

КАЗАХСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТІРЛІГІ
Қ.И. СӘТБАЕВ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Машина жасау институты

Сызба геометрия және графика кафедрасы



Қонысбай С.

ОҚУ-ӘДІСТЕМЕЛІК КЕШЕН

**СЫЗБА ГЕОМЕТРИЯ ЖӘНЕ КОМПЬЮТЕРЛІК
ГРАФИКА**

(050702-Автоматика және басқару, 050718-Электроэнергетика
мамандықтары үшін)

Алматы – 2010

Құрастырушы: Қонысбай Сәлімжанұлы т.ғ.к., профессор.
Сызба геометрия және компьютерлік графика. Оқу- әдістемелік кешен.
(050702-Автоматика және басқару, 050718-Электрэнергетика мамандықтары
үшін). –Алматы: Қ.И. Сәтбаев ат. Қаз ҰТУ. 2010. 1- 123бет.

Аңдатпа

Инженерлік және компьютерлік графика бойынша студентке пәннің оқу-әдістемелік кешені ҚР МЖБС-ның мазмұнына сәйкес жасалынды. Кәсіби біліктілік мінездемесі мамандықтың типтік және оқу жұмыс жоспарлары мен дайындық бағытын және осы пәннің негізгі мазмұнын көрсетеді.

Барлық жол (8 кесте, 109 сурет).

Пікірші, Қазақ бас сәулет-құрылыс академиясы тех.ғыл. канд. ассоциалы
профессор К. Г. Жомартова

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі 2010ж. бекіткен
типтік оқу бағдарламасы бойынша басылған.

1. Пәннің оқу бағдарламасы – SYLLABUS

1.1 Оқытушылар туралы мәліметтер:

Сабақ жүргізетін оқытушы Сәлімжанұлы Қонысбай т.ғ.к, профессор.
Байланыс.Тел. 257-71-71. Ішкі тел. 72-49.
Кафедрада болатын уақыты. Кесте бойынша.

1.2 Пән туралы мәліметтер:

Пән атауы: Сызба геометрия және компьютерлік графика.

Кредит саны 4.

Өткізу орны. Сызба геометрия және графика кафедрасы, БОҒ 715 ауд.

Оқу жоспарының көшірмесі

1-кесте

Курс	Семестр	Кредиттер	1 аптадағы академиялық сағаттар					Бақылау түрі
			Дәрістер	Зертханалық сабақтар	СӨЖ	СОӨЖ	Барлығы	
1	1	4	1	3	4	4	12	Емтихан

1.3 Пререквизиттер:

Пәнді игеру үшін келесі пәндерді білу қажет:

- математика;
- геометрия және стереометрия;
- тригонометрия;
- сызу;
- ақпараттау және бағдарламалау элементтері.

1.4 Постреквизиттер:

Инженерлік және компьютерлік графика пәнінен алған білім төмендегі техникалық және әдейі мамандық пәндерін меңгеруге өте қажет:

- материалдар кедергісі;
- машина және механизмдердің теориясы;
- электротехника және өндірістік электроника;
- өндіріс қондырғылардың электржетегі;
- автоматтау жүйесін және электрқондырғыларды жобалау, жөндеу және құрастыру;
- технологиялық процестерді автоматтандыру.

1.5 Пәнді оқыту мақсаты:

- кеңістік ойлау мен елестету, қисынды қабілеттілікті дамыту;
- инженерлік сызбалардың теориялық негіздерін оқу, осыған байланысты пәннің міндеті;
- геометриялық мүсіндердің кескіндерін жазықтықтарда тұрғызу тәсілдерін оқу;
- жазықтықтардағы кескіндер арқылы геометриялық мүсіндердің қасиеттерін оқу.

Пәнді бітіргенде студент төмендегіні білу қажет:

- кесінді тұрғызудың теориялық негізі (комплекті және аксонометриялық кескіндер);
- сызбалардың орындалу ережелері және тексті құжаттарды құрастыру;
- сұлбада, баспа платада қолданылатын элементтердің графикалық келісімді кескіндерін көрсету;
- комплекті сызбада әртүрлі орналасу жән өлшеу есептерін шешу;
- әртүрлі геометриялық тұрғызуларды сызба құралдардың көмегімен және ешбір құралсыз салу;
- кәсіби инженерлік жұмыста кездесетін бірнеше шешімі бар проблеманы шеше білу;
- әртүрлі салада мамандық бойынша қолданылатын құрастыру, жалпы көрініс, габаритті, сұлба және тағы басқа сызбаларды оқу және орындау.

1.6 Тапсырмалардың түрі және оларды орындау мерзімі

2 – кесте

Бақылау түрі	Жұмыс түрі	Жұмыстың тақырыбы	Ұсынылатын әдебиетке сілтеме	Тапсыру мерзімі
1	2	3	4	5
Ағымдық бақылау	ГЖ-1	Мұқаба даярлау	(6 нег. [12-40]); (10 нег. [3-5, 12-40])	3
	ГЖ-2	Геометриялық тұрғызулар	(8 нег. [3-103]); (7 нег. [48-83]); (18 қос. [8-13])	6
	ГЖ-3	Фигураның екі көрінісі арқылы: 1) үшінші көрінісін, 2) оның аксонометриясын, 3) нобайын, 4) қажет тілігін, 5) сызбасын орындау.	(1 нег. [3-23]); (2 нег. [3-51]); (3 нег. [3-46]); (4 нег. [3-53]); (8 нег. [40-46]); (19 қос. [10-26])	8
	ГЖ-4	Жалғастық тәріздес тетіктің нобайын және қажетті тіліктерін орындау.	(9 нег. [282-292]) (19 қос. [26-30])	9
	ГЖ-5	Баспа платаның құрастыру сызбасы және оның сипаттізімі.	(16 қос.)	11
	ГЖ-6	Көпжақпен жазықтықтың қиылысуы. Есептің шешімі қолмен орындалады.	(1 нег. [46-51]); (2 нег. [125-136]); (3 нег. [93-103]); (4 нег. [120-129]).	14

Аралық бақылау	Бақылау жұмысы	Орналасу және өлшеу есептрін шығару	(1 нег. [23-35]); (2 нег. [57-115]); (3 нег. [46-82]); (4 нег. [53-109]).	9
	Бақылау жұмысы	Беттер. Беттерге орналасу есептері	(1 нег. [42-61]); (2 нег. [150-196]); (3 нег. [111-150]); (4 нег. [138-176]).	15
Қорытынды бақылау	Емтихан			

1.7 Әдебиеттер тізімі

Негізгі

1. С. Қонысбай. Основы начертательной геометрии А., 2000
2. С.Қонысбай. Начертательная геометрия. А., 2001.
3. С.Қонысбай. Сызба геометрияның негіздері. А., 2002 .
4. С.Қонысбай. Сызба геометрия. А., 2007.
5. Қ.Қонақбаев. Сызба геометрия. А., 1971.
6. Чекмарев А.А. Инженерная графика. М., 2000.
7. Посвянский А.Д. Краткий курс начертательной геометрии. М., 1970.
8. Локтев В.С. Краткий курс начертательной геометрии. М., 1987.
9. Левицкий В.С. Курс машиностроительного черчения. М., 1987.
10. Государственные стандарты “Единой системы конструкторской документации”. М., 1980.
11. Александров К.К., Кузьмин Е.Г. Электротехнические чертежи и схемы. М., 1990.
12. Полещук Н. Самоучитель AUTOCAD 2002. Санкт-Петербург, СПб.: БХВ, 2002.

Қосымша

13. Есмұханов Ж. Сызба геометрия 1-бөлім. Есептер минимумы. А., 1984.
14. Годик Е.Н., Хаскин А. М. Справочное руководство по черчению. М., 1974.
15. Матвеев А.А., Борисов Д.М. Черчение. М., 1980.
16. Федоренко В.А., Шошин А.И. Справочник по машиностроительному черчению. Л., 1981.
17. Власов М.П. Инженерная графика. М., 1979.
18. Ибраев А.М., Кусаинов А.Н., Ахметова М.Қ., Қалиев Б.З. Электрлік принципті сұлбаларды, баспа платалардың құрастыру сызбаларын орындау мен оқу. Әдіс нұсқаулар. А., 1998.
19. Есмұханов Ж.М., Салимжанов К.С. Методическое руководство к решению задач по начертательной геометрии. А., 1985.
20. С. Қонысбай, Калиниченко А.А. Начертательная геометрия и черчение. Методические указания к выполнению самостоятельных работ для студентов. А., 1994.

21.С. Қонысбай, С. Нұрлан Начертательная геометрия и инженерная графика. Методические указания и контрольные задания. А.,2004.

22.Чуприн А.И. AutoCAD 2002. Трехмерное проектирование. Лекции и упражнения. С.- П., 2002.

1.8 Білімді бақылау және бағалау

Қ.И.Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ-дың студенттердің білімін тексеруде рейтингтік бақылау қолданылады. Барлық – рейтингтік жүйеде іске асырылатын білімді бағалау туралы мәліметтер бақылаудың барлық түрі көрсетілетін шкала түрінде беріледі.

Оқу жұмыс жоспарға сәйкес инженерлік және компьютерлік графика пәні 100 балдық шкаламен бағаланады.

Рейтинг балдың бақылау түріне бөлінуі

3-кесте

Қорытынды бақылау түрі	Бақылау түрлері	%
Емтихан	Ағымдық бақылау	100
	Аралық бақылау	100
	Қорытынды бақылау	100

Оқу процесінің күнтізбелік кестесі

4-кесте

Апта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Бақылау түрлері	3	3	ГЖ №1	3	3	ГЖ №2	3	ГЖ №3	АБ №1	ГЖ №4	ГЖ №5	3	3	ГЖ №6	АБ №2
Апталық бақылау саны	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Бақылау түрлері: ГЖ – графикалық жұмыс; АБ – аралық бақылау, 3-зертханалық сабақтар															

Студент аралық және ағымдық бақылаудан толық өтіп жалпы ≥ 30 рейтинг бал жинаса қорытынды бақылауға жіберіледі. Қорытынды бақылаудан ≥ 20 балл жинаған студент бақылауды (емтиханды) тапсырды деп есептеледі.

