелмелі үабелер үшін, асимптоталық ЛАЖС түйіндес жиіліктің төңірегінде дәл формулалар бойынша коррекцияланулы керек.

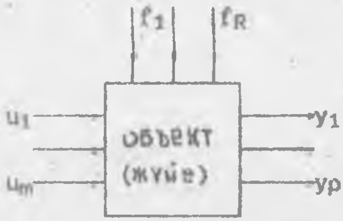
2.9 КӨП ӨЛШЕМДІ СЫЗЫҚТЫ СТАЦИОНАРЛЫ ЖҮЙЕЛЕР

Бірінші (бірден көп) басқарылатын шамасы болатын жүйелер көп өлшемді немесе көп байланысты жүйелер деп аталынады. Сәйкес бірнеше басқарылатын шамалары болатын объектер көп өлшемді не көп байланысты объектер делінеді. Көп өлшемді объектердің мысалдары ретінде болуы мүмкін: жылдамдығы, ұшу жоғарлығы, ауу мен тангаж (негізгі көлденең өсіне салыстырмалы аууы) бұрыштары, курсы (ұшу бағыты) басқарылатын шамалар болатын ұшақ; температурасы, будың қысымы және басқа шамалары реттелінетін бу қазаны.

Әдетте басқарылатын шамалар шығыстар деп немесе шығу шамалары деп аталынады. Сондықтан көп өлшемді жүйелер кейде көп өлшемді (векторлы) шығыстарлы автоматты жүйелер деп анықталады.

Көп өлшемді жүйелер мен объектілер сызықты және стационарлы делінеді, егер олар тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеулер жүйесімен жазылса.

КӨП ӨЛШЕМДІ СЫЗЫҚТЫ СТАЦИОНАРЛЫ ЖҮЙЕЛЕРМЕН ОБЪЕКТЕРДІҢ ТЕҢДЕУЛЕРІ. Айталық 2.19-суретте $y_1,\dots,y_p$ - шығу шамаларын белгілейді, $u_1,\dots,u_m$ - басқарушы немесе тағайындаушы, ал $f_1,\dots,f_R$ - ауытқушы әсерлерді белгілейді. Онда сызықты, стационарлы, көп өлшемді объектілер мен жүйелердің теңдеулерін, жалпы жағдайда келесі жүйе түрінде жазуға болады:



2.19-сурет

$$a_{11}(p)y_1+\dots+a_{1p}(p)y_p=b_{11}(p)u_1+\dots+b_{1m}(p)u_m+c_{11}(p)f_1+\dots+c_{1R}(p)f_R$$

$$\dots$$

$$a_{p1}(p)y_1+\dots+a_{pp}(p)y_p=b_{m1}(p)u_1+\dots+b_{mm}(p)u_m+c_{R1}(p)f_1+\dots+c_{RR}(p)f_R$$

немесе жинақылау түрінде

$$\sum_{j=1}^{p}a_{ij}(p)y_j=\sum_{j=1}^{m}b_{ij}(p)u_j+\sum_{j=1}^{R}c_{ij}(p)f_j,\ (i=1\div p) \qquad (2.58)$$

Мұнда a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} - сызықты стационарлы операторларды белгілейді, яғни тұрақты коэффициентті дифференциалдау оператордан көп мүшелер.

Мысалы: $a_{ij}(p)=a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3$

$b_{ij}(p)=b_0p^2+b_1p+b_2$

$c_{ij}(p)=c_0p+c_1.$

(2.58) өрнектің екі жағында да Лаплас кескініне өтіп, бастапқы нольдік шарттарында алгебралық теңдеулердің жүйесін табамыз

$$\sum_{j=1}^{p}a_{ij}(p)Y_j(p)=\sum_{j=1}^{m}b_{ij}(p)U_j(p)+\sum_{j=1}^{R}c_{ij}(p)F_j(p),\ (i=1\div p) \qquad (2.59)$$

мұнда $Y_j(p)=L\{y_j(t)\}$; $U_j(p)=L\{u_j(t)\}$; $F_j(p)=L\{f_j(t)\}$.

Көп өлшемді жүйелердің теңдеулерін матрица түрінде жазу ыңғайлы.

Қарастыруға мынадай матрицаларды енгізейік:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(p) = \begin{bmatrix} a_{11}(p) \cdots a_{1p}(p) \\ \vdots \\ a_{p1}(p) \cdots a_{pp}(p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(p) = \begin{bmatrix} b_{11}(p) \cdots b_{1m}(p) \\ \vdots \\ b_{m1}(p) \cdots b_{mm}(p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(p) = \begin{bmatrix} c_{11}(p) \cdots c_{1l}(p) \\ \vdots \\ c_{R1}(p) \cdots c_{RR}(p) \end{bmatrix}.$$

Бұлардың көмегімен (2.59) өрнек матрица түрінде мынадай болады

$$\mathbf{A}(p)\mathbf{y} = \mathbf{B}(p)\mathbf{u} + \mathbf{C}(p)\mathbf{f} \qquad (2.60)$$

Тура осылай Лаплас кескіні түріндегі (2.59) теңдеуді матрица түрінде жазуға болады:

$$\mathbf{A}(p)\mathbf{Y}(p) = \mathbf{B}(p)\mathbf{U}(p) + \mathbf{C}(p)\mathbf{F}(p) \qquad (2.61)$$

мұнда $\mathbf{A}(p)$, $\mathbf{B}(p)$, $\mathbf{C}(p)$ - енгізілген операторлы коэффициенттердің матрицасы; $\mathbf{Y}(p)$, $\mathbf{U}(p)$, $\mathbf{F}(p)$ - сәйкесті шығу, басқару және ауытқушы әсерлердің Лаплас кескіндерінің бір бағанды матрицалары:

$$\mathbf{Y}(p) = \begin{bmatrix} Y_1(p) \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_p(p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}(p) = \begin{bmatrix} U_1(p) \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m(p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(p) = \begin{bmatrix} F_1(p) \\ \cdot \\ \cdot \\ F_R(p) \end{bmatrix},$$

(2.60) өрнекте матрицаларды көбейтіп және қосқаннан кейін, екі жағында да бағанды матрицалар болады. Олардың тиісті элементтерін тең деп,(2.58) теңдеу жүйесін табамыз. Дәл осылай, матрицалар мен айтылған амалдарды жасап, және (2.61) матрицалық теңдеудің сол және оң жақтағы матрицалардың тиісті элементтерін тең деп, (2.59) жүйені табамыз.

ТҮРЛЕНДІРУ МАТРИЦАСЫ. Көп өлшемді жүйелерді және объектерді жазу үшін, бір өлшемді жүйелердің жағдайындай, түрлендіру функцияны қолданғанда болады. $W^u{}_{ij}(p)$ i-інші шығу шамасы мен j-інші басқару параметрі бойынша (Лаплас кескіні түрінде) түрлендіру функциясы деп, нольдік шарттағы y_i шығу шамасының Лаплас кескінінің u_j кіру шамасының кескініне қатынасы аталады. Тұжырымдама бойынша

$$W^u{}_{ij}(p) = \frac{Y_i(p)}{U_j(p)} \qquad (2.62)$$

Бұл түрлендіру функцияны келесідей есептеп шығаруға болады. Ол үшін (2.59) жүйеде барлық ауытқушы әсерлердің және $U_j(p)$ басқа барлық басқару параметрлердің Лаплас кескіндері нольге тең делінеді. Тауып алынған алгебралық теңдеулер жүйесінен $Y_i(p)$ шешімі табылады, ал одан кейін, оны $U_j(p)$ бөліп ізделіп отырған түрлендіру функциясы тауып алынады.

Осыған ұқсас i-інші шығысы және j-інші ауытқушы әсері бойынша түрлендіру функциясы табылады, яғни

$$W^f{}_{ij}(p) = \frac{Y_i(p)}{F_j(p)} \qquad (2.63)$$

Көп өлшемді жүйелерді (объектерді) толық жазу үшін басқару бойынша $\rho \times m$ және ауытқушы бойынша $\rho \times R$ түрлендіру функциялары болуы қажет.

Сонымен енгізілген түсініктемелерді қолданып және суперпозиция принципіне негізделіп көп өлшемді жүйенің теңдеуін жазуға болады:

$$Y_j(p) = \sum_{j=1}^{m} W^u{}_{ij}(p)U_j(p) + \sum_{j=1}^{R} W^f{}_{ij}(p)F_j(p), \quad i=1 \div \rho \qquad (2.64)$$

немесе векторлы матрицалық түрінде

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{W}^u(p)\mathbf{U}(p) + \mathbf{W}^f(p)\mathbf{F}(p) \qquad (2.65)$$

мұнда

$$\mathbf{W}^u(p) = \begin{bmatrix} W^u{}_{11}(p) \cdots W^u{}_{1m}(p) \\ \vdots \\ W^u{}_{\rho 1}(p) \cdots W^u{}_{\rho m}(p) \end{bmatrix}, \qquad (2.66)$$

$$\mathbf{W}^f(p) = \begin{bmatrix} W^f{}_{11}(p) \cdots W^f{}_{11}(p) \\ \vdots \\ W^f{}_{\rho 1}(p) \cdots W^f{}_{\rho R}(p) \end{bmatrix}. \qquad (2.67)$$

$\mathbf{W}^u(p)$ және $\mathbf{W}^f(p)$ матрицалар сәйкесті басқару және ауытқушы әсерлер бойынша түрлендіру функцияларының матрицалары немесе түрлендіру матрицалары деп аталынады.

Түрлендіру матрицалары көп өлшемді объектердің (жүйелер-нің) бастапқы нольдік шартта олардың толық математикалық жазуын береді.

Жоғарыда көрсетілгендей түрлендіру матрицалары (2.62), (2.63) теңдеулерге және (2.59) өрнекке негізделініп анықталады. Алайда бұл тәсіл жалғыз ғана емес, мысалы: түрлендіру матрицалары көп өлшемді жүйенің Лаплас кескіні түріндегі (2.61) теңдеуден табуға болады. Ол үшін бұл теңдеудің екі жағын сол жағынан $A^{-1}(p)$ кері матрицасына көбейтейік. Онда табылады:

$$Y(p) = A^{-1}(p)B(p)U(p) + A^{-1}(p)C(p)F(p) \qquad (2.68)$$

Бұл өрнектің оң жағын эквивалентті (2.65) өрнектің оң жағына тең деп табамыз

$$W^u(p) = A^{-1}(p)B(p), \quad W^f(p) = A^{-1}(p)C(p).$$

Жоғарғы алгебра курсынан белгілідей кері матрица былай табылады

$$A^{-1}(p) = \frac{1}{\det A(p)} \begin{bmatrix} A_{11}(p) \cdots A_{1p}(p) \\ \vdots \\ A_{p1}(p) \cdots A_{pp}(p) \end{bmatrix}^T$$

мұнда: $A_{ij}(p)$ - $A(p)$ матрицаның $a_{ij}(p)$ элементінің алгебралық толықтаушысы; T-транспонирлеудің таңбасы.

САЛМАҚТЫҚ НЕМЕСЕ ИМПУЛЬСТІ ӨТПЕЛІ МАТРИЦАЛАР. Болсын делік басқару параметрі $u_i(t) = \delta(t)$, ал басқа басқару параметрлері мен ауытқылаушы әсерлер нольге тең. Және де бастапқы нольдік шартта (2.58) теңдеу жүйесінің шешімін келесідей белгілейік $w^u{}_{1j}(t)$, $w^u{}_{2j}(t)$, ..., $w^u{}_{pj}(t)$. Бұл жерде $w_{ij}{}^u(t)$ і-інші шығу шамасы мен j-інші бірлік импульсті басқару әсері бойынша көп өлшемді объектінің реакциясы, яғни і-іншімен j-інші арна бойынша импульсті өтпелі функциясы.

Басқару әсері бойынша импульсті өтпелі функцияларынан құрылған матрицаны

$$w^u(t) = \begin{bmatrix} w^u{}_{11}(t) \cdots w^u{}_{1m}(t) \\ \vdots \\ w^u{}_{p1}(t) \cdots w^u{}_{pm}(t) \end{bmatrix},$$

басқару әсері бойынша импульсті өтпелі немесе салмақ матрицасы деп атайды.

Ұқсастығына қарай ауытқушы әсері бойынша импульсті өтпелі матрицасы табылады

$$w^f(t) = \begin{bmatrix} w^f_{11}(t) \cdots w^f_{1R}(t) \\ \vdots \\ w^f_{\rho 1}(t) \cdots w^f_{\rho R}(t) \end{bmatrix}$$

мұндағы $w^f_{1j}(t)$, $w^f_{2j}(t)$, ..., $w_{\rho j}{}^f(t)$ -(2.58) көп өлшемді теңдеулер жүйесінің шешімі $f_i(t) = \delta(t)$ болғанда, ал басқа ауытқушы әсерлері мен басқару әсерлері нольге тең болады.

Импульсті өтпелі матрицалар түрлендіру матрицалары сияқты көп өлшемді жүйелердің толық математикалық жазуын береді. Енді олардың арасында болатын байланыстарын анықтайық.

Егер $u_i(t)=\delta(t)$, ал басқа кіру әсерлері нольге тең болса, онда $w^u_{ij}(p)=W^u_{ij}(p)$, яғни

$$W^f_{ij}(p) = L\{w^f_{ij}(t)\} = \int_0^\infty w^f_{ij}(t)e^{-pt}dt, \; i=1\div\rho, \; j=1\div R. \quad (2.70)$$

Сонымен түрлендіру матрицасының элементтері импульсті өтпелі матрицасының элементтерінің Лаплас кескініне тең.

Матрицалық түрде (2.69) және (2.70) былай жазылады

$$\mathbf{W}^u(p) = L\{\mathbf{w}^u(t)\} = \int_0^\infty \mathbf{w}^u(t)e^{-pt}dt,$$

$$\mathbf{W}^f(p) = L\{\mathbf{w}^f(t)\} = \int_0^\infty \mathbf{w}^f(t)e^{-pt}dt.$$

Анықтамасы бойынша, матрицаның интегралы элементтерінің интегралдарының матрицасына тең.

Егер $\mathbf{w}^u(t)$ және $\mathbf{w}^f(t)$ матрицалардың элементтері белгілі болса, онда (2.69) және (2.70) өрнектерді есепке алып және жиыру теоремасын қолдана отырып, шығу шамаларын (2.64) теңдеуі бойынша келесідей анықтауға болады

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t w^u_{ij}(\tau)u_j(t-\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{R} \int_0^t w^f_{ij}(\tau)f_j(t-\tau)d\tau \quad i=1\div p,$$

немесе бұл теңдеу жүйесі матрицалық түрде жазылады

$$\mathbf{Y}(t) = \int_0^t \mathbf{w}^u(\tau)\mathbf{u}(t-\tau)d\tau + \int_0^t \mathbf{w}^f(\tau)\mathbf{f}(t-\tau)d\tau.$$

Демек,көп өлшемді жүйенің шығуы мен кіру шамаларының араық байланысы салмақтық матрицалар арқылы бір өлшемді жағдай-дағыдай жазылады.

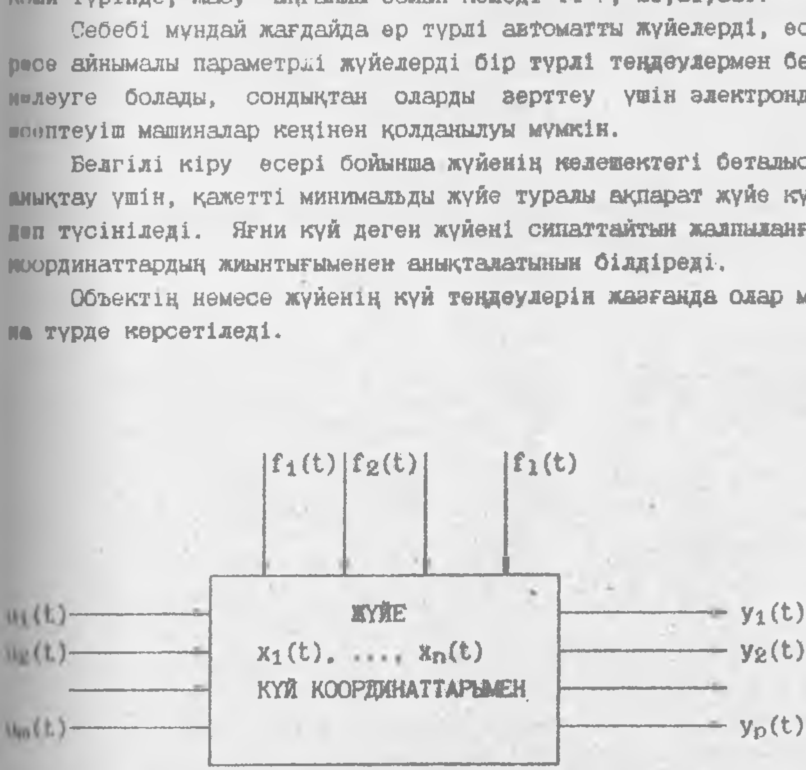
2.10 СЫЗЫҚТЫ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ КҮЙ ТЕҢДЕУЛЕРІ ТҮРІНДЕ ЖАЗЫЛУЫ

Автоматты басқару теориясында көптеген мәселелерді қарастырғанда бір өлшемді немесе көп өлшемді жүйелердің теңдеулерін күй теңдеулері түрінде, басқаша айтқанда қалыпты (қарапайым) Коши түрінде, жазу ыңғайлы болып келеді [4-7, 29,31,33].

Себебі мұндай жағдайда әр түрлі автоматты жүйелерді, әсіресе айнымалы параметрлі жүйелерді бір түрлі теңдеулермен бейнелеуге болады, сондықтан оларды зерттеу үшін электрондық есептеуіш машиналар кеңінен қолданылуы мүмкін.

Белгілі кіру әсері бойынша жүйенің келешектегі беталысын анықтау үшін, қажетті минимальды жүйе туралы ақпарат жүйе күйі деп түсініледі. Яғни күй деген жүйені сипаттайтын жалпыланған координаттардың жиынтығыменен анықталатынын білдіреді.

Объектің немесе жүйенің күй теңдеулерін жазғанда олар мына түрде көрсетіледі.



2.20 - сурет

Мұндағы: $y_1(t)$, ..., $y_p(t)$ - шығу координаттары; $u_1(t)$, ..., $u_m(t)$ - басқару немесе тағайындалған әсерлер; $f_1(t)$, ...,$f_R(t)$ - ауытқушы әсерлер; $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ - жүйенің ішкі күйін сипаттайтын айнымалы шамалар немесе күй айнымалылары.

Күй айнымалының физикалық мәнін түсіндіретін мысал ретінде R, L, C электр тізбегін келтіруге болады. Бұл тізбекте кіру мен шығу шамалары оның кірісіндегі және шығысындағы кернеу болады, ал күй айнымалары индуктивтік тоғы, конденсатордағы кернеудің түсуі және т.б. Олар кіру шамасы өзгергенде бір мәнді тізбектің күйінің өзгеруін сипаттайды.

Жалпы жағдайда қалыпты Коши түріндегі жүйе немесе күй теңдеулері туындысы бойынша шешілген бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі болып келеді және мына түрде жазылады.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{R} c_{ij} f_j$$
$$y_i = \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_j + \sum_{j=1}^{m} q_{kj} u_j \qquad (2.71)$$

$$i = 1 \div n, \qquad k = 1 \div \rho.$$

Бұл скалярлы дифферциалдық теңдеулер жүйесі векторлы-матрицалық түрде былай жазылады:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} + \mathbf{CF}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{DX} + \mathbf{QU} \qquad (2.72)$$

мұнда:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \cdots b_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1} \cdots b_{nm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} \cdots c_{1R} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1} \cdots c_{nR} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} \cdots d_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ d_{\rho 1} \cdots d_{\rho n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} \cdots q_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ q_{\rho 1} \cdots q_{\rho m} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad \mathbf{U} = (u_1, \ldots, u_m)^T,$$

$$\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_R)^T, \quad \mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_\rho)^T.$$

X векторы күй векторы делінеді. Бұл вектордың элементтері ($x_1, \ldots, x_n$) күй немесе фазалық координаттар болып келеді, олар (2.71) жүйенің бірінші теңдеу көмегімен y_k шығу шамасын екінші теңдеумен табуға мүмкіндік береді. (2.72) өрнектің бірінші теңдеуі бірінші ретті векторлы дифференциалдық теңдеу, ал екіншісі алгебралық векторлы теңдеу болып келеді және де біріншісі күй теңдеуі деп, ал екіншісі шығу теңдеуі деп аталады.

(2.72) теңдеуін қанағаттандыратын **X** векторлардың жиыны

...лық $U{=}\mathbf{U}$, $F{=}\Phi$ және барлық $t{=}T$, сызықты жүйенің күй кеңістігі ...деп аталады.

$\mathbf{U}$ векторды басқару векторы немесе оңай басқару делінеді, ...ал оның $u_1,\ldots,u_m$ координаттары басқару параметрлері деп ата...лады. $\mathbf{F}$ векторды ауытқушы немесе ауытқу деп атайды.

Бұл жерде назар аударатын жағдай, (2.72) түрдегі теңдеулер ...жүйесінен басқа түрлерге өту болуы. Мысалы (2.72) теңдеулерден ...түрлендіру матрицасын табуға болады. Болсын делік, бастапқы ...шарттар нольге тең және $\mathbf{F}{=}0$. Мұндай жағдайда (2.72) жүйенің ...Лаплас кескіні түрінде жазуға болады.

$$pX(p) = AX(p) + BU(p)$$
$$Y(p) = DX(p) + QU(p)$$

...Әне,

$$[pE - A]X(p) = BU(p)$$
$$Y(p) = DX(p) + QU(p)$$

...кері матрицасы бар деп бірінші теңдеуден табылады.

$$X(p) = [pE - A]^{-1}BU(p)$$

...мұнда: $\mathbf{E}$ -бірлік матрицасы. Онда

$$Y(p) = \{ D[pE-A]^{-1}+Q \}U(p). \qquad (2.73)$$

...демек $Y(p) = W^{u}(p)U(p)$, яғни $W^{u}(p) = D[pE - A]^{-1}+Q$ түрлендіру ...матрицасы болып келеді. Тура осылай $W^{f}(p)$ ауытқушы бойынша ...түрлендіру матрицасын табуға болады.

Бұл түрлендіру функциялардың матрицаларын тікелей анықтау ...әдісі. Бірақ, ол практикалық қолдануда барлық жағдайда жарамды ...емес, себебі әдіс матрицалардың айналдыруының есептеуін қажет ...етеді, және әдістің мағынасы бар, егер $[pE - A]^{-1}$ кері матрица ...болса, яғни егер $\det\,(pE - A) \neq 0$.

Ерекше назар аударатын жағдай (2.72) түрінде берілген жү...йенің қасиеттерінің зерттеуін (2.73) теңдеу бойынша мына тең...деумен жүргізуге болады.

$$y(t) = L^{-1}\{D[pE-A]^{-1}B+Q\}u(t).$$

ТҮРЛЕНДІРУ ФУНКЦИЯСЫ БОЙЫНША КҮЙ ТЕҢДЕУЛЕРІН АНЫҚТАУ. Күй ...теңдеулері түріне немесе қалыпты Коши түріне қандай болмасын ...жүйені келтіруге болады. Бір өлшемді объектінің түрлендіру ...функциясын қарастырайық.

$$W(p) = \frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n} \qquad (2.74)$$

Түрлендіру функцияның полюстері қаралайым, яғни нақты болсын делік. Онда (2.74) элементарды бөлшектердің қосындысындай жазуға болады, яғни

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{p - p_i} U(p) \qquad (2.75)$$

мұнда: R_i - P-дан көп мүше; p_i - түрлендіру функциясының полюстері; $i = 1 \div n$. Лаплас кескіні түрінде күй айнымалысын қарастыруға енгівейік

$$X_i(p) = \frac{R_i}{p - p_i} U(p) \qquad (2.76)$$

онда (2.75) жазуға болады:

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \qquad (2.77)$$

(2.76) өрнектен жазайық:

$$pX_i(p) = p_i X_i(p) + R_i U(p) \qquad (2.78)$$

Кері Лаплас түрлендіруін қолданып (2.78) жазуға болады:

$$x'_i = p_i X_i(p) + R_i U(p), \qquad (2.79)$$

онда бұл теңдеудің шешімі $x_i(t)$ болатынын еске алып (2.77) өрнекті оригинал түрінде келесідей жазайық:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t) \qquad (2.80)$$

Өдде (2.79) және (2.80) өрнектерді векторлы түрде жазуға болады

$$dX/dt = AX + BU$$

$$Y = CX$$

мұнда: $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $A = \mathrm{diag}\,(p_1, \dots, p_n)$,
$B = (R_1, \dots, R_n)^T$; $C = (1, \dots, 1)$,
Y, U - скалярлы шамалар.

МЫСАЛ: болсын $W(p) = \dfrac{k}{p\,(Tp + 1)}$,

бұл түрлендіру функцияны күй теңдеулері түрінде жазу керек. Ол үшін түрлендіру функциясының полюстерін анықтайық, яғни $p(Tp+1)=0$, $p_1=0$, $p_2=1/T$, онда түрлендіру функциясы жазылады

$$W(p) = \frac{R_1}{p - p_1} + \frac{R_2}{p - p_2} = \frac{(TR_1 + TR_2)p + R_1}{p(Tp + 1)}$$

Бұл түрлендіру функциясы бастапқыға тең, егер $(TR_1 + TR_2) = 0$, яғни $R_1 = k$ немесе $TR_1 = -TR_2$ онда $R_2 = -k$. Енді Лаплас кескіні түрінде күй айнымалылар енгізейік:

$$X_1(p) = \frac{k}{p} U(p), \qquad X_2(p) = \frac{kT}{Tp + 1} U(p)$$

немесе:

$$pX_1(p) = kU(p)$$
$$pX_2(p) = -T^{-1}X_2(p) - kU(p)$$
$$Y(p) = X_1(p) + X_2(p)$$

Нольдік бастапқы шарт жағдайында кері Лаплас түрлендіруін қолданып табамыз

$$x_1 = kU$$
$$x_2 = -T^{-1}x_2 - kU$$
$$y = x_1 + x_2$$

немесе векторлы матрицалы түрде

$$X' = AX + BU$$
$$Y = CX$$

мұнда:

$$X = (x_1, x_2)^T, \quad C = [1, 1],$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}.$$

Сонымен күй айнымалылардың абстракты, физикалық мағынасыз шамалар екені қарастырылған мысалдардан көрінеді, бірақ олардың өзгеруі бойынша жүйенің беталысы туралы жоруға болады.

ФАЗАЛЫҚ АЙНЫМАЛЫ ӘДІСПЕН КҮЙ ТЕҢДЕУЛЕРІН АНЫҚТАУ. Күй теңдеулері бойынша түрлендіру функциясы бір мәнде анықталады, алайда бір түрлендіру функциясына бірнеше әр түрлі күй теңдеулері сәйкесуі мүмкін.

Бір өлшемді жүйелердің күй теңдеулерін шығару үшін жиі қолданылатын фазалық айнымалы әдісі деп аталатын тағы бір әдісті қарастырайық.

Бір өлшемді объектінің немесе жүйенің (2.74) түрлендіру функциясын келесідей жазып және оны X(p) деп белгілейік, яғни

$$\frac{Y(p)}{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \cdots + b_m} = \frac{U(p)}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_n} = X(p) \qquad (2.81)$$

немесе (2.81) бөлек жазуға болады:

$$\frac{U(p)}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n} = X(p), \quad \frac{Y(p)}{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\cdots+b_m} = X(p)$$

Будан табамыз:

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n)X(p) = U(p) \qquad (2.82)$$

$$(b_0p^m+b_1p^{m-1}+\cdots+b_m)X(p) = Y(p) \qquad (2.83)$$

немесе (2.82) жоғарғы ретті туынды бойынша шешіп жазайық

$$p^nX(p) = \frac{1}{a}\,[-a_1p^{n-1}X(p) - \cdots - a_nX(p) + U(p)]$$

әлде Лаплас кері түрлендіруін қолданып табамыз

$$x^{(n)}(t) = \frac{1}{a_0}[-a_1x^{(n-1)}(t) - \cdots - a_nx(t) + u(t)] \qquad (2.84)$$

Енді фазалық айнымалыларының белгісін енгізейік

$$x=x_1, \quad x'_1=x_2,\ldots,x'_{n-1}=x_n \qquad (2.85)$$

Онда (2.84) жазуға болады

$$x'_n(t) = \frac{1}{a_0}[-a_1x_n(t) - \cdots - a_nx_1(t) + u(t)] \qquad (2.86)$$

Сонымен бірге айнымалы шығу шамасы (2.83) бойынша жазылады

$$y(t) = b_0x_{m+1}(t) + b_1x_m(t) + \cdots + b_mx_1(t) \qquad (2.87)$$

Енді (2.85 - 2.87) теңдеулер жүйесіндей жазуға болады

$$\begin{aligned}
&x'_1(t) = x_2(t)\\
&x'_2(t) = \qquad x_3(t)\\
&\qquad\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.88)\\
&x'_n(t) = - a'_nx_1(t) - \cdots - a'_1x_n(t) + a'_0u(t)\\
&y(t) = b_0x_{m+1}(t) + b_1x_m(t) + \cdots + b_mx_1(t)
\end{aligned}$$

мұнда $a'_i = a_i/a_0$, $i=1\div(n-1)$.

Әлде (2.88) векторлы матрицалық түрінде жазылады

$$\bar{X}' = A\bar{X} + CU$$

$$Y = B\bar{X}$$

мұнда: $\bar{X} = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, $C = (0, 0, \ldots, 1)$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a'_n & -a'_{n-1} & \cdots & & a_1 \end{bmatrix}, \quad B = (b_0, b_1, \ldots, b_m),$$

Y пен U -скаляр шамалар.

Бұл жерде назар аударатын жағдай A матрицаның стуктурасы, мұндай структуралы матрицалар М.Фробениус матрицасы деп аталады, әлде жетектік матрица делінеді.

Мұнда еске сала кететіні (2.88) жүйедегі айнымалы шамалардa абстрактілік шамалар болып келеді.

МЫСАЛ: болсын дейік бір өлшемді үзбенің түрлендіру функциясы төмендегідей

$$W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1} = \frac{Y(p)}{U(p)}.$$

Белгілер енгізейік

$$\frac{U(p)}{T^2p^2+2\xi Tp+1} = X(p), \quad \frac{Y(p)}{k} = X(p).$$

Мұдан шығарамыз

$$(T^2p^2+2\xi Tp+1)X(p) = U(p) \qquad (2.89)$$

$$kX(p) = Y(p) \qquad (2.90)$$

немесе (2.89) теңдеуді жоғарғы ретті туынды бойынша шешіп жазайық.

$$pX(p)' = \frac{1}{T^2}[-2\xi TpX(p) - X(p) + U(p)]$$

Мұл теңдеуге кері Лаплас түрлендіруін қолданып табамыз

$$x''(t) = \frac{1}{T^2}[-2\xi Tx'(t) - x(t) + u(t)] \qquad (2.91)$$

Фазалық айнымалы шамаларды белгілейік

$$x = x_1, \text{ онда } x'_1 = x_2. \qquad (2.92)$$

Енді (2.90 -2.92) теңдеулерді жүйе түрінде жазуға болады

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = \frac{1}{T^2}[-2\xi Tx_2 - x + u] \qquad (2.93)$$

$$y = kx_1$$

Әлде векторлы-матрицалы түрінде (2.93) жазылады

$$\dot{X} = A\bar{X} + CU$$

$$Y = B\bar{X}$$

мұнда:

14-207

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{T^2} & -\dfrac{2\xi}{T} \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = (k,0),\ \mathbf{X} = (x_1,x_2)^T.$$

Қорытындысында қарастырылған түрлендіру функциясынан күй теңдеулерге өту әдістері тек қана бір өлшемді жүйелерге жарамды ғана емес, олар көп өлшемді жүйелерге де жарамды, яғни егер көп өлшемді жүйенің теңдеуі (2.65) түрде берілсе де, әдістер жарамды болатынын атап өту қажетті.

КҮЙ ТЕҢДЕУЛЕРІН ШЕШУ. Бұдан бұрын айтылғандай күй теңдеуі деп мынадай теңдеуді айтады:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} + \mathbf{CF} \tag{2.94}$$

Бұл теңдеумен қатар біртекті теңдеуді қарастырайық.

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} \tag{2.95}$$

Болсын дейік: $\mathbf{X}^{(1)}=(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})^T$, $\mathbf{X}^{(2)}=(x_1^{(2)},\dots,x_n^{(2)})^T$ $\mathbf{X}^{(n)}=(x_1^{(n)},\dots,x_n^{(n)})^T$ - (2.95) теңдеудің n сызықты тәуелсіз шешімдері. Осындай шешімдер, (2.95) теңдеудің фундаменталды шешімдер жүйесі делінеді. Фундаменталды жүйенің і-ші шешімін і-нші баған деп есептеп матрица құрайық:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}.$$

Бұл матрица (2.94, 2.95) теңдеулердің фундаменталдық (өтпелі) матрицасы деп аталынады. Фундаменталдық матрица күй кеңістігінде, күй векторының ұшының қимылын суреттейді. Егер фундаменталдық матрица бірлік матрицаға айналса, онда ол нормаланған делінеді. Кез келген $\mathbf{\Phi}(t)$ фундаменталдық матрицаны қолданып, нормаланғанды ($\mathbf{X}(t,t_o)$ деп белгілеп) былай жазуға болады

$$\mathbf{X}(t,t_o) = \mathbf{\Phi}(t)\cdot\mathbf{\Phi}^{-1}(t_o);\mathbf{X}(t_o,t_o) = \mathbf{E}. \tag{2.96}$$

Нормаланған фундаменталды матрица арқылы, $\mathbf{X}(t_o) = \mathbf{X}^o$ бастапқы шарттармен және барлық t үшін, біртекті емес (2.94) теңдеудің шешімін мынадай қатысты түрінде көрсетуге болады.

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t,t_o)\mathbf{X}^o + \int_{t_o}^{t}\mathbf{X}(t,\tau)[\mathbf{BU}(\tau) + \mathbf{CF}(\tau)]d\tau \tag{2.97}$$

Бұл қатыс Коши формуласы деп аталады. Коши формуласы біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімін, кейбір біртекті сызықты жүйенің шешіміне сәйкесетін шешімдердің жүйесі арқылы өрнектегенге мүмкіншілік береді.

Нормаланған фундаменталдық матрицаның негізгі қасиетін ескертейік. (2.96) қолданып, қандай болмасын t, t' және t_o келесі теңдіктерді оңай табуға болады.

$$\mathbf{X}(t,t')\mathbf{X}(t',t_o) = \mathbf{X}(t,t_o);\ \mathbf{X}^{-1}(t,t_o) = \mathbf{X}(t_o,t)$$

Коши формуласының әділеттігін (2.94) теңдеумен келесі теңдеуді қарастырып тексеруге болады.

$$\frac{d\mathbf{X}(t,t_o)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t,t_o);\quad \mathbf{X}(t,t_o) = \mathbf{E}.$$

Мұнында

$$\frac{d\mathbf{X}(t,t_o)}{dt} = \frac{d\Phi(t)}{dt}\Phi^{-1}(t_o) = \begin{bmatrix} \frac{dx_1^{(1)}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dx_n^{(1)}(t)}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dx_1^{(n)}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dx_n^{(n)}(t)}{dt} \end{bmatrix}\Phi^{-1}(t_o) =$$

$$= [\mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{A}\mathbf{X}^{(2)}\cdots\mathbf{A}\mathbf{X}^{(n)}]\Phi^{-1}(t_o) = \mathbf{A}\Phi(t)\Phi^{-1}(t_o) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t,t_o)$$

$\mathbf{X}(t_o) = \mathbf{X}^o$ бастапқы шартты қанағаттандыратын (2.95) теңдеу жүйесінің шешімін жазуға болады

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(t,t_o)\mathbf{X}^o \tag{2.98}$$

Расында шешім үшін бастапқы шарттар орындалуы келесі теңдіктен шығады

$$\mathbf{X}(t_o) = \mathbf{X}(t_o,t_o)\mathbf{X}^o = \mathbf{E}\mathbf{X}^o = \mathbf{X}^o$$

Бұдан басқа

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{d\mathbf{X}(t,t_o)}{dt}\mathbf{X}^o = \mathbf{A}\mathbf{X}(t,t_o)\mathbf{X}^o = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

Сонымен (2.95) теңдеудің $\mathbf{X}(t_o) = \mathbf{X}^o$ бастапқы шартын қанағаттандыратын шешім $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t,t_o)\mathbf{X}^o$ болатынын көрсетейік.

Біртекті емес (2.94) теңдеудің шешімін анықтау үшін белгісіз функциялардың алмастыруын жасайық. Болсын дейік

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t,t_o)\mathbf{k}, \tag{2.99}$$

онда

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{X}(t,t_o)}{dt}\mathbf{k} + \mathbf{X}(t,t_o)\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t,t_o) + \mathbf{X}(t,t_o)\frac{d\mathbf{k}}{dt} =$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{X}(t,t_o)\mathbf{k} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{C}\mathbf{F}$$

бұдан

$$\frac{dk}{dt} = X^{-1}(t,t_o)[BU + CF] \qquad (2.100)$$

$X = X^o$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын (2.94) біртекті емес теңдеудің X шешімін табайық. (2.99) формуладан шығады

$$k(t_o) = X^{-1}(t_o,t_o)X^o = X^o \qquad (2.101)$$

Бұл бастапқы шартта (2.100) теңдеуді шешейік

$$k = X^o + \int_{t_o}^{t} X(\tau,t_o)[BU(\tau) + CF(\tau)]d\tau$$

Табылған **k** мөнін (2.99) қойып, және $X(t,t_o)X^{-1}(\tau,t_o)=X(t,\tau)$ еске алып (2.97) Коши формуласын табамыз.

(2.95) теңдеуге түйіндес теңдеуін қарастырайық: $z' = -Az$ Егер бұл теңдеудің нормаланған фундаменталдық матрицасы $Z(t,t_o)$ болса, яғни

$$\frac{dZ(t,t_o)}{dt} = -A^T Z(t,t_o); \quad Z(t_o,t_o) = E$$

онда Коши формуласын жазуға болады.

$$z(t) = Z^T(t_o,t)x(t_o) + \int_{t_o}^{t} Z^T(t_o,t)[BU(\tau) + CF(\tau)]d\tau \qquad (2.102)$$

Шынымен, $X(t,t_o)X^{-1}(t,t_o)=E$ теңбе-теңдікті дифференциалдап табамыз

$$\frac{dX(t,t_o)}{dt} X^{-1}(t,t_o) + X(t,t_o)\frac{dX^{-1}(t,t_o)}{dt} = 0$$

немесе

$$AX(t,t_o)X^{-1}(t,t_o) + X(t,t_o)\frac{dX^{-1}(t,t_o)}{dt} = 0$$

Бұл теңдеуден

$$\frac{dX^{-1}(t,t_o)}{dt} = -X^{-1}(t,t_o)A,$$

немесе транспонирланғаннан кейін

$$\frac{d[X^{-1}(t,t_o)]^T}{dt} = -A^T[X^{-1}(t,t_o)]^T; \quad [X^{-1}(t,t_o)]^T = E.$$

Бұл теңдеуді $Z(t,t_o)$ үшін жазылған теңдеумен салыстырып, табамыз. $Z(t,t_o) = [X^{-1}(t,t_o)]^T$

немесе

$$Z(t,t_o)^T = X^{-1}(t,t_o) = X(t,t_o)$$

Бұл теңдеуді (2.97) өрнекке қойғанда (2.102) өрнек шығады.

Сонымен нормаланған фундаменталды матрица (2.96) формуламен табылады, ал (2.94) түрде берілген біртекті емес теңдеудің шешімі Коши (2.97) формуласы арқылы анықталады.

Егер **A** матрица тұрақты болса, онда $\mathbf{X}(t,t_o)$ нормаланған матрица тек қана $(t-t_o)$ айырымнан тәуелді, яғни $\mathbf{X}(t,t_o)=\mathbf{X}(t-t_o)$, және де келесі матрицалық теңдік әділетті

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A(t-t_o)}\right) = Ae^{A(t-t_o)} \qquad (2.103)$$

Бұл теңдік оңай тексеріледі келесі матрицалық қатарды мүше-мүшемен дифференциалдау жолымен

$$e^{A(t-t)}=E+A(t-t_o)+\frac{1}{2!}A^2(t-t_o)^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^n(t-t_o)^n+\cdots \qquad (2.104)$$

Бұл матрица (2.103) теңдік бойынша төменгі матрицалық теңдеудің шешімі болып келеді.

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{AX}$$

$e^{A(t-t)}$ шешім, $\mathbf{X}(t_o) = \mathbf{E}$ бастапқы шартты қанағаттандырады. Шешім жалғыз ғана болатындықтан, біртекті тұрақты коэффициентті жүйенің нормаланған матрицасы үшін келесі өрнекті табамыз.

$$\mathbf{X}(t,t_o) = e^{A(t-t)}$$

МЫСАЛ: жүйе теңдеулермен берілсін дейік

$$x'_1 = x_2; \quad x'_2 = u$$

немесе матрицалық түрдегі теңдеумен

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$$

мұнда

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}.$$

(2.104) қолданып, нормаланған фундаменталды марицаны табайық. Алдыменен есептейік:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \ldots$$

онда ,

$$X(t,t_o) = e^{A(t-t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(t - t_o) = \begin{bmatrix} 0 & t-t_o \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Коши формуласы бойынша $X(t_o) = X^o$ болғанда, біртекті емес теңдеудің шешімі болады.

$$X(t) = \begin{bmatrix} 0 & t-t_o \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X^o + \int_{t_o}^{t} \begin{bmatrix} 0 & t-\tau \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} d\tau$$

бұдан скалярлы жазуында табамыз:

$$x_1(t) = x_1 \ +(t-t_o)x^o_2 + \int_{t_o}^{t}(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

$$x_2(t) = x^o_2 + \int_{t_o}^{t} u(\tau)d\tau$$

Нормаланған матрицаны шексіз матрицалық қатарға жіктеуіне негізделінген, нормаланған фундаменталды матрицаны анықтау әдісі жалғыз емес. Көп әдістердің негізі, Сильвестрдің теоремасы және Кэли-Гамильтонның әдісі болып келеді. Нормаланған матрицаны Лаплас түрлендіруін қолданып табуға болады.

ЛАПЛАС ТҮРЛЕНДІРУІН ҚОЛДАНУ ӘДІСІ. (2.95) теңдеудің екі жағының Лаплас түрлендірілуі мынаған келтіреді

$$pX(p) - X(0) = AX(p).$$

Демек,

$$X(p) = [pE - A]^{-1}X(0).$$

Бұл теңдеудің екі жағына Лапластың кері түрлендіруін қолданып табамыз:

$$x(t) = L^{-1}\{[pE - A]^{-1}\}X(0).$$

Енді бұл теңдеуді (2.98) салыстырып, төмендегідей қорытындыға келеміз:

$$X(t,t_o) = L^{-1}\{[pE - A]^{-1}\} = e^{A(t-t)}.$$

Келтірілген әдіс көптеген мәселелерді шешкенде ең ыңғайлы болып келеді. Бұл әдістің ең негізгі қиыншылығы $[pE - A]^{-1}$ кері матрицасын табуда болатыны айқын.

МЫСАЛ: берілген A матрица бойынша $X(t,t_o)$ нормаланған фундаменталдық матрицаны табу қажет.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Мұндай матрица үшін

$$[pE - A] = \begin{bmatrix} p & 2 \\ -1 & p+3 \end{bmatrix},$$

онда

$$X(p) = [pE - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} p+3 & -2 \\ 1 & p \end{bmatrix}}{p^2+3p+2}$$

мұнда $X(p) = L\{X(t,t_o)\}$. Табылған $X(P)$ нормаланған фундаментальдық матрицаның кескінінің әр элементінен кері түрлендіруін есептеп табамыз.

$$X(t,t_o) = L^{-1}\{X(p)\} = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{2t} & 2(e^{-2t}-e^{-t}) \\ e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-e^{-t} \end{bmatrix}.$$

2.11 СЫЗЫҚТЫ СТАЦИОНАРЛЫ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ БАСҚАРЫЛУЫ МЕН БАҚЫЛАНУЫ

Қатаң математикалық пен стилімен дамып келе жатқан жүйелердің теориясында басқарушылық пен бақылаушылық ұғымдар ендіріледі [2, 29, 31, 33].Біз қатаң математикалық теорияны баяндап жатпай, іс жүзінде қолданатын тек қана негізгі түсініктемелерін қарастырайық.

Сызықтық стационарлы жүйенің динамикалық теңдеуі былай болсын дейік.

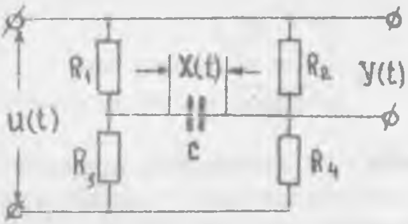
$$X = AX + BU$$
$$Y = CX$$

мұнда: X-күй векторы; U - басқару векторы; A,B және C -сәйкесті матрицалар $[a_{ij}]_{nn}$, $[b_{ij}]_{nm}$, $[c_{ij}]_{pn}$; Y - шығу шамаларының векторы.

Егер кейбір $u(t)$ басқару әрекетінің ықпалымен шекті уақыт аралығында жүйе қандай болмасын бастапқы X_0 күйден X_1 шекті күйге келтірілінетін (көшірілетін) болса, онда ондай қасиетті жүйе толығымен басқарылатын делінеді.

Егер жүйенің барлық координаттары бойынша мұндай қасиеті болмаса, онда ол толықсыз (жарым-жартылай) басқарылатын болады.Жүйелер толығымен басқарылмайтын болуы мүмкін. Бұл ұғымдардың түсініктемелерін мысалмен беруге болады.

Жүйенің (объектінің, үзбенің) мысалы ретінде электр тізбегін қарастырайық (2.21-сурет). Мұнда u(t) және y(t) сәйкесті кіру және шығу шамалары, сонымен $R_1=R_2=R_3=R_4$ болсын.

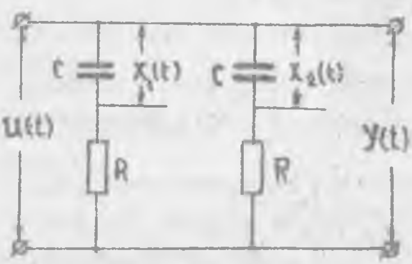


2.21-сурет

Күйдің айнымалысы деп С конденсатордағы кернеудің түсу мәнін есептейік. Егер $x(t_0)=0$, онда кіру шамасының өзгеруінен тәуелсіз барлық $t>t_0$, $x(t)=0$ екені айқын көрінеді. Яғни кіру басқару әсері күйдің айнымалысына ешқандай әсер етпейді, сондықтан мұндай қасиеті бар жүйе t_0 уақыт мезгілінде толығымен басқарылмайтын жүйе деп айтылады.

Екінші мысал (2.22 -сурет). Бұл электр тізбекте $x_1(t)$ және $x_2(t)$ конденсаторлардағы кернеулер, күйдің айнымалылары болсын. u(t) кіру шамасы екі күйдің айнымалыларына әсер етеді. u(t) кіру шамасы арқылы, екі айнымалы шамалардың қайсысын болсын бөлек кез келген мәнге келтіруге болады, алайда жүйе күйін, яғни $x=(x_1x_2)$ векторды кез келген мәнге келтіруге болмайды.

Шынында, егер $x_1(t_0)=x_2(t_0)=0$ болса, онда u(t) кіру шамасынан тәуелсіз барлық $t>t_0$ уақытта $x_1(t)=x_2(t)$ болады, яғни $x_1(t)\neq x_2(t)$ күйге жүйені келтіруге болмайды. Сондықтан мұндай қасиеттері бар, жүйелерді толықсыз басқарылатын жүйелер деп атайды, яғни бұл мысалда u(t) өзгергенде, тек қана күй векторының ұзындығы өзгереді, бірақ күй кеңістігінде оның тұратын орны өзгермейді.



2.22-сурет

Жүйенің басқарылушылығы туралы жору белгілі Калман теоремасына негізделінеді. Ол теорема бойынша n×nm өлшемді Калман матрицасы құрылады.

$$K = [B \mid AB \mid \ldots \mid A^{n-1}B] \qquad (2.106)$$

Егер Калман матрицасының r рангісі n-ға тең болса, онда ондай жүйе толығымен басқарылатын болады. Егер r=0 болса, онда жүйе толығымен басқарылмайтын болады.

Егер **K** матрицасының рангісі r<n болса, онда жүйе жартылай басқарылатын болады. Онда жүйенің басқарылатын r ретті бөлігін белгілеуге болады, ал қалған бөлігі басқарылмайтын болады.

Зерттелінетін жүйенің басқару әсері бірге тең болғанда, яғни m=1 болғанда (2.106) сәйкес **K** матрицасы n×m квадратты болады. Бұл жағдайда жүйе толығымен басқарылатын болу үшін **K** матрицасының анықтауышысы нольге тең болмау керек (яғни ол нольге айналмаған болуы керек), себебі тек қана осы жағдайда матрицаның рангісі r=n .

Жүйенің басқарушылығын анықтау үшін қарапайым мысалдарды келтірейік.

1. Жүйе мынадай теңдеумен жазылсын дейік.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u$$

Бұл жағдайда болады:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Олай болса, (2.106) сәйкес

$$\mathbf{K} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}], \ \det\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0,$$

Демек, жүйе толығымен басқарылатын болады.

2. Жүйенің түрі болсын дейік:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0$$

онда

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Табамыз

$$\det K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

сонымен жүйе басқарылатын болмайды. Бұл матрицаның рангісі $r=1$, яғни $r<n$.

3. Жүйе екі кіру шамаларымен берілсін дейік

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - u_1 + u_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2\ x_1 + 2u_2$$

Бұл жерде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Демек

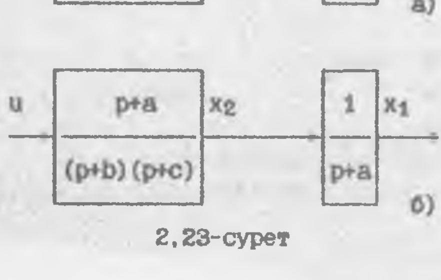
$$K = [B|AB],\ \det K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Бұл матрицаның рангісі $r=2$, яғни жүйе толығымен басқарылатын болады. [2] кітапта қарастырылған, тағы да бір ынталандыратын мысал келтірейік. Екі басқару әсерлі 2.23,а -суретте бейнеленген жүйе толығымен басқарылатын екенін көрсетуге болады. Егерде тек қана бір басқару әсер ендірілсе $u_1=u$ (2.23,б-сурет), онда жүйе толығымен басқарылатын болмайды. Ақиқатында, жүйе теңдеулерін

$$(p+a)x_1 = x_2$$

$$(p+b)(p+c)x_2 = (p+a)u$$

қалыпты түрге келтіруге болады.



2,23-сурет

$$\frac{dx_1}{dt}=-ax_1+x_2;\quad \frac{dx_2}{dt}=-bx_2+(a-c)x_3+u;\quad \frac{dx_3}{dt}=-cx_3+u \qquad (2.107)$$

Онда бұл теңдеуді (2.105) жалпы өрнекпен салыстырып табамыз

$$A=\begin{bmatrix}-a & 1 & 0\\ 0 & -b & a-c\\ 0 & 0 & -c\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad AB=\begin{bmatrix}1\\ a-b-c\\ -c\end{bmatrix}$$

және

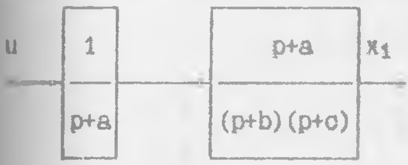
$$A^2=\begin{bmatrix}a^2 & -(a+b) & a-c\\ 0 & b^2 & -(a-c)(b-c)\\ 0 & 0 & c^2\end{bmatrix},\quad A^2B=\begin{bmatrix}1\\ b^2-(a-c)(b+c)\\ c^2\end{bmatrix}.$$

Бұдан (2.106) сәйкес K матрицасы болады.

$$K=[B\,|\,AB\,|\,A^2B]=\begin{bmatrix}0 & 1 & -(b+c)\\ 1 & a-b-c) & b^2-(a-c)(b+c)\\ 1 & -c & c^2\end{bmatrix}.$$

Бұл матрицаның анықтауышы нольге тең, бірақ нольге тең емес екінші ретті минорлары бар. Сондықтан матрицаның рангісі $r=2$, яғни $r<n$. Жүйе жартылай басқарылатын. Жүйеде басқарылатын екінші ретті бөлігін белгілеуге болады.

Бірақ 2.23,б- суреттегі блоктардың орындарын алмастырса (2.24-сурет), онда жүйе толығымен басқарылатын болады. Оны оңай көрсетуге болады, бұл жағдайда жүйе теңдеулері, қалыпты түрде келесідегідей болады:



2.24-сурет

$$\frac{dx_1}{dt}=-bx_1+(a-c)x_3+u;\quad \frac{dx_2}{dt}=-ax_2+u;\quad \frac{dx_3}{dt}=-cx_3+u,$$

бұның (2.107) теңдеулер жүйесінен айырмашылығы u басқару әсерлік барлық үш теңдеулеріне енуінде.

Енді бақылаушылық ұғымын қарастыруға көшейік. Тікелей бақыланатын шамалар (2.20-сурет) өлшеуге келетін Y(t) шығу шамалары болады.

Шекті уақыт аралығындағы Y(t) шығу шамаларын бақылап (өлшеп) жүйенің барлық күй координаттарын анықтауға мүмкіншілік беретін жүйенің қасиеті, оның бақылаушылығы делінеді. Ал ондай қасиетті жүйе толығымен бақыланатын болады.

Егер өлшенген шығу шамалары арқылы күй координаттарының барлығы анықталмаса, онда жүйе жартылай бақыланатын болады.

Жүйенің теңдеуі векторлы матрицалық (2.106) түрінде берілсін дейік. Оның бақылаулығы туралы жору үшін Калман теоремасы бойынша $n \times np$ өлшемді матрица құрылады

$$\mathbf{H} = [\mathbf{C}^T | \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T | (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T | \ldots | (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T], \qquad (2.108)$$

мұнда $\mathbf{A}^T$ мен $\mathbf{C}^T$ - транспонирленген матрицалар.

Жүйе толығымен бақыланатын болады, егер $\mathbf{H}$ матрицаның рангісі n-ға тең болса. Егер оның рангісі $r<n$ болса, онда жүйе жартылай бақыланатын болады. Жүйенің бақыланатын бөлігінің реті r-ға тең болады.

Өлшенетін шығу шамасы y жалғыз болған жағдайда $\mathbf{C}$ матрица жалғыз жатық жолды болады, ал $\mathbf{C}^T$ сәйкесті бір бағанды. Онда $\mathbf{H}$ матрицаның өлшемі болады, $n \times n$ сондықтан жүйе толығымен бақыланатын болу үшін $\mathbf{H}$ матрицасы азғындалмаған болуы қажет.

Қарапайым мысалдар келтірейік.

1. Жүйе теңдеулермен жазылсын дейік.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = u; \quad y = x_1$$

мұнда

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\ 1 \ 0\ ], \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Бұдан (2.108) сәйкес табамыз:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Бұл матрицаның рангісі екіге тең. Сондықтан қарастырылып отырған жүйе толығымен бақыланатын болады. Расымен, егер x_1 өлшенсе, онда бірінші теңдеу бойынша x_2-де анықталынады.

2. Жүйе теңдеулерімен беріледі дейік.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = u; \quad y = x_2$$

Мұнда $\mathbf{C} = [0\ 1]$ матрицасы ғана өзгерді. Сондықтан,

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \det \mathbf{H} = 0$$

Жүйе толығымен бақыланатын болмайды. Расымен, мұнда x_2 шама өлшенеді, яғни x_1 шаманың өзгеру жылдамдығы. Сондықтан x_1 шаманың өзі анықталмаған болып қалады.

Ерекше бір назар аударатын жай бұл мысалы, (толықсыз басқарылатын) 2.23б-суретте көрсетілген жүйе, егер тек қана x_1 координаты өлшенсе, яғни $\mathbf{C} = [1\ 0\ 0]$ болса, толығымен бақыланатын болады (егер ол үшін $\mathbf{H}$ матрицасын құрып жүйенің бақыланытындығы анықтаса). Және де керісінше 2.24-суреттегі жүйе толығымен басқарылатын болса да жартылай бақыланатын болады.

Демек басқарушылық және бақылаушылық көзқарастан, түрлендіру функцияларда (мұнда мысалы $p+\alpha$) бірдей көбейткіштерді қысқартуға және олардың орындарын ауыстыруға болмайтыны келтірілген мысалдардан көрінеді.

Басқарушылық және бақылаушылық ұғымдардың оптималды жүйелердің теориясында маңыздары зор. Бірақ олар зерттелінетін немесе жобаланатын әдеттегі жүйелердің толық қасиеттерін көрсету үшін көп жағдайларда пайдалы болып келеді.

3 - ТАРАУ

СЫЗЫҚТЫ АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

3.1 ОРНЫҚТЫЛЫҚ ТУРАЛЫ ҰҒЫМ

Қандай болмасын жүйеге үнемі сыртқы ауытқушы әсерлер әрекет етіп тұрады, ондай әсерлер жүйенің әдеттегі жұмысын бұзуы мүмкін. Дұрыс жобаланған жүйе бардық сыртқы ауытқылаушыларда орнықты жұмыс істеуі ..істі.

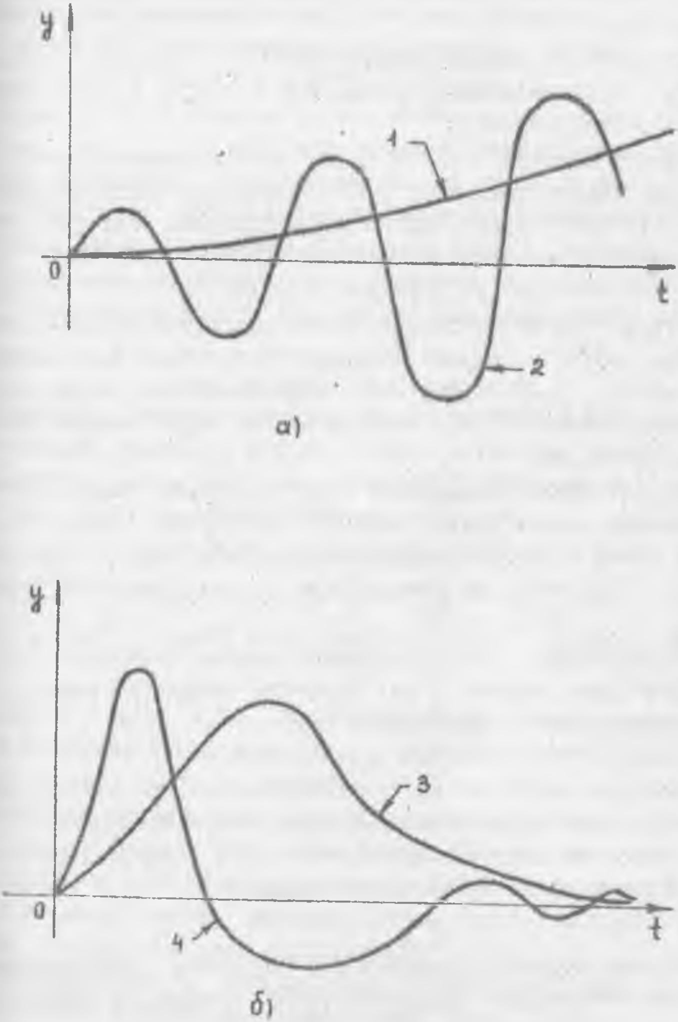
Ең қарапайым жағдайда жүйенің орнықтылық ұғымы жүйені тепе теңдік жағдайдан шығарған сыртқы әсерлер жойылғаннан кейін оның сол жағдайға (белгілі дәлдікпен) қайтып келу икемділігімен байланысты. Егер жүйе орнықсыз болса, онда ол тепе-теңдік жағдайға қайтып келмей одан алыстап кетеді немесе оның айналасында рұқсат етілмейтін үлкен тербелістерді жасайды.

Басқару жүйелердің өтпелі процестердің типті қыйсықтары 3.1-суретте көрсетілген. Егер жүйе орнықсыз болса, онда оның ішінде бастапқы тұрақталынған жағдайдан жинақсыз (ажырайтын) процесс басталу үшін жүйеге кез келген сыртқы түрткі жеткілікті болады. Ондай процесс апериодтық (3.1,а-сурет,1-қыйсық) немесе тербелмелі (3.1,а-сурет 2-қыйсық) болуы мүмкін.

Жүйе орнықты болған жағдайда ондағы кейбір әсердің ықпалынан пайда болған өтпелі процесс уақыт бойынша монотонды (3 қыйсық), немесе тербелмелі түрде (4 қыйсық) өтеді. Сонымен орнықты жүйені өтпелі процесінің өту түрімен анықтауға болады.

Келтірілген орнықтылық туралы ұғым жүйенің тұрақталынған режимінің орнықтылығын анықтайды. Бірақ,жүйе тұрақталынған режимі жалпы болмайтын,яғни әсерлердің үздіксіз өзгеріп тұратын жағдайында жұмыс істеуі мүмкін. Мұндай жұмыс істеу жағдайын есепке алып орнықтылықтың жалпылау анықтамасын беруге болады: жүйе орнықты делінеді,егер мөлшер бойынша шектелінген ауытқушылар әрекет етіп тұрған жағдайда оның шығу шамасы шектелініп қала берсе.

АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫНЫҢ ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ. Тұйықталған автоматты басқару жүйесінің қозғалысы $g(t)$



3.1-сурет

тағайындалған әсер әрекет етіп тұрғанда және f(t) ауытқушы әсерлер нольге тең болғанда y(t) басқарылатын шама үшін былай жазылсын дейік

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n)y(t)=(b_0p^m+b_1p^{m-1}+\cdots+b_m)g(t) \qquad (3.1)$$

мұнда: p - дифференциалдау операторы, a_i, b_j - тұрақты коэффициенттер ($i=1 \div n$, $j=1 \div m$).

Жүйенің орнықты әлде орнықсыз екенін анықтау қажет. Бұл мәселенің тікелей шешу әдісі, (3.1) теңдеудің шешімін табуында тұрады. (3.1) біртекті емес дифференциалдық теңдеудің шешімі жалпы түрде екі құрау...дан тұратыны белгілі

$$y(t) = y_д(t) + y_ж(t) \qquad (3.2)$$

мұнда: $y_д(t)$ - өтпелі процесс біткенінен кейін жүйедегі тұрақталынатын, еріксіз режимді бейнелейтін біртекті емес теңдеудің дербес шешімі; $y_ж(t)$ - біртекті дифферианцалдық теңдеудің жалпы шешімі, яғни (3.2) теңдеудің оң жағы нольге тепе-тең болғандағы шешім.

Біртекті дифферианцалдық теңдеудің жалпы шешімі басқарылатын шаманың еркін өзгеру процесін бейнелейді. Ондай процесс орынды, егер жүйені тепе-тең жағдайдан сыртқы әсер арқылы шығарып, одан кейін ол әсерді алып тастап жүйені өз еркімен жіберсе.

Дербес шешім (3.1) теңдеудің жалпы шешімінің еріксіз құраушысы деп аталады, ал біртекті теңдеудің жалпы шешімі өтпелі құраушысы делінеді, яғни

$$y(t) = y_e(t) + y_0(t).$$

Жоғарыда көрсетілгендей автоматты басқару жүйесі орнықты делінеді, егер қандай болмасын ауытқушымен қоздырылған $y_0(t)$ өтпелі процестер өтетін болса, яғни (3.1) теңдеудің өтпелі құраушысы уақыт озған сайын нольге ұмтылса

$$\lim_{t\to\infty} y_0(t) \to 0.$$

Сонымен жүйенің орнықтылығын біртекті дифферанциалды теңдеудің шешімімен анықталады,яғни төменгі оң жақсыз (3.1) теңдеудің шешімімен

$$a_0\frac{d^ny_0}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y_0}{dt^{n-1}} +\cdots+ a_ny_0 = 0 \qquad (3.3)$$

Бұл теңдеудің шешімі $y_0(t)=Ce^{\lambda t}$ түрде іздеолінеді. Соңғы өрнекті n рет дифференциалдап және оның нәтижесін (3.3) қойып, одан кейін $Ce^{\lambda t}$ ортақ көбейткішке қысқартып табамыз

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (3.4)$$

Табылған (3.4) алгебралық теңдеу сипаттамалық теңдеу делінеді. Оның λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ түбірлері жүйедегі өтпелі процестің өзгешелігін анықтайды. (3.4) теңдеудің сол жағы өзінің түрімен (3.1) теңдеудегі шығу шамасының алдындағы дифференциалдау операторымен беттесетінін айқын байқауға болады, сондықтан әдетте (3.1) бастапқы теңдеудегі шығу шамасының алдындағы дифференциалдау операторды нольге тең деп сипаттамалық теңдеу табылады, яғни

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (3.5)$$

Мұнда p дифференциалдау операторды белгілемей, ол (3.5) сипаттамалық теңдеудің шешімі (түбірі) болатын кейбір санды белгілейтінін айта кету қажет,яғни (3.5) теңдеуде $p=\lambda$.

Егер (3.5) теңдеудің түбірлері p_1, $p_2, \ldots,$ p_n белгілі болса,онда (3.3) біртекті дифференциал теңдеудің жалпы шешімін жазуға болады

$$y_0(t) = C_1e^{pt} + C_2e^{pt} + \cdots + C_ne^{pt} = \sum_{i-1}^{n} C_ie^{pt} = \sum_{i-1}^{n} y_i(t) \quad (3.6)$$

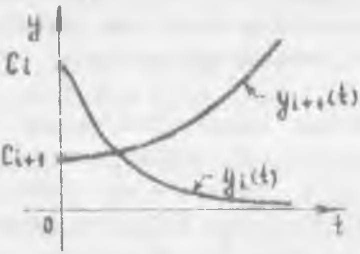
мұндағы: C_1, $C_2, \ldots,$ C_n - бастапқы шарттар бойынша анықталынатын интегралдау тұрақтылар; $y_i(t)$ - (3.1) теңдеудің $y_ж(t)$ жалпы шешімінің i -інші құраушысы.

Жүйенің орнықтылығын анықтау үшін (3.5) теңдеуді шешіп және оның түбірлерін табу қажет емес. Жүйе орнықты болу үшін түбірлердің қажетті және жеткілікті қасиеттерін айқындайық.

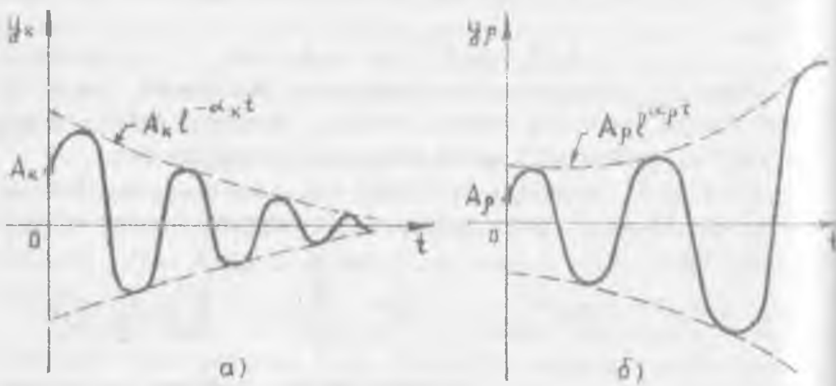
Түбірлерді нақты, кешендік және таза жорымал болуы мүмкін. Осы жағдайлардан қарастырайық

1. Нақты түбір. Болсын делік түбірлердің біреуі, мысалы $p_i=\alpha_i$, онда бұл түбірмен анықталатын (3.6) өрнектегі қосылғыш $y_i(t)=C_ie^{\alpha_i t}$ түрдей экспонента болып келеді. Егер $t\to\infty$, онда $y_i(t)\to 0$ айқын көрінеді. Егер $p_{i+1}=\alpha_{i+1}$, онда $y_{i+1}(t)=C_ie^{\alpha_{i+1}t}$, яғни $t\to\infty$, онда $y_{i+1}(t)\to\infty$ (3.2-сурет). Сонымен жүйе орнықты болу үшін барлық нақты түбірлер теріс болу тиісті.

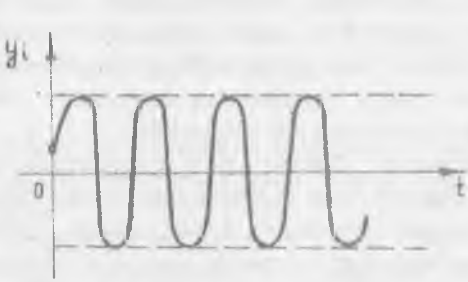
16-207



3.2-сурет



3.3-сурет



3.4-сурет

2. Кешендік түбірлер. Кешендік түбірлер қос-қостан түйіндес болады. Болсын дейік $p_{k,k+1} = -\alpha_k \pm j\omega$. Онда теріс нақты бөлігімен қос кешендік түйіндес түбірге (3.6) шешімге енетін құрушы болады

$$y_k(t) = A_k e^{-\alpha_k t}\sin(\omega t+\varphi)$$

мұнда A_k, φ – бастапқы шарт бойынша C_k және C_{k+1} арқылы табылатын интегралдау тұрақтылар.

Егер кешендік түйіндес түбірлердің нақты бөлігі оң болса, яғни $p_{p,p+1} = \alpha_p \pm j\omega$. Бұндай жағдайда сәйкесті құрушы келесідей болады

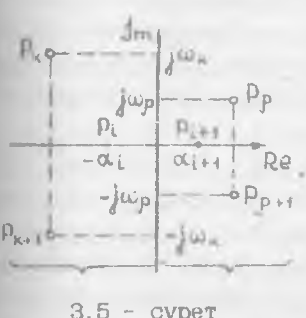
$$y_p(t) = A_p e^{\alpha_p t}\sin(\omega t+\varphi)$$

Сонымен бірінші жағдайда басылу тербелулер болатыны айқын көрінеді (3.3,а -сурет), ал ол тербелулердің бұрыштық жиілігі түбірдің жорымал бөлігіне тең,ал оның өшу көрсеткіші нақты бөлігіне.

Екінші жағдайда тербелулер өшуші болмай жинақсыз болады (3.3,б-сурет). Сонымен, жүйе орнықты болу үшін кешендік түйіндес түбірлердің нақты бөліктері теріс болуы тиісті.

3. Таза жорымал түбірлер. Мұндай жағдайда $p_{i,i+1} = \pm j\omega$ және $y_i(t) = C_i e^{j\omega t} + C_{i+1} e^{-j\omega t} = A_i \sin(\omega t+\varphi)$. Мұнда A_i мен φ жаңа тұрақтылар C_i, C_{i+1} арқылы анықталады. Яғни мұндай түбірмен анықталатын жалпы шешімге енетін қосылғыш өшпейтін тербелістерді береді (3.4-сурет).

Қарастырылған түбірлерді кешендік түбір жазықтықта кейбір нүктелермен көрсетуге болады (3.5-сурет).



3.5 - сурет

Сонымен жоғарыда көрсетілгендей жүйе орнықты болу үшін (3.5) теңдеудің барлық түбірлері жорымал осінің сол жағында болуы жеткілікті. Егер еңболмаса бір түбір жорымал осьнің оң жағында болса, жүйе орнықсыз болады.

Сондықтан жорымал осі кешендік түбір жазықтығында шекаралық сызық болып келеді, яғни жүйе орнықты болу үшін оның сипаттамалық теңдеуінің түбірлері ол сызықты өтпеуі тиісті. Барлық сол жақтағы жарты жазықтық орнықтылықтың облысы болады.

Әдетте теріс нақты бөлікті түбірлерді, олардың кешендік түбірлер жазықтығында жорымал осінің сол жағында жатқандықтан, солшыл деу , ал нақты бөлікті түбірлерді оңшыл деу қалыптасқан. Онда сызықты жүйенің орнықтылығының шарты келесідей тұжырымдалады: сызықты жүйе орнықты болу үшін оның сипаттамалық (3.5) теңдеуінің барлық түбірлері (тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясының барлық полюстері) солшыл болуы жеткілікті.

Егер жүйенің сипаттамалық теңдеуінің ең болмаса бір түбірі (p_i) нольдік немесе қосақ таза жорымал $p_{i,i+1}$ түбірлер болса, ал қалған барлық түбірлердің нақты бөліктері теріс болса, онда жүйе орнықтылықтың шекарасында болады делінеді. Бұл нольдік түбірді оң және теріс нақты түбірлердің, ал таза жорымал түбірді кешендік оң және теріс бөлікті түбірлердің шекарасы ретінде қарастыруға болатынынан шығады.

Бірінші жағдайда, яғни $p_i=0$ болғанда орнықтылықтың шекарасы апериодты делінеді. Бұл сипаттамалық (3.5) теңдеунің бос мүшесі жоғының белгісі. Шынымен $a_n=0$ болғанда (3.5) теңдеудің бір түбірі нольге тең екені айқын көрінеді. Бұл жағдайда (3.1) дифференциалдық теңдеу былай жазылады:

$$(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\dots+a_n)py(t) = (b_0p^m+b_1p^{m-1}+\dots+b_m)g(t)$$

сондықтан, жүйе $y(t)$ басқарылатын шамасы бойынша орнықты болмай оның $py(t)$ өзгеру жылдамдығы бойынша орнықты болады. Мұндай жүйе бейтарап (нейтралды) орнықты деп аталады.

Екінші жағдайда, яғни екі түбір $p_{i,i+1}=\pm j\omega$ жорымал осінде жатқанда, орнықтылықтың шекарасы тербелмелі деп аталынады. Мұндай жағдайда жүйеде ω_i тең жиілікпен басылмайтын тербелулер тұрақталынады.

ЖҮЙЕ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫНЫҢ ҚАЖЕТТІ ШАРТТАРЫ. (3.5) түрдегі сипаттамалық теңдеуге жүйенің орнықты болу үшін қажетті шарттарын көрсетуге болады. Жүйе орнықты болу үшін (3.5) теңдеуінің барлық коэффициенттері оң болуы қажет. Бұл барлық коэффициенттер оң болған жағдайда жүйе орнықты немесе орнықсыз болуының мүмкіндігін білдіреді. Егер (3.5) теңдеудің барлық коэффициенттері оң болмаса, онда жүйе орнықсыз болады да ешқашандай қосымша орнықтылығының зерттеуі талап етілмейді.

Сипаттамалық теңдеудің барлық коэффиценттері оң болудың орнына барлықтары теріс болуы мүмкін екенін ескертейік. Мұндай жағдайда жоғарыда айтылған талапты қанағаттандыру үшін сипаттамалық теңдеудің барлық мүшелерін минус бірге көбейтіп барлық коэффиценттерді оң қылуға болады.

Жүйе орнықтылығының қажетті шарттарын дәлелдеу үшін (3.5) теңдеудің түбірлерін нақты деп есептейік. Және ол теңдеудің сол жағын Безу теоремасына негізденіп келесідей жазайық

$$a_o(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n) = 0$$

мұндағы: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ сипаттамалық теңдеудің түбірлері; p - еркін түбір. Сонымен $a_o>0$ деп есептейік. Бұл теңдеуді минус бірге көбейтіп әрқашан орындауға болады.

Орнықты жүйеде барлық нақты түбірлер теріс болу керек, яғни $p_1-\alpha_1$; $p_2-\alpha_2$; ... және т.б. Сонымен табамыз

$$a_o(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\cdots(p-\alpha_n) = 0$$

Енді жақшаларды ашып (3.5) теңдеуге оралсақ онда теңдеудің барлық коэффиценттері оң болып келеді, себебі оң шамаларды көбейтіп және оны қосып теріс сан табуға болмайды.

Сипаттамалық теңдеудің шешімінде кешендік түбірлер теріс нақты бөлігімен болған жағдайда, мысалы, $p_{i,i+1} = -\alpha \pm j\omega$ нәтижесі өзгермейді. Себебі ол түбірлерге сәйкес көбейткіштер келесідей болып келеді

$$(p+\alpha-j\omega)(p+\alpha+j\omega) = (p+\alpha)^2+\omega^2.$$

Мұндай көбейткіштер пайда болғанымен жоғарыдағы (3.5) теңдеудің коэффиценттерінің оң болуы туралы жасалған қорытынды өзгертілмейтіні айқын көрінеді.

Сонымен, егер жүйе орнықты болса, онда сипаттамалық теңдеудің барлық $a_i (i=1 \div n)$ коэффиценттері қатаң түрде оң болуға тиісті. Егер де ең болмаса бір коэффиценті теріс болса, онда бірден жүйе орнықсыз деуге болады. Егер $a_n=0$ онда жүйе апериодтық орнықтылықтың шекарасында болады, ал (3.5) сипаттамалық теңдеудің басқа бір коэффиценті нольге тең болса, онда жүйе орнықтылықтың тербелмелі шекарасында немесе орнықсыз болады.

Сонымен жүйенің орнықты болуының қажетті шарты, - жүйенің сипаттамалық теңдеуінің барлық коэффиценттерінің оң болуында.

Бірінші және екінші дережелі сипаттамалық теңдеудің түбірлерін есептеу өте оңай. Үшінші тертінші дережелі теңдеулердің түбірлері үшін жалпы өрнектер бар, бірақ олар өте күрделі сондықтан іс жүзінде қолдануға аса жарамды емес. Ал одан жоғары дережелі теңдеулердің түбірлерін коэффиценттер арқылы негізінде жазуға мүмкін емес. Сондықтан түбірлердің есептеуінсіз жүйенің орнықтылығын анықтауға мүмкіншілік беретін ережелердің маңыз зор екені айқын. Ондай ережелер орнықтылықтың критерийлері деп аталынады.

Орнықтылық критерийлер көмегімен жүйенің тек қана орнықтылығын анықтау емес, олармен жүйенің структуралық өзгерулерінің және кейбір параметрлерінің орнықтылыққа әсер ететін ықпалын айқындауға болады.

Орнықтылық критерийлерді алгебралық және жиілік критерийларға бөлуге болады. Математикалық көз қарастар барлық орнықтылықтың критерийлар эквиваленті, бірақ нақтылы мәселені шешкенде орынды таңдалған критерий орнықтылықтың зерттеуін оңай жолмен өткізуге мүмкіншілік береді.

3.2 ОРНЫҚТЫЛЫҚТЫҢ АЛГЕБРАЛЫҚ КРИТЕРИЙЛЕРІ

Орнықтылықтың алгебралық критерийлері төменгі сипаттамалық теңдеудің коэффиценттері бойынша жүйенің орнықтылығы жайында жорамалдауға мүмкіншілік береді

$$D(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (3.7)$$

Алгебралық критерийлардың арасындағы ең кеңінен тараған Гурвиц пен Раустың орнықтылық критерийлері.

ОРНЫҚТЫЛЫҚТЫҢ ГУРВИЦ КРИТЕРИЙІ. Бұл критерийдің дəлелдеуі [18,21] келтірілген, ол бойынша (3.7) теңдеудің коэффиценттерінен (n×m) Гурвиц матрицасы (анықтаушысы) құрылады. Матрица құру үшін келесі ереже қолданылады. Бас диагональ бойынша сол жақтан оңға қарай барлық коэффиценттер a_1 бастальп a_n дейін индекстері өсу ретімен жазылады. Бағандар бас диагональды элементерінен жоғары қарай индекстері өсу ретімен, төмен қарай индекстері кему ретімен сипаттамалық теңдеудің коэффиценттері мен толықтырылады. Индекстері n-нан көп (n-сипаттамалық теңдеудің реті) және нольден аа коэффиценттердің орнына нольдер қойылады. Яғни Гурвиц матрицасы келесідей болып келеді

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

Гурвиц критерийі бойынша $a_0>0$ болғанда, (3.8) коэффиценттердің квадраттық матрицасынан табылатын барлық n анықтауыштар нольден көп болуы керек, яғни оң болуы керек.

Гурвицтің анықтауыштары келесі ереже бойынша құрастырылады

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}; \quad \Delta_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_k \end{bmatrix}$$

Соңғы анықтауыш өзінің ішіне Гурвиц матрицасын толығымен енгізеді. Айталық матрицаның соңғы бағанның элементтері төменгісінен басқалары нольге тең болғандықтан, соңғы Гурвиц анықтаушысы оның алдындағы анықтаушысы арқылы келесідей өрнектелінеді

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0$$

Бірақ орнықты жүйеде соңғы анықтауыштың алдындағы Δ_{n-1} анықтауыш оң болуы тиісті, сондықтан $\Delta_n>0$ шарт $a_n>0$ болуына келтіреді, яғни сипаттамалық теңдеудің бос мүшесінің оң болуына.