Пәннің қорытынды бағасы 5 – кестеде көрсетілген шкала бойынша анықталады

Студенттердің білімін бағалау

5-кесте

Баға	Әріптік эквивалент	Рейтинг балдары (% -бен)	Балмен
Үздік	A	95-100	4
	A-	90-94	3,67
Жақсы	B+	85-89	3,33
	B	80-84	3,0
	B-	75-79	2,67
Қанағатты	C+	70-74	2,33
	C	65-69	2,0
	C-	60-64	1,67

	D+	55-59	1,33
	D	50-54	1,0
Қанағатсыз	F	0-49	0

Аттестация өткізуде қойылатын сұрақтар.

1-модуль сұрақтары:

1. Негізгі проекциялау әдісін атаңыз?
2. Қандай сызбаларды қайтымды деп атайды?
3. Стандартты аксонометрия проекцияларын атаңыз?
4. Қандай есептерді орналасу есептері дейді?
5. Нүктенің, түзудің және жазықтықтың тиістілік белгісін айтыңыз?
6. Сызбада түзулердің, түзу мен жазықтықтың және жазықтықтардың перпендикулярлығы қалай анықталады?
7. Сызбаны түрлендіру дегеніміз не?
8. Түрлендіру арқылы қандай есептер шығарылады?

2- модуль сұрақтары:

1. Көпжақпен жалпы жазықтықтың қиылысуын қандай тәсілдермен тұрғызылады?
2. Қисық беттер қалай жасалады?
3. Беттің анықтауышы дегеніміз не?
4. Қандай беттер сызықты бетке жатады?
5. Бетпен жазықтықтың қиылысуын тұрғызудың алгоритмін мысалмен көрсетіңіз?
6. Беттердің өзара қиылысуының алгоритмі қалай?
7. Баспа плата дегеніміз не?
8. Қандай тесіктерді құрастыру, бекіту, жалғастыру дейді?
9. Құрастыру сызбаның міндеті қандай?
10. Құрастыру сызбада қандай өлшемдер қойылады?
11. Плата мен элементтің ең аз қашықтығы қандай?
12. Сипаттізім неден тұрады және қалай толтырылады?

Auto Cad жүйесінен аралық аттестацияда қойылатын сұрақтар:

1. Auto Cad жүйесі қандай құралдармен жабдықталған?
2. Auto Cad жүйесінде курсорды бағыттағанда қандай мәзірлер шығады?
3. Auto Cad графикалық жүйедегі тіл қалай аталады?
4. Элементтерді байланыстыру үшін қандай мәзір керек?
5. Төртбұрыш не шеңбер орындау үшін қандай әмірлерді қолдану қажет?
6. Барлық сызықтарды олардың қалыңдығын ненің көмегі арқылы көрсетуге болады?
7. Auto Cad жүйесінде әмір жолы экранның қай жерінде орналасқан?
8. Қандай примитивтер бар?
9. Auto Cad жұмыс столында қандай әмірлер бар?
10. Әмірлерді қалай енгізуге болады?
11. Екі өлшемді примитивтерді атаңыз?

- 12.Элементтер қалай белгіленеді?
- 13.Қандай құрал панелі элементтердің қасиетін басқара алады?
- 14.Сызықтардың түсін және түрін қалай өзгертіуге болады?
- 15.Экранда сызықтың қалыңдығын қалай көрсетіуге болады?
- 16.Auto Cad жүйеде үшөлшемді модельдердің қандай түрлері бар?

1.9 Курстың саясаты мен процедурасы

Инженерлік және компьютерлік графика пәні кеңістікте қисынды ойлауға байланысты пән болғандықтан оны түсіну тек жаттап алумен мүмкін емес. Сондықтан пәнді оқи отыра сол түсінікті дәптер бетіне кескіндеуді қажет етеді. Өткен дәрісті сол күні, не ертеңіне қайталап толқтырғанды қажет етеді. Сонымен қатар пәннің барлық тақырыптары бір-бірімен жалғасып жатқандықтан алдыңғы тақырыпты түсінбей келесі тақырыпты түснуі мүмкін болмайды. Сондықтан әрбір студент сабақ жібермей, берілген тапсырмаларды көрсетілген мерзімде орындауы өте қажет.

2. Негізгі таратылатын материалдар мазмұны

2.1 Курстың тақырыптық жоспары

6-кесте

Тақырып атауы	Академиялық сағат саны			
	Дәріс	Зертхана лы сабақ	СӨӨЖ	СӨЖ
1.Кіріспе. Сызба құралдары. Сызбаны орындаудың жалпы ережелері. AutoCAD жүйесімен танысу. Жұмыс столы. Жәй приметивтермен танысу. Компьютерде сызба мұқабасын толтыру және сызба пішімін даярлау.	-	3	4	4
2. Проекциялау әдісі. Центрлік, қиғаш параллель және тік параллель проекциялар. Нүктенің, түзудің аксонометриясын тұрғызу. Стандартты аксонометрия түрлері. Компьютерде геометриялық тұрғызулар орындау.	1	5	6	6
3. Нүктенің, түзудің және жазықтықтың сызбаларын тұрғызу. Кеңісте жалпы не дербес жағдайда орналасқан түзулер және жазықтықтар. Олардың қасиеттері. AutoCAD жүйеде көріністер тұрғызу және өлшемдер қою. 3D командаларымен жұмыс істеу	1		7	7
4.Сызбаларды түрлендіру. Проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілі. Қашықтықты, бұрышты және жазық денелердің нақты кескінін тұрғызу.	1	5	6	6

5. Түзулердің, түзу мен жазықтықтың және жазықтықтардың перпендикулярлығы.	1	2	3	3
6. Негізгі орналасу есептері. Нүктенің, түзудің және жазықтықтың өзара орналасулары.	1	5	7	7
7. Көпжақтар. Нүктенің, түзудің көпжаққа тиістілігі. Көпжақпен жазықтықтың және түзудің қиылысуы. Компьютерде нобайы арқылы көпжақпен жазықтықтың қиылысуын тұрғызу және көпжақтың аксонометриясын салу.	1	6	8	8
8. Біріктірулер. Бұрандалы біріктіру. Ішкі және сыртқы бұранданың сызбада көрсетілуі. Тетіктің нобайын орындау ережелері.	-	4	5	5
9. Баспа платаның монтаждау және құрастыру сызбасы. Құрастыру сызбаның сипаттізімін жасау. Жұмысты AutoCAD жүйеде нобайы арқылы орындау.	-	5	7	7
10 Беттер. Беттердің анықтаушы. Беттердің түрлері. Беттердің жазықтықпен, түзумен, өзара қиылысулары және жаймасы.	8	5	7	7
Барлығы	15	45	60	60

2.2 Дәріс сабағы.

1-дәріс. Сызба геометрия - геометрияның бір тарауы ретінде заттардың формаларын, өзара байланысын, олардың геометриялық заңдылығын сызба

арқылы зерттейді. Геометрияның басқа бөлімдерінде сызба тек көмекші құрал ретінде қолданылса, сызба геометрияда ол геометриялық бейнелердің қасиеттерін зерттеуде тікелей негізгі құжат ретінде қарастырылады.

Әрбір оқушы сызба геометрияны тани келе, өзінің кеңістік елесін дамытады. Ал бұндай қасиет инженер мамандығына, күнделікті жұмысында әртүрлі машиналарды жобалауда, орындауда не жобалар бойынша оларды жасауда өте қажет.

Проекция әдісі

Кескіндерді салу үшін жазықтыққа проекциялау әдісі қолданылады. Егер бізге π' жазықтығы және A нүктесі берілсе (1-сурет), онда A нүктесі арқылы π' жазықтығымен қиылысқанша кез келген бір түзу жүргізіледі. Қиылысқан A' нүктесі A нүктесінің проекциясы, π' жазықтығын проекциялар жазықтығы, ал AA' түзуін проекциялаушы түзу деп атайды.

Кез келген мүсін нүктелердің жиынымен беріледі. Мысалы түзу осы түзудің кез келген екі нүктесі арқылы анықталады. Сондықтан түзудің кескінін (1-сурет) анықтау, оның екі нүктесінің проекциялары арқылы айқындалады. Жазықтық үш нүкте, нүкте және түзу, екі параллель түзу, екі қиылысу түзуі, жазық мүсін арқылы берілетінін білеміз. Олай болса жазықтықтың кескінін алу үшін де тиісті элементтердің проекцияларын тұрғызу қажет етеді.

Егер барлық проекциялаушы түзулер тек бір нүкте арқылы өтсе, онда проекция центрлік проекция деп аталады.

1-суретте проекциялаушы түзулер S нүктесі арқылы өткен. Олай болса проекция центрлік проекция деп, ал S нүктесі проекциялар центрі деп аталады. Суретшілердің салған суреттері, фото осы принципте орындалған. Сонымен қатар адамның көру қабілеті де, центрлік проекциялар принципінде қалыптасқан.

Центрлік проекциялардың ең негізгі құндылығы- тұрғызылған кескіннің көрнекілілігі, бірақ кескінді тұрғызу күрделі және кескін арқылы керекті өлшемдерді не заттың формасын анықтау көптеген қиыншылықтар туғызады. Сондықтан техникалық сызбаларда бұндай проекциялау шектеулі.

Егер проекциялаушы түзулер өзара параллель болса, онда проекция параллель проекция деп аталады.

Параллель проекциялауда проекциялаушы түзулердің бағыты берілуі қажет (2-сурет). Проекциялар жазықтығы π' және проекциялаушы түзу s берілген. Кеңістіктегі l түзуінің параллель проекциясын салу үшін оның C және D нүктелерінен s -ке параллель түзулер жүргізіліп, олардың π' жазықтығымен қиылысу нүктелері C' және D' тұрғызылады. $C'D'$ арқылы жүргізілген l' , l түзуінің π' проекциялар жазықтығындағы параллель проекциясы деп аталады.

Проекциялаушы түзудің проекциялар жазықтығымен жасайтын бұрышы көлбеу (2-сурет) не тік (3-сурет) болуы мүмкін. Онда бірінші жағдай қиғаш бұрышты, екінші жағдай тік бұрышты параллель проекция деп аталады.

CD кесіндісі және оның тік бұрышты проекциясы $C'D'$ -тың арасындағы байланысты қарастырайық (3-сурет). $C'D'$ түзуіне параллель етіп $C'D$ түзуін

жүргізсек, $CC'D$ тік бұрышты үшбұрыш пайда болады. Өйткені $DC' \parallel C'D'$ және $CC' \perp \pi'$. Олай болса $|C'D'| = |C'D| = |CD| \cdot \cos \alpha^\circ$. Сонымен кесіндінің тік бұрышты проекциясы кесіндінің нақты ұзындығынан үлкен болуы мүмкін емес.

Параллель проекциялаудың кейбір қасиеттері:

- 1) Нүктенің проекциясы нүкте болады;
- 2) Түзудің проекциясы түзу болады;
- 3) Проекциялаушы түзуге параллель орналасқан түзудің проекциясы нүкте болады;
- 4) Түзуге тиісті нүктенің проекциясы, сол түзудің проекциясында жатады;
- 5) Егер екі түзу параллель болса, онда олардың проекциялары да параллель болады.

Сызбалардың қайтымдылығы

Заттың кескінін проекциялау әдісімен салуда үш элемент қатысып отырады. Олар проекциялау аппараты, заттың өзі және заттың проекциясы. Сызба геометрияда осы үш элементтің екеуі беріледі де үшіншісін табу керек болады.

Берілген заттың проекциясын салу - сызба геометрияның тура есебі, ал проекциясы берілген заттың өзін табу - кері есебі деп аталады.

Сызба геометрияның тура есебін біржақты шешуге әрқашанда болады. Ал сызба геометрияның кері есебінде тек бір проекциядан тұратын кескінді пайдаланып есепті шешуге болмайды.

Шешуге болмайтын кескіндерді қайтымсыз, ал шешуге болатын кескіндерді қайтымды деп атайды. Қайтымсыз кескіндердің пайдасы жоқ.

Қайтымды кескіндер алу тәсілдері көп, олардың көбірек тараған түрлері:

- аксонометриялық проекциялар;
- заттардың проекциялары;
- сызықтық перспектива;
- санды белгілері бар проекциялар және т.б.

Негізгі: (1 нег. [3-23]); (2 нег. [3-51]); (3 нег. [3-46]); (4 нег. [3-53]); (9 нег. [48-83]);

Қосымша: (13 қос. 1а, б, 17, 18 есептер); (20 қос.); (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Проекциялаудың түрлерін атаңыз және бір-бірінен қандай айырмашылығы бар?
2. Центрі және параллель проекциялау аппаратының элементтерін атаңыз?

2-дәріс.

Аксонометриялық проекциялар

Тік бұрыштап проекциялаудың күрделілігі - проекцияланған заттың формасын бірден елестетуге болмайды. Заттың бұндай жағдайында берілген проекцияларды оқып оларды кеңістікте бір-бірімен құрастыра алу қажет етеді. Себебі кесінділер тік бұрыштап проекцияланғанда бір координата өсі көрінбей қалады, немесе сол проекцияланған жазықтыққа перпендикуляр орналасып отырады.

Сызбада заттардың бірден үш өлшемін көрсету үшін, аксонометриялық проекциялар қолданылады. Гректен шыққан аксонометрия сөзі қазақша осьтер бойынша өлшеу деген ұғым береді.

Аксонометриялық проекцияның негізгі бір артықшылығы оның көрнекілігі, ал оның себебі, берілген затты тік бұрышты координаталар жүйесіне бекітіп, оларды аксонометриялық проекциялар жазықтығына параллель проекциялауда.

Аксонометриялық проекциялар жазықтығы координата осьтерінің біреуіне де перпендикуляр болмау нәтижесінде заттың бірде-бір өлшемі жоғалмайды.

4-суретте кеңістікте K нүктесі және O_{xyz} тік бұрышты координаталар жүйесі көрсетілген. Координаталар жүйесі: x -абсцисса, y -ордината, z -аппликата деп аталатын осьтерден және xOz , xOy , yOx координаталар жазықтықтарынан құралады. O_{xyz} -ті натурал координаталар жүйесі, ал $|OE_x|=|OE_y|=|OE_z|$ -натурал масштаб деп атайды.

K_2 , K нүктенің xOy координата жазықтығындағы тік проекциясы. K_2 -ден O_y - ке параллель жүргізілген түзу xO -ны K_x нүктесінде қияды. Сонда OK_xK_2K координаталық сынық сызық шығады.

Енді K нүктесінің натурал координаталарын төмендегіше анықтауға болады.

$$x_K = \frac{|OK_x|}{|OE_x|}; \quad y_K = \frac{|K_xK_2|}{|OE_y|}; \quad z_K = \frac{|K_2K|}{|OE_z|}.$$

Енді берілген проекциялау бағытымен (s) K нүктесін және O_{xyz} координаталар жүйесін π' проекциялар жазықтығына проекцияласақ, K нүктесі K' нүктесіне, K_2 нүктесі K_2' нүктесіне, O_{xyz} координаталар жүйесі $O'_{x'y'z'}$ координаталар жүйесіне проекцияланады. K_2' нүктесі K нүктесінің екінші, K' нүктесі оның аксонометриялық проекциясы деп аталады. $O'_{x'y'z'}$ аксонометриялық координаталар жүйесі, $O'K_x'K_2'K'$ аксонометриялық координаталық сынық сызық, $|O'E'_x|$, $|O'E'_y|$, $|O'E'_z|$ - аксонометриялық масштабтар деп аталады

Жалпы жағдайда аксонометриялық масштабтар өзара тең болмайды

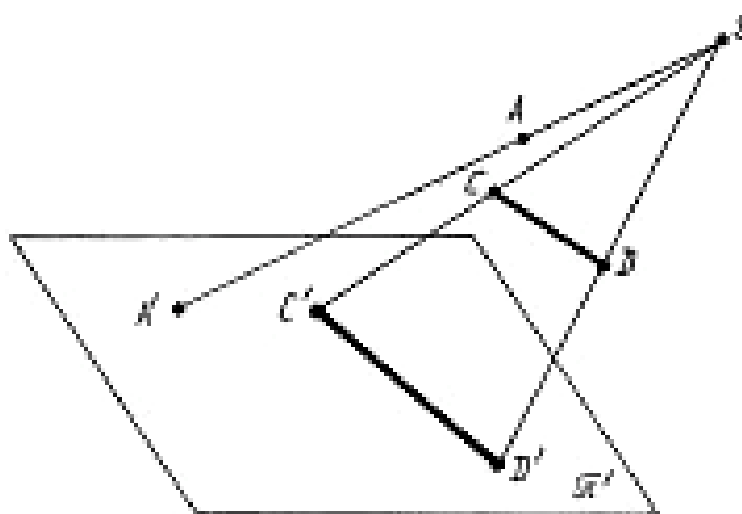
$$|O'E'_x| \neq |O'E'_y| \neq |O'E'_z|.$$

K нүктесінің аксонометриялық координаталары төмендегіше анықталады:

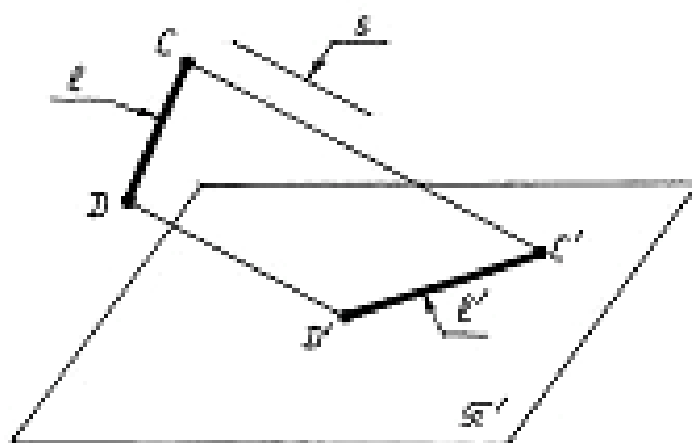
$$x'_K = \frac{|O'K'_x|}{|O'E'_x|}; \quad y'_K = \frac{|K'_xK'_2|}{|O'E'_y|}; \quad z'_K = \frac{|K'_2K'|}{|O'E'_z|}.$$

Аксонометрияны салғанда аксонометриялық масштабтардың орнына бұрмалану коэффициенттерін қолданған ыңғайлы.

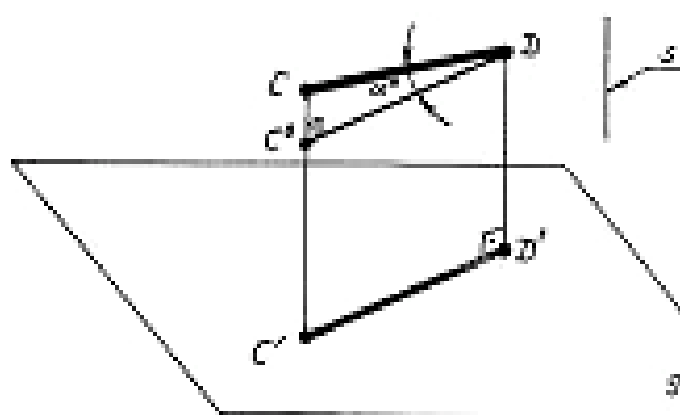
Бұрмалану коэффициенттері деп - аксонометриялық масштабтардың натурал масштабтарға қатынастарын айтады.