Жүйе орнықтылықтың шекарасында болу шарты $\Delta_n=0$ болады, қалған анықтауыштар оң болған жағдайда. Бұл теңдік келесі екі жағдайда орындалады: $a_n=0$ немесе $\Delta_n=0$ болғанда.

Бірінші жағдайда жүйе апериодты орнықтылықтың шекарасында, ал екінші жағдайда жүйе тербелмелі орнықтылықтың шекарасында болады.

Гурвиц критерийінің жалпы (3.8) матрицасына енетін анықтауыштарды алып бірінші, екінші, үшінші, төртінші және одан жоғары ретті жүйелерге дербес жағдай түрінде орнықтылықтың критерийлерін табуға болады.

1. Бірінші ретті сипаттамалық теңдеу.

$$a_0p + a_1 = 0$$

Бұл жағдайда Гурвиц критерийі бойынша орындалуы қажет

$$a_0>0,\ \Delta_1 = a_1 >0,$$

яғни сипаттамалық теңдеудің барлық коэффиценттері оң болу тиісті.

2. Екінші ретті сипаттамалық теңдеу.

$$a_0p^2 + a_1p + a_2 = 0$$

Бұл теңдеуге Гурвиц критерийі $a_0>0$, $\Delta_1=a_1>0$, $\Delta_2=a_1a_2>0$ болуларын талап етеді. Демек, соңғы анықтауыштың оң болуы қажетті де жеткілікті.

3. Үшінші ретті сипаттамалық теңдеу.

$$a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0$$

Бұл теңдеуде орнықтылықтың шарттары мынадай болады

$$a_0>0, \Delta_1=a_1>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-a_0a_3>0,\ \Delta_3=a_3\Delta_2.$$

Соңғы шарттың орындалуы a_3 оң болуына келтіреді. Екінші ретті анықтауыштың оң болу шарты $a_0>0$, $a_1>0$, $a_3>0$ орындалуы мүмкін тек қана $a_2>0$ болғанда, яғни үшінші ретті теңдеуге барлық коэффиценттері оң болуы жеткілікті емес.

Демек, үшінші ретті жүйе тұрақты болу үшін барлық коэффиценттер оң болуынан басқа қосымша төмендегі шарт орындалуы талап етілінеді:

$$a_1a_2>a_0a_3$$

(теңдеудің ортанғы коэффиценттерінің көбейтіндісі шеткілердің көбейтіндісінен көп болуы қажет).

4. Төртінші ретті сипаттамалық теңдеу.

$$a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = 0$$

Гурвиц критерийіне негізденіп барлық коэффиценттер оң болуынан басқа қосымша келесідей

$$(a_1a_2-a_0a_3)a_3 - a_4a_1^2 > 0$$

шарттың орындалуы талап етілетінін табуға болады.

Сипаттамалық теңдеудің реті 5 көп болғаннан кейін,жоғарыдағы түрдегі теңсіздіктердің саны көбейеді және Гурвиц анықтауышын ашу процесі қиындалады да қолайсызданады. Сондықтан әдетте Гурвиц критерийін $n<4$ болғанда қолданады. Егер $n\geq5$ болса, онда Гурвиц критерийінен басқа алгебралық критерийлерін қолданады. Мысалы Льеонар-Шипар критерийі немесе Раус критерийі.

ЛЬЕОНАР-ШИПАР КРИТЕРИЙІ. Льеонармен және Шипармен теорема дәлелделінген. Ол теорема бойынша, егер тұйықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуінің коэффиценттері оң болып (яғни $a_0>0$, $a_1>0,\ldots,$ $a_n>0$) тақ индексті Гурвиц анықтаушылары оң болса (яғни $\Delta_1>0$, $\Delta_3>0$, $\Delta_5>0,\ldots$), онда жұп индексті Гурвиц анықтаушылары оң болады (яғни $\Delta_2>0$, $\Delta_4>0$, $\Delta_6>0,\ldots$) және керісінше.

Сондықтан қажетті орнықтылық шарттар орындалғанда, яғни $a_0>0$, $a_1>0,\ldots,$ $a_n>0$ болғанда, жеткілікті шарттар орындалу үшін барлық Гурвиц анықтауыштарының арасында жұп индексті, немесе тақ индексті Гурвиц анықтаушылары оң болуы тиісті.

Сонымен ЛБЖ орнықты болу үшін төменгі теңсіздіктердің орындалуы қажетті де жеткілікті:

$$a_0>0,\ a_1>0,\ldots,\ a_n>0$$
$$\Delta_1>0,\ \Delta_3>0,\ \Delta_5>0,\ldots$$

немесе

$$a_0>0,\ a_1>0,\ldots,\ a_n>0$$
$$\Delta_2>0,\ \Delta_4>0,\ \Delta_6>0,\ldots$$

Соңғы орнықтылық критерийдің тұжырымдауы Льеонар-Шипар критерийі деп аталынады. Бұл критерий бойынша жүйенің орнықтылығын зерттеу үшін есеп жұмысы екі есе аз екені, Гурвиц критерийіне қарағанда, айқын көрінеді. Сондықтан егер зерттелінетін жүйе жоғарғы ретті болса онда Льеонар-Шипар әдісі қолайлы болып келеді.

РАУС ОРНЫҚТЫЛЫҚ КРИТЕРИЙІ. Жүйенің Раус критерийі бойынша орнықтылығын зерттеу үшін Раустың 3.1-кестесі құрылады. Оның бірінші жатық жолы a_0 басталып жұп индексті (3.5) сипаттамалық теңдеудің коэффиценттерімен толықтырылады (a_0, a_2, a_4, $a_6,\ldots$), екінші жатық жолы тақ индексті коэффиценттермен (a_1, a_3, a_5, $a_7,\ldots$).

Одан кейін көмекші r_i коэффиценттер келесі формула бойын-

17-207

ша есептеледі $r_i=c_{1,i-2}/c_{1,i-1}$. Кестенің басқа коэффициенттері былай табылады

$$c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i c_{k+1,i-2}$$

мұндағы k -бағанның нөмірі, i -жатық жолдың нөмірі.

3.1-кесте

r_i коэффи-циент	Жатық жол	Баған			
		1	2	3	4
	1	$c_{11}=a_0$	$c_{21}=a_2$	$c_{31}=a_4$	$c_{41}=a_6$
	2	$c_{12}=a_1$	$c_{22}=a_3$	$c_{32}=a_5$	$c_{42}=a_7$
$r_3=a_0/a_1$	3	$c_{13}=a_2-r_3a_3$	$c_{23}=a_4-r_3a_5$	$c_{33}=$	$c_{43}=$
$r_4=a_1/a_3$	4	$c_{14}=a_3-r_4c_{23}$	$c_{24}=a_5-r_4c_{33}$	$c_{34}=$	$c_{44}=$
$r_5=a_{13}/a_{14}$	5	$c_{15}=c_{23}-r_5c_{24}$	$c_{25}=c_{33}-r_5c_{34}$	$c_{35}=$	$c_{45}=$
...		...	...	...	...
$r_3=c_{1,i-2}/c_{1,i+1}$	i	$c_{1i}=c_{2,i-2}-r_ic_{2,i-1}$	$c_{2i}=c_{3,i-2}-r_ic_{3,i-1}$	$c_{3i}=$	$c_{4i}=$
...	$n+1$	...	...	...	...

Ескерте кететін жағдай Раус кестесінің жатық жолының саны жүйенің ретінен бірлікке көп, яғни $n+1$ тең болады.

Раус кестесі толықтырылғаннан кейін, ол бойынша жүйенің орнықтылығы туралы жоруға болады. Орнықтылықтың Раус шарттары келесідей тұжырымдалады: автоматты басқару жүйе орнықты болу үшін Раус кестесінің бірінші бағанның коэффиценттері бір таңбалы болуы қажетті де жеткілікті, яғни егер $a_0>0$ болса, онда $c_{11}=a_0>0$, $c_{12}=a_1>0$, $c_{13}>0$, ..., $c_{1,n+1}>0$ болуы керек. Егер бірінші бағанның коэффиценттерінің барлығы оң болмаса, онда жүйе орнықсыз болады, ал сипаттамалық теңдеудің оңшыл түбірлердің саны Раус кестесінің бірінші бағанның таңба ауысу санына тең.

Сипаттамалық теңдеудің коэффиценттері сан мәндерімен берілген жағдайда Раус критерийі өте ыңғайлы болып келеді. Мұндай жағдайда сипаттамалық теңдеуі жоғары ретті болса да жүйе орнықтылығын есептеуір тез анықтауға болады.

Раус кестесін құратын алгоритмның түрі электронды-есептеуіш машинеде программалау үшін өте қолайлы, сондықтан оның критерийі орнықтылыққа әсер ететін сипаттамалық теңдеудің коэффиценттерінің немесе аса күрделі емес түрдегі коэффиценттерге кіретін жүйенің кейбір параметрлерінің ықпалын, тез әрекетті ЭЕМ арқылы зерттеуге кеңінен қолданылады.

3.3 ОРНЫҚТЫЛЫҚТЫҢ ЖИІЛІК КРИТЕРИЙЛЕРІ

Жоғарғы ретті жүйелерге алгебралық критерийлер қолайсыз болып келеді. Бұл критерийлерді қолданып жүйе параметрлерінің орнықтылыққа әсер ететін ықпалын көрнекі бағалау, электронды есептеуші машинасына қиындау.

Сондықтан жиілік сипаттамалар бойынша жүйе орнықтылығы туралы жоруға мүмкіншілік беретін, жиілік критерийлер кеңінен тараған. Бұл критерийлер графикалық-аналитикалық көрнекі әдістер болып келеді және жоғарғы ретті жүйелердің орнықтылығын біршама оңай зерттеуге, сонымен бірге зерттеу нетижесінің жеңіл геометриялық түсініктемесін беруге мүмкіншілік береді.

Орнықтылықтың жиілік критерийлерының негізінде белгілі кешендік айнымалы функциялардың теориясындағы аргумент принципінің салдары (нетижесі) жатады.

АРГУМЕНТ ПРИНЦИПІ. Аргумент принципінің негізі; болсын дейік кейбір n ретті полином берілді деп .

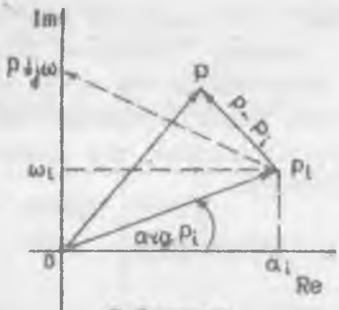
$$D(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n$$

Бұл полиномды Безу теоремасы бойынша келесідей жазуға болады

$$D(p) = a_0(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n) \quad (3.9)$$

мұнда: p - еркін түбір; $p_1, p_2, \dots, p_n$ - сипаттамалық теңдеудің түбірлері.

Кешендік жазықтықта $p_i=\alpha_i \pm j\omega_i$ түбірді p_i вектор түрінде көрсетуге болады (3.6-сурет). Вектор координат басында басталады да α_i, ω_i координатты нүктеде аяқталады. Мұндай вектор, вектордың ұзындығына тең, $|p_i|$ модулінің мәнімен және $\arg p_i$ аргументінің мәнімен анықталуы да мүмкін. Соңғысы вектор мен оң жартылай ось аралығындағы бұрышқа тең. Келешекте оң бұрыштары деп сағат тілінің жүрісіне кері есептелінген бұрыштарды



3.6-сурет

айтуға келісейік.

Кешендік жазықтықта p еркін кешендік сан да вектор түрінде көрсетіледі. (3.9) өрнектегі $(p-p_i)$ көбейткіштердің әрқайсысы p_i вектордың соңынан басталатын және p вектордың соңында аяқталатын вектормен көрсетіледі.

Егер p векторға таза жорымал шама берілсе, яғни $p=j\omega$ болғанда $(p-p_i)$ вектордың соңы ω мәні өзгергенде жорымал ось бойынша сырғанап отырады және (3.9) полином былай жазылады

$$D(j\omega) = a_0(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)\cdots(j\omega-p_n) \qquad (3.10)$$

мұнда ω - тәуелсіз нақты айнымалы шама.

$D(j\omega)$ вектор болып келеді, ол $(j\omega-p_i)$ элементарды вектормен a_0 нақты санның көбейтіндісіне тең болады.

Векторларды көбейткенде:

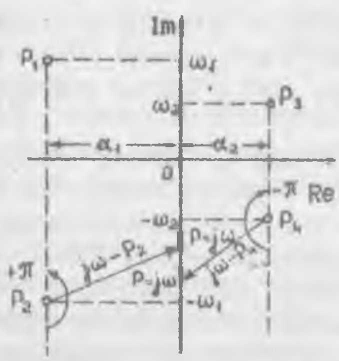
$$(j\omega-p_i)(j\omega-p_{i+1})=|j\omega-p_i|e^{j\varphi_i}|j\omega-p_{i+1}|e^{j\varphi_{i+1}}=|j\omega-p_i||j\omega-p_{i+1}|e^{j(\varphi_i+\varphi_{i+1})}$$

олардың аргументтері қосылады, сондықтан

$$\arg D(j\omega)=\arg(j\omega-p_1)+\arg(j\omega-p_2)+\cdots+\arg(j\omega-p_n), \qquad (3.11)$$

ал $D(j\omega)$ вектордың модулі a_0 мен элементарды векторлардың модульдарының көбейтіндісіне тең болады:

$$|D(j\omega)| = a_0|j\omega-p_1|\cdot|j\omega-p_2|\cdots|j\omega-p_n|. \qquad (3.12)$$



3.7-сурет

Кешендік жазықтықта (3.7-сурет) кешендік түйіндес (p_1,p_2) оң нақты және (p_1,p_2) теріс нақты бөліктермен түбірлерді қарастырайық, яғни болсын дейік: $p_{1,2}=\alpha_1\pm j\omega_1$, және $p_{3,4}=\alpha_2\pm j\omega_2$. Енді ω тәуелсіз нақты айнымалының мәнін өзгертіп $(j\omega-p_i)$ вектордың аргументінің өзгеруін қадағалайық. Егер ω мәні $-\infty<\omega<+\infty$ аралықта өзгертілсе, онда $(j\omega-p_2)$ вектор $+\pi$ бұрышқа бұрылады, ал $(j\omega-p_4)$ вектор $-\pi$

бұрышқа бұрылады.

Егер $D(p) = 0$ теңдеудің барлық n түбірлері жорымал осінің сол жағында жататын болса, онда (3.11) бойынша $D(j\omega)$ кешендік шаманың аргументінің өсімшесі,ω мені $-\infty$ ден $+\infty$ дейін өзгертілгенде мынаған тең болады

$$\Delta \arg D(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = n\pi. \qquad (3.13)$$

Егер кейбір түбірлер жорымал осінің оң жағында орналасатын болса, онда $D(j\omega)$ шаманың аргументінің толық өсімшесі $n\pi$-дан аз болады.Мысалы m түбір оң жарты жазықтықта болсын дейік, онда $D(j\omega)$ шаманың аргументінің толық өсімшесі келесідей болады:

$$\Delta \arg D(j\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = (n-m)\pi - m\pi = (n-2m)\pi. \qquad (3.14)$$

Бұдан келесі ереже шығады: $D(j\omega)$ кешендік шаманың аргументінің толық өсімшесі, ω мені $-\infty$ ден $+\infty$ дейін өзгергенде, $D(p)=0$ теңдеудің солшыл және оңшыл түбірлерінің сандарының арасындағы айырымы π-ға көбейтілгенге тең.

$D(j\omega)$ вектордың аргументінің толық өсімшесін, ω мені $-\infty$ ден $+\infty$ дейін өзгергенде анықтайтын (3.14) теңдеу барлық орнықтылықтың жиілік критерийлердің негізіне қойылған.

МИХАЙЛОВТЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҚ КРИТЕРИЙІ. Бұл критерий аргумент принципінің геометриялық түсініктемесіне негізделінеді де, жүйенің орнықтылығы туралы Михайловтың қисығы делінетін қисық бойынша жоруға мүмкіншілік береді.

Жүйенің сипаттамалық теңдеуі (3.7) түрде берілсін дейік. Сипаттамалық полином болып келетін бұл теңдеудің жеке сол жағын қарастырайық

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n.$$

Бұл полиномға түбірдің таза жорымал мәнін $p=j\omega$ қояйық. Мұндағы сипаттамалық теңдеудің таза жорымал түбіріне сәйкесетін ω шығу тербелулердің бұрышты жиілігі болып келеді.Нәтижесінде мынадай сипаттамалық кешенді табамыз:

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \qquad (3.15)$$

мұнда $U(\omega)$ - нақты бөліктің мүшелері ω бойынша жұп дәрежелі болып келеді, яғни

$$U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \cdots, \qquad (3.16)$$

ал $V(\omega)$ - жорымал бөліктің мүшелері ω бойынша тақ дәрежелі болады, яғни

$$V(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \cdots. \qquad (3.17)$$

(3.15) кешендік шаманы басқа түрде жазуға болады, яғни былай

$$D(j\omega) = \mathrm{mod}\, D(j\omega)\, e^{j\varphi}$$

Мұнда: $\mathrm{mod}\, D(j\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$, ал $\varphi = \arg D(j\omega) = \mathrm{arctg}\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)}$

$D(j\omega)$ годографы Михайлов годографы деп аталынады, ол $D(j\omega)$ сипаттама полиномының (3.16) нақты бөлігі және (3.17) жорымал бөліктері бойынша салынады (3.8-сурет).

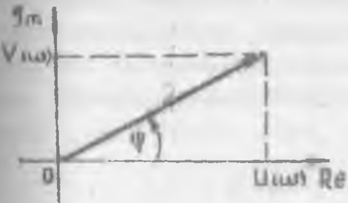
$U(\omega)$ мен $V(\omega)$ функциялардың сипаттарына байланысты $D(j\omega)$ Михайлов годографы нақты осіне қарай симметриялы екі қисықтардан тұрады (3.9-сурет). Сондықтан оны салғанда ω-нің оң мәндеріне сәйкесетін ω мәнін 0 ден ∞ дейін өзгерткендегі бір тармағымен қанағаттануға болады. $D(j\omega)$ аргументінің толық өсімшесі, жоғарыдағы (3.13) қарастырылған жағдайға қарай, екі есе азаяды. Орнықты жүйе үшін $D(j\omega)$ аргументінің толық өсімшесі мынадай болады:

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\,\frac{\pi}{2}\,, \qquad (3.19)$$

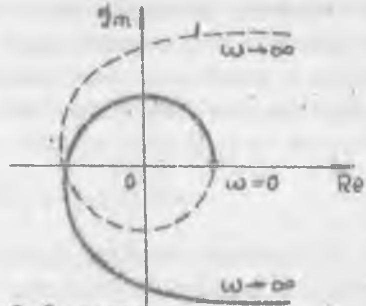
ал орнықсыз жүйе үшін келесідей болады:

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = (n-2m)\,\frac{\pi}{2}\,. \qquad (3.20)$$

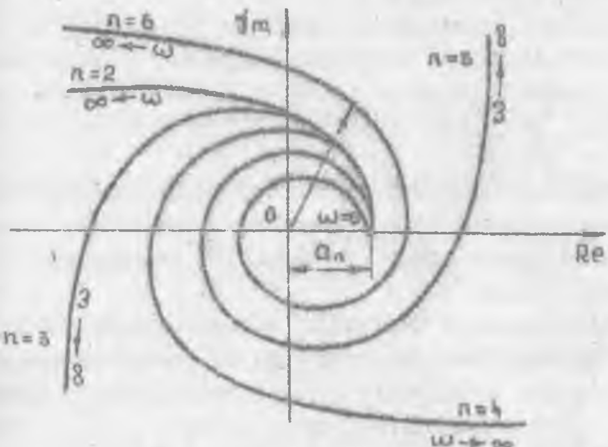
Осы ұғыныстарды есепке алып, А.В.Михайловтың өз атымен аталатын орнықтылық критерийі тұжырымдалған: АБЖ орнықты болады, егер ω мәні 0 ден ∞ дейін өскенде $D(j\omega)$ векторы $n\pi/2$ бұрышқа бұрылса (мұндағы n $D(p)$ теңдеудің дәрежесіне тең), немесе басқаша, егер $D(j\omega)$ годографы (сипаттамалық қисығы) ω мәні 0 ден ∞ дейін өзгергенде, нақты оң осінен басталып оң бағытымен (яғни сағат тілінің бағытына қарсы бағытпен) бірінен соң бірін n ширекті (квадрантты) айналып өтсе.



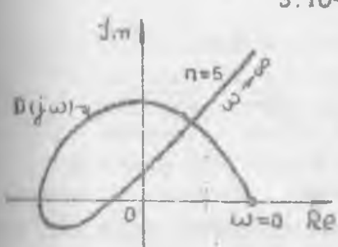
3.8 -сурет



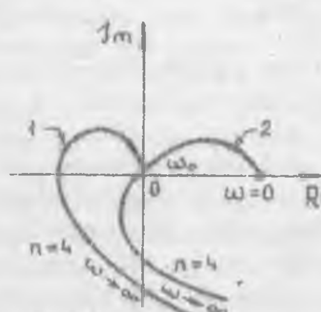
3.9 -сурет



3.10-сурет



3.11-сурет



3.12-сурет

Орнықты жүйелер үшін Михайлов годографы әрқашанда бірқалыпты спиральды түрдей болып келеді, және оның соңы кешендік жазықтықта сипаттамалық теңдеудің дәрежесіне тең нөмірлі ширекте шексізге ұмтылады (3.10-сурет), себебі $\omega\to\infty$ болғанда оның модулы мынадай болады

$$\mathrm{mod}\ D(j\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \infty$$

(3.19) бойынша Михайлов қисығы n саннан артық ширектердің негізінде өте алмайды. Сондықтан жүйенің орнықсыздығы әрдайым Михайлов қисығының ширектерді өтуінің тізбектегі бұзылуымен байланысты, сол себептен $D(j\omega)$ вектордың бұрылу бұрышы орнықсыз жүйеге $n\pi/2$ аз болып шығады (3.11-сурет).

Іс жүзінде Михайловтың годографы жиіліктің $\omega=0$ және $\omega=\infty$ аралықтағы бірнеше мәндеріне құралады, одан кейін ол нүктелер бірқалыпты қисықпен қосылады. Годографтың бас нүктесі $\omega=0$ болғанда, координат басынан a_n бос мүшеге тең қашықтықта нақты осінде жатады.

Сипаттамалық теңдеудің бос мүшесі $a_n=0$ болғанда Михайловтың қисығы координат бас нүктесінен басталады, яғни бұл жағдайда жүйе апериодты орнықтылықтың шекарасында болады (3.12-сурет, 1 қисық).

Жүйе орнықтылықтың тербелмелі шекарасында болғанда, сипаттамалық теңдеудің сол жағы, яғни (3.15) сипаттамалық кешен, оған таза жорымал түбір мәнін $p=j\omega_0$ қойғанда нольге айналады:

$$D(j\omega_0) = U(\omega_0) + jV(\omega_0) \qquad (3.21)$$

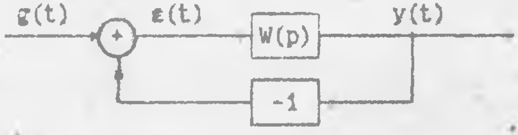
бұдан екі теңдік шығады

$$U(\omega_0) = 0$$
$$V(\omega_0) = 0. \qquad (3.22)$$

Бұл Михайловтың қисығындағы $\omega=\omega_0$ нүкте, координат басына түсетіндігінің белгісі (3.12-сурет 2 қисық). Сонымен бірге ω_0 мәні жүйенің өшпейтін тербелістерінің жиілігіне сәйкеседі.

НАЙКВИСТТІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҚ КРИТЕРИЙІ. Найквист критерийі тұйықталмаған жүйенің жиілік сипаттамаларына негізделінеді және тұйықталмаған жүйенің жиілік сипаттамалары бойынша тұйықталған жүйенің орнықтылығын жоруға ереже береді. Сонымен тұйықталмаған жүйе орнықты ма, орнықсыз ба немесе орнықтылық тың шекарасында ма оған байланысты Найквист критерийі әр түрлі тұжырымдалады. Сондықтан әртүрлі жағдайларды жеке қарастырайық.

ТҰЙЫҚТАЛМАҒАН ЖҮЙЕ ОРНЫҚТЫ. Автоматты басқару жүйесінің келесі түрін қарастырайық



Мұндағы W(p) тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясы. Ал оны жалпы түрде келесідей көрсетуге болады

$$W(p)=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n}=\frac{b_m(b'_0p^m+b'_1p^{m-1}+\cdots+1)}{a_n(a'_0p^n+a'_1p^{n-1}+\cdots+1)}=\frac{kR(p)}{Q(p)} \quad (3.23)$$

бұл өрнекте: $m<n$; $k=b_m/a_m$; $b'_i=b_i/b_m$ $i=0\div m$; $a'_j=a_j/a_m$ $j=0\div n$;

$R(p)=b'_0p^m+b'_1p^{m-1}+\cdots+1$; $Q(p)=a'_0p^n+a'_1p^{n-1}+\cdots+1$.

Тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясы келесідей жазылады

$$W_T(p)=\frac{W(p)}{1+W(p)}=\frac{kR(p)}{Q(p)+kR(p)}=\frac{kR(p)}{D(p)} \quad (3.24)$$

мұнда $D(p)=Q(p)+kR(p)$.

Қарастыруға көмекші функция енгізейік ((3.24) бөлшектің бөлгішін)

$$W_1(p)=1+W(p)=\frac{Q(p)+kR(p)}{Q(p)}=\frac{D(p)}{Q(p)} \quad (3.25)$$

мұнда D(p) тұйықталған жүйенің сипаттамалық көп мүшесі, ал Q(p) тұйықталмаған жүйенің сипаттамалық көп мүшесі. (3.25) өрнекке $p=j\omega$ қойып, табамыз

$$W_1(j\omega)=\frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)}$$

Михайлов критерийі бойынша $Q(j\omega)$ аргументінің өзгеруі жиіліктің $0<\omega<\infty$ диапазонында өзгергенде $n\pi/2$ тең, себебі тұйықталмаған жүйе орнықты деп болжалған. Ал басқа жағынан тұйықталған жүйе орнықты болуы талап етіледі. Ол үшін $D(j\omega)$

18-207

аргументінің өзгеруі жиіліктің $0<\omega<\infty$ диапазонында өзгергенде, $n\pi/2$ тең болуын талап етуі қажет. Сондықтан $W_1(j\omega)$ функциясының аргументінің өзгеруі болуы керек

$$\Delta\arg W_1(j\omega)\Big|_{\omega\to 0}^{\omega\to\infty} = \Delta\arg D(j\omega)\Big|_{\omega\to 0}^{\omega\to\infty} - \Delta\arg Q(j\omega)\Big|_{\omega\to 0}^{\omega\to\infty} = 0.$$

Демек $W_1(j\omega)$ годографы координат нүктесін қамтымауы тиісті (3.13 және 3.14-сурет).

Енді $W(j\omega)$ функциясына қайта оралайық

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) - 1,$$

бұл тұйықталмаған жүйенің амплитуда-фазалық жиілік сипаттамасы болып келеді (3.15 және 3.16-сурет).

Бұдан келесі жиілік Найквист орнықтылық критерийінің тұжырымдамасы шығады.

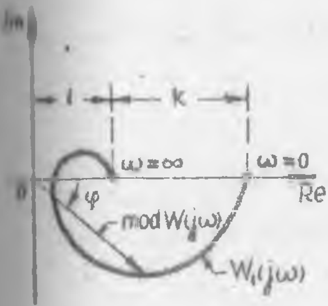
Егер тұйықталмаған жүйе орнықты болса, онда тұйықталған жүйе орнықты болу үшін тұйықталмаған жүйенің АФЖС (-1,j0) координатты нүктені қамтымауы тиісті (3.15, 3.16-сурет, 1-қисық).

Егерде АФЖС (-1,j0) нүктені қамтыса (3.15. 3.16-сурет 2-қисық), онда жүйе орнықсыз, ал егерде АФЖС (-1,j0) координатты нүктенің үстінен өтсе (3.15, 3.16-сурет, 3-қисық), онда тұйықталған жүйе орнықтылықтың шекарасында болады.

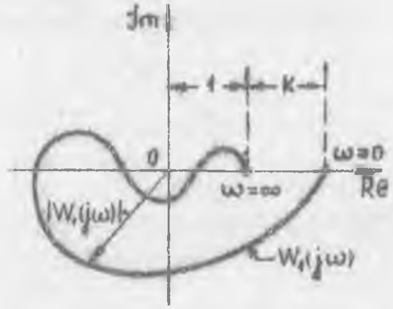
АФЖС кескінінің күрделілігін (мысалы 3.16-суреттегі "құс тұмсығындай" түрін) ескеріп, жоғарыдағы берілген тұжырымдамаға "(-1) нүктені қамтымау" деген терминді қалай түсіну керек екеніне қосымша түсіндірме беріледі. Сипаттама теріс өсінің (-1) нүктенің сол жағын қиып өтуі мүмкін, бірақ онда оң (үстінен астына қарай) өту саны тең болу керек, теріс (астынан үстіне қарай) өту санына (3.16-сурет, 1-қисық).

ЖҮЙЕ ТҰЙЫҚТАЛМАҒАН ЖАҒДАЙДА НЕЙТРАЛДЫ (АПЕРИОДТЫҚ ОРНЫҚТЫЛЫҚТЫҢ ШЕГІНДЕ). Тұйықталмаған тізбектің Q(p) сипаттамалық көп мүшенің нольдік түбірлері бар, ал қалған түбірлердің нақты бөліктеріне теріс болып келеді. Тұйықталмаған тізбектің W(p) түрлендіру функциясының сәйкесті нольдік полюстары болады

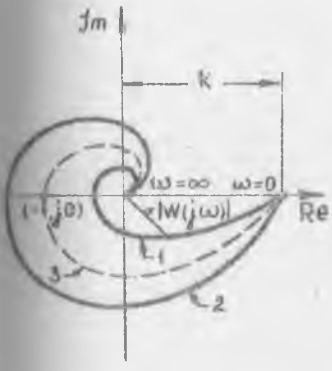
$$W(p) = \frac{kR(p)}{Q(p)} = \frac{k(b'_0p^m+b'_1p^{m-1}+\cdots+1)}{p^{\nu}(a'_0p^{n-\nu}+a'_1p^{n-\nu-1}+\cdots+1)}, \quad m<n \quad (3.26)$$



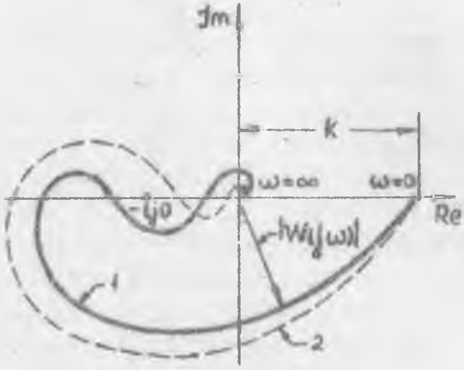
3.13-сурет



3.14-сурет



3.15-сурет



3.16-сурет

Бұл астатикалық жүйеге сәйкеседі және ν астатизм реті болады. Алдыменен $\nu=1$ жағдайды қарастырайық, яғни

$$Q(p) = p(a'_0p^n + a'_1p^{n-1} + \cdots + 1), \qquad (3.27)$$

онда (3.28) бойынша жиілік түрлендіру функциясы келесідей жазылады

$$W(j\omega) = \frac{k(b'_0(j\omega)^m+b'_1(j\omega)^{m-1}+\cdots+1)}{j\omega(a'_0(j\omega)^{n-1}+a'_1(j\omega)^{n-2}+\cdots+1)} \qquad (3.28)$$

Астатикалық жүйенің жиілік түрлендіру функциясы $\omega=0$ болғанда шексізге айналады, ал оның АФЖС үзілісті болады, себебі $\omega=0$ болғанда $W(j\omega)$ функциясы анықсыз

$$\lim_{\omega\to 0} W(j\omega) = \infty ,$$

яғни функцияның үздіксіздік шарты бұзылады. Сондықтан бұл жағдайда тұйықталған жүйенің орнықтылық мәселесін шешу қиын, себебі $\omega=0$ болғанда $W(j\omega)$ шексізге ұмтылады, сондықтан белгісіз, сипаттама $(-1,j0)$ координатты нүктені қамти ма немесе қамтымай ма.

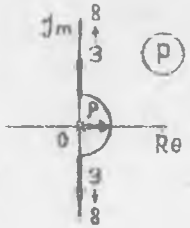
Қарастырып отырған жағдайдың тағы бір назар аударатын жайы, ол келесідей. Егер (3.28) былай жазсақ

$$Q(p) = a_0(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n),$$

онда еркін түбір $p=j\omega$ болғанда p_1 нольдік түбірге сәйкесетін вектор $(j\omega-p_1)=j\omega$ болады, ал енді ω жиілік $-\infty$ ден $+\infty$ дейін өзгерсе, қарастырып отырған вектор өзінің фазалық бұрышын $-\pi/2$ ден $+\pi/2$ дейін секіртіп (кенет) өзгертеді, бірақ координат бас нүктесінен өту моментінде ол вектор қай бағытпен бұрылатынын айтуға мүмкін емес.

Сондықтан бұл мәселені айқындату үшін шартты түрде нолдік түбірді, түбірлік жазықтың оң немесе сол жартысында деп санау қажет. Екінші жағдай қолайлы болып келеді (3.17-сурет). Себебі, онда тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясының барлық полюстері солшыл болады.

Айтылғанды орындау үшін келесідей істелінеді. ω жиілік $-\infty$ ден $+\infty$ дейін өзгертілгенде, $j\omega-p_1=j\omega$ вектордың соңына немесе тәуелсіз айнымалыға сәйкесетін нүкте, түбір жазықтықта жорымал осі бойынша төменнен жоғары қарай жылжиды. Нольдік-



3.17-сурет

түбір сол жақта қалатын етіп, шексіз аз радиусты жарты шеңбер бойынша осы түбірді айналып өтейік (3.17-сурет). Жарты шеңбер бойынша сағат тіліне қарсы жылжығанда, p тәуелсіз айнымалы келесі заң бойынша өзгереді деп ұйғарайық

$$p=\rho e^{j\varphi}$$

мұнда: ρ нөлге ұмтылатын жарты шеңбердің радиусы болып келеді, ал φ $-\pi/2$ ден $+\pi/2$ дейін өзгеретін аргумент.

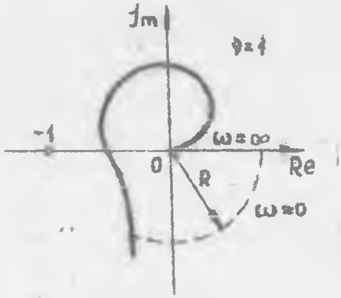
Онда $p \to 0$ табамыз

$$W(p) = \frac{k}{p} = \frac{k}{\rho e^{j\varphi}} = Re^{-j\varphi}$$

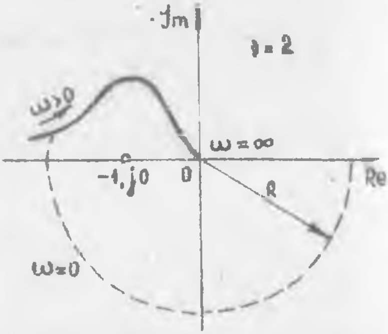
мұнда: $R=k/\rho$ - үлкен шама, сонымен $R\to\infty$ егер $\rho\to 0$, ал аргумент $(-\varphi)$ келесі аралықта өзгереді $+\pi/2$ ден $-\pi/2$ дейін, егер $-\infty<\omega<+\infty$ болғанда немесе $0<\varphi<\pi/2$ егер $0<\omega<\infty$ болса. Сондықтан, түбір жазықтықтың $\omega=0$ нүктесіне $W(j\omega)$ сипаттамада, шексіз радиусты шеңбердің ширегі сәйкеседі (3.18-сурет). Енді $Q(p)$-нің барлық түбірлері сол жақта болғандықтан орнықтылық критерийінің тұжырымдамасы бұрынғыдай қалады, яғни $W(j\omega)$ сипаттама $(-1, j0)$ нүктені қамтымауы керек.

Сонымен қандай болмасын ν астатизм ретті жүйелердің орнықтылығын анықтау үшін, тұйықталмаған жүйенің оң жиілікке сәйкесетін АФЖС бір тармағын салу жеткілікті, оны шексіз үлкен радиусты шеңбердің $-\nu\pi/2$ доғасымен толықтырып, одан кейін оған алдындағы Найквист критерийін қолдануға болады.

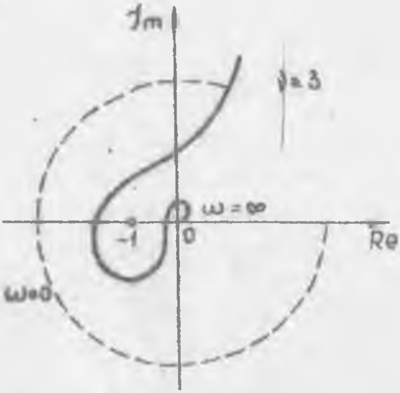
Мысалы, егер 2-ші ретті астатизмді тұйықталмаған жүйенің АФЖС 3.19-суреттегідей болса, онда тұйықталған жүйе бұл жағдайда орнықсыз болады, себебі шексіз үлкен радиусты $-\nu\pi/2=-\pi$ доғамен толтырылған тұйықталмаған жүйенің АФЖС әрдайым $(-1, j0)$ нүктені теріс бағытта қамтиды. Егер 3-ші ретті астатизммен жүйенің АФЖС 3.20-суреттегідей болса, ал оны шексіз үлкен радиусты $-\nu\pi/2=-3\pi/2$ доғамен толтырылғаннан кейін $(-1, j0)$ нүктені қамтымаса, онда тұйықталған жүйе орнықты болады. Басқа



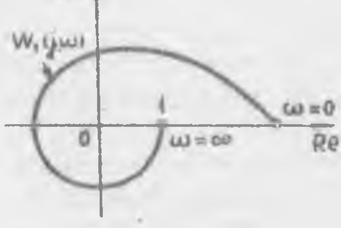
3.18-сурет



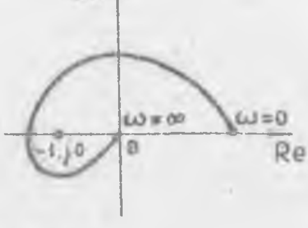
3.19-сурет



3.20-сурет



3.21-сурет



3.22-сурет

сөзбен айтқанда, АФЖС көрінісі күрделі болғанда, тө... о өтуінің оның шексіз үлкен радиусты $\omega=0$ сәйкестігін пунктир... шеңбердің өтуін қосу керек.

ЖҮЙЕ ТҰЙЫҚТАЛМАҒАН ЖАҒДАЙДА ОРНЫҚСЫЗ. $Q(p)$ с... аттамалық көпмүшенің k түбірлері оң нақты бөлікті болсын д... ік. Онда жоғарыдағы енгізілген қосымша функцияның

$$W_1(p) = 1 + W(p) = \frac{D(p)}{Q(p)}$$

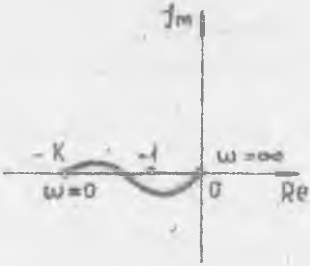
$p=j\omega$ алмастырғанда, тұйықталған жүйе орнықты болу үшін Михайлов критерийі бойынша, аргументінің өзгеруі $0<\omega<$... болғанда келесідей болу керек:

$$\Delta\arg W_1(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \Delta\arg D(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} - \Delta\arg Q(j\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = k\pi, \qquad (3.29)$$

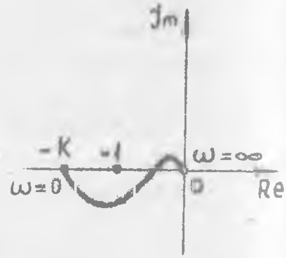
яғни тұйықталған жүйе орнықты болу үшін $D(j\omega)$ годог... фы координат бас нүктесін, сағат тіліне қарсы бағытта, $n/$... бұрышқа қамту керек, ал $Q(j\omega)$ годографы да, Михайлов критерий... бойынша координат бас нүктесін $(n-2k)\pi/2$ бұрышқа қамту керек... Нәтижесінде (3.29) бойынша $W_1(j\omega)$ сипаттама, Михайлов... одографы сияқты, сағат тіліне қарсы бағытта $(n-2k)\pi/2$ бұрыш... ау керек (3.21-сурет). Бұл тұйықталған жүйе орнықты бол... үшін, тұйықталмаған жүйенің АФЖС $[W(j\omega)=W_1(j\omega)-1]$ сағат тіл... қарсы бағытта $(-1,j0)$ нүктені $k\pi$ бұрышқа қамту керегін біл... еді.