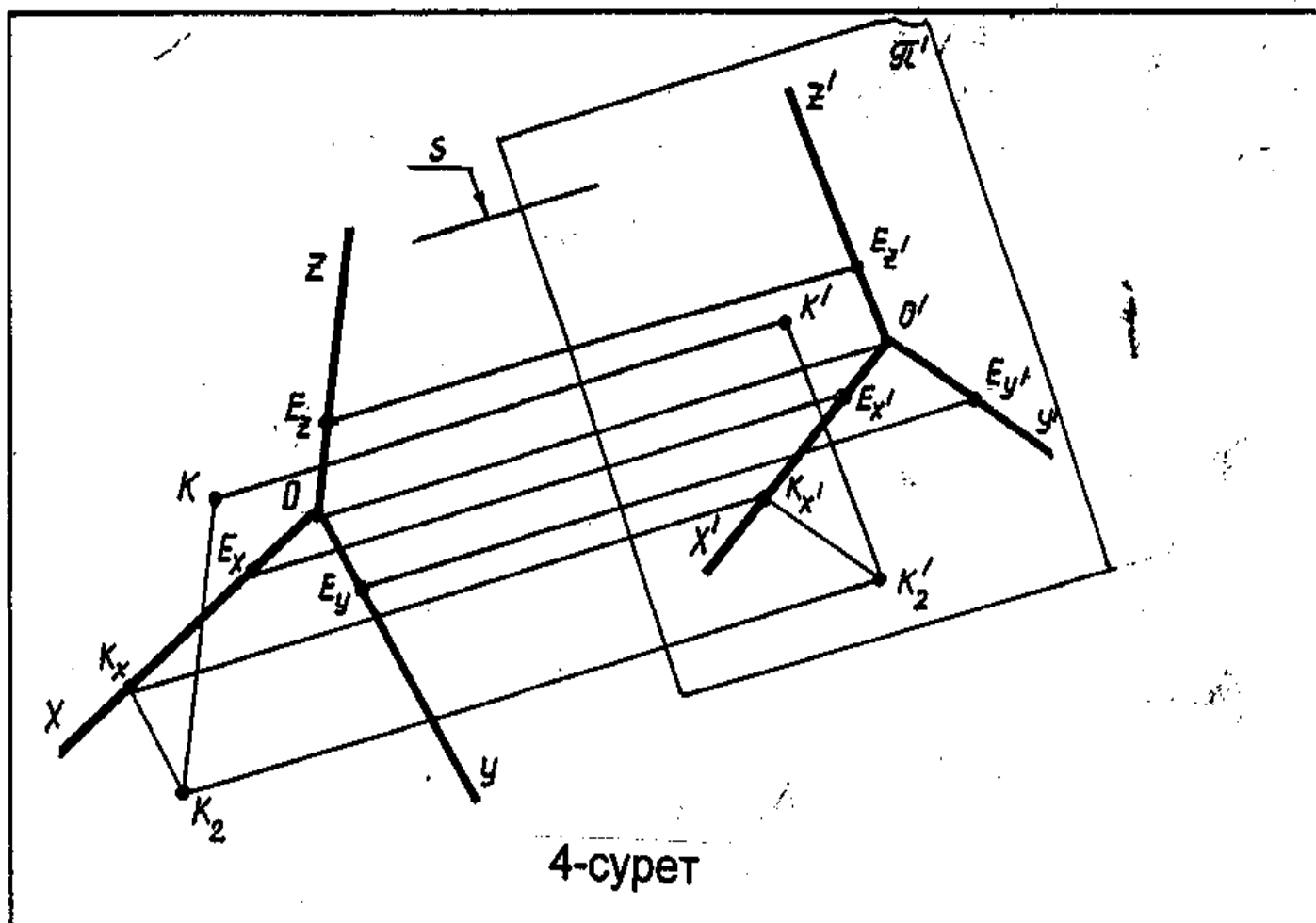
1-супер



2-супер



3-супер



4-сурет

Егер x осінде бұрмалану коэффициенті u , y осінде v , z осінде ω деп белгіленсе, онда

$$u = \frac{|O'E'_x|}{|OE_x|}; v = \frac{|O'E'_y|}{|OE_y|}; \omega = \frac{|O'E'_z|}{|OE_z|}.$$

Проекциялау бағытымен проекциялар жазықтығының орналасуларына байланысты, бұрмалану коэффициенттерінің мөлшері және олардың өзара қатынасы тікелей байланыста болады. Осыларға байланысты аксонометрияның үш түрі кездеседі:

1. Егер барлық үш координаталар осьтерінде бұрмалану коэффициенттері бірдей болса, онда бұндай аксонометрия проекциясын изометрия деп атайды. $u=\omega=v$
2. Егер екі координаталар осьтерде бұрмалану коэффициенттері тең болып, ал үшінші координата осьте айрықша болса, онда бұндай аксонометрия проекциясын диметрия деп атайды. $u=v \neq \omega$
3. Егер барлық үш координаталар осьтерінде бұрмалану коэффициенттері бір-біріне тең болмаса, онда бұндай аксонометрия проекциясын триметрия деп атайды. $u \neq v \neq \omega$

Триметрия практикада қолданылмайды.

Сонымен қатар, проекциялау бағыты проекциялау жазықтығына перпендикуляр болса аксонометрия: тік бұрышты, перпендикуляр болмаса қиғаш бұрышты болып екіге бөлінеді.

Аксонометрияның түрлері шексіз көп болғанмен, олардың көбі аксонометрияға қойылатын талапқа сай қолайлылығы мен көрнекілігін бәрі бірдей қамтамасыз ете алмайды. Сондықтан тәжірибе жинақтау нәтижесінде жасалған МЕСТ 2.317-69 стандарты аксонометриялық проекциялардың бес түрін қолдануға ұсынады. Олар мыналар:

- 1) Тік бұрышты изометрия;
- 2) Тік бұрышты диметрия;
- 3) Қиғаш бұрышты фронталь изометрия;
- 4) Қиғаш бұрышты горизонталь изометрия;
- 5) Қиғаш бұрышты фронталь диметрия.

Енді инженерлік дағдыда өте жие кездесетін тік бұрышты аксонометрияның изометрия және диметрия түрлерін қарастырайық.

Тік бұрышты изометрия

Тік бұрышты изометрияда барлық координаталар осьтері проекциялар жазықтығына бірдей бұрыш жасап бағытталғандықтан, сол координаталар осьтерде бұрмалану коэффициенттері де бірдей болады, яғни, $u=\omega=v$. Сондықтан $u^2+v^2+\omega^2=2$ теңдікті қолдансақ, $3u^2=2$ немесе $u=0,82$.

Әрине, заттың изометрия проекциясын тұрғызуда бұндай бұрмалану коэффициентімен жұмыс істеу өте ыңғайсыз. Сондықтан бұрмалану коэффициенті 1-ге тең деп алынады, олай болса заттың өлшемдері 1,22 есе үлкейеді, мұндай изометрияны келтірілген изометрия деп атайды. Оның координаталар осьтерінің арасындағы бұрыштар 120° -қа тең.

Тік бұрышты диметрия

Тік бұрышты диметрияда x және z осьтері проекциялар жазықтығына бірдей бұрышпен проекциялануына байланысты осы осьтердің аксонометриялық проекцияларында бұрмалану коэффициенттері де бірдей болады.

Бұрмалану коэффициенттері $u=v$; $v=1/2u$. Сонда $2u^2+1/4u^2=2$; $u=\sqrt{8/9}=0.94$; $v=0.47$.

Демек x' және z' осьтерінде бұрмалану коэффициенттері бірдей, ол 0,94 ке, ал y' осінде-0,47. Мұнда да бұндай бұрмалану коэффициенттерімен жұмыс істеу ыңғайсыз болғандықтан, x' және z' өстерінде бұрмалану коэффициенттері 1 -ге, ал y' осінде 0,5 -ке тең деп алынған. Олай болса заттың өлшемдері $1/0,94=1,06$ есе үлкейеді.

Бұндай бұрмалану коэффициенттерімен салынған диметрия- келтірілген диметрия деп аталады.

Аксонотриялық осьтердің арасындағы бұрыштар: x' және z' осьтерінің арасындағы бұрыш $97^{\circ}10'$, ал x' осімен y' осінің және y' осімен z' осінің аралығындағы бұрыштар $131^{\circ}25'$ болып тең келеді.

Аксонотриялық проекцияларды тұрғызу

Заттардың аксонотриялық проекциясын тұрғызуда оның қолайлығы және көрнекілігі қамтамасыз етілуі қажет. Сонымен қатар заттың күрделілігі де аксонотрияның түрлерін орындауда еске алынуы қажет.

Егер заттың мүсінін үш жағынан бірдей жақсы көрсету қажет болса, онда тік бұрышты изометрия қамтамасыз ете алады. Тік бұрышты диметрия бірден көрнекілікті қамтамасыз етеді. Аксонотрияның қандай түрі болсын, тұрғызылған кескінде заттың қырлары не қабырғалары сәйкес түспеуі қажет.

Аксонотриялық проекцияларды тұрғызу тетіктің формасына, күрделілігіне байланысты бірнеше тәсілдермен орындалады.

Бірінші тәсіл. Координаталар тәсілі деп аталады, немесе сол денені анықтайтын нүктелердің координаталарын тұрғызу арқылы дененің аксонотриясы тұрғызылады.

Екінші тәсіл. Берілген тетікті не оның бөліктерін қарапайым геометриялық мүсіндерге енгізу арқылы орындалады. Қарапайым геометриялық мүсіндерге параллелепипед, призма, пирамида, цилиндр және т.б. жатады.

Үшінші тәсіл. Симметрия остері жүргізіліп шеңберлердің центрлік нүктелері және дененің басты нүктелері тұрғызылып, солар арқылы аксонотриялық осьтерге параллель түзулер жүргізіледі. Эллипстер тұрғызылып, дененің қажетті элементтері салынады.

Негізгі: (1нег. [3-23]); (2нег. [3-51]); (3нег. [3-46]); (4нег. [3-53]).

Қосымша: (13қос 19,20,21,22 есептер); (20қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Нүктенің, түзудің аксонотриясы қалай тұрғызылады?
2. Стандартты тік бұрышты аксонотрияларда бұрмалану коэффициенттерін атаңыз?

3-дәріс Нүктенің, түзудің және жазықтықтың проекциялары

Нүктенің, сызықтың не қандай да болмасын мүсіннің тек бір проекциялар жазықтығындағы проекциялары солардың кеңістіктегі орнын анықтай алмайды. Шынында, 13-суретте көрсетілген π' проекциялар жазықтығындағы A' проекциясы жалғыз A нүктесінің проекциясы емес, ол AA' проекциялаушы түзудің бойында жатқан кез келген нүктенің проекциясы да болуы мүмкін. Сол сияқты проекциялаушы түзуіне параллель орналасқан l түзуінің нүктелерінің проекциялары сәйкес орналасады $C' \equiv N' \equiv D'$. Осыдан белгісіздік туындайды.

Ал егер A нүктесі және l түзуі өзара перпендикуляр орналасқан екі проекциялар жазықтықтарына проекцияланса, онда олардың кеңістіктегі орны

бірден анықталады. Себебі проекциялаушы мүсіннің абсцисса, ордината және аппликата нәтижелері сызбада міндетті түрде қатысып отырады.

Параллель тік бұрыштап өзара перпендикуляр екі проекциялар жазықтығына проекциялау “Монжа” тәсілі деп аталып, техникалық сызбаларда негізгі тәсіл ретінде қолданылады.

Нүктенің проекциялары

Өзара перпендикуляр орналасқан жазықтықтарға тік бұрыштап проекциялап заттың кескіндерін алуға болады. Проекциялайтын зат жазықтық пен қадағалаушының арасында орналасқан деп қарастырылады.

Негізгі проекциялар жазықтығына өзара перпендикуляр орналасқан үш жазықтық қарастырылады. Бірақ сызбаның қайтымдылығына, көптеген жағдайда, проекциялаушы дененің екі проекциясы жеткілікті болғандықтан, өзара перпендикуляр орналасқан екі жазықтық алып, оның вертикаль орналасқанын фронталь проекциялар жазықтығы π_1 , горизонталь орналасқанын горизонталь проекциялар жазықтығы π_2 деп қарастырылады.