Сонымен, егер тұйықталмаған жүйе орнықсыз бо... және k түбірлері оңшыл болса, онда тұйықталған жүйе орнық... болады. Тек қана, егер $W_1(j\omega)$ қосымша функциясының АФЖС $0<\omega<$... аралықта өзгергенде, координат бас нүктесін оң бағытта $k/2$ р... қамтыса (қарастырып отырған жағдайда $k=2$, бір рет қамтиды) ... 21-сурет) немесе тура солай $W(j\omega)$ сипаттама $(-1,j0)$ нүктені (3.22-сурет).

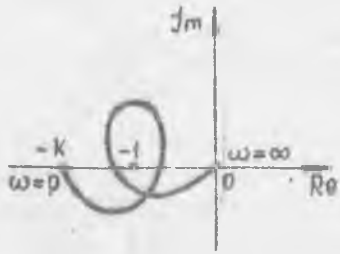
Егер $k=1$ (бір оң полюс) онда тұйықталған жүйе о... ты болу үшін тұйықталмаған жүйенің АФЖС шамамен 3.23 не... 3.24 суреттегідей болуы керек, егер $k=3$ 3.25-суреттег... . Бұл жағдайларда абцисс өсіндегі $(-1,j0)$ нүктеден сол жағ... ғы сипаттаманың бастапқы нүктесі жарты өту ретінде есепте... .



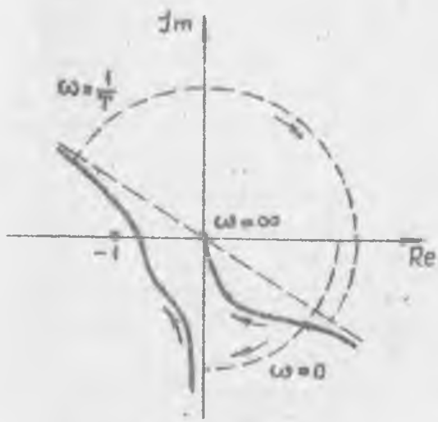
3.23-сурет



3.24-сурет



3.25-сурет



3.26-сурет

Басқа сөзбен айтқанда АФЖС көрінісі күрделі болған жағдайда Найквист критерийі келесідей тұжырымдалады: егер тұйықталмаған жүйе орнықсыз болса, онда тұйықталған жүйе орнықты болу үшін $W(j\omega)$ тұйықталмаған жүйенің АФЖС нақты осінің $(-\infty, -1)$ кесіндісін оң мен сол өтулерінің сандарының айырмасы $k/2$ болуы қажетті де жеткілікті. Мұнда k - тұйықталмаған жүйенің сипаттамалық теңдеуінің оң түбірлерінің саны.

4. ЖҮЙЕ ТЕРБЕЛМЕЛІ ОРНЫҚТЫЛЫҚ ШЕГІНДЕ. Бұл жағдайда барлық қалған полюстер жорымал осінің сол жағында жатқан жағдаймен немесе нольдік полюс болған немесе, ақыр аяғында полюстер оң жақта болғандағы жағдайлармен қосылуы мүмкін. Барлық варианттарда тұйықталған жүйенің орнықтылық жиілік критерийінің тұжырымдамасы бұрынғыдай қалады, сонымен жорымал полюс нүктесіндегі сипаттаманың үзілісі шексіз радиусты жарты шеңбермен толықтырылынады (3.26-сурет). Бұл р түбірлер жазықтықта жорымал полюс нүктесін, кішкентай радиусты жарты шеңбермен алмастырудан,және сәйкесті айналып өтетін контурды құрастырудан шығады, 3.17-суреттегі нольдік полюсті айналып өтуіне ұқсас.

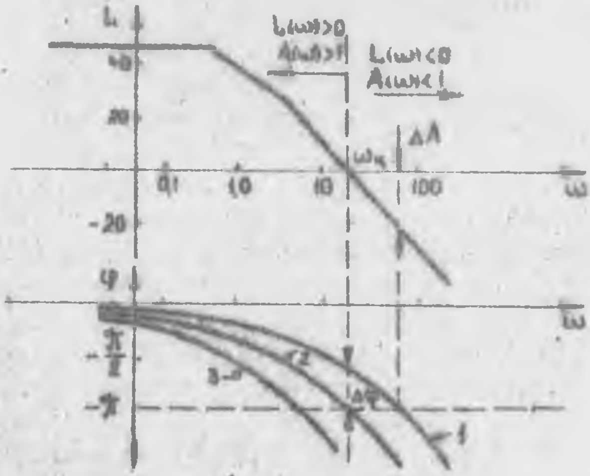
3.26-суретте Т деп тұйықталмаған тізбектің W(p) түрлендіруі функциясының бөлгішіндегі таза жорымал түбірлердің қосағын тудыратын (T^2p^2+1) сәйкесті көбейткіштің уақыттық тұрақтысы белгіленген.

3.4 ЛОГАРИФМДІК ЖИІЛІК СИПАТТАМАЛАР БОЙЫНША ЖҮЙЕНІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫН АНАЛИЗДЕУ

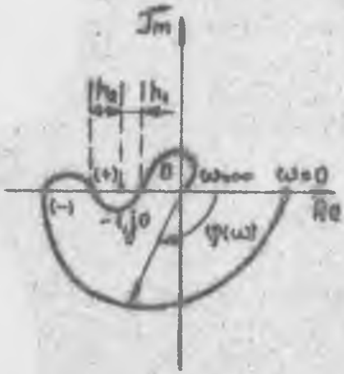
Тұйықталмаған жүйенің логарифмдік жиілік сипаттамаларын (ЛЖС) пайдаланылуына негізделінген жүйенің орнықтылығының анализі, инженерлік практикасында кеңінен қолданылады. Оның себебі тұйықталмаған жүйенің логарифмдік жиілік сипаттамаларының құруы,әсіресе асимптоталық сипаттамаларының, едәуір жеңіл болып келеді, амплитуда-фазалық жиілік сипаттаманың құруымен салыстырғанда.Жүйе тұйықталған жағдайда орнықты болу үшін, тұйықталмаған жүйенің ЛЖС-ры қандай талаптарды қанағаттандыру екенін көрсетейік.

Тұйықталмаған жағдайда орнықты жүйелерді қарастырайық.

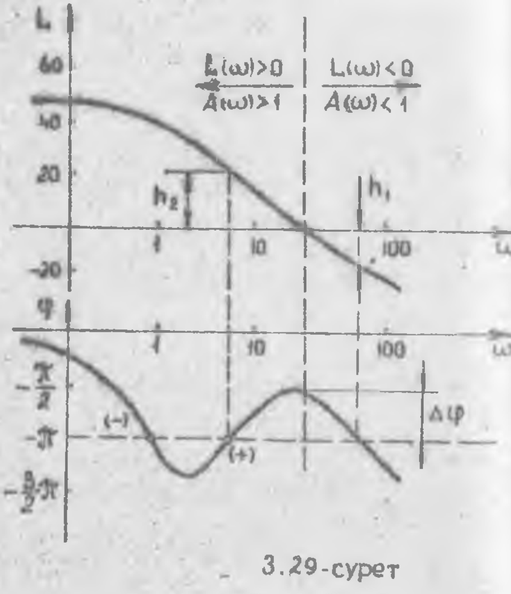
10-207



3.27-сурет



3.28-сурет



3.29-сурет

Онда Найквист критерийі бойынша АФЖС 3.15-суреттегідей болуы мүмкін. Яғни Найквист критерийі бойынша тұйықталған жүйе орнықты, егер тұйықталмаған жүйенің АФЖС (-1,j0) координатты нүктені қамтымаса. Бұл демек $\varphi=-\pi$ болғанда, $A(\omega)<1$ немесе $L(\omega)=20\lg A(\omega)<0$ болуы тиісті.

Ал бұл өз кезегінде логарифмдік фазалық жиілік сипаттамасының $-\pi$ сызықты қию нүктесі, $\omega_к$ қию жиіліктің оң жағында болуын білдіреді (2.27-сурет 1-қисық, 2-қисық жүйенің шекарасында болуына, ал 3 орнықсыз жүйеге сәйкесреді).

Егер қарастырылатын жүйе күрделі болса, яғни оның АФЖС "құс тұмсықты" болса (3.28-сурет), онда логарифмдік фазалық жиілік сипаттама $\omega_к$ жиіліктің сол жағын бірнеше рет қиюы мүмкін (3.29-сурет). Орнықтылықты көз қарасынан ондай өтулердің қаупі жоқ, егер ондай өтулер (-1,j0) нүктесінің оң жағында болса, яғни $|W(j\omega)|<1$ немесе $L(\omega)=20\lg|W(j\omega)|<0$ болған жағдайда болса. Сондықтан жүйе зерттегенде ЛАЖС теріс облысы қажетті емес.

АФЖС нақты осін (-1,j0) нүктесінің сол жағын астынан үстіне қарай өтуі $\varphi(\omega)$ өсуіне сәйкесреді, яғни логарифмдік фазалық жиілік сипаттамасының үстінен астына қарай өтуіне. Ал $W(j\omega)$ оң өтуіне $\varphi(\omega)$ астынан үстіне қарай өтуіне сәйкесреді (3.29-сурет). Бұдан келесі тұжырымдама шығады. Егер тұйықталмаған жүйе орнықты болса, онда тұйықталған жүйе орнықты болу үшін барлық ЛАЖС-нің оң облысында $L(\omega)>0$, фазалық сипаттамасының теріс өту саны оң өту санына тең болуы қажет.

3.5 ОРНЫҚТЫЛЫҚТЫҢ ҚОРЫ

Жүйенің жұмысқа жарамдылығын анықтау үшін оның орнықтылығының жай фактын көрсету (констатациялау) әлі жеткілікті емес. Уақыт озған сайын АФЖ үзбелердің параметрлері өзгеруі мүмкін. Егер бастапқы жүйе орнықтылықтың шекарасына жақын болса, онда ол өзгерістер жүйені орнықсыз етуі мүмкін. Сондықтан жүйенің орнықтылығының белгілі қоры болуының қажеттілігі туады. Орнықтылықтың қоры, жүйенің есептелінген параметрлерінің мәндері орнықтылық шекарасына сәйкесті мәндерімен, қашықтау болуын алдын ала ескеріледі. Бұл орнықтылықтың қоры өтпелі процестің та-ғайындалған сапасымен, орнықтылық аймағында нақтылы жүйенің жұмыс істеуін қамтамасыз етеді.

Жүйенің орнықтылық қорының анықтауы қандай орнықтылық критерийі қолданатынына байланысты. Найквист критерийін қолданғанда орнықтылықтың қоры $W(j\omega)$ вектордың годографының, $(-1,j0)$ координатты шек нүктесіне қарай, қалай орналасуы бойынша анықталады. Сірә, неғұрлым $W(j\omega)$ вектордың годографы бұл нүктеден алыс орналасса, соғұрлым орнықтылықтың қоры көп болады (3.30-сурет). Годограф $(-1,j0)$ координатты нүктесінің үстінен өтсе жүйе орнықтылықтың шекарасында болады.

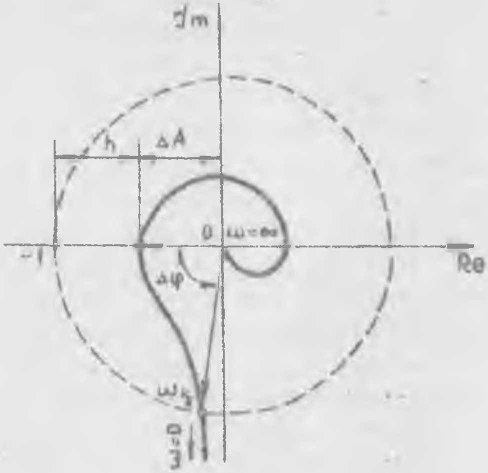
Орнықтылықтың қорын сандық бағалау үшін, әдетте фаза бойынша орнықтылықтың қоры және $W(j\omega)$ вектордың модулі бойынша орнықтылық қоры деген ұғымдар енгізіледі. Бұл екі қор қатар қарастырылады. Бұл ұғымдарды анықтайық.

Ол үшін центрі координат бас нүктесімен беттесетін бірлік радиусты шеңбер өткізейік (3.30-сурет). Бірлік мәнді болғандағы $W(j\omega)$ вектордың модулімен және теріс нақты жарты осьтің аралығындағы $\Delta\varphi$ бұрыш фаза бойынша орнықтылықтың қоры делінеді. Неғұрлым ол аз болса, соғұрлым $W(j\omega)$ функциясының годографы $(-1,j0)$ нүктеге қарай жақын болады, яғни соғұрлым жүйенің орнықтылық қоры аз болады. Жақсы сапалы жүйенің фаза бойынша орнықтылық қоры әдетте $(30\div60)^{\circ}$ аралығында болады. Модуль бойынша орнықтылықтың қоры $W(j\omega)$ годографтың $(-1,j0)$ нүктеден h алыстығымен сипатталады $W(j\omega)$ вектордың фазасы $-\pi$ болғанда. Іс жүзінде модуль бойынша орнықтылықтың қоры $W(j\omega)$ вектордың өзінің ΔA мәнімен сипаттауға және оны децибелдерде көрсетуге қабылданылынған, яғни $\mathrm{mod}\ W(j\omega)$ шамамен оның фазасы $\varphi=-\pi$ болғанда

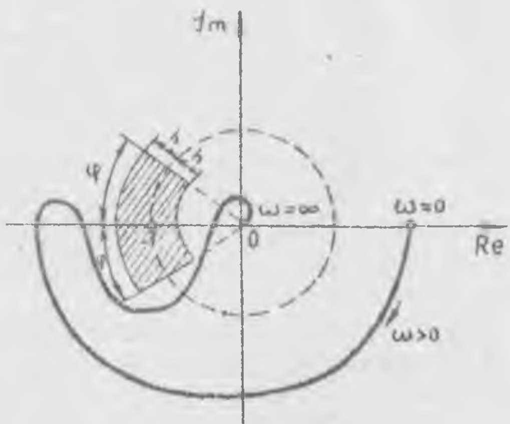
$$\Delta A_{дБ} = 20\lg \mathrm{mod}\ W(j\omega)\Big|_{\varphi=-\pi}$$

Модуль бойынша орнықтылықтың қоры, орнықтылығын жоюға келтірмейтін тұйықталмаған жүйенің K күшейту коэффициентінің болуы мүмкін өзгеруінің диапазонын сипаттайды.

Тұйықталмаған жүйенің күшейту коэффициенті өскен сайын



3.30-сурет.



3.31-сурет.

$W(j\omega)$ функциясының модулі де өседі, ертурлі К мендерінде $\arg W(j\omega)$ өзгеріссіз қалады, және күшейткіш коэффиценттің кейбір мәнінде, шекті күшейткіш коэффиценті деп аталатын $k=k_ш$, амплитуда - фазалық сипаттама (-1,j0) нүктенің үстінен өтеді, яғни жүйе орнықтылықтың шекарасында болады.

Орнықтылықтың қорының мәні $\Delta A<1$, сондықтан ΔA [дБ]<0, себебі $\lg 1=0$, ал $\lg(<1)<0$. Қабылданған шарттылық бойынша (модуль бойынша орнықтылықтың қорын ΔA шамасымен сипаттау) неғұрлым ΔA-нің абсолютті мәні аз болса, яғни жүйе орнықтылау болса, соғұрлым $\Delta A_{дБ}$ абсолютті мәні көп болады. Мысалы, егер $\Delta A=0,4$, онда $\Delta A_{дБ}=8$дБ, ал $\Delta A=0,2$ (орнықты жүйе) онда $\Delta A_{дБ}=14$. Сонымен бірге, егер $\Delta A=1$ болғанда орнықтылықтың қоры $\lg\Delta A=0$, яғни жүйе орнықтылықтың шекарасында болады. Жақсы сапалы жүйенің модуль бойынша орнықтылықтың қоры әдетте 6÷20дБ аралығында жатады. $W(j\omega)$ вектордың модулі бірге тең болғандағыға сәйкесетін $\omega_к$ жиілік қию жиілігі болып келеді.

Кейде жүйелер (ішкі кері байланыстарды) өзінің орнықтылығын, күшейткіш коэффиценті тек қана ұлғайғанда емес оның азайғанда да, жою мүмкінін ескеру керек. Мұндай жағдайларға "құс тұмсық" түрді (3.31-сурет) амплитуда-фазалық жиілік сипаттама сәйкесуі мүмкін. Бұл жағдайларда модуль бойынша, орнықтылықтың қоры абсцисса осьінің (-1,j0) шек нүктемен және амплитуда - фазалық жиілік сипаттама аралығында жатқан екі h кесінділердің шамаларымен анықталады.

Берілген h пен φ шамалар бойынша жүйенің орнықтылықтың қоры болуы үшін (-1,j0) шек нүктенің жанында, сектор түріндей $\pm h$ пен $\pm\varphi$ шамаларымен шек қойылған кейбір тиым салынған аймақ (өңір) сызылады (3.31-сурет), ал осы аймаққа амплитуда- фазалық жиілік сипаттама кірмеуі керек.

Орнықтылықтың қорларын тұйықталмаған жүйенің логарифмдік жиілік сипаттамалар бойынша анықтау ыңғайлы, яғни келесі сипаттамалар бойынша

$$L(\omega) = 20\lg \mod W(j\omega),$$
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega).$$

3.27-суретте, жоғарыда айтылған қорлар қалай анықталатыны көрсетілген, яғни $\Delta\varphi$ фаза бойынша орнықтылықтың қоры $L(\omega)=0$

болғандағы $\varphi(\omega)$ мен $-\pi$ сызықтың арасындағы айырымымен анықталады, ал ΔA модуль бойынша орнықтылықтың қоры $\varphi(\omega)=-\pi$ болғандағы $L(\omega)$ мәнімен анықталады.

Амплитуда-фазалық сипаттаманың түрі күрделі жағдайда. (3.23-сурет) амплитуда бойынша орнықтылықтың қоры h_1 мен h_2 шамаларымен анықталады, ал фаза бойынша орнықтылықтың қоры $\Delta\varphi$ шамасымен.

4-ТАРАУ

СЫЗЫҚТЫ СТАЦИОНАРЛЫ АВТОМАТТЫ БАСҚАРУ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ САПАСЫН БАҒАЛАЙТЫН ТӘСІЛДЕР

4.1. ЖАЛПЫ ЖАҒДАЙЛАР

Автоматты басқару жүйесінің жұмыс істеуі жақсы екенін, реттеуіш дұрыс дәлденген екенін анықтау үшін, немесе жобаланған жүйе жақсы жұмыс істей алатынын бағалау үшін, жүйенің тек қана орнықтылығын қамтамасыз ету жеткілікті емес, яғни өтпелі процестің басылуы қажетті, бірақ жүйенің іс жүзіне жарамдылығына ол жеткілікті емес шарт. Бұл сұрақтарға жауап беру үшін реттеу сапасын бағалайтын кейбір сандық критерийлер болу қажет.

Кейінгі кезде көптеген әртүрлі реттеу жүйелерінің сапа критерийлері зерттеліп дайындалған, оларды келесі топтарға бөлуге болады.

1. Орнықтылық критерийлері. Бұл критерийлер жүйенің орнықтылық шекарадан қаншама алыс тұратынын анықтауға мүмкіншілік береді (бұл мәселе жиілік сипаттамалар бойынша қалай шешілетіні жоғарыда қарастырылған).

2. Реттеу жүйелердің тезәрекеттік критерийлері. Тезәрекеттік деп реттеу жүйесінің тағайындалған және ауытқылаушы әсерлердің өзгерісін атқару жылдамдығын айтады.

3. Жүйенің дәлдігін, орнықтылықтың қорын және тезәрекеттілігін есепке алып, кейбір жалпылама қасиеттеріне бағалау беретін сапаның кешендік критерийлері.

4. Реттеу жүйесінің әртүрлі типтік режимдердегі қателігінің шамасын жүйе сапасын бағалау үшін қолданатын дәлдік критерийлер.

Басқару процесінің сапасын, айтылған критерийлер бойынша, тікелей эксперимент арқылы немесе есептеу жолымен анықталған өтпелі процестің қисығы бойынша бағалауға болады, әлде кейбір динамикалық параметрлер немесе жүйенің оңай анықталатын сипаттамалары бойынша жанама жолмен бағалауға болады.

Тікелей өтпелі процестің қисығы бойынша табылған сапа бағалары сапанын тікелей бағалары делінеді, ал басқа жолмен табылған сапа бағаларды жанама бағалар деп аталады.

Сызықты уәдіксіз жүйелердің реттеу сапасын бағалайтын жанама әдістерді үш топқа бөлуге болады: түбірлі, интегралды және жиілікті.

4.2 ӨТПЕЛІ ПРОЦЕСТІҢ ТІКЕЛЕЙ САПА БАҒАЛАРЫ

Жүйенің өтпелі процесі оның сыртқы әсерге беретін реакциясы болып келеді, ал сыртқы әсер жалпы жағдайда уақыттан күрделі функция болуы мүмкін. Әдетте жүйе беталысы келесі типтік әсерлерде қарастырылады: бірлік сатылы функцияда 1(t), импульсті $\delta(t)$ және гармоникалық функцияларда. Бәрінен жиі тікелей сапа бағалары h(t) өтпелі сипаттама бойынша анықталады, яғни бірлік сатылы функция әрекетінде

$$g(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \text{ болғанда} \\ 0, & t<0 \text{ болғанда} \end{cases}$$

және нольдік бастапқы шарттарында.

Бұл сипаттама шығу шамасы үшін (4.1-сурет), әлде $\varepsilon(t)$ жүйе қателігі үшін (4.2-сурет) құрылуы мүмкін. Сапаның тікелей бағаларына келесі бағалар жатады:

1. Реттеу уақыты t_p - минималды уақыт, бұл уақыт өтіп кеткеннен кейін реттелінетін шама тұрақталынған мәніне тағайындалынған дәлдікпен жақын болып қала береді, яғни $|\varepsilon(t)|<\Delta$, $t>t_p$ болғанда не $|h(t)-h_{тұр}|<\Delta$ болғанда мұндағы Δ тұрақты шама, оның мәнін алдын ала ескерту қажет. Δ шама шығу шамасының $h_{тұр}$ тұрақталынған мәнінен процентте тағайындалады

$$h_{тұр} = \lim_{t\to\infty} h(t).$$

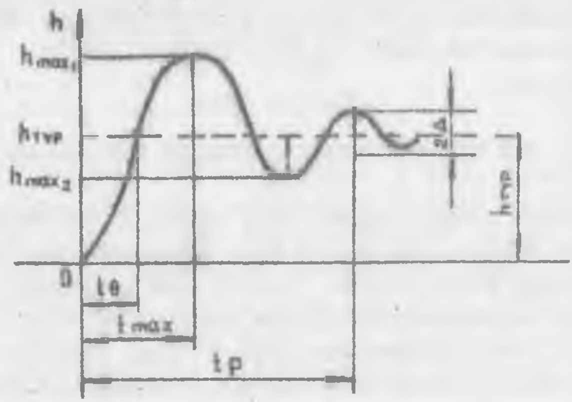
Реттеу уақыты жүйенің тезәрекеттігін сипаттайды.

2. Асыра реттеу σ - өтпелі сипаттаманың $h_{тұр}$ тұрақталынған мәнінен максимальды ауытқуы салыстырмалы бірлікте не процентте көрсетілген шама болып келеді, яғни:

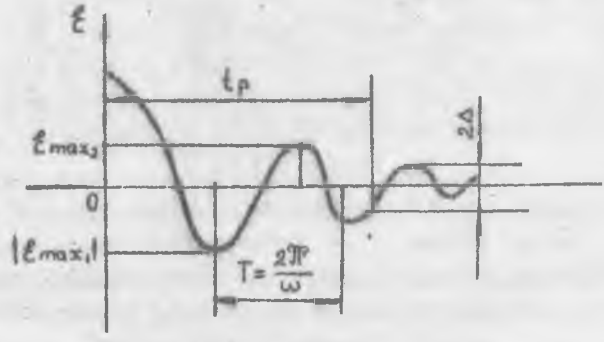
$$\sigma = \frac{h_{MAX,1} - h_{тұр}}{h_{тұр}} 100\%$$

мұнда $h_{MAX,1}$ - өтпелі процестің бірінші максимумнің мәні, немесе

20-207



4.1-сурет



4.2-сурет

$$\sigma = \frac{|\varepsilon(t)|_{MAX}}{h_{ТҰР}} 100\% = \frac{|\varepsilon(t)|_{MAX}}{|\varepsilon(0)|} 100\%.$$

Асыра реттеу жүйесінің тербелулерге бейімділігін және сонымен бірге орнықтылықтың қоры бар екенін сипаттайды. Әртүрлі жүйелерге асыра реттеудің мүмкін мәні, басқа соған ұқсас жүйелердің пайдалану тәжірибесінен анықталады. Көп жағдайларда орнықтылық қоры жеткілікті деп есептелінеді, егер асыра реттеу (10÷30)% аспаса. Бірақ кейбір жағдайларда өтпелі процесс жалпы асыра реттеусіз, яғни бір қалыпты (монотонды) өтуін талап етілінеді, бірқатар жағдайларда σ-(50÷70)% болуы мүмкін.

3. Тербелу жиілігі $\omega=2\pi/T$, мұнда T - тербелмелі өтпелі сипаттаманың тербелу периоды.

4. Реттеу уақыт аралығында h(t) өтпелі сипаттаманың немесе $\varepsilon(t)$-нің m - тербелулер саны. Жүйе жобаланғанда m=1÷2, ал кейде m=3÷4 дейін болуы жіберіледі, бірақ кейбір жағдайларда тербелулердің болмауын, яғни m=0 болуын қажет етеді.

5. Бірінші максимумды жету уақыт t_{max}.

6. Өтпелі процестің өсу уақыты t_0, бұл h(t) өтпелі сипаттаманың қисығының $h_{ТҰР}$ тұрақталынған мәнінің деңгейімен немесе $\varepsilon(t)$ ауытқу қисығының абцисс өсімен, бірінші қиылысқан нүктенің абциссасы. Өсу уақытының максимальды мәні t_0^{max} талап етілетін тезәрекеттілікпен шектеледі.

7. Өтпелі процестің тербелмелігі μ, бұл процектте көршілес максимумдардың қатынасымен бағаланады, яғни

$$\mu = \frac{h_{MAX,2} - h_{ТҰР}}{h_{MAX,1} - h_{ТҰР}} 100\%$$

сөнбейтін тербелулерге $\mu=100\%$ сәйкеседі. Тербелмелік нольге қарай ұмтылады, егер $h_{MAX,2}$ мәні $h_{ТҰР}$ мәнге ұмтылса, яғни $h_{MAX,2} - h_{ТҰР} = 0$ болса, онда $\mu=0$.

Атап айтылған сапа көрсеткіштер басқа көрсеткіштермен толтырылуы мүкін, бірақ ол нақты жүйенің өзгешілігіне байланысты.

Жоғарыда келтірілген өтпелі процестің тікелей сапа бағаларын анықтау 4.1, 4.2-суреттерде көрсетілген.

Сатылы әсерлердегі болатын жүйедегі өтпелі процестерді үш топқа бөлуге болады: монотонды процестер, апериодты және тербелмелі. Монотонды процестерде шығу шаманың бірінші туындысы $y'(t)$ таңбасын өзгертпейді (4.3-сурет а қисық), апериодты процестерде $y'(t)$ туындының таңбасы бірден көп рет өзгермейді (4.3-сурет б қисық), ал тербелмеліде бірінші туындысы $y'(t)$ өз таңбасын периодты түрде өзгертеді (4.3-сурет в қисық).

Бұл жерде бір назар аударатын жағдай келесіде. Қазіргі уақытта есептеу техникасының қарқындап өсуінің арқасында, өтпелі процестің есептеуімен және жүйенің параметрлерінің болуы мүмкін вариацияларын іздеумен байланысты қиыншылықтар елеулі түрде азайып келеді, сондықтан тікелей сапа бағалардың маңызы автоматты басқару жүйелерді жобалағанда өте зор.

4.3 ЖҮЙЕГЕ ГАРМОНИКАЛЫҚ ӘСЕР ӘРЕКЕТ ЕТІП ТҰРҒАН КЕЗІНДЕГІ ОНЫҢ САПАСЫН БАҒАЛАУ

Гармоникалық әсерлерде реттеу сапасын келесі сипаттамалар бойынша бағалауға болады: тұйықталған жүйенің амплитудалық жиілік сипаттамасы, тұйықталмаған жүйенің амплитуда-фазалық жиілік және логарифмдік жиілік сипаттамалары бойынша.

Тұйықталған жүйенің амплитудалық жиілік сипаттамасы бойынша жүйенің сапасын бағалағанда келесі шамалармен қолданады.

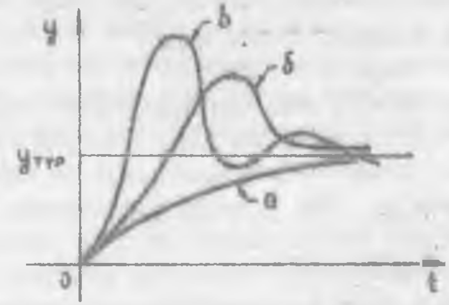
1. M тербелмелігінің көрсеткішімен бұл амплитудалық жиілік сипаттамасының максимальды мәнінің $A_{max}(\omega)$ оның ω=0 болғандағы мәніне қатынасымен анықталады (4.4-сурет), яғни

$$M = \frac{A_{max}(\omega)}{A(0)}$$

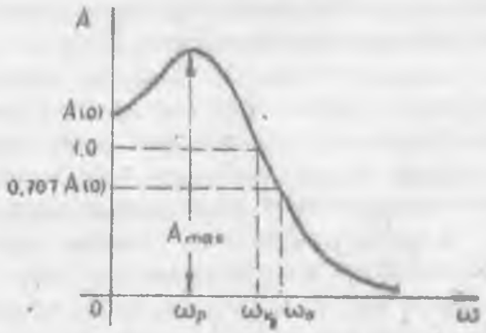
Егер $A(0)=1$ болса (4.5-сурет), онда $M=A_{max}(\omega)$. Тербелмелігінің көрсеткіші жүйенің тербелулерге бейімділігін (ықғайлығын) сипаттайды. Неғұрлым M жоғары, соғұрлым жүйе сапасы басқа тең шарттарда төмен болады.

2. Резонансты жиілікпен ω_p. Бұл тұйықталған жүйенің амплитудалық жиілік сипаттамасының мәні максимал болғандағы жиілік, яғни бұл жиілікте гармоникалық тербелулер жүйеден ең үлкен күшеюмен өтеді.

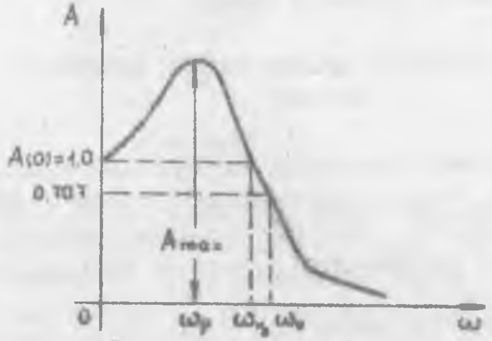
3. Өткізу жолағымен ω_0. Бұл ω=0 ден ω_0 дейін жиілік ара-



4.3-сурет.



4.4-сурет



4.5-сурет

лығы (интервалы) ол аралықта келесі шарт

$$A(\omega) > 0,707\ A(0)$$

орынды болу керек не $A(0)=1$ болғанда $A(\omega) > 0,707$ болу қажет.

Өткізу жолағы өте кең болмзу керек, әйтпесе жүйе жоғарғы жиілікті бөгеүлерді (кіреукелерді) ұдайы ендіріп тұрады.

4. Қию жиілікпен $\omega_к$. Бұл жүйенің амплитудалық жиілік сипаттамасының мәні бірге тең болғандағы жиілік, яғни $A(\omega_к)=1$. Бұл жиілік жанама жолымен өтпелі процестің уақтығын сипаттайды. Неғұрлым қию жиі[illegible]і аз соғұрлым жүйе тезерекеттігі төмендеу

$$t_p \approx (1 \div 2) 2\pi/\omega_к$$

егер өтпелі процесте бір-екі тербелістер болса, онда өтпелі сипаттаманың бірінші максимумды жету уақыты

$$t_p \approx \pi/\omega_к$$

Жүйенің тербелістерге бейімділігі бар екендігі амплитуда бойынша ΔA және фаза бойынша $\Delta\varphi$ орнықтылықтың қорларымен сипатталады, ал ол қорлар амплитуда-фазалық жиілік және логарифмдік жиілік сипаттамалар бойынша қалай анықталатыны бұдан бұрын көрсетілген. Жақсы демпферленген (яғни тербелістер өшірілген) жүйелерде амплитуда бойынша орнықтылық қоры 6 мен 20 дБ, ал фаза бойынша 30 бен 60 аралығында болып тұрады.

Жоғарыда қарастырылған көрсеткіштер жанама жолымен жүйенің тезерекеттігін, асыра реттеуін т.б. анықталғандықтан оларды периодты емес ауытқушы әсерлердің әрекетінде болатын жүйелердің жоба есебінде де қолдануға болады.

4.4 ӨТПЕЛІ ПРОЦЕСТІҢ САПАСЫН ТҮБІРЛІ ӘДІСТЕРМЕН БАҒАЛАУ

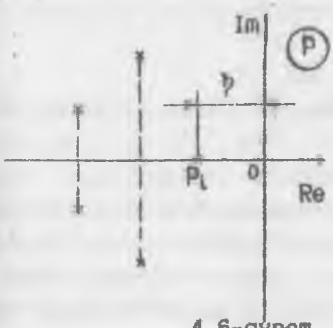
Тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясының полюстерінің, яғни сипаттамалық теңдеуінің түбірлерінің және түрлендіру функциясының нольдерінің, яғни оның алымының түбірлерінің орналасу түріне қарай негізделінген бағаларды түбірлі бағалары деп атайды.

Жол-жөнекей еске түсірейік, жүйе орнықтылығын зерттегенде оның түрлендіру функциясының тек қана полюстері қажетті болатын, ал бұл жерде жүйе сапасын қарастырғанда оның нольдерін де есепке алу қажет. Себебі жүйенің беталысын жазатын дифференциалды теңдеудің шешіміне кіретін өтпелі құрушысы полюстерімен, ал еріксіз құрушысы нольдерімен анықталады. Тек дербес жағдайда тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясының нольдері жоқ болғанда, яғни

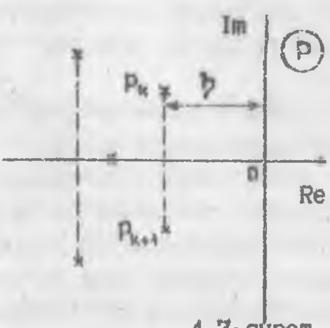
$$W_T(p) = \frac{b_0}{a_0 \prod_{i=1}^{n} (p-p_i)}$$

болғанда өтпелі процестің сапасы түрлендіру функциясының полюстерімен ғана анықталады және әсердің мәнімен, бірақ нольдерімен емес.

ЖҮЙЕНІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫНЫҢ ДӘРЕЖЕСІ ТУРАЛЫ ҰҒЫМ. Сапаның ең қарапайым түбір бағасы орнықтылықтың дәрежесі болып келеді.бұл тұйықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуінің түбірлерінің жазықтығындағы жорымал осімен ең жақындағы түбірге дейін η ара қашықтық (4.6-сурет). Сонымен бірге екі жағдай болуы мүмкін: ең жақын түбір нақты болуы (4.6-сурет) немесе жорымал осіне қарай ең жақын орналасқан қосақ кешендік түбірлер болуы (4.7-суретте) көрсетілген.



4.6-сурет



4.7-сурет

Жорымал осіне қарай ең жақын орналасқан сипаттамалық теңдеудің түбірлеріне өтпелі процесте ең ақырын басылатын мүшелер сәйкеседі, олар басылғаннан кейін, көп жағдайларда, өтпелі процесс аяқталды деп санауға болады. Егер жорымал осіне қарай ең жақын жататын p_i түбір нақты болып келсе, онда бұл түбірмен анықталатын өтпелі процестің құрушысы келесі түрде болады

$$y_i(t) = C_i e^{-\eta t}$$

өтпелі процесс аяқталғанан кейін $t=t_p$ болғанда

$$y_i(t) = C_i e^{-\eta t_p}$$

егер Δ - реттеу қателігі салыстырмалы бірлікте берілетін болса, онда келесідей жазуға болады

$$C_i e^{-\eta t_p} = C_i \Delta \qquad (4.1)$$

Немесе (4.1) логарифмдеп реттеу уақытын келесідей табуға болады

$$t_p = 1/\eta \ln(1/\Delta) \approx 3/\eta \quad (\Delta \sim 0{,}05 \text{ болғанда})$$

бұл уақытта өтпелі процестің жалпы уақтығын сипаттайды, себебі қалған түбірлерге сәйкесетін шешімнің барлық мүшелері жылдамдау басылады.

Егер жорымал осіне қарай ең жақын жататын қосақ кешенді түбір болатын болса (4.7-сурет), онда өтпелі процестің шешіміндегі басым болатын құраушысы

$$y_k(t) = C_k e^{-\eta t} \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

тербелмелі болады (η - тербелмелі орнықтылықтың дережесі). Бұл жерде жоғарыдағы қарастырылған жағдайға ұқсас көрсетуге болады өтпелі процестің уақтығы

$$t_p \leqslant 3/\eta$$

Сонымен орнықтылықтың дережесі бойынша жүйенің тез әрекеттігін бағалвуға болады.

ОРНЫҚТЫЛЫҚТЫҢ ДӘРЕЖЕСІН АНЫҚТАУ. Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін есептемей-ақ η орнықтылықтың дережесін анықтауға болатын жағдай маңызды жағдай болып келеді. Ол үшін $z=p+\eta$ жаңа кешендік айнымалы шама енгізіледі (4.8,а - сурет). Онда z кешендік жазықтықта Im - жорымал осі ең жақын түбірлер үстінен өтеді, яғни z бойынша құрылатын сипаттамалық теңдеудің шешімі орнықтылықтың шекарасында жату керек (z енгізу жорымал осін η шамаға солға немесе барлық түбірлерді оңға қарай жылжумен сәйкесіді).

Сонымен, егер сипаттамалық теңдеуі берілсе

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n \qquad (4.2)$$

онда $p=z-\eta$ қойып, жаңа теңдеу табамыз

$$D(z-\eta) = a_0(z-\eta)^n + a_1(z-\eta)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(z-\eta) + a_n = 0$$

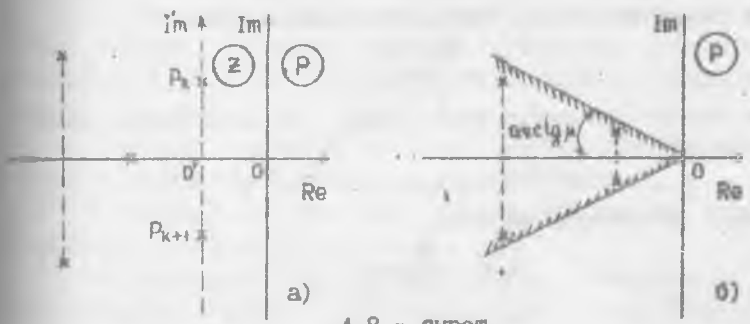
немесе

$$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z + A_n = 0 \qquad (4.3)$$

Соңғы теңдеу ығыстырылған теңдеу деп аталады, егер оның $A_1, A_2, \ldots, A_n$ коэффиценттері η-нің функциясы болса. Оларды келесі түрде есептеуге болады:

$$A_n = D(-\eta),\ A_{n-1} = \frac{D'(-\eta)}{1!}, \ldots,\ A_1 = \frac{D^{n-1}(-\eta)}{(n-1)!} \qquad (4.4)$$

Бұлар (4.3) өрнекті, (4.2) $D(p)$ функциясында $p=z-\eta$ болғандағы Тейлор қатарына жіктеу нетижесі ретінде көрсеткеннен шығады.



4.8 - сурет

Бұдан кейін (4.3) теңдеуге орнықтылықтың шекаралық шарты қолданылады, мысалы Гурвиц критерийі бойынша

$$A_n(\eta) = 0 \text{ және } \Delta_{n-1}(\eta) = 0,$$

ал енді бұдан η шамасы анықталады. Бұл жерде еске сала кетейік $A_n(\eta) = 0$ болғанда жүйе апериодты, ал екінші жағдайда тербелмелі шекарасында болады.