Екі проекциялар жазықтықтарының қиылысулары x осін береді (14-сурет).

Егер π_1 -ден жақын, π_2 -ден жоғары кеңістіктегі N нүктесінің проекцияларын тұрғызу қажет болса, N нүктесін π_1 -ге тік проекциялап N_1 және N нүктесін π_2 -ге тік проекциялап N_2 проекциялары тұрғызылады. Тұрғызылған N_1 , N нүктесінің фронталь, N_2 -горизонталь проекциялары деп аталады (14а-сурет).

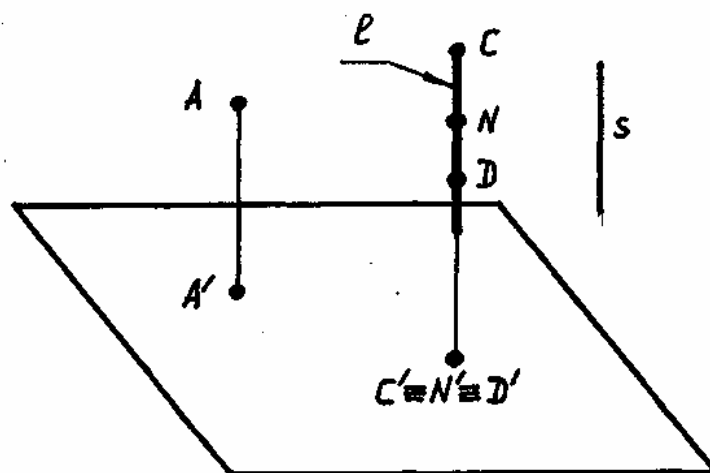
Егер π_2 горизонталь проекциялар жазықтығын x осі арқылы 90° -қа айналдырсақ, онда жазық кескін пайда болады. Кейбір оқулықтарда мұндай жазық кескінді эпюр деп атайды. Эпюр деген сөз - сызба деген ұғымды береді. $NN_1N_xN_2N$ сынық сызық N_1N_2 түзуі бойында орналасады және $N_1N_2 \perp x$ (14б-сурет).

Проекциялар жазықтықтары басқа да жазықтықтар сияқты шексіз болғандықтан сызбада шектеп қирсетудің қажеті жоқ, сонымен қатар x осін де жүргізбеуге болады. Сонда нүктенің проекциялары 14в-суреттегідей қалпында көрсетіледі.

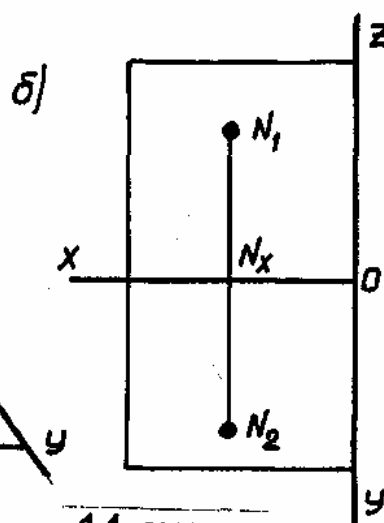
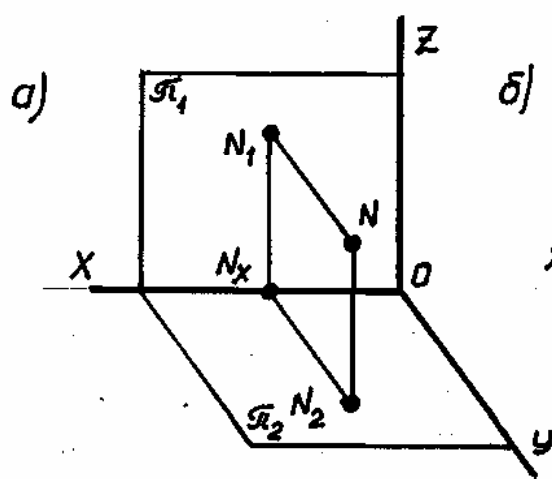
Егер нүктенің фронталь және горизонталь проекциялары беріліп, оның профиль проекциясын (үшінші) тұрғызу қажет болса, онда нүктенің проекцияларының арасынан кез келген нүктеден байланыс түзуіне 45° -тық бұрышпен түзу жүргізу арқылы орындауға болады (15-сурет).

Нүкте проекциялар жазықтықтарымен әртүрлі қатынаста болуы мүмкін (16-сурет). Егер нүкте проекциялар жазықтықтарының біреуіне де тиісті болмаса, онда нүкте жалпы жағдайда орналасады. Егер нүкте проекциялар жазықтықтарының кем дегенде біреуіне тиісті болса, онда нүкте дербес орналасады.

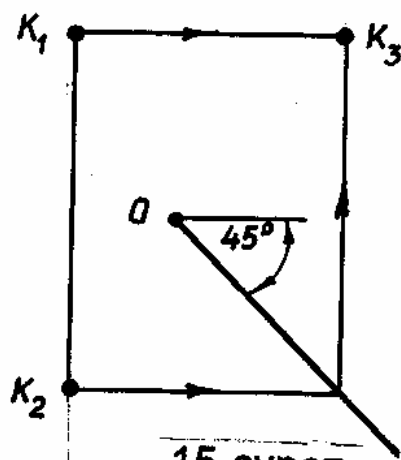
A нүктесі фронталь проекциялар жазықтығына тиісті, себебі A нүктесінің ордината өлшемі 0-ге тең, $A \in \pi_1$. B нүктесі горизонталь проекциялар жазықтығына тиісті, себебі B нүктесінің аппликаты 0-ге тең, $B \in \pi_2$. C нүктесі



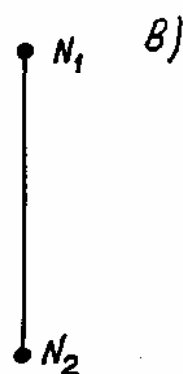
13-сурет



14-сурет



15-сурет



профиль проекциялар жазықтығына тиісті, себебі C нүктесінің абсциссасы 0-ге тең, $C \in \pi_3$. D нүктесі бірден фронталь және горизонталь проекциялар жазықтығына тиісті, себебі D нүктесінің ордината және аппликата өлшемдері 0-ге тең, $D \in \pi_1$ және $D \in \pi_2$. E нүктесі бірден фронталь, горизонталь және профиль проекциялар жазықтықтарына тиісті, себебі E абсцисса, ордината және аппликата өлшемдері 0-ге тең, $E \in \pi_1$, $E \in \pi_2$ және $E \in \pi_3$.

Түзудің проекциялары

Түзудің анықтауышы оның кез келген екі нүктесі болғандықтан, оның проекцияларын тұрғызу осы түзудің екі нүктесінің проекцияларын тұрғызуды қажет етеді. Мысалы кеңістікте l түзуі берілген (17-сурет). Оның фронталь l_1 және горизонталь l_2 проекцияларын тұрғызу үшін, l түзуінің бойынан 1 және 2 нүктелерін белгілеп, оларды π_1 фронталь проекциялар жазықтығына тік проекциялап 1_1 және 2_1 , π_2 горизонталь проекциялар

жазықтығына тік проекциялап 1_2 және 2_2 проекциялары тұрғызылады. 1_1 , 2_1 проекциялары арқылы l_1 және 1_2 , 2_2 проекциялары арқылы l_2 тұрғызылады l түзуінің 1 және 2 нүктелері проекциялар жазықтығынан әртүрлі қашықтықта орналасқан. Олай болса l түзуі кеңістікте жалпы жағдайда орналасқан. Сонымен, егер түзу кеңістікте проекциялар жазықтарының біреуіне де параллель болмаса, онда ондай түзуді жалпы жағдай түзуі деп атайды. Бұндай түзудің әрбір проекциялары түзудің нақты ұзындығынан кіші болып келеді. $1_1 2_1 < 1_2 2_2$; $1_2 2_2 < 1_1 2_1$ немесе $l_1 < l$; $l_2 < l$, сонымен қатар оның проекциялары l_1 және l_2 x осіне параллель не байланыс түзулеріне перпендикуляр болмайды.

Сызбаларда түзуді көбіне оны анықтайтын кесіндінің проекцияларымен береді (l_1 , l_2), ал сол кесіндінің проекцияларын анықтайтын нүктелердің проекциялары 1_1 , 2_1 және 1_2 , 2_2 көрсетілмейді.

Дербес жағдайдағы түзулер

Егер түзу проекциялар жазықтықтарының біріне параллель не перпендикуляр орналасса, ондай түзуді дербес түзу деп атайды. Дербес жағдайда орналасқан түзулер деңгейлік және проекциялаушы түзулер болып екіге бөлінеді.

Деңгейлік түзу деп проекциялар жазықтықтарының біреуіне параллель, ал қалған екеуіне перпендикуляр болмайтын түзуді атайды. Деңгейлік түзулер үшеу: фронталь, горизонталь, профиль.

Фронталь түзуі немесе фронталь деп - фронталь проекциялар жазықтығына параллель орналасқан түзуді айтады (18-сурет). Бұндай түзу горизонталь және профиль проекциялар жазықтықтарына перпендикуляр болмауы керек. f түзуінің 1 және 2 нүктелері фронталь проекциялар жазықтығынан бірдей қашықтықта, немесе $|11'| = |22'|$, олай болса f түзуінің барлық нүктелері де π_1 - ден бірдей қашықтықта орналасқан, яғни олардың ординаталары бірдей $y = const$. Сызбада фронталь түзуінің горизонталь проекциясы абсцисса осіне параллель $f_2 \parallel x$, немесе байланыс түзулеріне перпендикуляр.

Фронталь түзудің негізгі қасиеттері:

1. Фронталь кесіндінің фронталь проекциясы сол кесіндінің ұзындығына тең, $f_1 = f$;
2. Фронталь кесіндімен горизонталь проекциялар жазықтығының арасындағы көлбеу бұрыш α° -қа тең, $f \wedge \pi_2 = \alpha^\circ$;
3. Фронталь кесіндімен профиль проекциялар жазықтығының арасындағы көлбеу бұрыш β° -қа тең, $f \wedge \pi_3 = \beta^\circ$.