ЖҮЙЕ ТЕРБЕЛМЕЛІГІ. Жүйенің тербелістерге бейімділігінің бар екенін ең жақын жатқан түбірдің жорымал бөлігімен (тербелістердің бұрыштық жиілігімен) нақты бөлігінің (орнықтылықтың дәрежесінің) қатынасы сипаттайды. Ондай қатынас жүйе тербелмелігі деп аталады, яғни

$$\mu = \omega/\eta$$

Неғұрлым η мәні аз соғұрлым жүйенің тербеліске бейімділігі

21-207

жоғары. Кешенді жазықтықта μ-Const сызық орталық бұрыш құрады (4.8,б - сурет).

Тербелмелік басқа басылу делінетін,орнықтылық қорның түбірлі көрсеткішімен келесі түрде байланысты. Кешендік түйіндес түбірлер өтпелі процестің формуласында келесі мүше береді дейік.

$$y_k(t) = C_k e^{-\eta t}\sin(\omega_k t+\varphi).$$

Синусоидалды тербелістің бір периодтағы амплитудасының басылуын анықтайық. Кейбір $t=t_1$ уақытта бұл амплитуда тең

$$C_1 = C_k e^{-\eta t}.$$

Бір $T=2\pi/\omega_k$ периодтан кейін, ол амплитуда мынаған тең

$$C_2 = C_k e^{-\eta(t_1+2\pi/\omega_k)} = C_1 e^{-2\pi\eta/\omega} = C_1 e^{-2\pi/\mu}.$$

Бір периодтағы басылу деп келесі шаманы айтады

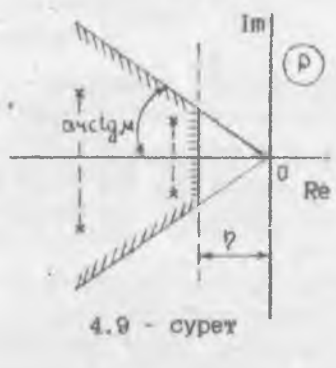
$$\xi = \frac{C_1-C_2}{C_1}$$

Бұл шама әдетте процентте көрсетіледі. C_2 амплитуданың мәнін қойып, табамыз

$$\xi = 1 - e^{-2\pi/\mu} \quad \text{немесе} \quad 1 - \xi = e^{-2\pi/\mu}$$

Бұл өрнекті логарифмдеп табамыз

$$\mu = \frac{2\pi}{-\ln(1-\xi)}.$$



4.9 - сурет

Әдетте автоматты басқару жүйелерде бір периодтағы басылу (90÷98)% аз болмау тиісті. Мысалы $\xi=98\%$ болса, онда мүмкін тербелмелік $\mu_M=1,57$ болады, ал $\xi=90\%$ болса онда $\mu_M=2,72$ яғни тербелмелік қанағаттанарлық егер

$$\mu = 1,57 \div 2,72$$

μ тербелмеліктің және η орнықтылықтың дәрежесінің нақты мәндерін талап ету, 4.9-суретте көрсетілгендей, тұйықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуінің барлық түбірлері бір облыс ішінде жату керегіне келтіреді.

Жоғарыда айтылғандай тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясының полюстері дифференциалдық теңдеудің сол жағын сипаттайды, ал нольдері - оң жағын. Полюспен нольдердің жайғасатын облысын тағайындау, өтпелі процесті толықтау бағалауға мүмкіншілік береді. Толық анализіне тоқтамай, түрлендіру функциясының полюстерімен нольдерінің жайғастыруын таңдағанға қолдануға болатын дәлелсіз жалпы кепілдемелерді келтірейік [22].

1. Нольдерді полюстер жайғасқан облысқа жақындау орналастыру қажетті. Полюстер облысынан нольдерді алыстату өтпелі процестегі өз тербелістердің амплитудаларының ұлғаюына келтіреді.

2. Өтпелі процесте ауытқуын азайту үшін полюстерді бір бірінен алыстау жайғастыру көп жағдайда пайдалы.

3. Жорымал өсінен алыс жатқан түбірлердің бір біріне жақындауы ешқандай қауіпті емес.

Бұл кепілдемелерден басқа,полюстердің жайғасуының облысына қойылған белгілі орнықтылықтың қорын және тезәрекеттігін қамтамасыз ету үшін қойылған талаптармен байланысты шектер (4.9-сурет) өз күшін сақтайды.

Әдебиеттерде [1, 23] белгілі Вышнеградскийдің диаграммасы келтіріледі, ал оны жүйе параметрлерінің жазығында үшінші ретті жүйелердің өтпелі процесін зерттеу үшін, түбір бағаларын қалай қолданудың мысалы ретінде қарастыруға болады.

4.5 ӨТПЕЛІ ПРОЦЕСТЕРДІҢ САПАСЫНЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ БАҒАЛАРЫ

Интегралдық бағалардың мақсаты өтпелі процестердің басылуының тездігін және реттелетін шаманың ауытқуының шамасын бүтіндей жалпы бағасын беру, әрқайсысын жеке-жеке анықтамай. Қаралайық интегралдық баға ретінде келесі шама болуы мүмкін

$$I_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon(t)dt \qquad (4.5)$$

мұнда $\varepsilon(t)$ өтпелі процесс аяқталғаннан кейін реттелінетін шаманың жаңадан тұрақталынған мәнінен ауытқуы.

Орнықты жүйеде $\varepsilon\to0$ егер $t\to\infty$ және бұл интегралдың шекті мәні бар болады. Геометриялық түрде бұл ауытқу үшін құрылған өтпелі процестің қисығының астындағы ауданы болады (4.10-сурет). Аудан соғұрлым аз болады, неғұрлым өтпелі процесс тез басылса және неғұрлым ауытқудың шамасы аз болса. Сондықтан жүйе параметрлерін таңдағанда, бұл интегралдық бағаның минимумына жеткізетін параметрлерді таңдау кепіл етеді.

I_1 интегралды есептеу үшін $\varepsilon(t)$ табуының қажеті жоқ, себебі оны Лаплас немесе Хевисайд-Карсон кескіндерін пайдаланып оңай есептеуге болады. Шынымен, Лаплас кескіні келесі өрнекпен анықталады

$$E(p) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t)e^{-pt}dt$$

Бұдан $p\to0$ шектік өту арқылы (4.5) интегралды келесідей табуға болады

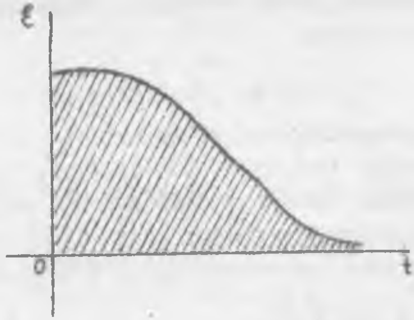
$$\int_0^{\infty} \varepsilon(t)dt = \lim_{p\to0} \int_0^{\infty} \varepsilon(t)e^{-pt}dt = \lim_{p\to0} E(p) \qquad (4.6)$$

(4.5) интегралдық бағаның ыңғайсыздығы бұл оның тек қана монотонды процестеріне ғана жарамдығы, яғни ауытқудың таңбасы өзгермейтін жағдайда ғана. Егер процесс тербелісті болса (4.11-сурет), онда (4.5) интегралды есептегенде аудандар алгебралы қосылады да, интегралдық минимумы аз басылуымен не жалпы басылусыз тербелістерге сәйкесуі мүмкін. Жоба есебін жүргізгенде оның өтпелі процесінің түрі алдын ала белгілі болмауы мүмкін, сондықтан (4.5) интегралды қолданудың практикалық пайдалылығы аз. Осы себептен басқа интегралдық баға ұсынылады

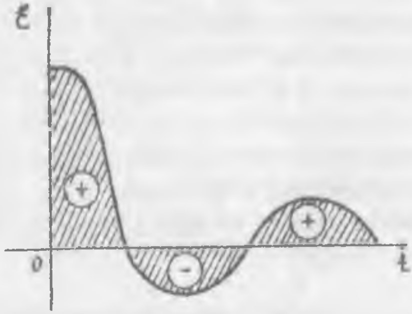
$$I_2 = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)|dt, \qquad (4.7)$$

яғни өтпелі процестің қисығының астындағы барлық аудандардың абсолюттік шамаларының қосындысы. Бірақ оның есептеуі теңдеу коэффиценттері бойынша қиын болып шықты.

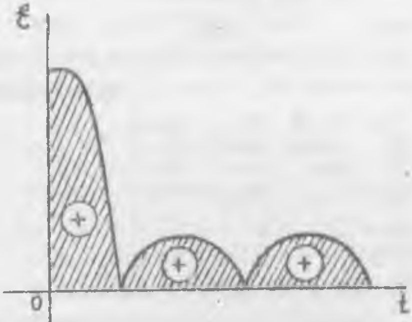
КВАДРАТТЫҚ ИНТІГРАЛДЫҚ БАҒА. Жоғары айтылған себептерден



4.10 - сурет



4.11 - сурет



4.12 - сурет

квадраттық интегралдық, кейде реттеудің "квадраттық ауданы" делінетін бағаға ету қажет

$$I = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t)dt \quad (\varepsilon \to 0 \text{ егер } t \to \infty) \qquad (4.8)$$

бұл ауытқулардың таңбаларынан, демек өтпелі процестің түрінен (монотонды ма немесе тербелісті ме) тәуелсіз баға. Егер өтпелі процестің қисығының, жанадан тұрақталынған жағдайдан ауытқуының түрі 4.11-суреттегідей болса, онда (4.8) интеграл геометриялы $\varepsilon^2(t)$ қисығының астындағы аудан болып келеді (4.12-сурет).

(4.8) I интегралдық бағасының шамасы соғұрлым аз болады, неғұрлым 4.12-суреттегі штрихталынған аудандардың қосындысы аз болса, яғни неғұрлым өтпелі процесс, тағайындалған әлде ауытқылаушы әсердің секіруінің (кенет өзгеруінің) соңынан пайда болатын реттелінетін шаманың идеалды секіруіне жақын болса.

Әдебиетте тұйықталған жүйенің дифференциалдық теңдеуінің коэффиценттері арқылы (4.8) интегралды есептеуге мүмкіншілік беретін әртүрлі формулалар дәлелдеумен келтіріледі.

Төменде дәлелдеусіз [28] ұсынылған формула беріледі, ол формула бойынша квадраттық интегралдық баға есептелінеді, егер бірлік секіру тағайындалған не ауытқылаушы әсер арнасы бойынша әрекет етіп тұрса, онда

$$I = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t)dt = \frac{1}{2a_n^2\Delta}\left(B_m\Delta_m + B_{m-1}\Delta_{m-1} + \cdots + B_2\Delta_2 + B_1\Delta_1 + B_0\Delta_0\right) - \frac{b_m b_{m-1}}{a_n^2} \qquad (4.9)$$

мұнда Δ дегеніміз (Гурвицтің жоғары ретті анықтауышына тең, бірақ басқа түрде жазылған) n ретті келесі анықтауыш

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} \qquad (4.10)$$

Орнықтылықтың шекарасында $\Delta = 0$ және $I \to \infty$.

(4.9) өрнекте Δ_k деп ($k = m, m-1, \ldots, 2, 1, 0$) анықтауыштар белгіленген, ал олар (4.10) анықтауыштан табылады $(m-k+1)$ бағанн мынадай бағанмен алмастырып

$$\begin{matrix} a_{n-1} \\ a_n \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{matrix} \qquad (4.11)$$

B_m, B_{m-1} коэффициенттер формулалар бойынша есептеледі:

$$\begin{aligned} B_m &= b^2_m, \\ B_{m-1} &= b^2_{m-1} - 2b_m b_{m-2}, \\ B_{m-2} &= b^2_{m-2} - 2b_{m-1}b_{m-3} + 2b_m b_{m-4}, \\ &\cdots \\ B_k &= b^2_k - 2b_{k+1}b_{k-1} + 2b_{k+2}b_{k-2} + \cdots + 2(-1)^k b_m b_{2k-m}, \\ &\cdots \\ B_0 &= b^2_0, \end{aligned} \qquad (4.12)$$

(4.10)-шы анықтауыштың элементтерінің индексі n-нан үлкен және нольден кіші болса, ал (4.12) өрнекте нольден кіші m-нан үлкен болса олардың орнына нольдер қойылады.

Бұл жерде ескертетін жай, бұл (4.9) өрнекпен қолдануға болады, егер тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясы бөлшекті рационалды болса және оның бөлімінің көпмүшесінің дережесі n алымының көп мүшесінің m дережесінен үлкен болса, яғни n>m болса. Егер n=m , болса онда (4.9) өрнектің түрі басқаша болады [1].

Квадраттық интегралдық бағаны, жоғарыдағы айтылған шарттар орындалғанда, Релей формуласы делінетін, дәлелдеуі [1] келтірілген формуламен де есептеуге болады.

Ол формула бойынша егер $E(j\omega)$, $\varepsilon(t)$ уақыт функциясының Фурье кескіні болса, онда Парсеваль теоремасымен анықталатын келесі тәуелділік әділетті

$$I = \int_0^{\infty}\varepsilon^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|E(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|E(j\omega)|^2 d\omega,$$

яғни уақыт бойынша функцияның квадратын нольден шексізге дейін интегралдауды сол функцияның Фурье кескіннің модулінің квадратын барлық жиілік бойынша интегралдаумен алмастыруға болады. $1(t)$ түрде кіру тағайындалған әсердің реакциясына (жауабына) сәйкесетін I интегралдық бағаны тапқанда, зерттелінетін $\varepsilon(t)=y(\infty)-y(t)$ ауытқудың Фурье кескіні келесідей болады

$$E(j\omega) = \frac{\Phi(0) - \Phi(j\omega)}{j\omega},$$

мұндағы $\Phi(j\omega)$ - тұйықталған жүйенің жиілік түрлендіру функциясы. Онда

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(0) - \Phi(j\omega)|}{\omega^2} d\omega. \qquad (4.13)$$

Астатикалық жүйелерде және бірлік емес кері байланысты жүйелерде реттелінетін шаманың тұрақталынған мәні $y(\infty)$-1 және $\Phi(0)$-1. Онда (4.13) өрнектің түрі келесідей болады

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\Phi_\varepsilon\ (j\omega)|^2}{\omega^2} d\omega$$

мұндағы $\Phi_\varepsilon\ (j\omega)=1-\Phi(j\omega)$ тұйықталған жүйенің қатесі бойынша жиілік түрлендіру функциясы.

Ұқсас өрнектерді кіру ауытқылаушы әсер бойынша да табуға болады, егер $\Phi_\varepsilon\ (j\omega)$ жиілік түрлендіру функциясының орнына $\Phi_f(j\omega)$ ауытқушы бойынша түрлендіру функцияны қолданса.

КВАДРАТТЫҚ БАҒАЛАРМЕН ҚОЛДАНУ. Интегралдық бағаның минимумына сүйеніп берілген автоматты басқару жүйесінің кейбір α мен β параметрлерін таңдауы қажет болсын дейік. Ең алдымен жоғарыда келтірілген формулалар бойынша сәйкесті интегралдық бағаның өрнегі табылады. Бұл өрнек, егер α мен β ден басқа барлық параметрлері берілген болса,жазылады

$$I = I(\alpha,\beta)$$

I-дің минимумына сәйкесетін α мен β мәндерін анықтау үшін α мен β бойынша дербес туындылар есептелінеді де олар нольге теңделеді. Нәтижесінде екі теңдеу табылады

$$\frac{I}{\alpha} = 0, \qquad \frac{I}{\beta} = 0$$

екі α мен β белгісіздермен. Осыдан α мен β параметрлердің ізделінетін мәндері табылады. Мұндай мәселе аналитикалық түрде біршама оңай жағдайда шешіледі. Егер жүйе реті жоғары болса, онда аналитикалық есептеу өте қолайсыз болып келеді. Жиі жағдайда мәселе қиынға айналады, себебі техникалық шарттар бойынша α мен β келесі түрдей $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$ $\beta_1<\beta<\beta_2$ шектілік салынуы мүмкін, онда мәселе бейсызықтық программалау мәселесі тобына өтеді.

Егерде мұндай мәселенің аналитикалық түрде шешілуі өте күрделі болса, онда әртүрлі $\beta=\beta_1; \beta_2, \beta_3, \ldots$ мәндеріне $I(\alpha)$ графигі құрылады да, мәселе геометриялық түрде шешіледі немесе мәселені сандық әдіспен ЭЕМ қолданып шешеді.

Мысал ретінде екінші ретті жүйенің квадраттық қатенің ең аз критерий бойынша параметрлерінің таңдауын қарастырайық.

Алдымен жүйе теңдеуінің жалпы түрін қарастырайық.

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2)y = (b_0p + b_1)g$$

Онда y айнымалы бойынша түрлендіру функциясы болады

$$W_y(p) = \frac{b_0p + b_1}{a_0p^2 + a_1p + a_2}$$

Кіру айнымалының түрі $g(t)=1(t)$ болғанда

$$Y(p) = \frac{b_0p + b_1}{p(a_0p^2 + a_1p + a_2)}$$

$y(t)$ айнымалының тұрақталынған мәні мынадай болады

$$y(\infty) = \lim_{p\to 0} pY(p) = W_y(0) = b_1/a_2$$

Қате үшін өрнек былай жазылады

$$\varepsilon(t) = y(\infty) - y(t) = b_1/a_2 - y(t)$$

Қатенің бастапқы және тұрақталынған мәндері

$$\varepsilon(0) = b_1/a_2, \quad \varepsilon(\infty) = 0.$$

(4.10)-нан табамыз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-2} \\ 0 & a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & -a_0 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1a_2,$$

$$\Delta_{m-1} = \Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & -a_0 \\ a_n & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 + a_0a_2,$$

$$\Delta_m = \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-1} \\ 0 & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_2^2,$$

$$B_0 = b^2_1, \quad B_1 = b^2_0.$$

Квадраттық интегралдық баға (4.9) бойынша

$$I = \frac{1}{2a^2_2\Delta}(B_1\Delta_1 + B_0\Delta_0 + 2b_0b_1\Delta) = \frac{b^2_1(a^2_1 + a_0a_2) + b^2_0a^2_2 - 2b_0b_1a_1a_2}{2a^3_2a_1}$$

Енді келесі түрдей түрлендіру функциясын қарастырайық.

$$\Phi_0(p) = \frac{\beta p+1}{p^2+\alpha p+1}.$$

Мұндай оның түріне [3] берілген әдісті қолданып келтіруге болады. α коэффицент демпферлеуіне пропорционалды, β коэффицент форстау уабекің уакыт тұрақтысына. Табылған I мәніне $a_0=a_2=b_1=1$, $a_1=\alpha$, $b_0=\beta$ мәндерін қойып табамыз:

$$I = \frac{1+(\alpha+\beta)^2}{2\alpha}.$$

Интегралдық критерийді минимизациялайтын α мен β мәндерін табуға талаптанып көрейік,

$$\frac{I}{\alpha} = \frac{2\alpha(\alpha-\beta)-[1+(\alpha-\beta)^2]}{2\alpha^2} = 0$$

немесе

$$\alpha^2 = 1 + \beta^2 \qquad (4.14)$$

және

$$\frac{I}{\beta} = \frac{2(\alpha-\beta)}{2\alpha} = 0$$

немесе

$$\alpha = \beta \qquad (4.15)$$

(4.14) пен (4.15) үйлесімсіз теңдеулер, олардың формальды шешімі

$$\alpha = \beta = \infty.$$

Техникалық пен экономикалық талаптары бойынша β мәніне ең үлкен мүмкін мәнін беріп, яғни $\beta=\beta_{max}$ мәселені шешуге болады. Онда

$$\alpha^2 = \beta^2_{max} + 1$$

Енді жүйені форстаусыз қарастырайық ($\beta=0$). Осан

$$I = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}$$

$$\frac{I}{\alpha} = \frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}$$

Бұдан квадраттық интегралдық қатені минимизациялайтын α-ның тиімді мәні $\alpha^*=1$.

ИНТЕГРАЛДЫ БАҒАЛАРДЫҢ БАСҚА ТҮРЛЕРІ. Квадраттық интегралдың баганың кемшілігі бұл оның өтпелі процестің түрін ештеме-мен шектемеуінде. Мысалы, 4.13-суретте көрсетілген үш әртүрлі өтпелі процестердің (4.8) квадраттық интегралдық бағасы бір болып шықты. Көп жағдайларда бұл бағаның минимумы бойынша таңдалған жүйе параметрлері өте тербелісті процестерге сәйкеседі, себебі жоғарыда айтып ескертілгендей процесті идеалды секіру езгеруге жақындатуға ынталасу, процестің үлкен жылдамдығын қоздырады ε=0 тұрақталынған шамаға жақындаған сайын.

Бұл (4.8) бағаның тек қана ауытқу мәнімен басылу тездігін ғана есепке алып бірақ жүйенің тербеліс шекарасына жақындығын ешқандай есепке алмағандықтан шығады. Мысалы егер жүйенің кірісіне бірлік секіру берілсе, онда өтпелі процестегі қателік 4.14-суреттегі штрихталған бөлігімен анықталады. (4.8) интегралдық бағаның шамасы неғұрлым өтпелі процестің қисығы AOBC оның сызыққа жақын болса соғұрлым аз болатыны айқын көрінеді.

Бірақ процесті ол сызыққа жақындату аз кезеңінде процестің бастапқы стадиясындағы қисықтың көлбеу бұрышын үлкейтуін (OD қисықтың бөлігін OB кесіндіге жақындатуын) талап етеді. Бастапқы жылдамдықтың көбеюі асыра реттеуді айтарлықтай қоздыруы мүмкін және сонымен орнықтылық қорының азаюын.

Сондықтан интегралдау бағасының басқа түрі қолданылады, онда тек қана $\varepsilon(t)$ шамасына шек қойылмай, тағы да $\varepsilon'(t)$ ауытқудың жылдамдығына қойылады. Ондай жақсартылған квадраттық интегралдық баға келесідей жазылады

$$I_ж = \int_0^\infty (\varepsilon^2 + T^2\varepsilon'^2)\, dt \qquad (4.16)$$

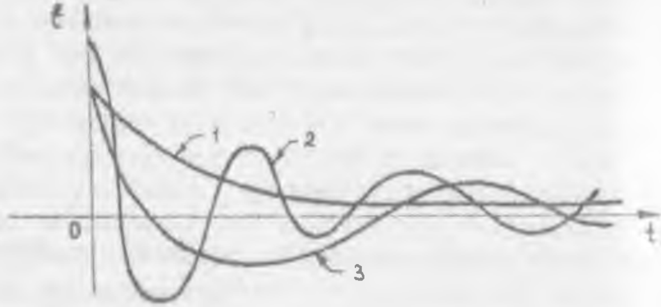
мұндағы T-кейбір уақыт тұрақтысы.

(4.16) жақсартылынған квадраттық интегралдық бағасының минимумы бойынша басқару жүйесінің параметрлерін таңдағанда өтпелі процестің түрі қандай болатынын айқындайық. Ол үшін мынадай түрлендірулерді жасайық:

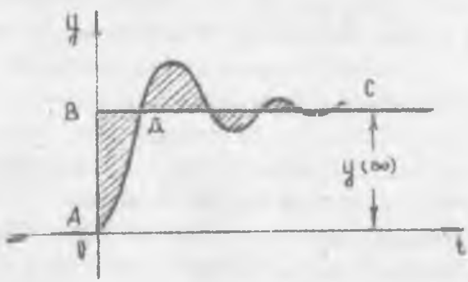
$$I_ж = \int_0^\infty (\varepsilon + T\varepsilon')^2 dt - \int_0^\infty 2T\varepsilon\varepsilon' dt = \int_0^\infty (\varepsilon + T\varepsilon')^2 dt - T\varepsilon^2 \Big|_{\varepsilon_0}^{0} =$$

$$= \int_0^\infty (\varepsilon + T\varepsilon')^2 dt + T\varepsilon_0^2,$$

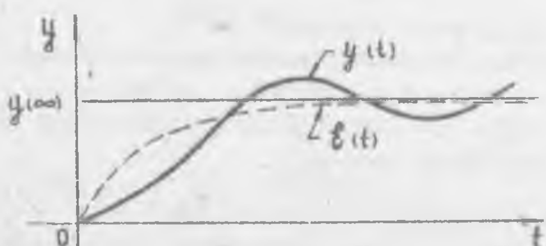
мұндағы ε_0 өтпелі процестегі ауытқудың бастапқы мәні.



4.13-сурет



4.14-сурет



4.15-сурет

Соңғы өрнектің ең аз мәні келесі шарт орындалғанда болады, яғни

$$T\varepsilon' + \varepsilon = (Tp + 1)\varepsilon = 0.$$

Бұл бірінші ретті дифференциалдау теңдеуі болып келеді, оның шешімі келесідей болады

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-t/T}, \quad y = y_0(1-e^{-t/T}), \qquad (4.17)$$

мұндағы $\varepsilon_0 - y_0$ реттеу шамасының тұрақтыланған мәні.

Бұл процесс 4.15-суретте пунктир сызықпен бейнеленген. Сонымен жақсартылған квадраттық интегралдық баға бойынша жүйенің параметрлерін таңдауда, өтпелі процесті T уақыт тұрақтысымен, берілген (4.17) экспонентаға жақындатуға болады, бұл жағдайда ол экстремаль делінеді. Осы ұғыныстардан (түсініктерден) алдын ала T шаманың белгілі мәнімен берілуге болады.

Жақсартылған квадраттық интегралдық баға бойынша жүйе параметрлерін таңдау, қарапайым (4.8) квадраттық интегралдық баға қолдануымен салыстырғанда, тербелістері аздау процеске әкеледі.

Интегралдық бағалардың ыңғайлығы бұл олардың жүйе сапасының бірыңғай сандық критерийін беруінде. Кемшілігі бір интегралдық бағаға әртүрлі өтпелі процестердің сәйкесуінде,сондықтан мұндай жағдай мәселенің шешуінің анықтығының жеткіліксіздігін туғызады.

Негізінде (4.16) формуладан күрделілеу өрнектерді қолдануға болады оларға ауытқудың бірінші туындысынан басқа екінші,үшінші т.с.с. туындылар енуі мүмкін. Мысалы g(t) немесе f(t) сатылы әрекетте ε ауытқумен, оның бірінші және екінші туындысы мен шектеліп, келесі интегралдық баға табылады

$$I_ж = \int_0^\infty (\varepsilon^2 + T_1^2\varepsilon'^2 + 4T_2^4\varepsilon''^2)dt$$

Бұл баға өтпелі процестің келесі дифференциалдық теңдеуінің

$$T_2^2\varepsilon'' + T_1\varepsilon' + \varepsilon = 0$$

шешімімен анықталатын экстремальға жақындауын сипаттайды. Бұл жағдайда экстремаль экспонентадан күрделілеу қисыққа сәйкеседі, олай болса өтпелі процестің қажетті түрін дәлдеп тағайындауға болады.

Жалпы жағдайда сапаның интегралдық бағасы жазылуы мүмкін

$$I = \int_0^{\infty} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j dt$$

немесе

$$I = \int_0^{\infty} (a^2{}_1 x^2{}_1 + a^2{}_2 x^2{}_2 + \dots + a^2{}_n x^2{}_n) dt,$$

мұнда $x_1, x_2, \dots, x_n$ - жүйенің күйін сипаттайтын айнымалылар.

Интегралдық критерийлер ретінде жалпы түрдегі функционалдарда қолданылады. Кейде интегралдық баға өрнекке t уақыт айқын енгізіледі.

4.6 САПАНЫҢ ЖИІЛІК БАҒАЛАРЫ

Жүйе сапасының жиілік бағалары оның жиілік сипаттамаларының қасиеттеріне негізделінеді. және жүйе сапасын өтпелі процесінің қисығының түрін қарастырмай бағалауға мүкіншілік береді. Әдетте өтпелі процестің қисығы, жүйенің структурасымен параметрлері дұрыс таңдалғанын тексеру үшін есептің ең соңғы бөлігінде құрылады. Параметрлер таңдау процесінде шамалап, бірақ тез реттеу процесінің сапа көрсеткіштерін бағалауға, әдде екі вариантты салыстырып олардың қайсысы жақсы екенін анықтауға мүмкіншілік болғаны ыңғайлы. Сол үшін жиілік сипаттамаларымен өтпелі процестің қисығының аралық байланыстары қолданады.

ӨТПЕЛІ МЕН ЖИІЛІКТЕР СИПАТТАМАЛАРДЫҢ БАЙЛАНЫСЫ g(t) тағайындалған әсердің 1(t) бірлік секіруіндегі g(t)=1(t) y(t) өтпелі процесін қарастырайық. Лаплас кескінінде

$$Y(p) = \Phi(p)G(p), \quad G(p)=1/p$$

мұндағы Φ(p) - тұйықталған жүйенің тағайындалған әсер бойынша түрлендіру функциясы.

Мұнда p=jω қойып, Фурье интегралының өрнегін жазайық (Фурьенің кері түрлендіруі)

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega \quad (4.18)$$

мұндағы Φ(jω) тұйықталған жүйенің амплитуда-фазалық жиілік сипаттамасы болып келеді

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jS(\omega) \quad (4.19)$$

сонымен бірге тұйықталған жүйенің P(ω) заттық, S(ω) жорымал жиілік сипаттамалары.

(4.18)-ден тұрақталынған шаманы алайық

$$y_T = y(\infty) = P(0)$$

(бұл теңдік $\lim\limits_{\omega\to 0} P(\omega)$ мәнге у-тің тұрақталынған жағдайдағы тұрақты мәніне $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ сәйкесетінінен шығады [3]).

Нәтижесінде табылады

$$y(t) - P(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(j\omega) - P(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

Мұнда (4.19) қояйық және $e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$ деп алайық. Табылған өрнекте жорымал бөлігімен еләмей (себебі y(t) затты) табамыз.

$$y(t)-P(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega}\,[P(\omega)\sin\omega t + S(\omega)\cos\omega t - P(0)\sin\omega t]d\omega.$$

Интегралдың астындағы өрнек жұп функция болып келеді. Сондықтан $(-\infty,\infty)$ аралықтағы интегралдау $(0,\infty)$ аралыққа алмастырып және оның нәтижесін екі есе көбейтуге болады. Бұдан басқа еске салайық

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{P(0)\sin\omega t}{\omega} d\omega = \frac{P(0)}{2}$$

Нәтижесінде табамыз

$$y(t) = \frac{P(0)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{P(\omega)\sin\omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{S(\omega)\cos\omega t}{\omega} d\omega \quad (4.20)$$

Бастапқы нөльдік шарттар берілгендіктен және де функциялардың нөльдік болуы $t<0$ болғанда орынды болғандықтан (4.20) өрнекте t орнына (-t) шамасын қойып жазайық

$$0 = \frac{P(0)}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{P(\omega)\sin\omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{S(\omega)\cos\omega t}{\omega} d\omega \quad (4.21)$$

(4.20) мен (4.21) өрнектерін қосып одан кейін алып сәйкесті формулаларға келеміз

$$y(t) = P(0) + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{S(\omega)\cos\omega t}{\omega} d\omega$$

$$I = \int_0^{\infty} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j dt$$

немесе

$$I = \int_0^{\infty} (a^2{}_1 x^2{}_1 + a^2{}_2 x^2{}_2 + \dots + a^2{}_n x^2{}_n) dt,$$

мұнда $x_1, x_2, \dots, x_n$ - жүйенің күйін сипаттайтын айнымалылар.

Интегралдық критерийлер ретінде жалпы түрдегі функционалдарда қолданылады. Кейде интегралдық баға өрнекке t уақыт айқын енгізіледі.

4.6 САПАНЫҢ ЖИІЛІК БАҒАЛАРЫ

Жүйе сапасының жиілік бағалары оның жиілік сипаттамаларының қасиеттеріне негізделінеді. және жүйе сапасын өтпелі процесінің қисығының түрін қарастырмай бағалауға мүкіншілік береді. Әдетте өтпелі процестің қисығы, жүйенің структурасымен параметрлері дұрыс таңдалғанын тексеру үшін есептің ең соңғы бөлігінде құрылады. Параметрлер таңдау процесінде шамалап, бірақ тез реттеу процесінің сапа көрсеткіштерін бағалауға, әлде екі вариантты салыстырып олардың қайсысы жақсы екенін анықтауға мүмкіншілік болғаны ыңғайлы. Сол үшін жиілік сипаттамаларымен өтпелі процестің қисығының аралық байланыстары қолданады.

ӨТПЕЛІ МЕН ЖИІЛІКТЕР СИПАТТАМАЛАРДЫҢ БАЙЛАНЫСЫ $g(t)$ тағайындалған әсердің $1(t)$ бірлік секіруіндегі $g(t)=1(t)$ $y(t)$ өтпелі процесін қарастырайық. Лаплас кескінінде

$$Y(p) = \Phi(p)G(p), \quad G(p)=1/p$$

мұндағы $\Phi(p)$ - тұйықталған жүйенің тағайындалған әсер бойынша түрлендіру функциясы.

Мұнда $p=j\omega$ қойып, Фурье интегралының өрнегін жазайық (Фурьенің кері түрлендіруі)

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t}d\omega \quad (4.18)$$

мұндағы $\Phi(j\omega)$ тұйықталған жүйенің амплитуда-фазалық жиілік сипаттамасы болып келеді

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jS(\omega) \quad (4.19)$$

сонымен бірге тұйықталған жүйенің $P(\omega)$ заттық, $S(\omega)$ жорымал жиілік сипатамалары.

(4.18)-ден тұрақталынған шаманы алайық

$$y_T = y(\infty) = P(0)$$

(бұл теңдік $\lim\limits_{\omega\to 0} P(\omega)$ мәнге у-тің тұрақталынған жағдайдағы тұрақты мәніне $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ сәйкестігінен шығады [3]).

Нәтижесінде табылады

$$y(t) - P(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(j\omega) - P(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

Мұнда (4.19) қояйық және $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ деп алайық. Табылған өрнекте жорымал бөлігімен елемей (себебі у(t) заты) табамыз.

$$y(t)-P(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega}[P(\omega)\sin\omega t + S(\omega)\cos\omega t - P(0)\sin\omega t]d\omega.$$

Интегралдың астындағы өрнек жұп функция болып келеді. Сондықтан $(-\infty,\infty)$ аралықтағы интегралдау $(0,\infty)$ аралыққа алмастырып және оның нәтижесін екі есе көбейтуге болады. Бұдан басқа еске салайық

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{P(0)\sin\omega t}{\omega} d\omega = \frac{P(0)}{2}$$

Нәтижесінде табамыз

$$y(t) = \frac{P(0)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{P(\omega)\sin\omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{S(\omega)\cos\omega t}{\omega} d\omega \quad (4.20)$$

Бастапқы нольдік шарттар берілгендіктен және де функциялардың нольдік болуы $t<0$ болғанда орынды болғандықтан (4.20) өрнекте t орнына $(-t)$ шамасын қойып жазайық

$$0 = \frac{P(0)}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{P(\omega)\sin\omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{S(\omega)\cos\omega t}{\omega} d\omega \quad (4.21)$$

(4.20) мен (4.21) өрнектерін қосып одан кейін алып сәйкесті формулаларға келеміз

$$y(t) = P(0) + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{S(\omega)\cos\omega t}{\omega} d\omega$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{P(\omega)\sin\omega t}{\omega}d\omega \qquad (4.22)$$

Соңғы формула бойынша электронды есептегіш машинаны қолданып немесе [3,28] берілген жуықтау графика-аналитикалық әдіспен өтпелі процестік қисығын құрып, жүйе сапасын тікелей әдіспен бағалауға болады. (4.22) формула және де өтпелі процестің жиілік бағаларын анықтауға да қолданылады.

ЖИІЛІК СИПАТТАМАЛАР БОЙЫНША ЖҮЙЕНІҢ САПАСЫН БАҒАЛАУ. Өтпелі процестің сапасының қарапайым жиілік бағалары олар орнықтылықтың ΔA амплитуда және Δφ фаза бойынша қорлары. Олар бұдан бұрын көрсетілгендей тұйықталмаған жүйенің амплитуда-фазалық жиілік немесе логарифмдік жиілік сипаттамалары бойынша анықталады.

Бұлардан басқа жиілеу қолданылатын бағалар олар келесі бағалар.

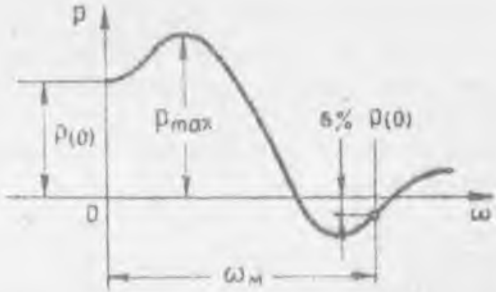
1. Тұйықталған жүйенің P(ω) заттық жиілік сипаттамасы бойынша жүйенің б асыра реттеуін жуық шамамен бағалауға болады. (4.22) теңдіктің негізіне сүйеніп келесі бағалар шығарылған. Егер P(ω) дөңесті ("өркешті") болса (4.16-сурет) онда өтпелі процесте $б>18\%$ болады. Егер P(ω) дөңесті болмаса (4.17-сурет) онда $б<18\%$ болады. Егер $dP/d\omega<0$ болса, онда процесс сөзсіз монотонды $(б=0)$болып келеді және абсолютті мәні бойынша монотонды азаяды (4.18-сурет).

2. Өтпелі процестің ұзақтығын, яғни реттеу уақытын жуық шамамен маңызды жиіліктер аралылығының ω_M мәнімен бағалауға болады (4.16-4.18-сурет), сонымен бірге

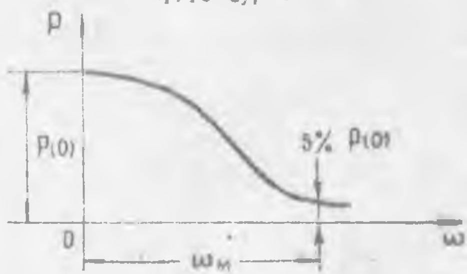
$$\pi/\omega_M < t_p < 4\pi/\omega_M$$

Реттеу уақытының маңызды жиілігіне кері пропорционалды екенін айтып ескерту қажет, яғни неғұрлым жиілік сипаттама шұбаланқы (ұзын) соғұрлым өтпелі процесс қысқалау. Физикалық мағынасы келесімен байланысты, неғұрлым жоғары жиілік сигналды жүйе "өткізеді" соғұрлым оның сыртқы әсерге беретін реакциясының инерциондығы азаду.

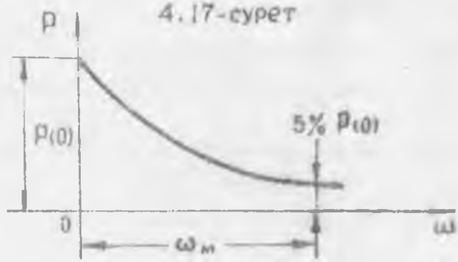
Бұл қасиетте тұйықталмаған жүйенің жиілік сипаттамасының ω_K (3.29, 3.30-сурет) қию жиілігімен t_p реттеу уақытты байланыстыруға мүмкіншілік береді. t_p реттеу уақыттың ұзақтығы со-



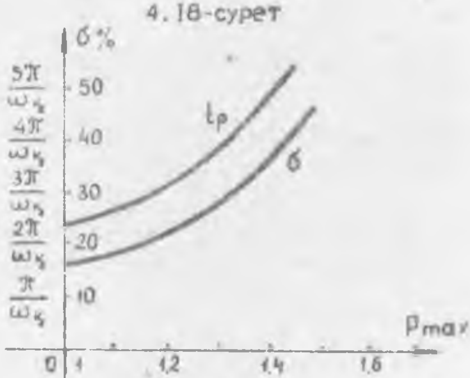
4.16-сурет



4.17-сурет



4.18-сурет



4.19-сурет

ғұрлым аз, неғұрлым $\omega_к$ қию жиілігі үлкен. б, t_p, $\omega_к$ және P_{max} аралығындағы байланыстар 4.19-суреттегі графикпен көрсетілген. Графиктың нақтылық түрі аппроксимацияланған нақты жиілік сипаттамасының түріне байланысты [20].

3. Өтпелі сипаттаманың $h(\infty)$ шекті мәні $P(0)$ заттық жиілік сипаттаманың бастапқы мәніне тең

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{\omega\to 0} P(\omega)$$

немесе $h(\infty) = P(0)$.