Горизонталь түзуі немесе горизонталь деп горизонталь проекциялар жазықтығына параллель орналасқан түзуді айтады (19-сурет). Бұндай түзу фронталь және профиль проекциялар жазықтықтарына перпендикуляр болмайды. h түзуінің барлық нүктелері горизонталь проекциялар жазықтығынан бірдей қашықтықта жатады, немесе аппликаталары бірдей $z = const$ болады. Сызбада горизонталь түзуінің фронталь проекциясы абсцисса осіне параллель $h_1 \parallel x$, не байланыс түзулеріне перпендикуляр болып орналасады.

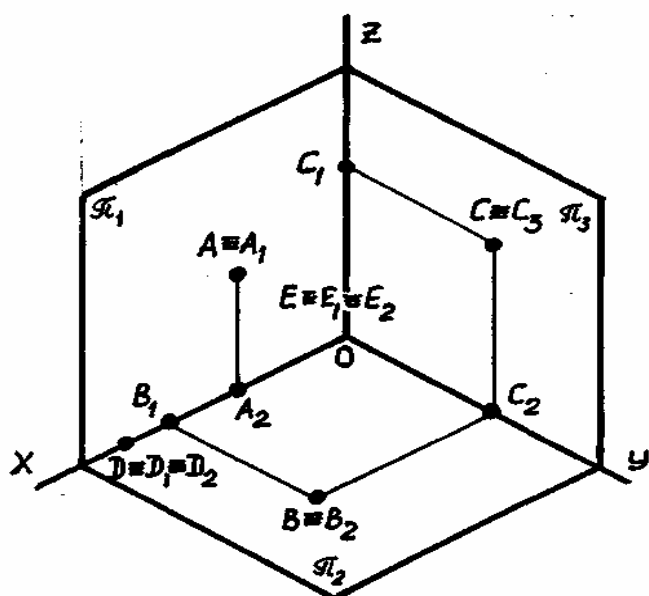
Горизонталь түзудің негізгі қасиеттері:

1. Горизонталь кесіндінің горизонталь проекциясы сол кесіндінің ұзындығына тең, $h_2 = h$;
2. Горизонталь кесіндінің фронталь проекциялар жазықтығының арасындағы көлбеу бұрыш α° -қа тең, $h \wedge \pi_1 = \alpha^\circ$;
3. Горизонталь кесіндінің профиль проекциялар жазықтығының арасындағы көлбеу бұрыш β° -қа тең, $h \wedge \pi_3 = \beta^\circ$.

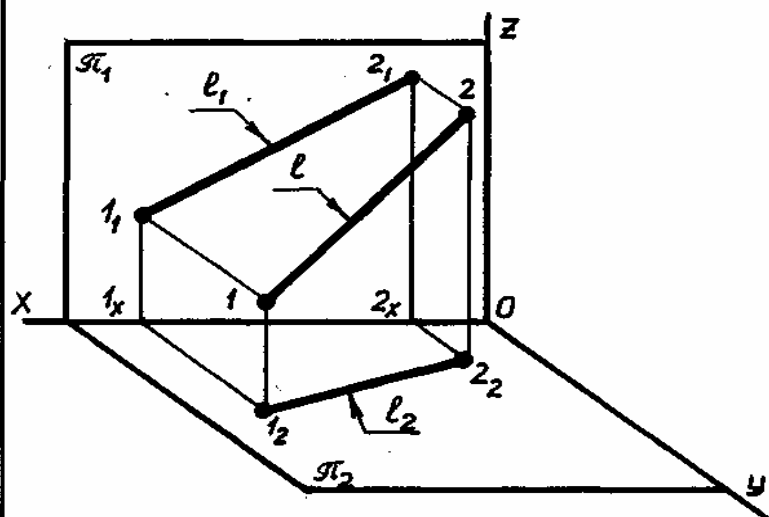
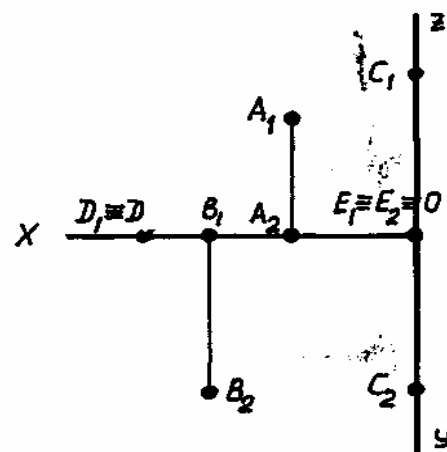
Профиль түзуі деп - профиль проекциялар жазықтығына параллель орналасқан түзуді айтады (20-сурет). Бұндай түзу фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарына перпендикуляр болмайды. Профиль түзудің барлық нүктелері профиль проекциялар жазықтығынан бірдей қашықтықта орналасады, немесе абсциссалары бірдей $x = const$ болады. Сызбада профиль түзуінің фронталь және горизонталь проекциялары байланыс түзуінің бойында жатады, немесе абсцисса осіне перпендикуляр орналасады, $p_1 \perp x$ және $p_2 \perp x$. Профиль түзудің, сызбада фронталь және профиль проекциялары арқылы берілгені дұрыс.

Профиль түзудің негізгі қасиеттері:

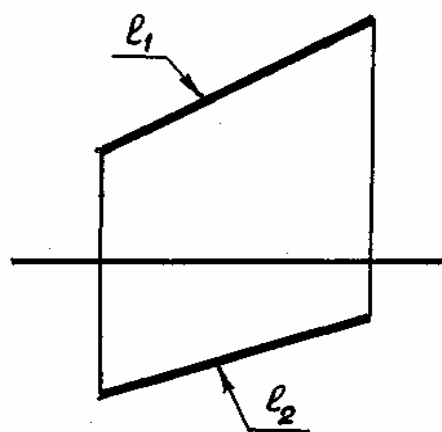
1. Профиль кесіндінің профиль проекциясы сол кесіндінің ұзындығына тең, $p_3 = p$;
2. Профиль кесіндінің фронталь проекциялар жазықтығының арасындағы көлбеу бұрыш α° -қа тең, $p \wedge \pi_1 = \alpha^\circ$;
3. Профиль кесіндімен горизонталь проекциялар жазықтығының арасындағы көлбеу бұрыш β° -қа тең, $p \wedge \pi_2 = \beta^\circ$.

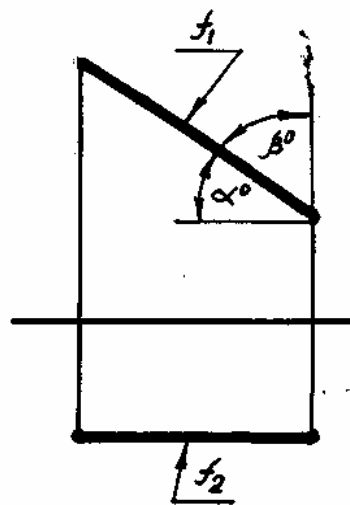
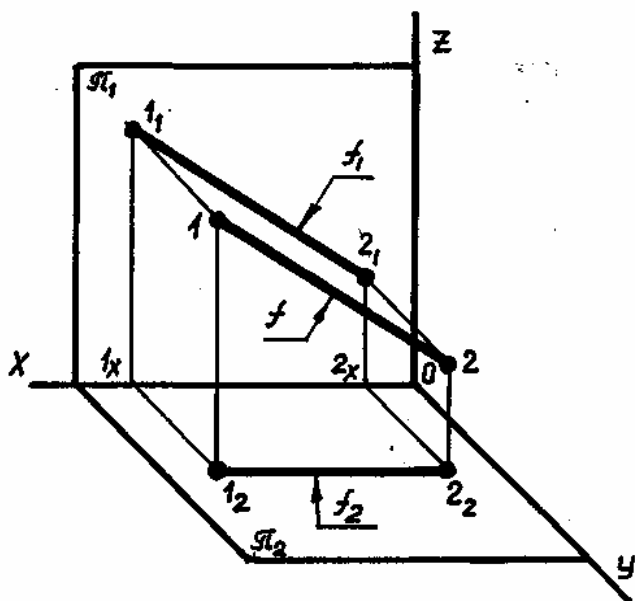


16-супер

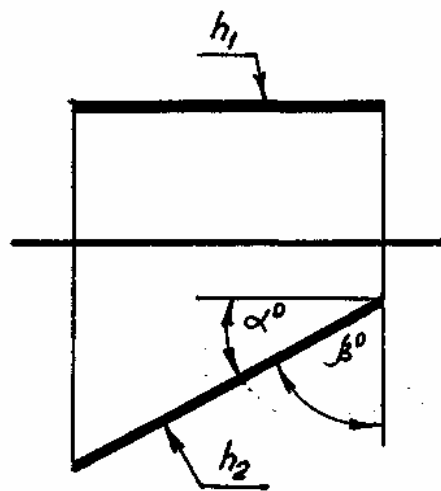
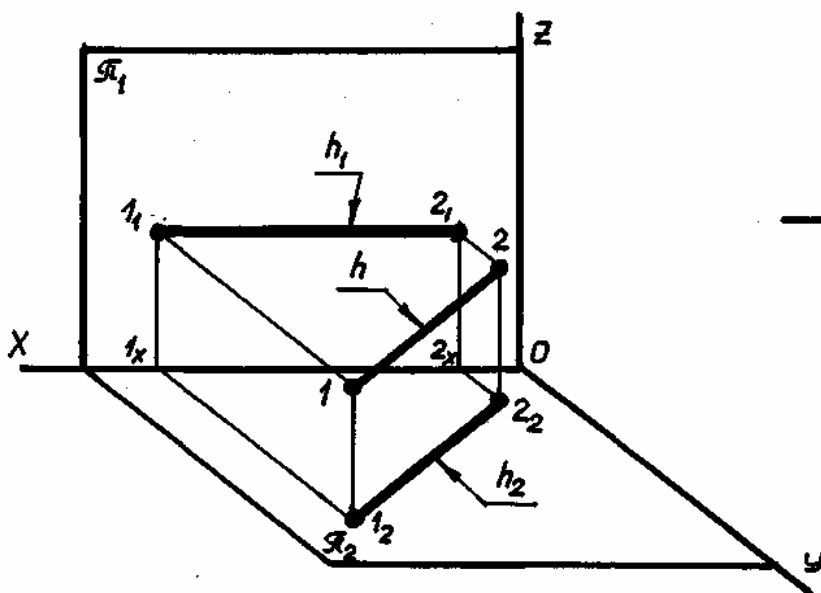