Шынында шекті мән туралы теорема бойынша

$$y(\infty) = \lim_{\omega\to 0} j\omega Y(j\omega)$$

Қарастырылып отырған жағдайда, яғни жүйеге бірлік сатылы әсер әрекет етіп тұрғанда

$$y(j\omega) = \Phi(j\omega)/j\omega$$

және

$$y(\infty) = h(\infty) = \Phi(j0),$$

бірақ

$$\Phi(j\omega) = \lim_{\omega\to 0} [P(\omega) + jS(\omega)] = P(0),$$

себебі $S(\omega)$ жұп емес функцияға ω көбейткіш түрінде енеді, сондықтан $\omega\to 0$ болғанда $S(\omega)$ нольге айналады. Сонымен, $P(0)$ заттық жиілік сипаттаманың бастапқы мәні нольге тең бе, әлде тең емес пе соған байланысты өтпелі сипаттама уақыт озған сайын нольге немесе тұрақты мәнге ұмтылады.

4. Өтпелі сипаттаманың бастапқы мәні $h(0)$ заттың жиілік сипаттамаың шекті мәніне $P(\infty)$ тең, яғни

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{\omega\to 0} P(\omega) \qquad (4.23)$$

немесе қысқаша

$$h(0) = P(\infty).$$

(4.23) теңдікті бастапқы мәні туралы теоремасын қолданып дәлелдеуге болады.

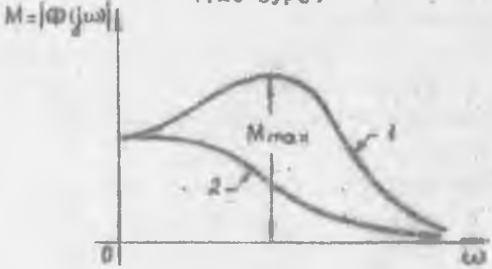
$\Phi(j\omega)$ функцияның алымының реті бөлгішінің ретінен аз болған барлық жағдайларда

$$P(\infty) = 0$$

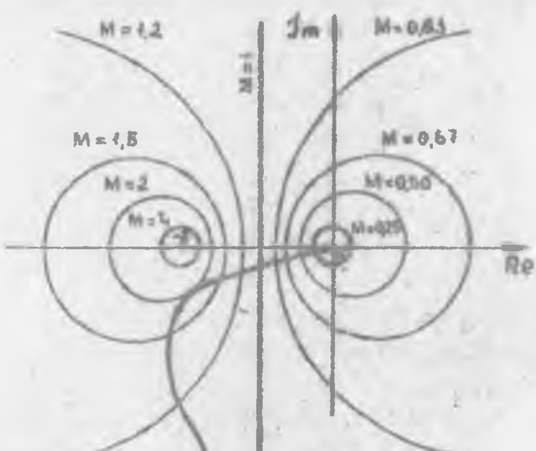
сондықтан өтпелі процесс координат бас нүктесінен басталады. Егер де алымының реті бөлгіштің ретіне тең болса, онда

$$P(\infty) \neq 0,$$

4.20-сурет



4.21-сурет



4 22сурет

яғни өтпелі сипаттаманың бастапқы мәні нөльге тең болмайды.

Тұйықталған жүйенің $\Phi(p)$ қате бойынша түрлендіру функциясының алымының реті әрдайым бөлгішінің ретіне тең және

$$P(\infty) = 1$$

екенін ескерте кету жөн.

5. Өтпелі процестің түріне негізгі ықпал ететін бұл жиілік сипаттаманың ортаңғы бөлігінің түрі. Сондықтан тұйықталмаған жүйенің логарифмдік жиілік сипаттамасы (4.21-сурет) үш облысқа бөлінеді, сонымен бірге төменгі жиілік облысы негізінде тұрақталған режимдегі жүйе дәлдігін анықтайды. Орталық жиілік облысы негізінде өтпелі процестің сапасын анықтайды. Мысалы бұрын айтылғандай, $\omega_к$ кесу жиілік өтпелі процестің уақтығын және өткізу жолағын анықтайды. Кесу жиілігінің маңындағы $L(\omega)$-нің көлбеуі өтпелі процестің тербелмелігін анықтайды. Мысалы, $\omega\approx\omega_к$ болғандағы апериодты үбенің қасиетіне сәйкесетін -20 дБ/дек көлбеу (4.20-сурет), тұйықталған жүйенің өтпелі процесінің ең аз тербелмелігін қамтамасыз етеді.

6. Тербелмеліктің көрсеткіші деп M_{max} тұйықталған жүйенің амплитудалық жиілік сипаттамасының максимал мәнін айтады (4.21-сурет)

$$M = |\Phi(j\omega)|$$

Бұл шаманы M_{max} тұйықталмаған жүйенің жиілік сипаттамасының түрінен анықтауға болады. Шынымен

$$M = \left|\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}\right| = \left|\frac{U+jV}{1+U+jV}\right| = \sqrt{\frac{U^2+V^2}{(1+U)^2+V^2}}\,.$$

Бұдан

$$U^2 + V^2 = M^2\,[(1 + U)^2 + V^2]$$

немесе

$$(U + C)^2 + V^2 = R^2$$

мұндағы

$$C = M^2/(M^2 - 1),\ R = M/(M^2 - 1).$$

Осылай болғандықтан $W(j\omega)$ жазықтықта салынған M шаманың тең мәндерінің сызықтары радиусы аунспалы C жылжымалы центрімен 4.22-суретте көрсетілгендей шеңберлер болып келеді. $M=1$ болғанда шеңбер ординат осінің сол жағынан 0,5 қашықтықта өтетін оған параллельді түзуге айналады.

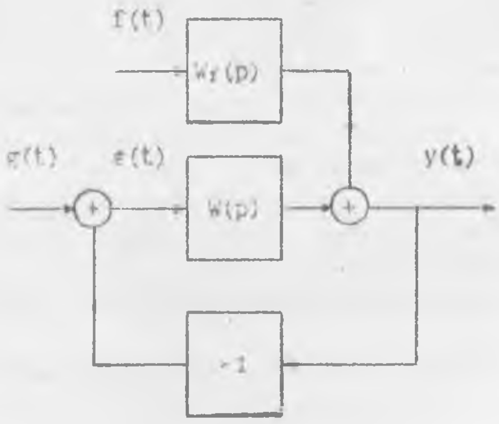
Амплитудалық сипаттаманың ординаттарының 0<M<1 аралықта жататын мәндері үшін M=1 сызықтың оң жағында жайғасатын, бірінші симметриялы үйірмен, шеңберлер үйірі сәйкеседі. M=0 болғанда шеңбер координат басымен беттесетін нүктеге айналады. 4.21-ші суреттегі амплитудалық сипаттамаларды құру үшін M=const шеңберлер құрылған жазықтықта тұйықталмаған жүйенің амплитуда-фазалық жиілік сипаттамаларын түсіру жеткілікті. Бұл сипаттаманың шеңбермен қиылысқан нүктелері амплитудалық сипаттамалардың M-ға тең сәйкестігі координат мәндерімен нүктелер анықтап тұрады. Тұйықталған жүйенің тербелмеліктің көрсеткішің анықтау үшін оның амплитудалық сипаттамасын құру қажет емес, себебі тұйықталмаған жүйенің амплитуда-фазалық жиілік сипаттамасы жанасатын ең аз M=Const шеңбермен анықталатын M_{max} ординаттың бір максимал мәнін білу жеткілікті.

4.7 ДӘЛДІГІ БОЙЫНША ЖҮЙЕ САПАСЫН БАҒАЛАУ

Жоғарыда айтылғандай жүйе сапасы әр түрлі дәлдік критерийлер бойынша, яғни жүйенің әр түрлі типтік режимдегі қатесі бойынша бағалануы мүмкін. Расымен жүйенің сапасы ең ақырында оның қатесінің мөлшерімен анықталады, яғни тағайындалған шамамен реттелінетін шаманың нақты мәнінің арасындағы айырымның мөлшерімен анықталады

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t). \qquad (4.24)$$

Жүйе келесідей берілсін дейік (4.23-сурет)



4.23 - сурет

Мұнда: $W(p)$ тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясы; $W_f(p)$ ауытқылауы әсер арнасы бойынша түрлендіру функциясы.

Реттелінетін шама төмендегідей анықталуы мүмкін

$$y(t) = W(p)\varepsilon(t) + W_f(p)f(t), \qquad (4.25)$$

немесе (4.24) теңдеуден

$$y(t) = g(t) - \varepsilon(t) \qquad (4.26)$$

(4.26)-ны (4.25) теңдеуге ауыстырып қояйық

$$g(t) - \varepsilon(t) = W(p)\varepsilon(t) + W_f(p)f(t),$$

әлде

$$-\varepsilon(t) - W(p)\varepsilon(t) = -g(t) + W_f(p)f(t)$$

немесе

$$-\varepsilon(t)[1 + W(p)] = -g(t) + W_f(p)f(t) \qquad (4.27)$$

енді (4.27)теңдеуден табамыз:

$$\varepsilon(t) = \frac{g(t)}{1 + W(p)} - \frac{W_f(p)f(t)}{1 + W(p)} \qquad (4.28)$$

Жүйенің дәлдігін бағалайтын әр түрлі типтік режимдегі қателігінің мөлшерін қарастырайық. Сонымен бірге автоматты басқару жүйе екі режимнің біреуінде болуы мүмкін екенін айта кету қажет, яғни стационарлы (тұрақталынған) немесе өтпелі режимінде. Стационарлы режимнің екі түрі болуы мүмкін статикалық және динамикалық.

Сыртқы әсерлер мен жүйенің өз параметрлері уақыт бойынша өзгермейтін болғандықтан, жүйеде пайда болатын қозғалысы күй статикалық стационарлы режим делінеді.

Сыртқы әсерлер кейбір тұрақталынған заң бойынша өзгеріп тұрғанда пайда болатын тұрақталынған еріксіз қозғалыс, динамикалық стационарлы режимі делінеді.

Өз кезеңінде динамикалық стационарлы режимдер екі түрлі болып келеді. Біріншісі детерминделген режим,ол стационарлы әсер әрекет етіп тұрғанда пайда болатын режим.

Екінші режим, бұл стационар кездейсоқ режим. Ол жүйеге әрекет етіп тұрған әсерлер, уақыт бойынша кездейсоқ, бірақ стационарлы функциялар болып келетін жағдайдағы, жүйедегі статистикалық мағынадағы тұрақталынған режимі болатын стохастикалық режим.

Басқаша айтқанда жүйедегі болатын режимдер төмендегідей жіктеледі

- жүйе режимдері
  - өтпелі режим
  - стационарлы режим
    - статикалық стационарлы режим
    - динамикалық стационарлы режим
      - детерминделген режим
      - стохастикалық режим

СТАТИКАЛЫҚ СТАЦИОНАРЛЫ РЕЖИМ. Жоғарыда айтылғандай бұл режимде $g(t)=Const=g_o$ және егерде жалпы жағдайда жүйеге бірнеше ауытқу әсерлері әрекет етіп тұрса, онда

$$f_1(t)=Const=f_{1o},\ f_2(t)=Const=f_{2o},\dots,f_n(t)=Const=f_{no}.$$

Жүйе тұрақталынған жағдайда оның координаттары уақыт бойынша өзгермейді, яғни барлық туындылар нольге тең, сондықтан дифференциялдау операторды нольге тең дейік $p=0$.

Онда статикалық қате $\varepsilon_{ст}=\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t)$ (4.28) өрнектен анықталады

$$\varepsilon_{ст}=\left[\frac{g_o}{1+W(p)}\right]_{p\to 0}+\left[\frac{\sum\limits_{k-1}^{m}W_k(p)f_{ko}}{1+W(p)}\right]_{p\to 0}=\varepsilon'_{ст}+\varepsilon''_{ст} \qquad (4.29)$$

мұнда: m - жүйеге әрекет ететін ауытқылаушылардың саны, ал

$$W_k(p)=W_{k.f}(p).$$

(4.29) өрнектегі бірінші қосылғыш, тағайындалған шама бойынша анықталатын, статикалық қатенің құрушысы. Статикалық жүйеде, яғни

$$W(p)=\frac{k(b'_op^m+b'_1p^{m-1}+\dots+1)}{a'_op^n+a'_1p^{n-1}+\dots+1}$$

болса, онда

$$\varepsilon'_{ст}=\lim_{p\to 0}\frac{g_o}{1+W(p)}=\frac{g_o}{1+k}.$$

мұнда $\lim\limits_{p\to 0}W(p)=k$ - тұйықталмаған тізбектің жалпы күшейту коэффициенті болып келеді.

Астатикалық жүйеде, яғни

$$W(p) = \frac{k(b'_0p^m+b'_1p^{m-1}+\cdots+1)}{p^v\ (a'_0p^n+a'_1p^{n-1}+\cdots+1)}$$

болғанда, және де астатикалық реті $v=1$ болса, онда (4.29) өрнектегі бірінші құрушысы нольге айналады.

$g(t)=0$ стабилизациялау жүйелерде де $\varepsilon'_{ст}$ нольге айналады. Сондықтан әдетте барлық жағдайда статикалық қатенің бірінші құрушысы нольге тең деп алынуы мүмкін.

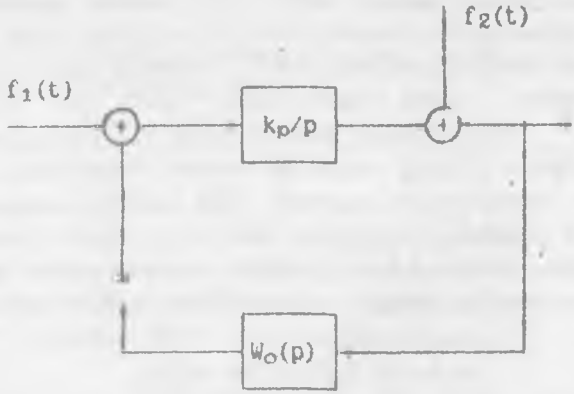
(4.29) статикалық қатенің сыртқы ауытқушы әсерлермен анықталатын екінші құрушысы еш уақытта нольге айналмайды, себебі жоғарғы ретті астатизммен қолданғанда да (4.29) өрнектегі қосындылау таңбасының астына кіретін қосылғыштардың тек қана кейбір бөлігі нольге айналуы мүмкін. Жеңілдік үшін жүйеге f_1 бір ауытқушы әсер әрекет етіп тұр дейік. Онда статикалық жүйе үшін табамыз

$$\varepsilon''_{ст} = \frac{W_1(0)f_{10}}{1 + W(0)} = \frac{\beta_1 f_{10}}{1 + k} \qquad (4.30)$$

Бұл теңдікте β_1 (статизм коэффициенті) тұйықталмаған тізбекті реттеу жүйесіндегі тұрақталынған қате мен, тұрақты ауытқушының арасындағы қатынасы болып келеді. Осы шама да, $(1+k)$-ға бөлінген, тұйықталған реттеу жүйесіндегі статизм коэффициентіне сәйкеседі. $(1+k)$ шамасы дұрысында тұрақталынған қатені азайтуының көз қарасынан реттеудің эффективтігін көрсетеді.

Астатикалық жүйеде $W(0)\to\infty$. Бірақ бұл $\varepsilon''_{ст}=0$ екенін білдірмейді, себебі бұл жағдайда $W_1(0)\to\infty$ мүмкін. Сондықтан жүйеге әрекет етіп тұрған әр ауытқушы үшін тұрақталынған қатенің барының немесе жоғының фактысын (4.30) бойынша анықтау қажет.

Бұны көрсету үшін 4.24-суретте автоматты басқару жүйесінің структуралық схемасы бейнеленген. Ондағы реттелінетін объект $W_o(p)$ түрлендіру функциясымен және астатикалық реттеуіш k_p/p түрлендіру функциясымен көрсетілген. Реттелінетін объектінің интегралдаушы қасиеттері жоқ дейік және $W_o(0)=k_o$. Жүйеге екі f_1 және f_2 ауытқушы әсерлер әрекет етеді . Тұйықталмаған жүйеде (4.24-суретте көрсетілгендей)



4.24 - сурет

$$\varepsilon = W_o(p)\left[\frac{k_p}{p} f_1 + f_2\right]$$

және тұйықталған жүйеде

$$\varepsilon = \frac{W_o(p)\left[\frac{k_p}{p} f_1 + f_2\right]}{1 + W(p)},$$

мұндағы $W(p)=W_o(p)W_p(p)$ - тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясы. Будан шектік өту теоремасы бойынша және $p\to 0$, $f_1=f_{10}=Const$ $f_2=f_{20}=Const$ деп болжап, тұрақталынған қатені анықтайық

$$\varepsilon''_{ст} = \left.\frac{W_o(p)\left[\frac{k_p}{p} f_{10} + f_{20}\right]}{1 + W(p)}\right|_{p=0} = f_{10}$$

Демек, бірінші ауытқушы статикалық қатесін береді, ал екінші ондай қатені бермейді. 4.24-суретте қарастырудан f_1 ауытқушы интегралдау үзбеге дейін, ал f_2 одан кейін әрекет етіп тұрған көрінеді. Будан астатикалық реттеу заңы қандай ауытқушыдан статикалық қатесін жоятынын анықтауға мүмкіншілік беретін ереже шығады. Буны орындауы үшін интегралдау элементін реттеу тізбегіне ауытқушы салынған орынға дейін қосылуы қажет.

2. ДИНАМИКАЛЫҚ СТАЦИОНАРЛЫ РЕЖИМ. Будан бурын ескертілген-

14-207

дей, мұндай режим жүйеге әрекет етіп тұратын сыртқы әсерлер кейбір тұрақталған заң бойынша өзгеріп тұрғанда пайда болады. $g(t)=vt$ заң бойынша өзгереді дейік, мұндағы $v=Const$ тағайындалған шаманың өзгеру жылдамдығы және де $f_1(t)=f_{10}$, $f_2(t)=f_{20}, \ldots$ болсын дейік. Мұндай режим тек қана қадағалаушы мен бағдарламалы басқару жүйелерде мағынасы бар болады.

Лаплас түрлендіруін қолданып, бұл жағдайды жазуға болады: $G(p)=v/p^2$, $F_1(p)=f_{10}$, $F_2(p)=f_{20}$ және т.т. Бұдан бұрын қате үшін табылған жалпы өрнектен шектік өту теоремасын қолданып, қарастырылып отырған режимге тұрақталынған қатені табуға болады:

$$\varepsilon_T = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} pE(p), \tag{4.31}$$

мұндағы ε_T - динамикалық режимнің тұрақталынған қатесі және $E(p)=L\{\varepsilon(t)\}$, яғни (4.29) бойынша

$$E(p) = \frac{G(p)}{1 + W(p)} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} W_k(p)F_k(p)}{1 + W(p)}$$

немесе (4.31) бойынша

$$\varepsilon_T = \left[\frac{v/p}{1 + W(p)}\right]_{p\to 0} + \left[\frac{p\sum\limits_{k=1}^{m} W_k(p)F_k(p)}{1 + W(p)}\right]_{p\to 0} = \varepsilon_ж + \varepsilon''_{ст} \tag{4.32}$$

мұндағы: $\varepsilon_ж$ - тағайындалған шаманың тұрақталынған жылдамдықпен өзгеруінің себебінен болатын жылдамдық қате, $\varepsilon''_{ст}$ - статикалық режимдегідей анықталатын статикалық қате.

Жылдамдық қатенің мағнасы тек қана бірінші ретті астатизмді жүйелерге бар болады, яғни тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясы былай жазылса

$$W(p) = \frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\cdots+b_m}{p(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n)}$$

әлде

$$W(p) = \frac{k_v(b'_0p^m+b'_1p^{m-1}+\cdots+1)}{p(a'_0p^n+a'_1p^{n-1}+\cdots+1)}$$

мұндағы: $k_v=b_m/a_n$ - тұйықталмаған жүйенің күшейту коэффициенті немесе жылдамдық бойынша беріктік коэффициенті;

$$b'_i=b_i/b_m,\ i=1\div m;\ a'_j=a_j/a_n,\ j=0\div n.$$

Онда (4.32) өрнек мынадай түрге келеді

$$\varepsilon_m=\left[\frac{v/p}{1+\dfrac{k_v(b'_0p^m+b'_1p^{m-1}+\cdots+1)}{p(a'_0p^n+a'_1p^{n-1}+\cdots+1)}}\right]_{p\to 0}=\frac{v}{k_v}+\varepsilon''_{ст}=\varepsilon_ж+\varepsilon''_{ст}. \qquad (4.33)$$

Демек, бұл типтік режимде жүйенің тұрақталған қатесі статикалық қатемен қосымша, тағайындалған шаманың өзгеру жылдамдығы мен беріктік коэффициентінің қатынасына тең жылдамдық қатесімен құралады. Айтылғандай жылдамдық қате

$$\varepsilon_ж=v/k_v.$$

Жүйе әртүрлі жылдамдықпен жылжуы мүмкін болғандықтан, жүйенің сапасын айнымалы шама болатын жылдамдық қатемен емес оның жылдамдық бойынша беріктік коэффициентінің мәнімен сипаттау ыңғайлы

$$k_v=v/\varepsilon_ж.$$

Статикалық жүйелерде (4.33) бірінші қосылғыш шексізге ұмтылады, астатизмі бірден жоғары ретті бұл қосылғыш нольге ұмтылады. Сондықтан, тұрақты жылдамдықпен жылжу режимі тек қана астатизмі бірінші ретті жүйелердің, көбінесе қадағалаушы жүйелердің сапасын бағалауға қолданылады, себебі оларға ондай режим әдетті болғандықтан.

Реттеу жүйенің тұрақты үдеуімен $a=Const$ тұрақталынған жылжу режимі динамикалық стационарлы режимнің екінші түрі болып келеді. Бұл жағдайда тағайындалған әсер $g(t)=at^2/2$ заң бойынша өзгереді. Бұның алдындағы қарастырылған жағдайдағыдай ауытқушы әсерлер тұрақты деп есептелінеді. Мұндай режим тек қана қадағалаушы мен бағдарламалы басқару жүйелерде мағынасы бар болады.

Жоғарыда айтылғанға ұқсас, қатенің тұрақтылығының мәні бұл режимде төменгі өрнектен табылуы мүмкін

$$\varepsilon_т=\left[\frac{a/p^2}{1+W(p)}\right]_{p\to 0}+\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}W_k(p)F_{ko}(p)}{1+W(p)}\right]_{p\to 0}. \qquad (4.34)$$

Бұдан бұрынғыдай (4.34) формуланың екінші қосылғышы статикалық қатесін береді. (4.34) бірінші қосылғышының мағынасы тек қана екінші ретті астатизмді жүйелерде бар болады, яғни тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясы былай жазылса

$$W(p) = \frac{k_a(b'_0p^m+b'_1p^{m-1}+\cdots+1)}{p^2(a'_0p^n+a'_1p^{n-1}+\cdots+1)}.$$

Онда (4.34) өрнек мынандай түрге келтіріледі

$$\varepsilon_T = a/k_a + \varepsilon''_{ст} = \varepsilon_y + \varepsilon''_{ст}. \qquad (4.35)$$

Мұндағы бірінші қосылғыш тұрақты үдеуден пайда болатын қосымша қате болып келеді. Жоғарыдағы жағдайдай, жүйе сапасы үдеу бойынша беріктіктің шамасымен бағалануы мүмкін,яғни мынадай шамамен

$$k_a = a/\varepsilon_y.$$

Мұндай типтік режим тек қана астатизмі екінші ретті реттеу жүйелерге қолданылады, көбінесе қадағалаушы жүйелерге.

4.8 КЕЗ КЕЛГЕН ӘСЕРДЕГІ ЖҮЙЕНІҢ САПАСЫН БАҒАЛАУ (ҚАТЕЛЕРДІҢ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ)

Қарастырылатын әдіс g(t) тағайындалған да, f(t) ауытқушы әсерлер үшін қолдануы мүмкін. Әдістің жалпылығын бұзбай тек қана тағайындалған әсер бар болған жағдайды қарастырайық.

Егер g(t) уақыт функциясының түрі кез келген болса, бірақ процестің бас нүктесінен алыста жеткілікті бір қалыпты болса, яғни кейбір уақыттан кейін туындылардың

$$\frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \ldots, \frac{d^mg}{dt^m},$$

m шекті саны ғана маңызды болса, онда жүйенің қатесін келесі түрде анықтауға болады. (4.28) формуладан f(t)=0 болғанда қатенің Лаплас кескіні мынаған тең

$$E(p) = \frac{G(p)}{1+W(p)} = \Phi(p)G(p), \qquad (4.36)$$

мұндағы : Ф (p) - қате бойынша тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясы. G(p) - тағайындалған шаманың Лаплас кескіні.

Егер тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясы мынадай болса:

$$W(p) = R(p)/Q(p)$$

онда ,

$$E(p) = \frac{Q(p)}{Q(p) + R(p)} = \frac{Q(p)}{D(p)} G(p) \qquad (4.37)$$

мұндағы $D(p)=Q(p)+R(p)$ - тұйықталған жүйенің сипаттамалық полиномы.

(4.37) өрнектігі $Q(p)$ алымындағы полиномды $D(p)$ бөлгішіндегі полиномға бөліп және нәтижесін p кешендік шаманың дәрежесін өспелі қатарға жазайық

$$E(p) = [C_0 + C_1 p + \frac{C^2{}_2}{2!} p^2 + \cdots]G(p) \qquad (4.38)$$

(4.38) өрнекте оригиналға өтіп, тұрақталынған қате үшін формула табамыз,

$$\varepsilon_T = C_0 + C_1\frac{dg}{dt} + \frac{C^2{}_2}{2!}\frac{d^2 g}{dt^2} + \cdots \qquad (4.39)$$

мұндағы C_0, C_1, C_2,... шамалар қателердің коэффициенттері деп аталады. Демек, тұрақталған қате $g(t)$ шаманың және оның туындыларының өзгеруінің себебінен болатын қателердің қосындысы болып келеді. (4.38) өрнекті, тұйықталған жүйенің қатесі бойынша Ф (р) түрлендіру функциясын Маклорен қатарына жіктеп табуға болады.

C_0, C_1, C_2, ... шамалар, функцияны Маклорен қатарына жіктеу жалпы ережесінен шығатын төменгі формулаларымен анықталуы мүмкін

$$C_0 = \left[\Phi\ (p)\right]_{p=0}\ C_1 = \left[\frac{d\Phi\ (p)}{dp}\right]_{p=0}, \ldots,\ C_m = \left[\frac{d^m\Phi\ (p)}{d^m p}\right]_{p=0}.$$

Неғұрлым қателердің коэффициенттері аз, соғұрлым жүйе дәлдігі жоғары. Әдетте қателердің коэффициенттерін есептегенде тек қана бірінші үш коэффициенттермен шектеледі.

C_0 коэффициентті статикалық немесе позициялық қатенің коэффициенті деу қалыптасқан; C_1 коэффициенті жылдамдық қатенің коэффициенті деу; C_2 үдеуден қате коэффициенті.

Астатизмі бірінші ретті жүйелерде $C_0=0$ (астатикалық реттеу). Егер $C_0=C_1=0$ болса, онда жүйе тағайындалған әсер бойынша екінші ретті астатизмді. Егер $C_0=C_1=C_2=0$ болса, онда жүйе тағайындалған әсер бойынша үшінші ретті астатизмді.

Бірінші ретті астатизмді жүйе тұрақталған режимде бұрмалаусыа $g(t)=1(t)$ секіртпелі тағайындалған әсерді жаңғыртады (ұдайы өндіреді).

Екінші ретті астатизмді жүйе бұрмалаусыз сызықты әсерді $g(t)=g_0+g_1t$ жаңғыртады.

Үшінші ретті-квадраттық әсерді $g(t)=g_0+g_1t+g_2t^2$ және т.т. Қарастырылған автоматты жүйенің дәлдігін бағалау әдісі қателердің коэффициенттер әдісі деп аталады да біршама баяу өзгеретін әсерлерде қолданылады. Бұл әдіс $g(t)$ тағайындалған әсер үшін қарастырылды, бірақ ол $f(t)$ ауытқуы бар болғанда да жүйенің дәлдігін бағалау үшін жарамды.

МЫСАЛ. Тағайындалған әсер бойынша қатенің бірінші үш коэффициенттерін анықтайық, егер тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясы мынадай болса

$$W(p) = \frac{k_v}{p(T_1p+1)(T_2p+1)},$$

қате бойынша түрлендіру функциясы

$$\Phi(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{T_1T_2p^3+(T_1+T_2)p^2+p}{T_1T_2p^3+(T_1+T_2)p^2+p+k_v}$$

Алымын бөлгішке бөліп мынадай, қатар табамыз

$$\Phi\varepsilon(p) = \frac{1}{k_v}p+\left(\frac{T_1+T_2}{k_v} - \frac{1}{k_v^2}\right)p^2+\left(\frac{T_1T_2}{k_v} - 2\frac{T_1+T_2}{k_v^2} + \frac{1}{k_v^3}\right)p^3+\ldots$$

Бұл қатарды (4.38) салыстыру береді:

$$C_0=0,\ C_1=\frac{1}{k_v},\ \frac{C_2}{2!} = \frac{T_1+T_2}{k_v} - \frac{1}{k_v^2},\ \frac{C_3}{3!} = \frac{T_1T_2}{k_v} - 2\frac{T_1+T_2}{k_v^2} + \frac{1}{k_v^3}$$

Мысалы, егер бұл жүйдегі тағайындалған әсер мынадай заң бойынша өзгерсе

$$g(t) = g_0 + v_0t + at^2/2,$$

онда тұрақталынған қате болады

$$\varepsilon_T = \frac{v_0+at}{k_v} + \frac{a}{k_v^2}[(T_1+T_2)k_v - 1].$$

4.9 АВТОМАТТЫ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ СЕЗГІШТІГІ

Автоматты басқару жүйелердің параметрлері, яғни күшейту коэффициенттері мен уақыттық тұрақтылары жүйеге енетін элементтердің (кедергі, конденсатор, индукциялық т.с.с.) физикалық параметрлеріне тәуелді. Физикалық параметрлердің шамалары біріншіден, жасауға берілген шектерге байланысты бытыранды болуы мүмкін (технологиялық бытыранды). Екіншіден, олар жүйенің жұмыс істеу барысында, пайдалану жағдайына тәуелді, әртүрлі себептен уақыт бойынша өзгеруі мүмкін (пайдаланудағы өзгеру).

Сондықтан басқару процесінің статикалық, динамикалық қасиеттеріне, яғни жүйенің дәлдігіне, уақыттық сипаттамаларына (өтпелі процестің сапа көрсеткіштеріне) және жиілік сипаттамаларына бытыранды мен жүйенің парметрлерінің өзгеруінің ықпалын анықтау мәселесі туады.

Жүйенің параметрлерінің бытыраңқылығы мен өзгеруі оның статикалық пен динамикалық қасиеттеріне беретін ықпалының дәрежесі жүйенің сезгіштігі делінеді [25]. Сезгіштік сандық анықталады. Керекті жағдайда анализдейтін және жобаланатын жүйенің бытыраңқылығы мен оның кейбір параметрлерінің өзгеруіне аз сезгіштігін қамтамасыз ететін әдістері бар.

Жүйе қалыпты формадағы теңдеумен жазылсын дейік, яғни

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + f_i(t), \quad i=1 \div n, \qquad (4.40)$$

мұнда x_i - жүйенің күй координаттары.

Жүйенің пайдалану процесіндегі уақыттан және жасаудағы бытыраңқылықтан өзгеретін параметрлерін белгілейік:

$$\alpha_j \quad (j=1 \div m).$$

Бұлар (4.40)теңдеудің коэффициенттеріне енеді.

Сондықтан (4.40) теңдеуді жалпы түрде былай жазуға болады:

$$\frac{dx_i}{dt} = \phi_i(x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m), \quad i=1 \div n. \qquad (4.41)$$

Параметрлердің аз өзгеруін қарастыра отырып жаңа теңдеу табамыз:

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \tilde{\phi}_i(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n,\alpha_1+\Delta\alpha_1,\ldots,\alpha_m+\Delta\alpha_M), \quad i=1 \div n. \qquad (4.42)$$

Параметрлері өзгермегендегі және де (4.41) жүйенің шешіммен анықталатын процесс

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \dots,\ x_n(t)$$

алғашқы қозғалыс деп аталады.

Сол жүйедегі процесс, бірақ өзгерген параметрлерде, құбылмалы қозғалыс делінеді және (4.42) теңдеудің шешімімен анықталады

$$\tilde{x}_1(t),\ \tilde{x}_2(t),\ \dots,\ \tilde{x}_n(t)$$

Бұл процестердің өтуінде жүйенің параметрлерінің өзгеруінен, қосымша қозғалыс делінетін, айырмашылық пайда болады

$$\Delta x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t), \quad i=1 \div n.$$

α_j параметрлердің аз өзгеруінде жазуға болады

$$\Delta x_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_m}\Delta\alpha_m, \quad i=1 \div n$$

Белгілейік ,

$$u_{ij}(t) = \partial x_i / \partial \alpha_j \quad (j=1 \div m). \qquad (4.43)$$

Онда қосымша қозғалыс болады

$$\Delta x_i = u_{i1}\Delta\alpha_1 + u_{i2}\Delta\alpha_2 + \dots + u_{im}\Delta\alpha_m, \quad i=1 \div n. \qquad (4.44)$$

(4.43) формулалармен анықталатын u_{ij} шамалар сезгіштік функциялар деп аталынады.

Тап осы жағдайда x_i жүйенің күй координаттары болып келеді. Жалпы ұқсас сезгіштік сипаттамалар жүйенің әртүрлі сапа көрсеткіштеріне де негізделуі мүмкін. Онда (4.43) формулада x_i орнында сәйкесті сапа көрсеткіші тұрады, Δx_i ал (4.44) орнында - сол көрсеткіштің өзгеруі. [10] жұмыста x_i координаттар ретінде көп обьектің шығу айнымалары алынып оларға математикалық моделінің параметрлерінің өзгеруінің ететін ықпалын бағалауға қолданылған. Жиілік сипаттамалары үшін сезгіштік функциялар уақыттан емес, жиіліктен функция болады. Егер сапа көрсеткіші функция арқылы білдірілмей, ал санмен білдірілсе, онда u_{ij} функциялар делінбей, сезгіштік коэффициенттер делінеді.

Сезгіштік функциялардың анықтауы келесідей жүргізіледі.

(4.41) алғашқы теңдеуді α_j параметрлер бойынша дифференциалдайық:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\frac{dx_i}{dt}\right) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\times\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}\times\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}\times\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_j}.$$

Сол жағының дифференциалдау ретін алмастырып және (4.43) формуланы ескеріп, мынадай өрнектерді табамыз:

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \frac{\partial\psi_i}{\partial x_1}u_{1j} + \frac{\partial\psi_i}{\partial x_2}u_{2j} + \cdots + \frac{\partial\psi_i}{\partial x_n}u_{nj} + \frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_j} \quad (4.45),$$

бұлар сезгіштік теңдеулер деп аталады. Бұл теңдеулер бойынша тікелей u_{ij} сезгіштік функцияларды анықтау қиын. Сондықтан жанама әдістер қолданылады, мысалы, модельдердің [10] немесе графтардың [3] көмегімен.

Сезгіштік теңдеулерінің анықтауының қарапайым мысалын мынадай жүйе үшін келтірейік

$$(Tp + 1)x = kg(t)$$

Екі сезгіштік функцияларды енгізейік

$$u_K = \frac{\partial x}{\partial k}, \quad u_T = \frac{\partial x}{\partial T}$$

Жүйенің қалыпты түрдегі теңдеуі былай жазылады:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T}x + \frac{k}{T}g(t)$$

Бұдан (4.45)формула бойынша табамыз:

$$\frac{du_K}{dt} = -\frac{1}{T}u_K + \frac{1}{T}g(t), \quad \frac{du_T}{dt} = -\frac{1}{T}u_T + \frac{1}{T^2}(x - g(t)).$$

Бұлар қарапайым сезгіштік теңдеулері болады. Бұдан u_K мен u_T есептеп, К жене Т параметрлердің пайдалануға өзгеруінің себебінен болатын басқару процесінің өзгеруін төменгі формула бойынша табайық

$$\Delta x(t) = u_K(t)\Delta k + u_T(t)\Delta T.$$

Сапа көрсеткіші үшін сезгіштік функциямен коэффициенттерді анықтау жайында айтсақ, олардың анықтауы оңайлау, себебі онда дифференциалдық теңдеулер болмайды.

Жиілік сипаттамалардың сезгіштік функцияларын қарастырайық. Тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясын былай жазайық

$$W(p) = W(p;\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_m)$$

мұнда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ - технологиялық бытыранды немесе пайдаланудағы өзгеруі бар болатын жүйе параметрлері. $p=j\omega$ алмастырылғаннан кейін амплитудалық пен фазалық жиілік сипаттамаларын былай жазайық

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = A(\omega;\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_m),$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \varphi(\omega;\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_m).$$

Мұнда сезгіштік функциялар болады

25-207

$$U_{Aj}(\omega) = \frac{\partial A(\omega)}{\partial \alpha_j}, \quad U_{\varphi j}(\omega) = \frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial \alpha_j}, \quad (j=1 \div m) \qquad (4.46)$$

Нәтижесінде (4.44) формула орнына жүйе параметрлерінің бытыранды және өзгеру себебінен болатын жиілік сипаттамаларының ауытқуы үшін, ω жиіліктің функциясы сияқты, формулаларды табамыз:

$$\Delta A(\omega) = \sum_{j=1}^{m} U_{Aj}(\omega)\Delta\alpha_j; \; \Delta\varphi(\omega) = \sum_{j=1}^{m} U_{\varphi j}(\omega)\Delta\alpha_j. \qquad (4.47)$$

Сонымен қатар жоғарыда келтірілген қарапайым мысал үшін болады

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$$

енді $\alpha_1 = T$ параметр бойынша жиілік сипаттамаларының сезгіштік функцияларын табайық. Мұнда

$$A(\omega) = k/\sqrt{T^2\omega^2 + 1} \; ; \quad \varphi(\omega) = - \operatorname{arctg} T\omega,$$

болғандықтан (4.46) сезгіштік функциялар жазылады:

$$U_{AT} = \frac{A(\omega)}{T} = \frac{-kT\omega^2}{(T^2\omega^2+1)^{3/2}}, \; U_{\varphi T} = \frac{\varphi(\omega)}{T} = \frac{\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Жиілік сипаттамалардың ауытқуы (4.47)бойынша табылады

$$\Delta A(\omega) = U_{AT}(\omega)\Delta T,$$

$$\Delta\varphi(\omega) = U_{\varphi T}(\omega)\Delta T.$$

Сезгіштік функцияларды анықтау, жүйе параметрлерінің шамалары есептелінген шамалардан ауытқудағы сапа көрсеткіштердің ең аз өзгеруін қамтамасыз ететін жүйелерді жобалау үшін қолданылады.

5-ТАРАУ
КОРРЕКЦИЯЛАУШЫ ҚҰРЫЛҒЫЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ СИНТЕЗДЕУ ӘДІСТЕРІ

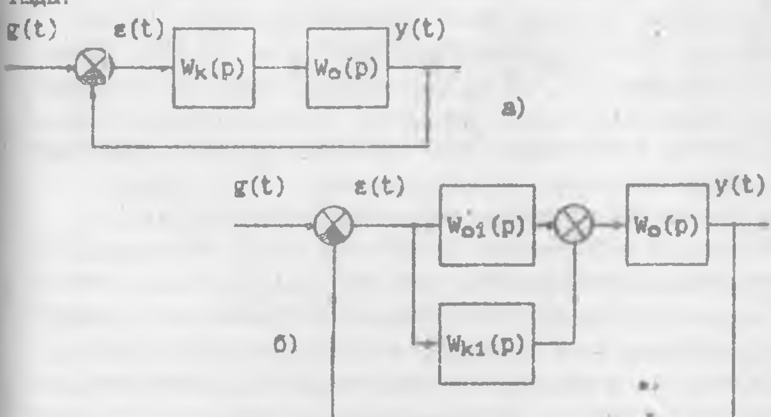
5.1 ТІЗБЕКТЕЙ КОРРЕКЦИЯЛАУШЫ ҚҰРЫЛҒЫЛАР

Басқару не реттеу процесінің әлде жүйенің, талап етілетін дәлдігі мен өтпелі процестің ықыласты сапасына жету үшін,жүйе параметрлерін өзгерту қажет , себебі параметрлердің өзгеруімен сәйкесті теңдеудің коэффициенттері және жиілік сипаттамалары өзгереді.

Егер коэффициенттердің өзгерту жолымен ықыласты нәтиже шықпаса, онда екінші әдісті қолдану қажет, яғни қосымша үзбелерді-коррекциялаушы құрылғыларды қосып жүйенің структурасын өзгерту керек.

Коррекциялаушы құрылғылардың негізгі мақсаты жүйенің дәлдігі мен өтпелі процестің сапасын жақсартудан тұрады. Бірақ сонымен қатар коррекциялаушы құрылғыларды еңгізуімен жалпы мәселені шешуге болады,мысалы егер жүйе орнықсыз болса оны орнықты ету, одан кейін реттеу процесінің ықыласты сапасына жету.

Коррекциялаушы құрылғылардың төрт негізгі түрлерін ажыратады.



5.1 - сурет

1. Әртүрлі $W_K(p)$ түрлендіру функцияларымен жазылатын (4.1-сурет) коррекциялаушы сүгілер делінетін, тізбекті коррекциялаушы құрылғылар түрінде. Онда жүйенің тұйықталмаған тізбегінің жалпы түрлендіру функциясы болады

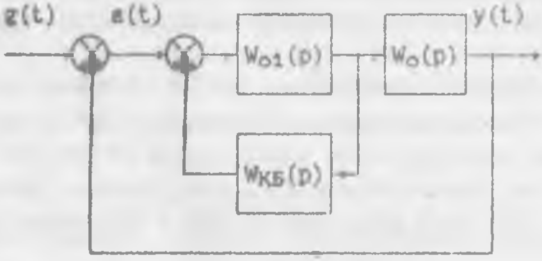
$$W(p) = W_K(p)W_o(p) \qquad (5.1)$$

осымен бірге екінші вариантта (5.1,б-сурет) болады

$$W_K(p)' = W_{o1}(p) + W_{K1}(p),$$

мұнда нольдермен жүйенің берілген (коррекциялаусыз) бөліктерінің түрлендіру функциялары белгіленген.

2. Қосымша жергілікті кері байланыстар түрінде іске асырылатын параллельді коррекциялаушы құрылғылар (5.2-сурет)



5.2-сурет

мұнда

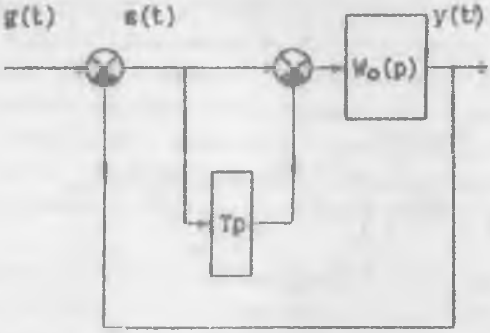
$$W(p) = \frac{W_{o1}(p)W_o(p)}{1+ W_{KБ}(p)W_{o1}(p)} \qquad (5.2)$$

3. Сыртқы әсер бойынша кері байланыс түріндегі коррекциялаушы құрылғылар.

4. Бірлік емес негізгі кері байланыс түріндегі.

ТІЗБЕКТІ КОРРЕКЦИЯЛАУШЫ ҚҰРЫЛҒЫЛАР. Жалпы айтқанда, олардың түрлендіру функцияларының түрі кез келген болуы мүмкін. Бірақ көп жағдайларда типтері белгілі коррекциялаушы құрылғылар қолданылады. Мұнда сондай құрылғыларды қарастырайық:

а) өтпелі процестің сапасын жақсартудың қарапайым әдісі ол қателіктен туындысын енгізу. Бұндай жағдайда жүйенің структуралық схемасы 5.3-суретте көрсетілген. Бұл техникалы әртүрлі құрылғылармен іске асырылуы мүмкін, сонымен бірге туынды таза



5.3 - сурет

түрде емес инерциондықпен іске асырылуы мүмкін, мысалы былай:

$$W_{k1}(p) = \frac{Tp}{T_1 p + 1}$$

Онда тұйықталмаған тізбектің (5.3-сурет) түрлендіру функциясы идеалды туындымен болады

$$W(p) = (Tp+1)W_o(p).$$

$p=j\omega$ алмастырып, амплитуда мен фазаны табамыз

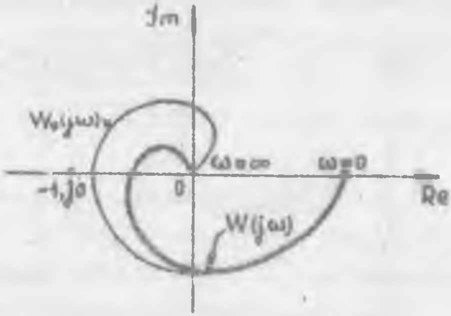
$$A(\omega) = A(\omega)\sqrt{T^2\omega^2 + 1}, \; \varphi(\omega) = \varphi_o(\omega) + \operatorname{arctg} T\omega.$$

Мұндағы маңызды жағдай бұл туынды бойынша әсер енгізу жүйенің фазалық жиілік функциясына оң фазасына қосуында. Сол себептен амплитуда-фазалық сипаттаманың радиус-векторлары сағат тілінің жүру бағытына қарсы бұрылып (5.4,а-сурет) орнықтылықтың қорын көбейтеді де өтпелі процестің сапасын жақсартады. Тура осыны логарифмдік сипаттамалардан (5.4,б-сурет) бақылауға болады.

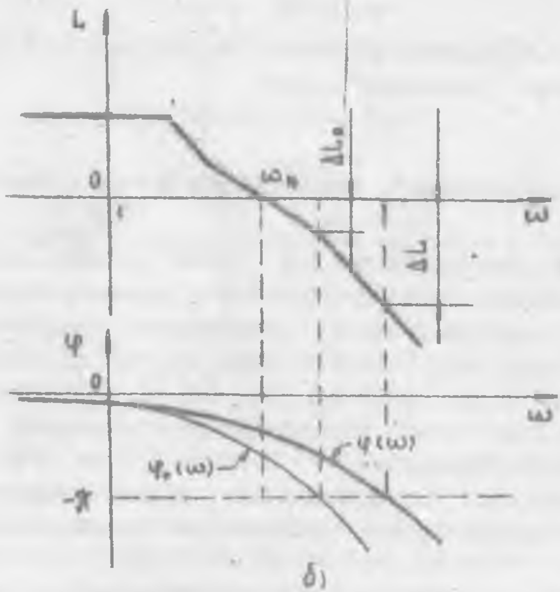
Идеалды емес (инерциондықпен) дифференциалдау жағдайда бұл эффект сандық жағынан өптеп азаяды, бірақ сапалық жағынан сақталады.

Қателіктен туынды енгізу бұл стабилизациялау, яғни тұйықталған жүйені орнықты ету құралы болуы мүмкін екенін ескерту қажет. Мысалы, егер 5.4,а - суреттегі (-1) нүкте $W_o(j\omega)$ сипаттаманың ішінде жататын болса, онда жаңа $W(j\omega)$ сипаттама (-1) нүктені қамтымайтын болуы мүмкін.

в) тұйықталмаған тізбектің К-жалпы күшейту коэффициентін



а)



б)

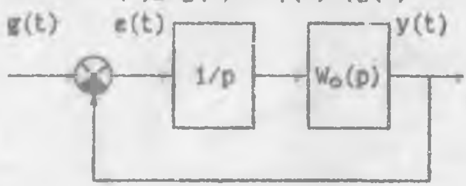
5.4-сурет

үлкейту жүйенің делдігін арттыру (жоғордату) әдісі болып келеді. Сонымен жүйенің тұрақталнған қатенің барлық түрлері азаятыны 4.7 баптан айқын көрінеді. Коэффициентті үлкейту, жалпы тізбекке күшейткіш үзбені енгізу арқылы іске асырылады. Бірақ K үлкейту, белгіліден орнықтылықтың жағдайын, демек, өтпелі процестің сапасын төмендетуге келтіреді. Сондықтан буны жиі жағдайда бір мезгілде туындыны енгізумен бірге іотеу үшін тура келеді.

c) қателіктен интегралды енгізу жүйесінің астатизмы ретін жасау немесе арттыру, демек, оның делдігін үлғайту әдісі болып келеді (5.5-сурет). Түрлендіру функциясы болады

$$W(p) = 1/pW_o(p)$$

p-jω қойып, табамыз $A(\omega)=A_o(\omega)/\omega$ $\varphi(\omega)=\varphi_o(\omega)-90^o$. Фазасы -90^o



5.5 - сурет

бұрылу салдарынан орнықтылықтың жағдайлары мен өтпелі процестің сапасы төмендетіледі (5.6,а мен б-сурет). Кейде бұл $W_o(j\omega)$ сипатама 5.6,а-суреттегі (-1) нүктені қамтымағанмен тұйықталған жүйенің орнықсыздығын әкелуі мүмкін, егер ол нүкте $W(j\omega)$ сипаттаманың ішінде болып қалса.

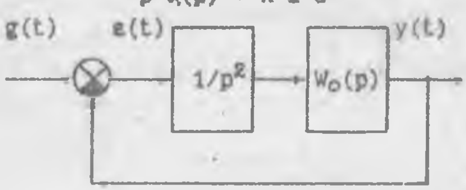
$$W_o(p) = k/Q(p)$$

(алымында туындысы жоқ) түрлендіру функциясымен жүйеге қос интегралды ендіру жағдайда (5.7-сурет) жазылады

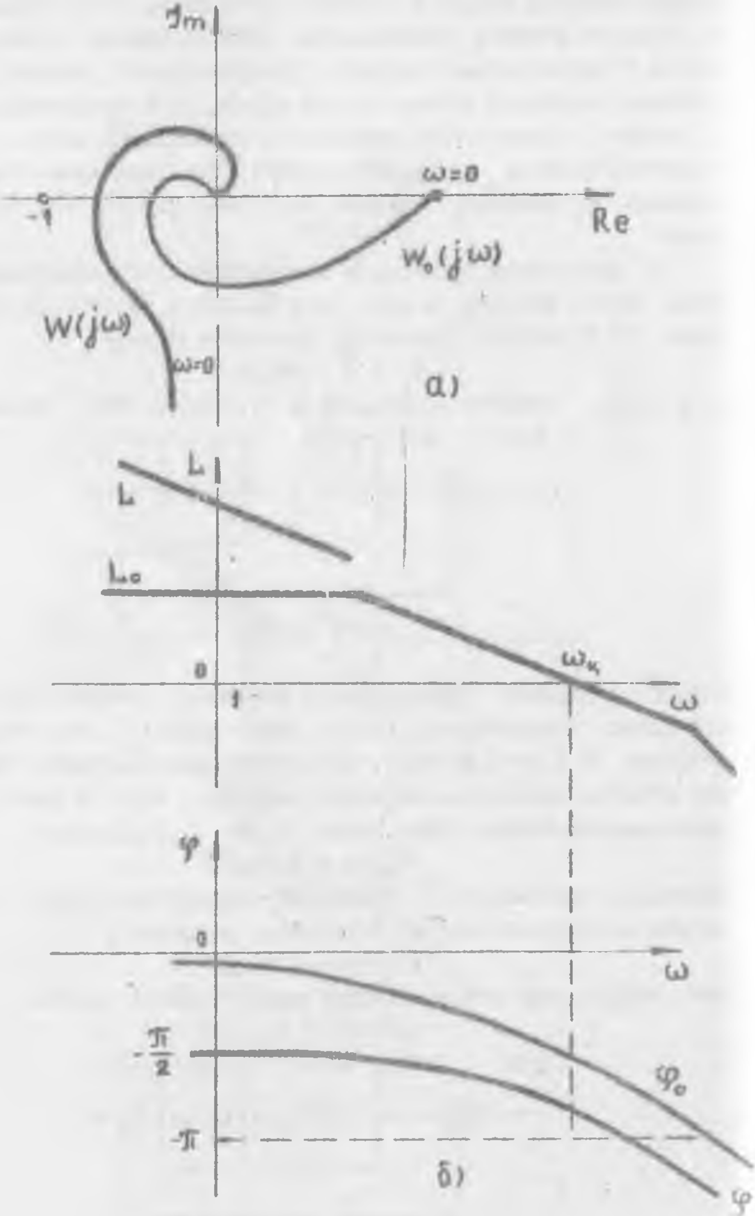
$$W(p) = k/(p^2Q(p)$$

және тұйықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуі болады

$$p^2Q(p) + k = 0 \qquad (5.3)$$



5.7 - сурет


Jm
ω=0
-1
Re
$W_0(j\omega)$
$W(j\omega)$
ω=0
a)
L
L
L_0
0
1
$\omega_к$
ω
φ
0
ω
$-\frac{\pi}{2}$
φ_0
$-\pi$
б)
φ

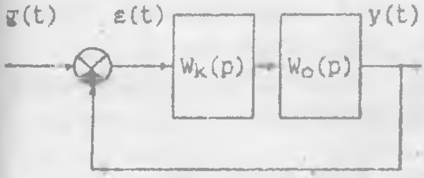
5. 6-сурет

Бұл жүйе структуралы орнықсыз болады, себебі (5.3) сипаттамалық теңдеудің p бойынша бірінші дәрежелі мүшесі жоқ. Сондықтан екінші ретті астатизм тек қана реттеу заңына туындылар енген жағдайда жүзеге асатындай болуы мүмкін, яғни түрлендіру функциясының алымында кейбір R(p) көпмүше болғанда.

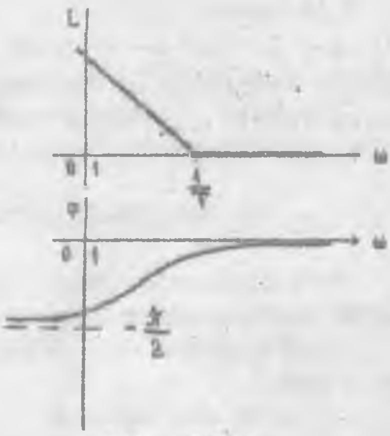
d) изодромды коррекциялаушы құрылғының (5.8-сурет) түрлендіру функциясы болады

$$W_k(p) = \frac{Tp + 1}{Tp}$$

Интеграл мен туынды ендіруді біріктіріп бұл құрылғы алдағы құрылғының кемшілігін жоюға және жүйенің орнықтылығы мен



5.8 - сурет



5.9 - сурет

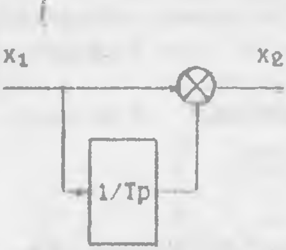
сапасын сақтай тұрып оның қажетті астатизм ретін табуға мүмкіншілік береді.

Изодромды құрылғының логарифмдік жиілік сипаттамалары 5.9-суретте көрсетілгендей болады. Олардан, бұл құрылғы амплитудалық сипаттаманың тек жүйенің дәлдігіне (оны арттырады) ықпал ететін төменгі жиіліктік бөлігін өзгертетіні көрінеді, ал орнықтылық шарттар үшін маңызды бөлігіндегі фазалық теріс ығысуы үлкен емес.

Коррекциялаушы құрылғының түрлендіру функциясын былай жазуға болғандықтан

$$W_k(p) = \frac{Tp + 1}{Tp} = 1 + \frac{1}{Tp} .$$

оның структуралы 5.10 - суреттегідей көрсетуге болады. Демек, егер интегралды қарапайым ендіру жағдайда (5.5-сурет), жүйедегі $\varepsilon(t)$ реттеу қатенің шамасы бойынша жүргізілмей, тек қана оның интегралы бойынша жүргізілсе, онда изодромды құрылғыда реттеу қате және интеграл бойынша болып шығады (қате және оның туындысы бойынша 5.3-суреттегі реттеуге ұқсас).



5.10-сурет

Изодромды құрылғының техникалық жүзеге асуы әртүрлі болуы мүмкін (механикалы, электр және т.с.с. құрылғылар).

Тізбектей коррекциялаушы құрылғылардың-оүзгіштердің түрлендіру функциялары күрделілеу болуы мүмкін [34].

5.2 ПАРАЛЛЕЛЬДІ КОРРЕКЦИЯЛАУШЫ ҚҰРЫЛҒЫЛАР

Кері байланысты түрдегі (5.2-сурет) параллельді коррекциялаушы құрылғыларды қарастырайық.

Коррекциялаушы кері байланыстардың негізгі түрлері мынадай болады:

а) қатаң кері байланыс

$$W_{КБ}(p) = k_{КБ};$$

б) инерционды қатаң кері байланыс

$$W_{КБ}(p) = k_{КБ}/(T_{КБ}p+1);$$

в) иілгіш кері байланыс

$$W_{КБ}(p) = k_{КБ}p;$$

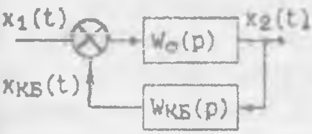
г) инерционды иілгіш кері байланыс

$$W_{КБ}(p) = k_{КБ}p/(T_{КБ}p+1).$$

Коррекциялаушы кері байланыстардың түрлендіру функциялары күрделілеу болуы мүмкін.

Бұл кері байланыстардың әртүрлі типтік үзбелерді қамтығанда негізгі қасиеттерін мысалдарда көрсетейік.

ОҢ ҚАТАҢ КЕРІ БАЙЛАНЫС. Мұндай кері байланыс апериодты үзбені қамтымайды дейік (5.11-сурет), яғни



5.11-сурет

$$W_o(p) = \frac{k}{Tp + 1}, \quad W_{КБ}(p) = k_{КБ}.$$

Онда жалпы түрлендіру функция болады

$$W(p) = \frac{W_o(p)}{1 - W_{КБ}(p)W_o(p)} = \frac{k}{Tp + 1 - k_{КБ}}$$

өлде

$$W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1},$$

мұнда

$$k_1 = \frac{k}{1 - kk_{КБ}}, \quad T_1 = \frac{T}{1 - kk_{КБ}}. \qquad (5.4)$$

Демек, оң кері байланыс күшейту коэффициентті үлкейту үшін жарауға мүмкін. Бірақ сонымен бірге уақыт тұрақтысын да, яғни үзбенің инерциондығы да үлкейететінін ескеру қажет, ал $k_{КБ}>1/k$ болғанда үзбе орнықсыз болады.

ТЕРІС ҚАТАҢ КЕРІ БАЙЛАНЫС. Онымен апериодты үзбе қамтылғанда табамыз

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1 + kk_{КБ}} = \frac{k_1}{T_1 p + 1} \qquad (5.5)$$

мұндағы

$$k_1 = \frac{k}{1 + kk_{КБ}}, \quad T_1 = \frac{T}{1 + kk_{КБ}}.$$

Демек, теріс қатаң кері байланыс үзбенің инерциондығын азайтады. Сонымен ол жүйедегі өтпелі процестің сапасын жақсартады және стабилизациялау әрекетін тигізуі мүмкін, яғни тұйықталған орнықсыз жүйені орнықты ету (туынды ендіруге ұқсас). k_1 күшейту коэффициентінің азаюы басқа үзбелер арқылы компенсациялануы мүмкін.

Интегралдау үзбе теріс қатаң кері байланыспен қамтылса, яғни

$$W_o(p) = k/p, \quad W_{КБ}(p) = k_{КБ}.$$

болғанда табамыз

$$W(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_{КБ}(p)W_o(p)} = \frac{k}{1 + kk_{КБ}} = \frac{k_1}{T_1 p + 1}, \qquad (5.6)$$

мұнда

$$k_1 = \frac{1}{k_{КБ}}, \quad T_1 = \frac{T}{kk_{КБ}}.$$

Бұл жағдайда қатаң кері байланыстың әрекетінен үзбенің интегралдау қасиеті жойылатыны және ол толығымен, тек қана кері байланыспен анықталатын коэффициентті, апериодтты үзбеге айналатыны көрінеді. T_1 уақыт тұрақтысы аз болады, үзбенің k күшейту коэффициенті үлкен болғанда.

Көрсетілген кері байланысты ендіру әдісі іс жүзінде қолданылады, мысалы приводтық (жетектеу) құрылғыларда, шығу біліктің бұрылу бұрышын басқару сигналға (кернеуге) пропорциялы ету үшін.

Бұдан әрі арнаулы ескертусіз тек теріс кері байланыстарды қарастыратын боламыз.

ИНЕРЦИОНДЫ ҚАТАҢ КЕРІ БАЙЛАНЫС. Онымен интегралдаушы үзбе қамтылғанда

$$W_o(p) = \frac{k}{p}, \quad W_{КБ}(p) = \frac{k_{КБ}}{T_{КБ}p + 1},$$

мынадай өрнекке келеміз:

$$W(p) = \frac{k(T_{КБ}p + 1)}{T_{КБ}p^2 + p + kk_{КБ}} = \frac{k_1}{T^2{}_2p^2 + T_1p + 1}, \quad (5.7)$$

мұнда

$$k_1 = \frac{1}{k_{КБ}}, \quad T^2{}_2 = \frac{T_{КБ}}{kk_{КБ}}, \quad T_1 = \frac{1}{kk_{КБ}}.$$

Демек, мұндай жағдайда интегралдаушы үзбе туынды ендірумен екінші ретті үзбеге айналады. Сонымен k_1 күшейту коэффициенті және туындыны ендіру интенсивтігі толығымен кері байланыспен анықталады, ал үзбенің бастапқы k күшейту коэффициенті жаңа T_1 және T_2 уақыт тұрақтылығына ықпал етеді, неғұрлым k үлкен болса, соғұрлым олар аз болады. Сондықтан k үлкен болғанда интегралдаушы үзбені инерционды қатаң кері байланыспен қамту, күшейту үзбеге туынды ендірумен баламалы (эквивалентті). Сонымен,

$$W(p) \approx \frac{T_{КБ}p + 1}{k_{КБ}}$$

Будан инерционды кері байланыстың жүйедегі өтпелі процестің сапасына бүтіндей жақсы ықпалы шығады,

ИІЛГІШ КЕРІ БАЙЛАНЫС. Онымен тербелмелі үзбе қамтылғанда, яғни былай болғанда

$$W_o(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}, \qquad W_{КБ}(p) = k_{КБ}p,$$

болады

$$W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi_1 Tp + 1}, \tag{5.8}$$

мұнда:

$$2\xi_1 Tp = 2\xi Tp + kk_{КБ}p, \quad \xi_1 = \xi + (kk_{КБ}/2T).$$

Бұл жағдайда тербелмелі үзбенің демпферлеуі үлкееді (себебі $\xi_1>\xi$), ал күшейту коэффициенті өзгермейді.Процесс тербелмелілігін азайтады және апериодтыққа айналуы мүмкін (егер $\xi_1>1$ болса).

Егер апериодты үзбе болса онда оны бөлек иілгіш кері байланыспен қамтудың қажеті жоқ екенін ескеру керек, себебі бұл тек қана оның инерциондығын (уақыт тұрақтысын)көбейтеді.

Инерционды интегралдау үзбені иілгіш кері байланыспен қамтығанда, яғни былай болғанда

$$W_o(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}, \qquad W_{КБ}(p) = k_{КБ}p,$$

болады

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1) + k_1 k_{КБ}} = \frac{k_1}{p(T_1p + 1)}, \tag{5.9}$$

мұнда

$$k_1 = \frac{k}{1 + kk_{КБ}}, \qquad T_1 = \frac{T}{1 + kk_{КБ}},$$

яғни интегралдау үзбенің сол типі сақталады, бірақ азайған инерциондықпен.

ИНЕРЦИОНДЫ ИІЛГІШ КЕРІ БАЙЛАНЫС. Онымен инерционды интегралдаушы үзбені қамтығанда, яғни мынадай болғанда

$$W_o(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}, \qquad W_{КБ}(p) = \frac{k_{КБ}}{T_{КБ}p + 1}$$

болады

$$W(p) = \frac{k(T_{КБ}p + 1)}{p[TT_{КБ}p^2+(T_1+T_{КБ})p+1+kk_{КБ}]} = \frac{k_1(T_{КБ}p + 1)}{p(T^2{}_2p^2+T_1p+1)}, \qquad (5.10)$$

мұндағы

$$k_1 = \frac{1}{1+kk_{КБ}}, \quad T^2{}_2 = \frac{TT_{КБ}}{1+kk_{КБ}}, \quad T_1 = \frac{T+T_{КБ}}{1+kk_{КБ}}.$$

Мұндай жағдайда үзбенің интегралдау қасиеті сақталынады да, ал эффекты туындыны ендіру нәтижесіндей болып шығады, яғни интегралдаушы үзбе иг ?ромдылыққа айналады, ал үзбенің инерциондығын сипаттайтын T_2 мен T_1 жаңа уақыт тұрақтылары, k күшейту коэффициентінің үлкен бастапқы мәні арқылы азайтылуы мүмкін. Соңғы жағдайда болады

$$k_1 \approx \frac{1}{k_{КБ}}, \quad W(p) \approx \frac{T_{КБ}p + 1}{pk_{КБ}}.$$

Жалпы мынаны ескерту керек, өтпелі процестің сапасын жақсарту үшін, тура тізбекке туынды ендіруге сәйкес нәтиже беретін, кері байланыста инерционды кешігуді қолдану пайдалы. Және де қатаң кері байланыстар үзбенің интегралдау қасиетін жоятынын (яғни жүйенің астатизмын жоятынын , егер ондағы үзбелердің тізбегінің басқа жерінде интегралдау жоқ болса), ал иілгіш кері байланыстар астатизмын сақтайтынын коррекциялаудың жалпы қасиеттері болып келетінін ескеру қажет.

Жүйе коррекциялауында түрлі типті күрделі түрлендіру функцияларымен коррекциялау кері байланыстар да қолдануы мүмкін.

Үзбені кері байланыспен қамтығанда астатизмның жоғарғылау ретін сақтау шартын қалай қамтамасыз етуге болатынын қарастырайық. Мынадай үзбе

$$W_o(p) = \frac{k}{p^v} W'_o(p)$$

иілгіш кері байланыспен қамтылсын дейік

$$W_{КБ}(p) = k_{КБ}p\, W'_{КБ}(p).$$

Онда ,

$$W(p) = \frac{kW'_o(p)}{p^v + p\, kk_{КБ}W'_{КБ}(p)}. \qquad (5.11)$$

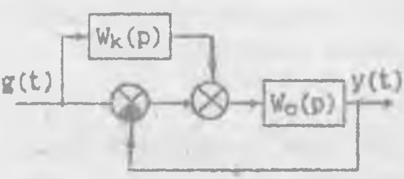
Астатизмның v-ші ретін сақтау үшін кері байланыста $\mu > v$ болуы қажет екені айқын көрінеді. Егерде бұл техникалы мүмкін болмаса яғни $\mu < v$ болса, онда астатизм ретінің жоғалған бөлігі тізбектей қосылған коррекциялаушы құрылғылардың қосуымен есесін қайтаруға болады, мысалы, изодромды типімен.

5.3 СЫРТҚЫ ӘСЕР БОЙЫНША КОРРЕКЦИЯЛАУШЫ ҚҰРЫЛҒЫЛАР. ИНВАРИАНТТЫЛЫҚ

Автоматты басқарудың және реттеудің негізгі принципі ε қатенің шамасы (оның интегралдары және туындылары) бойынша басқару сигналды қалыптастыруында тұрады. Егерде сыртқы әсері бойынша коррекциялаушы құрылғы ендірілсе (мұнда да сәйкесті интегралдары мен туындыларын еске алып), онда жүйе қате және сыртқы әсері бойынша қиыстырылған реттеу жүйесі болады.

Сыртқы әсердің қандай болмасын түрінде ол бойынша коррекциялау ендіру жолымен айқын шарттарда теория жағынан тұрақталынған қатенің шамасын нольге келтіруге болады. Бұл қасиет жүйенің сыртқы әсері бойынша инвариаттылығы (тәуелсіздігі) делінеді. Сыртқы әсерлер, бұдан бұрын айтылғандай, тағайындалғандар мен ауытқушыларға бөлінеді. Біріншілердің сигналын жүйе атқару (орындау) тиісті, ал екіншілердің әрекетін жүйе бейтараптандыру (нейтрализациялау) қажет.

ТАҒАЙЫНДАЛҒАН ӘСЕРІ БОЙЫНША КОРРЕКЦИЯЛАУШЫ ҚҰРЫЛҒЫЛАР. Бұнда қате сигналымен қатар тағыда $g(t)$ тағайындалған әсердің сигналы кейбір $W_k(p)$ түрлендіру функциясы арқылы жүйенің ішкі тізбегіне ендіріледі (5.12-сурет). Онда шығу шамасы (Лаплас көрінісінде) жазылады



5.12 - сурет

$$Y(p)=\frac{W_o(p)}{1+W_o(p)}[1+W_k(p)]G(p),$$

яғни реттелінетін шама үшін тұйықталған жүйенің эквивалентті түрлендіру функциясы тең болады

$$\Phi_э(p) = \frac{W_o(p)}{1+W_o(p)}\,[1 + W_k(p)],$$

ал қате үшін

$$\Phi_{\varepsilon}(p) = 1 - \Phi_э(p) = \frac{1 - W_k(p)W_o(p)}{1+W_o(p)} \qquad (5.12)$$

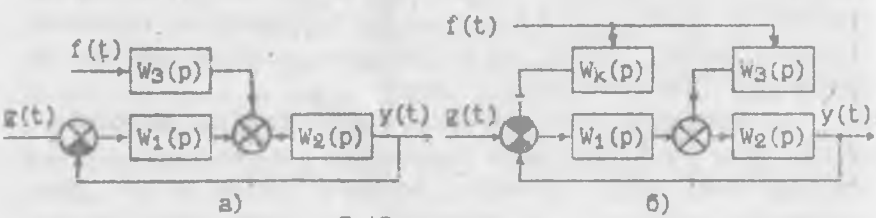
Қандай болмасын тағайындалған шаманың түрі, тұрақталынған қате нольге тең болады, егер

$$W_k(p) = 1/W_o(p).$$

Әдетте бұл инварианттық шартты толығымен қанағаттандыруға болмайды, бірақ белгілі (іс жүзінде жүйемен өткізілетін) жиілік облысында жуықтау теңдікті таңдап алуға болады. Мұндай толық емес жүйенің инварианттылығы елеулі түрде реттеу жүйесінің ε қатесін азайтады.

Тағайындалған шамасы бойынша коррекциялаудан басқа варианттары болуы мүмкін.

АУЫТҚЫЛАУШЫ ӘСЕР БОЙЫНША КОРРЕКЦИЯЛАУШЫ ҚҰРЫЛҒЫ. Жүйе схемасы берілсін дейік (5.13,а-сурет). $f(t)$ ауытқылаушы әсер кіру шамасы болатын $W_k(p)$ коррекциялаушы құрылғы ендірейік.



5.13 - сурет

Онда $y(t)$ реттелінетін шама үшін ауытқылаушы әсер бойынша тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясы мынаған тең болады

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{W_2(p)[W_3(p) - W_k(p)W_1(p)]}{1 + W_1(p)W_2(p)} \qquad (5.13)$$

$f(t)$ ауытқылаушы әсердің ықпалын жою қажет болғандықтан толық инварианттылығының шарты былай жазылады:

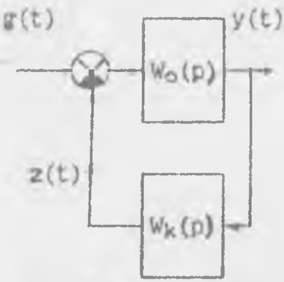
$$W_k(p) = W_3(p)/W_1(p).$$

Мұнда да толық емес инварианттылықпен шектеуге болады, егер де шартты толығымен қанағаттандыру техникалық қиыншылықтарды тудырса.

Негізгі қиыншылық $W_k(p)$ кірісіне $f(t)$ зуылтқылаушы әсерді, $g(t)$ тағайындалған шама сияқты, барлық жағдайда беруге мүмкін емес. Шынымен, ол үшін $f(t)$ өлшеуін білу керек, ондай барлық жағдайларда болуы мүмкін емес (мысалы үшін ұшақтың бет алысын автоматты реттеуіндегі әрекет ететін желдің екпіндерін). Іс жүзінде $f(t)$ өлшеу үшін кеңінен жанама әдістер қолданылады.

Сыртқы әсерлер бойынша коррекциялаушы құрылғыларды ендіру автоматты реттеу мен басқару жүйелердің дәлдігін жоғарлатуының маңызды әдісі болып келеді. Бұл әдістің мынадай болымды ерекшелігі бар. Жоғарыдағы жазылған түрлендіру функциялардан көрінеді, коррекциялау ендіргенде олардың бөлгіші өзгермейтіні. Сондықтан, алымының задығын ескеріп тұйықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуі осындай коррекция ендіргенде нақтылығында өзгеріссіз қалады деп айтуға болады. Демек, бұл коррекциялау тәсілі жүйенің дәлдігін елеулі жоғарылатады, өтпелі процестің сапасына ықпал етпейді дерлік, ал дәлдігін жоғарылататын алдағы әдістер әрдайым өтпелі процестің сапасының төмендеуімен байланысты болатын, егер қосымша шаралар қолданылмаса.

Қорытындысында тағы коррекциялау құрал ретінде қолдануға болатын бірлік емес негізгі кері байланысты пайдалануына тоқтайық. Әдетте бірге тең болатын негізгі кері байланысқа, $W_k(p)$ түрлендіру функциясымен құрылғы ендірейік (5.14-сурет). Бұл жағдайда жүйе кірісіндегі тағайындалған шама, әдеттегідей $y(t)$ шығу шамасымен тікелей салыстырылмай, кейбір $z(t)$ шамамен салыстырылады, және де



5.14-сурет

$$Z(p) = W_k(p)Y(p).$$

Онда табамыз

$$Y(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_k(p)W_o(p)} G(p) \qquad (5.14)$$

Жүйенің толық инварианттылығы үшін $Y=G$ талап етіледі, сондықтан

27-207

$$W_k(p) = 1 - \frac{1}{W_o(p)}. \qquad (5.15)$$

Бұл өрнектен, жүйе инвариантты болу үшін, яғни қандай болсын тағайындалған шаманы тұрақталынған қатесіз жүйе өндіретін (іштеп шығаратын) болу үшін, негізгі кері байланыстың түрлендіру функциясы "әдеттегі" бірліктен қаншалыққа айырылуы керек екені, көрінеді. Бұл шартты жуықтап орындауға болады. Бірақ мұндай тәсілді қолданғанда жүйенің сипаттамалық теңдеуі елеулі өзгеретіні тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясынан көрінеді. Сондықтан өтпелі процестің ықыласты сапасы болып шығуын бір уақытта бақылау қажет.

Ескертейік, тепе-теңдік күйде (p=0) астатизмсіз жүйе үшін (5.15) өрнектен шығады

$$k_k = 1 - 1/k_o. \qquad (5.16)$$

Демек, егер жүйенің негізгі кері байланысына (5.16) формула бойынша k_k күшейту коэффициент ендірілсе, онда интегралдаушы үзбені ендірусіз жүйе астатималыққа (Y=G) айналады.

5.4 КОРРЕКЦИЯЛАУШЫ ҚҰРЫЛҒЫЛАРДЫҢ СИНТЕЗДЕУІНІҢ ЖИІЛІК ӘДІСІ

Коррекциялаушы құрылғылардың синтездеуінің көп тараған жиілік әдісі, логарифмдік жиілік сипаттамаларға негізделінген әдіс болып келеді. Бұл келесідей өткізіледі. Жүйенің талап етілген дәлдігі мен талап етілген өтпелі процестің сапасына сүйеніп ықыласты (тілекті) логарифмдік амплитудалық жиілік сипаттамасы құрылады . Бұл ықыласты сипаттама коррекцияланбаған жүйенің сипаттамасымен салыстырылынады. Нәтижесінде коррекциялаушы құрылғының түрлендіру функциясы табылады, оны жүйеге қосқанда жүйенің логарифмдік амплитудалық сипаттамасының түрі ықыласты түрдей болуы керек. Одан кейін жүйенің болатын орнықтылықтың қорының шамасын және басқа сапа көрсеткіштерін бағалау үшін оның фазалық жиілік сипаттамасы құрылады.

Жүйеге қойылған дәлдік пен өту процесінің сапасының талаптары бойынша ықыласты логарифмдік амплитудалық жиілік сипаттамасының қалыптасуын қарастырайық.

ЖҮЙЕ ДӘЛДІГІНІҢ ТАЛАПТАРЫ. Бұлар әртүрлі тұжырымдалады.

1. "Жұмыс" $\omega_ж$ жиілігі мен $a_ж$ амплитудасы берілсін дейік, яғни жүйе жұмыс істегенде орынды болатын тағайындалған әсердің жиілігі мен амплитудасының негізгі мәндері және $A\varepsilon = \varepsilon_M$ мүмкін (шек) қатесі (қатенің амплитудасы) тағайындалсын дейік.

Әдетте басқару жүйелердің $\omega_ж$ жұмыс жиіліктерінің мәндері үлкен емес болады да бірінші түйіндес жиіліктен төмендеу (солшылдау) жатады. Ол төменгі жиілік облысы $\|W(j\omega_ж)\| \gg 1$, сондықтан жазуға болады

$$|\Phi\,(j\omega_ж)| = \frac{A}{a_ж} = \frac{1}{|1+W(j\omega_ж)|} \approx \frac{1}{|W(j\omega_ж)|}$$

немесе

$$A = \frac{a_ж}{|W(j\omega_ж)|}.$$

Бұдан ықыластн мәні:

$$|W(j\omega_ж)| > a_ж/\varepsilon_M.$$

2. Тағайындалған шаманың талап етілетін сипаттамалары берілсін дейік: g'_{max} мен g''_{max} және де ε_M .

Жиілік сипаттамаларды пайдалану үшін жорамалдаймыз:

$$g(t) = a_ж\sin\omega_ж t,$$

мұндағы ж индекспен, "жұмыс" жиілік пен амплитудасы белгіленген, олар болғанда тағайындалған g'_{max} жылдамдықпен g''_{max} үдеу орнында болады.

Бұл жағдайда $g(t) = a_ж\sin\omega_ж t$ синусоидалды сигнал берілгенде жылдамдық пен үдеу болады

$$g' = a_ж\omega_ж\cos\omega_ж t, \quad g'' = a_ж\omega^2_ж\sin\omega_ж t.$$

Демек

$$g'_{max} = a_ж\omega_ж, \quad g''_{max} = a_ж\omega^2_ж.$$

Бұдан талап етілген максимал жылдамдық пен үдеу болып шығатын синусоидалды тағайындалған әсерден "жұмыс" жиілігі мен амплитудасы есептелінеді, атап айтқанда

$$\omega_ж = g''_{max}/g'_{max}\,, \qquad a_ж = (g'_{max})^2/g''_{max}. \quad (6.18)$$

Ескертейік, егер $g(t)$ бұрыштық шама болса, онда әдетте мынадай белгілермен пайдаланады:

$$g' = \omega, \quad g'' = \omega'.$$

Онда есептелінеді

$$\omega_ж = \omega'_{max}/\omega_{max}, \qquad a_ж = \omega^2/\omega'_{max}, \qquad (5.19)$$

және $|W(j\omega_ж)|$ ықыласты мәні - (5.17) формула бойынша.

3. Астатикалық жүйеде $g=g'_{max}t$ сигналдың соңынан қадағалап бақылауын қамтамасыз етуі талап етілсін дейік.

Тұйықталмаған жүйенің түрлендіру функциясы мынадай болсын дейік

$$W(p) = \frac{kR(p)}{pQ(p)} \quad онда \quad \Phi(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{pQ(p)}{pQ(p)+kR(p)}$$

Қателердің коэффициенттері

$$C_0 = \Phi(0) = 0 \qquad C_1 = \left.\frac{d\Phi}{dp}\right|_{p=0} = \frac{1}{k}.$$

Онда тұрақталынған қате былай жазылады

$$\varepsilon_M = C_0 g(t) + C_1 g'(t) = g'_{max}/k$$

немесе басқа белгілеулерде

$$\varepsilon_M = \omega_{max}/k.$$

Бұдан ықыласты мәнін табамыз

$$k \geq \omega_{max}/\varepsilon_M = g'_{max}/\varepsilon_M. \qquad (5.20)$$

Жүйенің дәлдік талаптарын бейнелейтін бұл берілгендер бойынша 5.15-суретте көрсетілгендей ықыласты логарифмдік амплитудалық жиілік сипаттамасының төменгі жиіліктік бөлігі құрылады. Сипаттаманың бастапқы келбеуі - 20 дБ/дек (1-ші ретті астатизм). Сынық нүктесі мен ілгері келбеуі әзірше әлі анықталған жоқ.

ӨТПЕЛІ ПРОЦЕСТІҢ САПАСЫНЫҢ ТАЛАПТАРЫ. Өтпелі процестің асыра реттеуінің шек мәні және t_p реттеу уақыты берілсін дейік.