17-супер

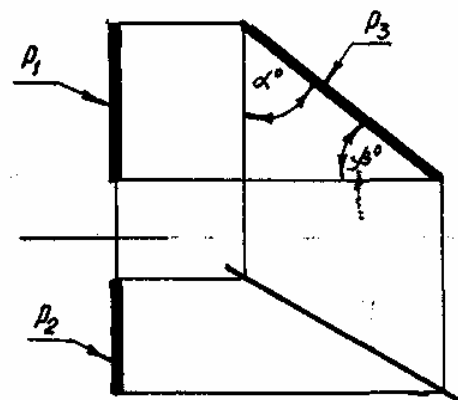
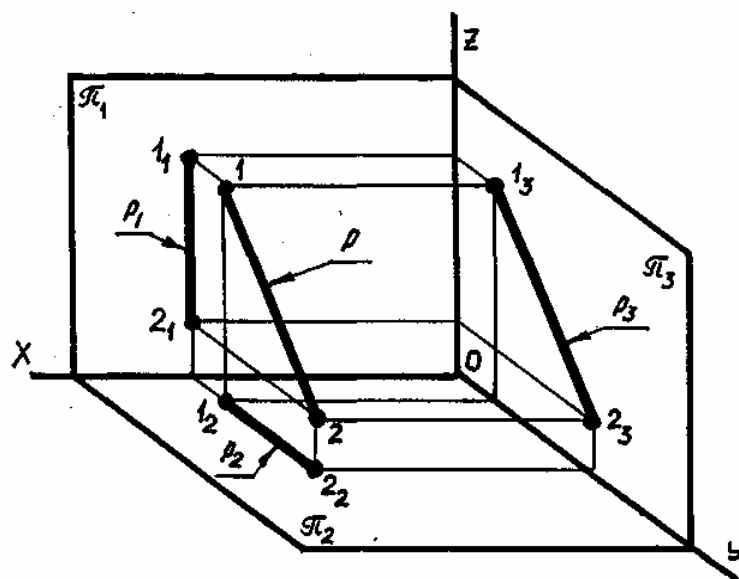




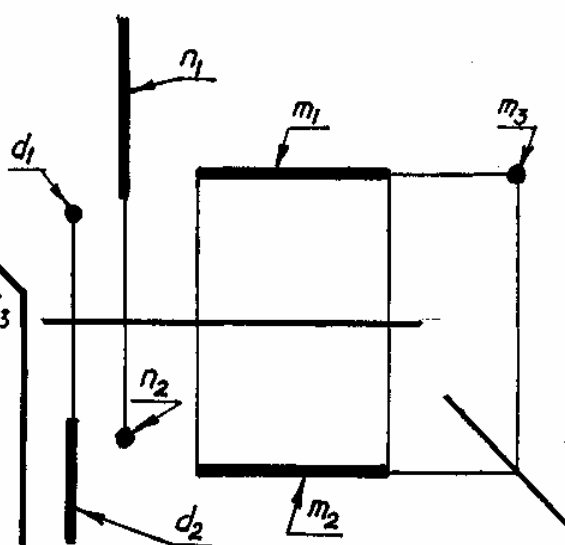
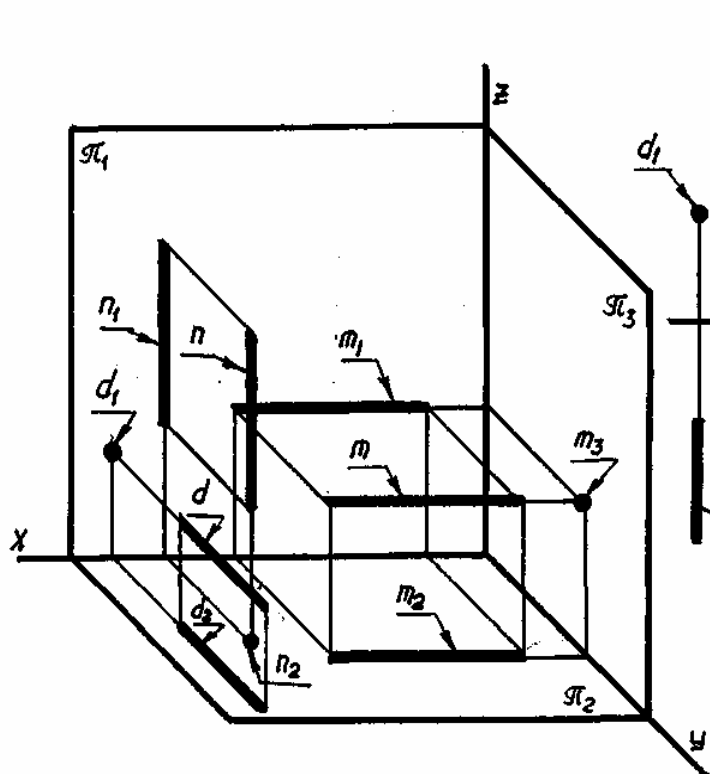
18-сурет



19-сурет



20-сурет



21-сурет

Проекциялаушы түзу деп - проекциялар жазықтықтарының біреуіне перпендикуляр орналасқан түзуді атайды. Үш проекциялаушы түзу бар. Олар: фронталь проекциялаушы, горизонталь проекциялаушы және профиль проекциялаушы түзулер деп аталады (21-сурет). d түзуі фронталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр орналасқан, сондықтан оны фронталь проекциялаушы түзу деп атайды. Оның фронталь проекциясы нүкте болып проекцияланады, ал горизонталь проекциясы, $C_2D_2 \perp x$. n түзуі горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр орналасқан, сондықтан оны горизонталь проекциялаушы түзу деп атайды. Оның фронталь проекциясы $n_1 \perp x$, ал горизонталь проекциясы нүкте болып проекцияланады. m түзуі профиль проекциялар жазықтығына перпендикуляр орналасқан, сондықтан оны профиль проекциялаушы түзу деп атайды. Оның фронталь және горизонталь проекциялары абсцисса осіне параллель болып $m_1 \parallel x \parallel m_2$, ал профиль проекциясы нүкте болып проекцияланады.

Проекциялаушы түзулердің негізгі қасиеттері: $|d_2| = |d|$; $|n_1| = |n|$; $|m_1| = |m_2| = |m|$. Сызба геометрияның есептерін шығаруда жоғарыда көрсетілген дербес жағдай түзулердің барлық қасиеттері кең түрде қолданылады.

Жазықтықтың проекциялары

Сызба геометрияда жазықтықтың кескіндері сол жазықтықтың геометриялық элементтері арқылы көрсетіледі, яғни:

1. Бір түзу бойында жатпайтын үш нүкте арқылы (23а-сурет); Түзу және осы түзуден тысқары алынған нүкте арқылы (23б-сурет);
2. Өзара параллель екі түзу арқылы (23в-сурет);
3. Өзара қиылысқан екі түзу арқылы (23г-сурет);
4. Жазық әртүрлі мүсіндер арқылы (үшбұрыш, параллелограмм, эллипс т.б.);
5. Іздер арқылы.

Есептер шығарылғанда жазықтықты кескіндеудің бір тәсілінен екінші тәсіліне көшуге болады. Егер жазықтық бір түзу бойында жатпайтын үш нүкте арқылы берілсе $\sigma(A, B, C)$. Егер B және C нүктелері түзумен қосылса, онда сол жазықтықты анықтайтын нүкте және түзу алынады, $\sigma(A, B, C) \Rightarrow \sigma(A, BC)$. Ал егер A нүктесі арқылы BC түзуіне параллель d түзуі жүргізілсе, сол жазықтықты анықтайтын өзара параллель екі түзу алынады, $\sigma(A, BC) \Rightarrow \sigma(d \parallel BC)$. A және B нүктелерін, B және C нүктелерін түзулер арқылы қосып, жазықтық екі қиылысу түзуі арқылы берілген жағдайы алынады $\sigma(A, B, C) \Rightarrow \sigma(AB \cap BC)$. Егер жазықтықтың A, B, C нүктелері өзара қосылса, онда жазықтық үшбұрыш мүсіні арқылы берілу жағдайы шығады.

Егер жазықтық барлық проекциялар жазықтарына көлбеу орналасса, ондай жазықтықтық жалпы жағдайдағы жазықтық деп аталады. 23-суретте жазықтықтар жалпы жағдайда көрсетілген.

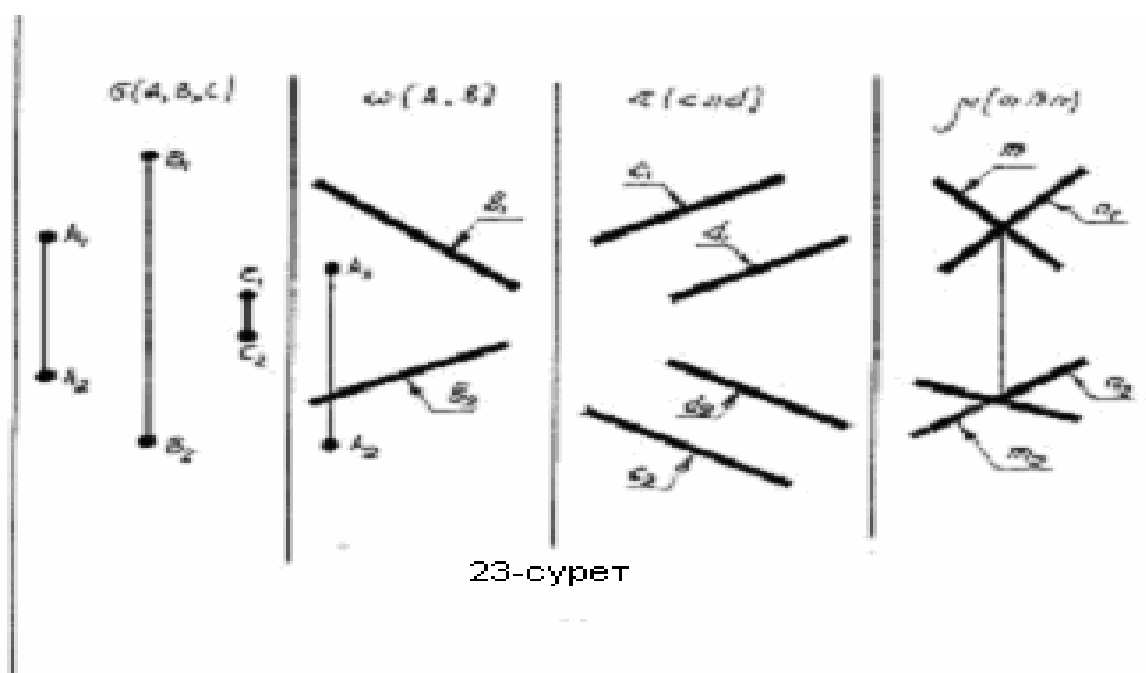
Дербес жағдайдағы жазықтықтар

Проекциялар жазықтықтары небәрі үшеу және олар өзара перпендикуляр орналасқан. Егер жазықтық осылардың біреуіне перпендикуляр болып қалған екеуіне параллель болмаса, ондай жазықтықты проекциялаушы жазықтық деп атайды. Мұндай жазықтықтар: фронталь проекциялаушы, горизонталь проекциялаушы және профиль проекциялаушы жазықтықтар деп аталады.