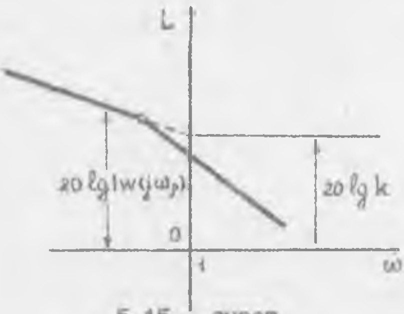
4.6. баптан алынған В.В.Солодвниковтың графигін (5.16-сурет) қолданайық. Бұл график бойынша б тағайындалған шамасына (мысалы, 20%) сәйкесті t_p шамасын анықтаймыз (суретте нұсқамамен көрсетілгендей) мысалы

$$t_p = 2{,}8\pi/\omega_K.$$

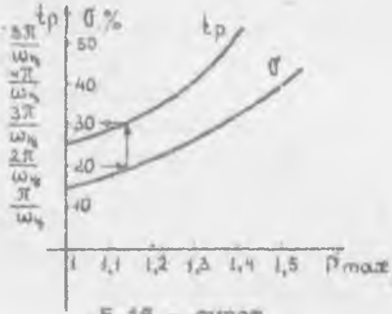
Реттеу уақыттың ықыласты мәні берілгендіктен, ω_K қию жиіліктің қажетті мәнін есептеуге болады

$$\omega_K = 2{,}8\pi/t_p$$

Табылған $\omega_к$ мені ізделініп отырған ықпалдасты ЛАЖС графигіне қондырылып (5.17-сурет) және $\omega_к$ нүкте үстінен -20дБ/дек



5.15 - сурет

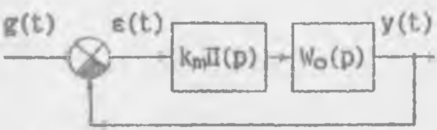


5.16 - сурет

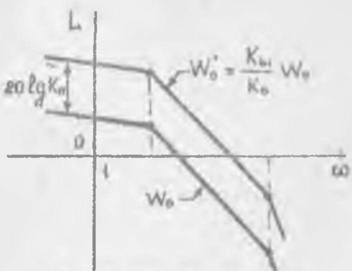
келбеумен түзу өткізіледі. Бұл өтпелі процестің жақсы сапасын қанағаттандыру үшін ұсынылады (4.6-қараңыз).

Одан кейін, алдағы есептеуден сипаттаманың төменгі жиілік бөлігі алынып көрсетілген бөлікпен -40дБ/дек немесе -60дБ/дек келбеумен келбеулі түзумен түйіндестіріледі (5.17-сурет). Жоғарғы жиілікті бөлігі жүйенің сапасына көрнекті ықпал етпейді. Сондықтан ол жүйедегі бар түрінде қалдырылады. Қажетті ΔA амплитуда және Δφ фаза шамалары бойынша орнықтылықтың қорының бар екені тексеріледі (5.17-сурет).

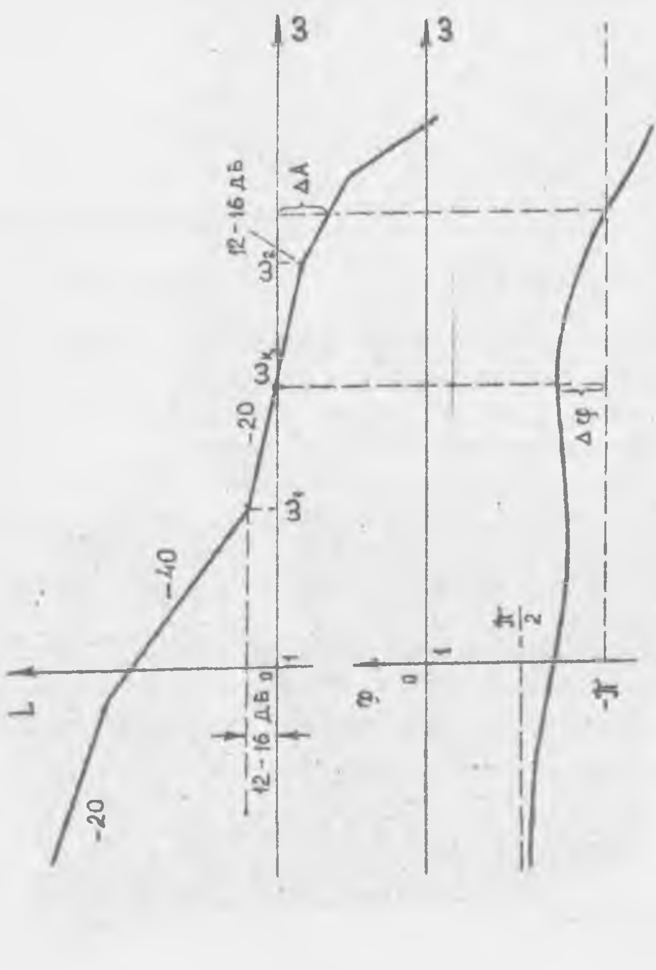
ТІЗБЕКТЕЙ КОРРЕКЦИЯЛАУШЫ ҚҰРЫЛҒЫНЫ СИНТЕЗДЕУ. Коррекциялаусыз тұйықталмаған жүйенің $W_o(p)$ түрлендіру функциясы берілсін дейік (5.18-сурет). Оған сәйкесті жиілік сипаттама ықпалас-



5.18-сурет



5.19-сурет



L
-20
-40
12-16 дБ
0
1
ω_1
-20
$\omega_к$
ω_2
12-16 дБ
ΔA
3
φ
0
1
$\frac{\pi}{2}$
$-\pi$
$\Delta\varphi$
3

5.17-сурет

тыдан айырылады делінсін. Іздеділінді $k_m\Pi(p)$ түрлендіру функциясымен тізбектей коррекциялаушы құрылғы ендірейік (5.18-сурет).

Жоғарыда жазылған әдіс бойынша ықыласты логарифмдік амплитудалық жиілік сипаттаманы құрайық (5.17-сурет). Жүйенің $k_ы$ ықыласты күшейту коэффициеті k_o бар коэффициенттен айырылады дейік. Онда жүйеде ықыласты коэффициенті болып шығу үшін $W_o(j\omega)$ сипаттаманы (5.18-сурет) жоғары көтеру керек. Жаңа сипаттаманы табамыз

$$W'_o(j\omega) = k_ы/k_oW_o(j\omega).$$

Вертикаль бойынша логарифмдік масштабта W'_o пен W_o арасындағы қашықтық іздделінеді $20\lg k_m$ шаманы береді, яғни коррекциялаушы құрылғының іздделінді күшейту коэффициентінің шамасын

$$k_m = k_ы/k_o.$$

Енді коррекциялаушы құрылғының $\Pi(p)$ түрлендіру функциясын табу қажет. Ол үшін бір графикке $W_ы$ жене W'_o үшін құрылған логарифмдік амплитудалық жиілік сипаттамаларын сыйыстырайық. Олар $1/T_1$ нүктеден $1/T_4$ нүктеге дейін аралықта айырылады (5.20-сурет).

Тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясы мынаған тең болуын талап етілгендіктен

$$W(p) = k_m\Pi(p)W_o(p) = W_ы(p),$$

($p=j\omega$ алмастырылғаннан кейін) былай жазуға болады:

$$\Pi(j\omega) = \frac{W_ы(j\omega)}{k_mW_o(j\omega)}$$

немесе

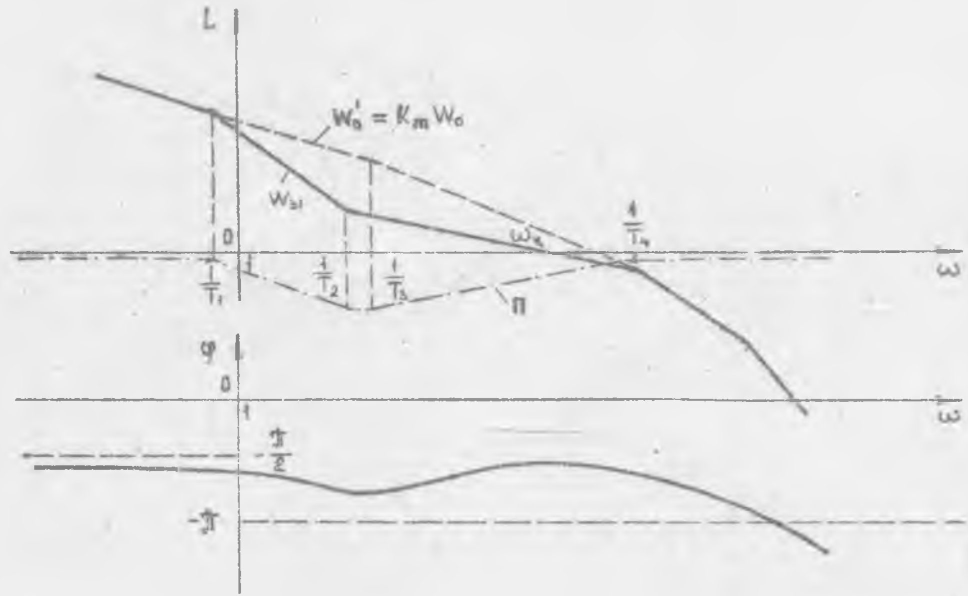
$$\Pi(j\omega) = \frac{W_ы(j\omega)}{W_o'(j\omega)} \qquad (5.21)$$

бұдан

$$20\lg|\Pi(j\omega)| = 20\lg|W_ы(j\omega)| - 20\lg|W_o'(j\omega)|.$$

Демек, $\Pi(p)$ коррекциялаушы құрылғының $L(\omega)$ сипаттамасын табу үшін, $W_ы$ үшін құрылған $L(\omega)$ сипаттамасынан сәйкесті W_o' сипаттамасын алу керек. Алудың нәтижесі 5.20-суретте штрих пунктирлі сызықпен көрсетілінген. Бұдан тізбектей коррекциялаушы құрылғының түрлендіру функциясы мынадай екені көрінеді:

$$\Pi(p) = \frac{(T_2p+1)(T_3p+1)}{(T_1p+1)(T_4p+1)}$$

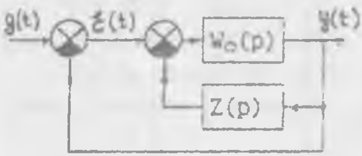

L
$W_0' = K_m W_0$
$W_{э1}$
0
$\omega_к$
$\frac{1}{T_1}$
$\frac{1}{T_2}$
$\frac{1}{T_3}$
$\frac{1}{T_4}$
П
ω
φ
0
1
$\frac{\pi}{2}$
$-\pi$
ω

5.20-сурет

Қорытындысында $\varphi(\omega)$ фазалық сипаттамасын $W_Ж$ үшін құру және орнықтылықтың қорын бағалау керек (5.20-сурет).

Табылған түрлендіру функциясы бойынша коррекциялаушы құрылғының электр схемасын құрастыруға болады (мысалы [34] қараңыз).

ПАРАЛЛЕЛЬДІ КОРРЕКЦИЯЛАУШЫ ҚҰРЫЛҒЫНЫҢ СИНТЕЗІ. Тұйықталмаған тізбектің $W_O(p)$ түрлендіру функциясы берілсін дейік. Коррекциялау $Z(p)$ кері байланысты ендіру қажет (5.21-сурет), ал оны ендіргенде жүйенің сипаттамасы ықыласты жиілік сипаттамадай болу тиісті. Коррекциялау мен тұйықталмаған тізбектің түрлендіру функциясы болсын дейік



$$W_Ж(p) = \frac{W_O(p)}{1 + Z(p)W_O(p)} \qquad (5.22)$$

5.21-сурет

Демек

$$20\lg|W_Ж(j\omega)| = 20\lg|W_O(j\omega)| - 20\lg|1 + Z(j\omega)W_O(j\omega)|.$$

Логарифм таңбасының астындағы қосындыны жою үшін жуықтап жазайық

$$20\lg|W_Ж(j\omega)| \approx \begin{cases} 20\lg|W_O(j\omega)| & \text{егер } |Z(j\omega)W_O(j\omega)|<1 \\ 20\lg|1/Z(j\omega)| & \text{егер } |Z(j\omega)W_O(j\omega)|>1 \end{cases} \qquad (5.23)$$

Ықыласты күшейту коэффициентімен W_O берілген және $W_Ж$ ықыласты логарифмдік сипаттамаларды құрайық (5.22-сурет).

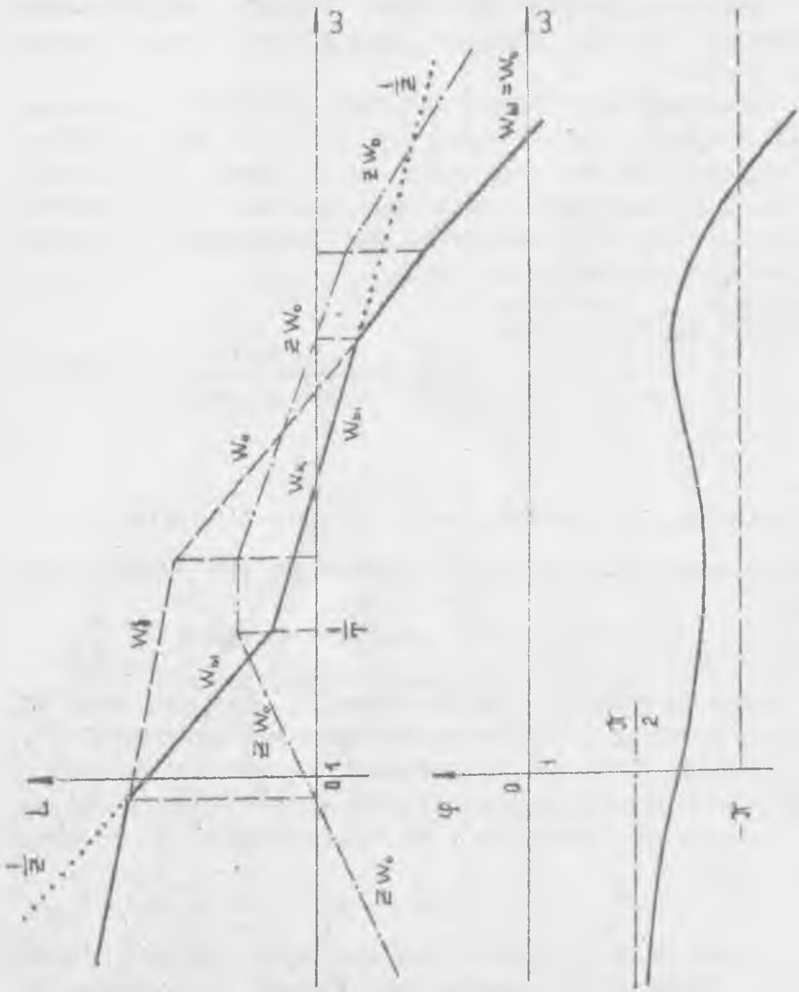
Ізделінді $1/Z$ сипаттама ретінде 5.22-суреттегі орта бөлігінде $W_Ж$ сипаттамамен беттесетін нүктелі пунктермен белгіленген сипаттаманы қабылдайық. W_O сипаттамадан $1/Z$ сипаттаманы алып табамыз

$$20\lg|W_O(j\omega)| - 20\lg|1/Z(j\omega)| = 20\lg|Z(j\omega)W_O(j\omega)|.$$

Бұл нәтиже 5.22-суретте штрих пунктирлі сызықпен көрсетілген. Графиктен ОД аралықта $|ZW_O|>1$ екені, ал С нүктеге дейін және Д нүктедек кейін $|ZW_O|<1$ екені көрінеді, себебі абсциоса осі амплитуданың мәні тең 1 ($20\lg A=0$) сәйкеседі.

Демек $1/Z$ ізделінді сипаттаманың кескіні қабылданған түрдей болса, онда жоғарыдағы (5.23) жуық теңдеулер қанағаттанады.

28-207



5.22-сурет

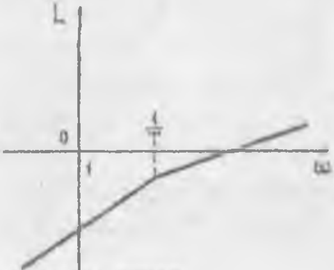
Сонымен, жүйе үшін ықыласты жалпы ұқсас жиілік сипаттаманы құратын кері байланыс түрінде параллельді коррекциялаушы құрылғы табылады.

5.22-сурет бойынша коррекциялаушы құрылғының логарифмдік амплитудалық сипаттамасы 5.23-суреттегідей болады, ал оған іздемінді коррекциялаушы кері байланыстың мынадай түрлендіру функция сәйкеседі

$$Z(p) = \frac{kp^2}{Tp + 1}.$$

Бұл қос (екі еселі) дифференциалдаумен инерционды иілгіш кері байланыс болып келеді.

Қорытындысында, мұнда жуықтау теңдіктерді қолданғандықтан іздеп табылған шынындағы сипаттаманы



5.23-сурет

$$W(j\omega) = \frac{W_o(j\omega)}{1 + Z(j\omega)W_o(j\omega)}$$

дәлелдеу және оның ықыластыға жуықтығын бағалау қажет, ал кейін $\varphi(\omega)$ фазалық сипаттаманы бейнелеп (5.22-сурет) шынымен болатын өтпелі процестің сапасы мен орнықтылықтың қорын бағалау керек.

Мұндай коррекциялаушы құрылғы ендіру жүйенің "минималды-фазалығын" бұзбауы қажет болуынан, жүйенің ішкі контурының орнықтылығын тексеру керек. Ішкі контурдың түрлендіру функциясына

$$W_K(p) = Z(p)W_o(p)$$

сәйкесті логарифмдік амплитудалық сипаттамасы 5.22-суретке енеді. Тек қана $\varphi_K(\omega)$ фазалық жиілік сипаттамасын құрып және орнықтылықтың жиілік критерийін бұзбайтын екенін тексеру керек.

Бірлестіріп ендіретін коррекциялаушы құрылғыларды (тізбектей және парраллельді) синтездеуге ыңғайланған бұл әдістің дамуы бар. Синтездің жиілік әдісінің бұдан басқа варианттарыда зерттелініп дайындалған.

5.5 ТҮБІРЛІК ГОДОГРАФЫНЫҢ ӘДІСІ

Реттеу процесінің сапасы туралы сипаттамалық теңдеудің түбірлерінің (яғни тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясының полюстерінің) жайғасуы бойынша жоруға болады, сонымен бірге дифференциалдық теңдеудің оң жағындағы операторды көп мүшені (яғни тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясының нольдерін) есепке алу қажет.

Жүйенің кейбір параметрі (мысалы, жүйенің тұйықталмаған тізбегінің жалпы k күшейту коэффициенті) өзгергендегі, тұйықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуінің барлық түбірлерінің жылжуының траекторияларының жиынтығы, түбірлік годографы делінеді.

Тұйықталмаған автоматты басқару жүйесінің түрлендіру функциясы берілсін дейік. Оны былай жазайық

$$kW(p) = kR(p)/Q(p) \qquad (5.24)$$

мұнда k - тұйықталмаған тізбектің жалпы күшейту коэффициенті, ал R(p) мен Q(p) кіші мүшелері бірлік коэффициенті көп мүшелер.

Реттелінетін шама үшін тағайындалған әсер бойынша тұйықталған жүйенің негізгі түрлендіру функциясы, бізге мәлім, жазылады

$$\Phi(p) = \frac{kW(p)}{1 + kW(p)} = \frac{kR(p)}{Q(p) + kR(p)} .$$

Сәйкесті тұйықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуі мына түрде

$$D(p) = Q(p) + kR(p) = 0.$$

Оны басқаша жазуға болады:

$$1 + kW(p) = 0$$

немесе

$$kW(p) = -1 \qquad (5.26)$$

Тұйықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуді жазуының осы түрі бұдан былай қарай қолданылады. (5.26) өрнек түбірлік годографы әдісінің негізгі теңдеуі болып келеді.

Тұйықталған жүйенің сипаттамалық теңдеуінің түбірлерін белгілейік:

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,$$

тұйықталмаған тізбектің түрлендіру функциясының полюстерін (R(p) түбірлерін):

$$\Pi_1,\ \Pi_2,\ \ldots\ ,\ \Pi_n,$$

тұйықталмаған тізбектің түрлендіру функциясының нольдерін (Q(p) түбірлерін):

$$N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_m,\quad (m<n).$$

p_i мен N_q шамалар k-дан тәуелсіз екені айқын.

Тұйықталмаған тізбектің kW(p) түрлендіру функциясының нольдері мен полюстерінің жайғасуын біле отырып, сипаттамалық теңдеудің $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ түбірлерін k параметрдің функциялары түрінде табу мәселесі негізгі мәселе болып келеді. Графикалық түрде бұл берілген жүйенің түбірлік годографы болады.

Сипаттамалық теңдеудің түбірлері тұйықталған жүйенің түрлендіру функциясының полюстері болып келеді. Егер осы түрлендіру функцияның нольдерін қарастырсақ, онда (5.25) бойынша тұйықталған жүйенің нольдері, тұйықталмаған тізбектің берілген нольдерімен бірдей болады (5.24).

Түбірлік годографының әдісінің негізгі теңдеуін түрлендірейік. (5.25) теңдеу екіге бөлінеді: модульдер теңдеуіне

$$|kW(p)| = 1 \qquad (5.27)$$

және фазалардың теңдеуіне

$$\arg kW(p) = \pm (2\nu - 1)\pi \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots) \qquad (5.28)$$

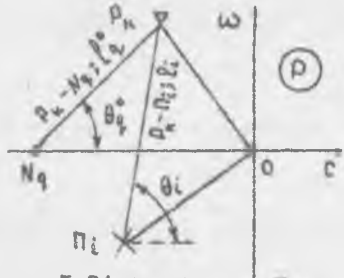
Жазуға болады

$$kW(p) = kC\,\frac{(p-N_1)(p-N_2)\cdots(p-N_m)}{(p-\Pi_1)(p-\Pi_2)\cdots(p-\Pi_n)} \qquad (5.29)$$

мұнда C - R(p) мен Q(p) көпмүшелердің бас мүшелерінің коэффициенттерінің қатынасы.

p-нің орнына сипаттамалық теңдеудің бір p_k ізделінді түбірді қояйық. C+jω жазықтықта бұл түбір p_k вектормен бейнеленеді. Және де kW(p) функцияның Π_i ($i=1\div n$) және N_q ($q=1\div m$) полюстерімен нольдерінің векторларын құрайық. Π_i полюстерді крестпен белгілейік, N_q нольдерді дөңгелекшемен, ал p_k түбірлерді үшбұрышшамен. 5.24-суретте p_k-N_q және $p_k - \Pi_i$ шамалардың

29-207



5.24-сурет

векторларыда көрсетілген. Олардың аргументтерін сәйкесті θ^o_q және θ_i, ал модульдерін ℓ^o_q және ℓ_i арқылы белгілейік.

Онда (5.28) фазалардың теңдеуін (5.29) өрнекті еске алып былай жазуға болады

$$\sum_{q=1}^{m}\theta^o_q - \sum_{i=1}^{n}\theta_i = \pm(2\nu - 1)\pi, \qquad (5.30)$$

ал (5.27) модульдер теңдеуін (5.29) есебімен былай:

$$k = \frac{1}{C}\;\frac{\ell_1\ell_2\cdots\ell_n}{\ell^o_1\ell^o_2\cdots\ell^o_m}. \qquad (5.31)$$

(5.30) фазалардың теңдеуі k-дан тәуелсіз. Сондықтан мәселенің шешу жолы мынадай болуы мүмкін. Алдыменен p жазықтықта (5.30) фазалардың теңдеуін қанағаттандыратын, барлық $П_i$ мен N_q берілгендегі, p_k орнын таңдап алу қажет. Одан кейін (5.31) модульдердің теңдеуі бойынша бұл k параметрдің қандай шамасына сәйкесетінін есептеу керек. Бұл жолмен біртіндеп барлық түбірлік годографын құруға болады.

Мысалдарды қарастырайық.

1 МЫСАЛ. Берілсін;

$$kW(p) = \frac{k(\tau p+1)}{p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}$$

(5.29) бойынша жазуға болады:

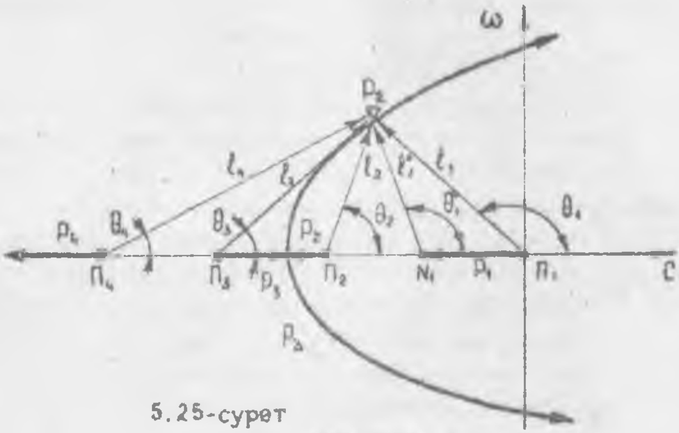
$$kW(p) = kC\,\frac{(p-N_1)}{(p-П_1)(p-П_2)(p-П_3)(p-П_4)},$$

мұндағы

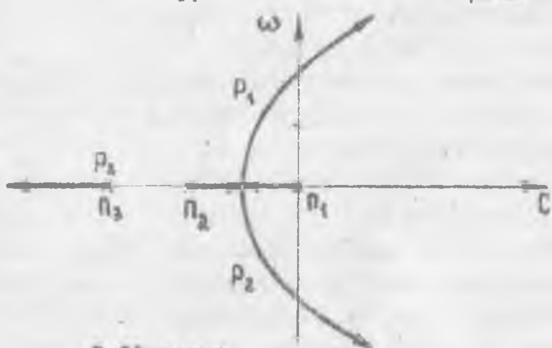
$$C = \frac{\tau}{T_1T_2T_3},\ N_1=1/\tau,\ П_1=0,\ П_2=-(1/T_1),\ П_3=-(1/T_2),\ П_4=-(1/T_3).$$

Бұл нольдер мен полюстерді p жазықтықта бейнелейік (5.25-сурет).

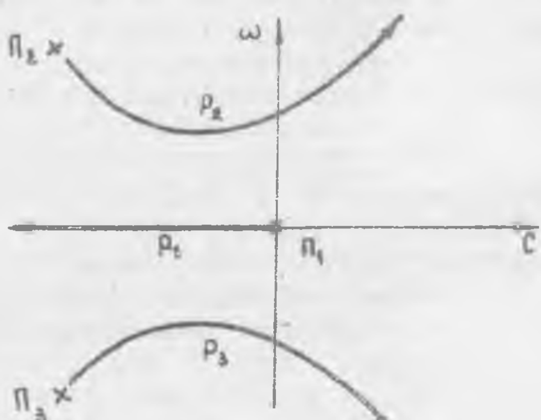
k=0 болғанда (5.25) және (5.24) бойынша барлық p_k түбір-



5.25-сурет



5.26-сурет



5.27-сурет

лер Π_1 полюстермен беттесетінін ескертейік. Енді фазалардың теңдеуі

$$\theta^{0}_{1} - (\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4) = \pm(2\nu - 1)\pi.$$

p_1 түбір үшін (егер ол осьте Π_1 мен N_1 нүктелердің аралығында орналасса) қанағаттанатынын оңай тексеруге болады ; p_4 түбір үшін - егер Π_4 нүктеден солдау жатса. k өскен сайын бұл түбірлер 5.25-суретте нұсқамамен көрсетілгендей жылжыйды.

p_2 мен p_3 түбірлер үшін фазалардың теңдеуі қанағаттанады, егер олар екеуі де осьте Π_2 мен Π_3 нүктелердің аралығында болса. k өскен сайын олар бір-біріне қарсы жылжыйды. Кейбір k мәнінде олар қосылады, ал одан кейін k өсуімен олар кешендік (түйіндес) болады және кейбір қисықтармен жылжыйды, ал сол қисықтардың әр нүктесі фазалардың теңдеуі қанағатты болу шартынан анықталады. Түбірлер түйіндес болған себебінен бұл қисықтар симметриялы болады (5.25-сурет).

Түбірлердің нақты жағдайларына сәйкесетін k параметрдің шамасы модульдердің теңдеуі бойынша табылады

$$k = \frac{T_1T_2T_3}{\tau}\,\frac{l_1l_2l_3l_4}{l^{0}_{1}}\,.$$

Демек, түбірлердің траекториясы тек қана фазалардың теңдеуі бойынша құрылады, ал модульдер теңдеуі одан кейін сәйкесті k мәндерін анықтауға қолданылады.

Көрсетілген түрде құру процесі әжептеуір қолайсыз болып келеді. Бірақ ол біраз жеңілденеді, егер түбірлік годографтың жалпы қасиеттерін қолданса, мысалы [24] берілген.

2 МЫСАЛ. Осындай ұқсас талқылауға негізденіп жүйенің тұйықталмаған тізбегінің түрлендіру функциясы бойынша

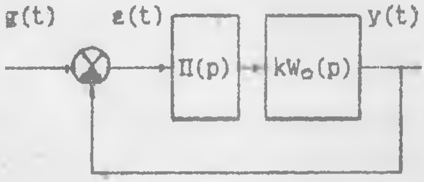
$$kW(p) = \frac{k}{p(T^2p^2+2\xi Tp+1)}$$

$\xi>1$ болғанда 5.26-суретте, ал $\xi<1$ болғанда 5.27-суретте көрсетілгендей, түбірлік годографты құруға болады.

Түбірлік годограф әдісінің көмегімен коррекциялаушы құрылғыларының синтездеуінің элементтерін мысалдарда көрсетейік.

Схемасы 5.28-суретте келтірілген жүйенің түрлендіру функциясы былай берілсін дейік

$$kW_o(p) = \frac{k}{p(T_1p+1)(T_2p+1)} \tag{5.32}$$



5.28-сурет

Тізбектей коррекциялаушы құрылғының

$$П(p) = \frac{\tau p+1}{\beta\tau p+1} \tag{5.33}$$

күшейту коэффициенті мен параметрлерін таңдау қажет дейік.

Екі вариантты қарастырайық: а) $\beta=0,1$ - құрылғы дифференциалдаушыға жуық; б) $\beta=10$ - құрылғы интегралдаушыға жуық.

Алдымен коррекциялаусыз жүйенің түбірлік годографын бейнелейік. (5.32) түрлендіру функциясының полюстері болады:

$$П_1=0,\ П_2=-1/T_1,\ П_3=-1/T_2.$$

Түбірлік годограф 5.29-суретте көрсетілген.

Коррекциялаушы құрылғы (5.33) болған жағдайда табамыз

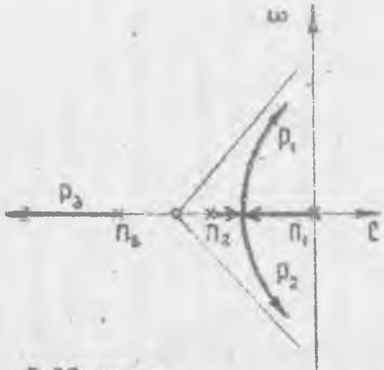
$$kW(p) = \frac{k(Tp+1)}{p(T_1p+1)(T_2p+1)(\beta\tau p+1)}$$

онда тағыда бір полюс қосылады және бір ноль пайда болады:

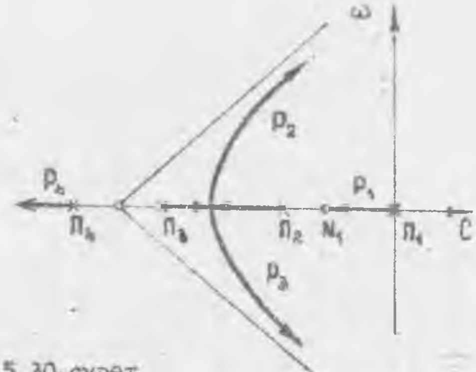
$$П_4 = -1/(\beta\tau),\quad N_1=-1/\tau.$$

Бірінші жағдайда $\beta=0,1$ N_1 ноль басым болатын түбірлерге қарай жақын жайғасатын қылып, τ таңдайық (5.30-сурет). $П_4$ полюс солға қарай он еселік қашықтықта жайғасады, яғни қажетсіз болады. Жаңадан түбірлік годографты табамыз (5.30-сурет). Бұл суреттен "қауіпті" кешенді түбірлердің едеуір жорымал осінен солға қарай жылжығаны көрінеді, ал p_1 жаңа нақты түбірдің ықпалы жақын жатқан N_1 нольдің бар болуымен азаяды.

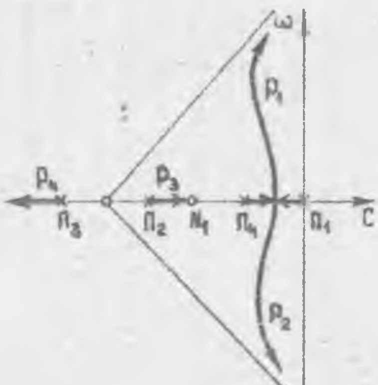
Екінші жағдайда ($\beta=10$) жаңа p_4 полюс (5.34) бойынша координат бас нүктесіне он есе жақын болады, N_1 нольге қарағанда. Демек, p_4 нольге жақын, ал жүйе екі ретті астатизмді жүйеге жақын болып келеді, сондықтан оның дәлдігі жоғарылайды. Түбір-



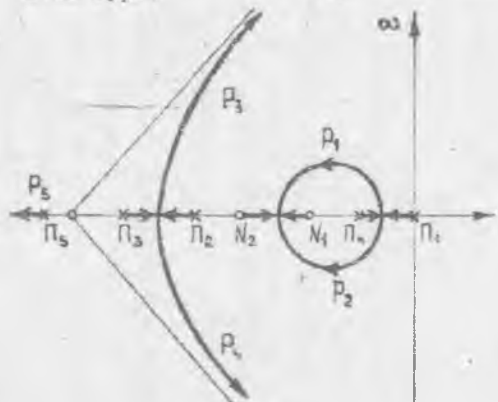
5.29-сурет



5.30-сурет



5.31-сурет



5.32-сурет

лік годограф 5.31-суретте көрсетілген түрдей болады.

Енді интегро-дифференциалдаушы құрылғының мынадай түрлендіру функциясымен

$$\Pi(p) = \frac{(\tau_1 p+1)(\tau_2 p+1)}{(\beta_1\tau_1 p+1)(\beta_2\tau_2 p+1)}$$

және $\beta_1=10$, $\beta_2=0,1$ мәндерімен, қосуын қарастырайық. Бұл жағдайда екі қосымша полюстер және бір ноль пайда болады: $\Pi_4=-1/(\beta_1\tau_1)$, $\Pi_5=-1/(\beta_2\tau_2)$, $N_1=-1/\tau_1$, $N_2=-1/\tau_2$.

Олардың біріншісі өте кішкентай (нольдік дерлік), ал екіншісі солға қарай алыс жайғасқан (5.32-сурет). p_1 мен p_2 түбірлердің бұрынғы жайғасуы қанағаттанарлықсыз болатын (5.31-сурет), енді координат бас нүктесінен шығып N_1 мен N_2 нольдерге келіп құйылады. Бұл p_1 мен p_2 түбірлер басқа түбірлерге қарай жорымал осіне жақын. Бірақ біріншіден олар енді орнықсыздықты тудыру мүмкін емес және екіншіден олардың ықпалы жақын жатқан нольдермен жойылады (нейтрализацияланады).

k өскен сайын оңға қарай ұмтылатын p_3 пен p_4 түбірлер жорымал осінен едәуір алыс жайғасады.

[23] кітапта коррекциялаудың басқа мысалдары келтірілген (бірлік емес кері байланыспен және сыртқы әсер бойынша реттеу ендірумен).

ӘДЕБИЕТ ТІЗІМІ

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.
2. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость.-М.: Наука, 1979.
3. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем.-М.:Энергия, 1980.
4. Деруссо П.,Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. М.: Наука, 1970.
5. Dorf R. Time Domain Analysis and Design of Control Systems. Addison-Wesley,1965.
6. Elgerd O. Control Systeme Theory, Mc Graw - Hill,N.Y., 1967.
7. Zadeh l., Desoer Ch. Linear System Theory, The State Space Apprach , Mc Graw - Hill,N.Y., 1963.
8. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем.-М.: Машиностроение, 1978.
9. Кадырбеков С.О. Исследование свойств и оптимизация технологического режима процесса спекания красного шлама во вращающейся печи методом математического моделирования. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук.- Алма-Ата, 1973.
10. Кадырбеков С.О. Исследование свойств и оптимизация технологического режима процесса спекания красного шлама во вращающейся печи методом математического моделирования. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук.-Алма-Ата,1973.
11. Кадырбеков С.О. и др. К оценке структуры математической модели процесса спекания красного шлама во вращающихся печах. МВ и ССО КазССР. Металлургия и обогащение,вып.YI.-Алма-Ата, 1970.
12. Кадырбеков С.О. и др. К оценке структуры математической модели зоны сушки и прогрева технологического процесса спекания красного шлама во вращающихся печах. МВ и ССО

КазССР. Труды КазПТИ им. В.И.Ленина, т. 33:-Алма-Ата, 1971.
13. Кадырбеков С.О. и др. К идентификации процесса спекания красного шлама во вращающихся печах. МВ и ССС КазССР. Труды КазПТИ им. В.И.Ленина, т. 33: - Алма-Ата, 1971.
14. Кадырбеков С.О. и др. К оценке структуры математической модели процесса сушки фосфоритового концентрата во вращающихся барабанах. МВ и ССС КазССР. Сб.Металлургия и обогащение, вып. YII:- Алма-Ата, 1973.
15. Кадырбеков С.О. и др. Построение математической модели процесса возгонки вельцокиси во вращающейся печи. МВ и ССС КазССР. Сб.Металлургия и обогащение, вып. IX: - Алма-Ата, 1974.
16. Кричевский Г.Я., Артемьев А.А., Кесисоглу В.И. Техника наладки промышленных систем автоматического регулирования в металлургии.-М.: Металлургия, 1971.
17. Круг Е.К., Александриди Т.М., Дилигенский С.Н. Цифровые регуляторы.- М., Л.: Энергия, 1966.
18. Курош А.Г Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1975.
19. Макаров И.М., Менский Б.М. Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных преобразований. - М.: Высшая школа, 1978.
20. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы.-М.: Машиностроение, 1977.
21. Математические основы теории автоматического регулирования. т. 1,2/ Под ред. Чемоданова Б.К. - М.: Высшая школа, 1977.
22. Попов Е.П. Динамика систем автоматического регулирования.ГИТТЛ, 1954.
23. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления.-М.: Наука, 1989.
24. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления.-М.: Наука, 1978.
25. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления.-М.: Наука, 1981.
26. Справочник по теории автоматического управления. /Под

ред. Красовского А.А.-М.: Наука, 1987.
27. Теория автоматического регулирования. ч.I. Теория линейных систем автоматического регулирования. / Под ред. Воронова А.А. - М.: Высшая школа, 1977.
28. Техническая кибернетика. Серия инженерных монографий. Теория автоматического регулирования. Книги I-III. / Под ред. Солодовникова В.В.-М.: Машиностроение, 1967.
29. Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования.-М.: Машиностроение, 1989.
30. Ту Ю. Современная теория управления. - М.: Машиностроение, 1971.
31. Фритч В. Применение микропроцессоров в системах управления. - М.:Мир, 1984.
32. Чаки Ф. Современная теория управления. Нелинейные оптимальные и адаптивные системы.-М.: Мир, 1975.
33. Шаталов А.С., Барковский В.В. и др. Методы синтеза систем управления на ЦВМ.- М.: Машиностроение, 1977.

МАЗМҰНЫ

С.Қадырбеков

Сызықты автоматты реттеу және басқару жүйелерінің теориясы /оқулық/

Шығаруға жауапты Ү.Өмірзақова

Көркемдеуші редактор Ж.Қасымханов

Техникалық редактор Н.Передереева

Басуға 20.03.96 ж. қол қойылды
Шартты баспа табағы 14,6
Есепті баспа табағы 13,5
Пішімі 60 х 84 1/16
Таралымы 500 дана
Сұраныс № 207

Қазақстан Республикасы Білім министрлігі Оқу және әдістемелік әдебиеттер жөніндегі республикалық баспа кабинеті
480057, Алматы, Жароков көшесі, 215 үй

Типография Верховного Совета Республики Казахстан
480016, г.Алматы, ул.Д.Кунаева, 15/1