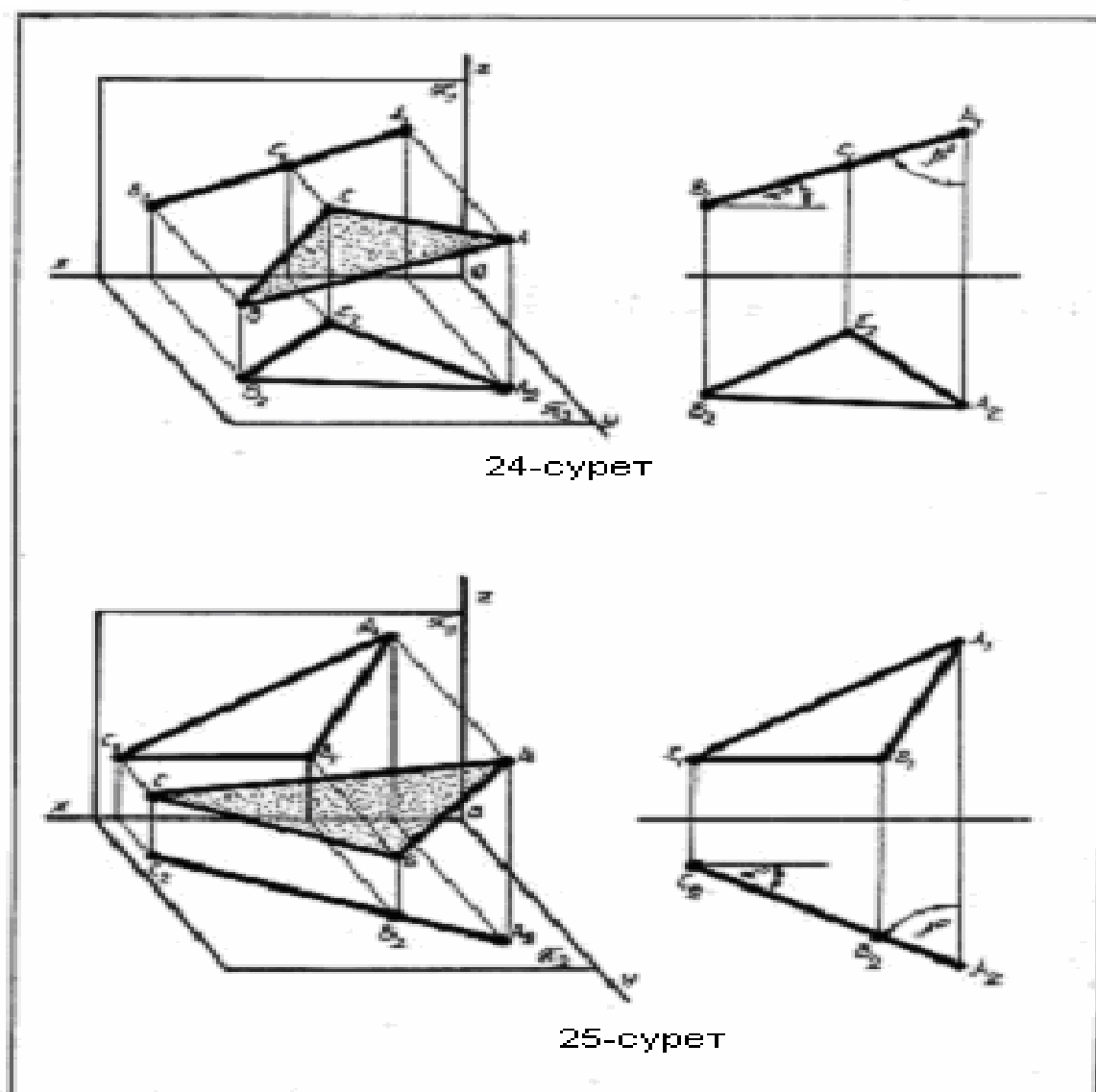
Егер жазықтықты фронталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр, қалған проекциялар жазықтықтарына параллель орналаспаса, ондай жазықтықты фронталь проекциялаушы жазықтық деп атайды (24-сурет). Мұндай жазықтықтың фронталь проекциясы, абсцисса осіне параллель болмайтын, түзу болып орналасады $\sigma_1(A_1, B_1, C_1)x$. Осындай жазықтықта жатқан кез келген жазық мүсіннің фронталь проекциясы сол түзудің бойында жатады. Сызбада фронталь проекциялаушы жазықтықты тек фронталь проекциясы арқылы көрсетуге болады. Мұндай жазықтықтың фронталь проекциясы арқылы горизонталь проекциялар және профиль проекциялар жазықтықтарымен көлбеу бұрыштарын анықтауға болады. α бұрышы σ жазықтығы мен горизонталь проекциялар жазықтығының арасындағы көлбеу бұрышы, $\alpha^\circ = \sigma^\circ \pi_2$. β° бұрышы σ жазықтығы мен профиль проекциялар жазықтығының өзара көлбеу бұрышы, $\beta^\circ = \sigma^\circ \pi_3$.

Егер жазықтық горизонталь проекциялар жазықтығына перпендикуляр, қалған фронталь және профиль проекциялар жазықтықтарына параллель болмаса, ондай жазықтықты горизонталь проекциялаушы жазықтық деп атайды (25-сурет). Мұндай жазықтықтың горизонталь проекциясы, абсцисса осіне параллель болмайтын, түзу болып орналасады, $\sigma_2(A_2, B_2, C_2)x$. Жазықтықта жатқан жазық мүсіннің горизонталь проекциясы осы түзудің бойында орналасады. Сызбада горизонталь проекциялаушы жазықтықты тек горизонталь проекциясы арқылы көрсетуге болады. Горизонталь проекциялаушы жазықтықтың қасиеттері: фронталь проекциялар жазықтығы мен σ жазықтығының көлбеу бұрышы α° бұрышы арқылы өлшенеді $\alpha^\circ = \sigma^\circ \pi_1$, және профиль проекциялар жазықтығы мен σ жазықтығының көлбеу бұрышы β° бұрышымен өлшенеді $\beta^\circ = \sigma^\circ \pi_3$.

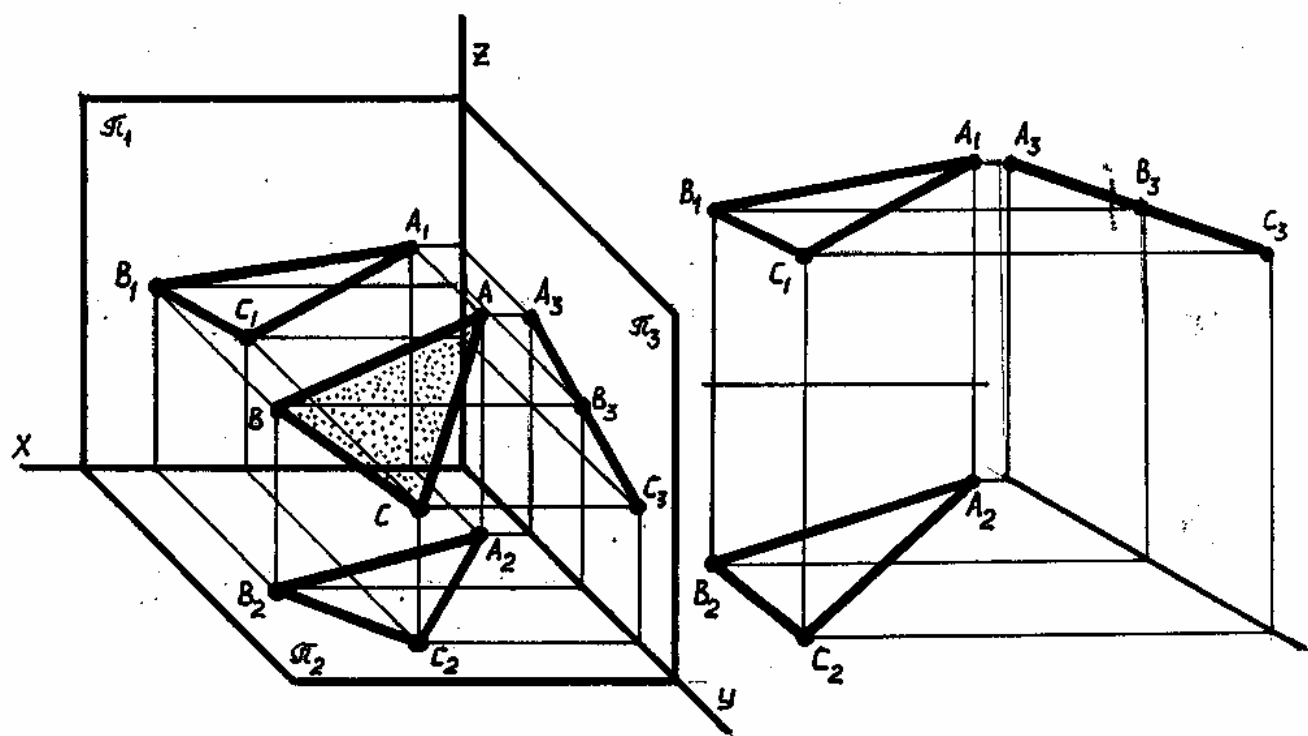
Егер жазықтық профиль проекциялар жазықтығына перпендикуляр, ал фронталь және горизонталь жазықтықтарына параллель орналаспаса, ондай жазықтықты профиль проекциялаушы жазықтық деп атайды (26-сурет): Мұндай жазықтықтың профиль проекциясы, аппликата осіне параллель болмайтын түзу болып орналасады $\sigma_3(A_3, B_3, C_3)x$. Профиль проекциялаушы жазықтықта жатқан жазық мүсіннің профиль проекциясы сол түзудің бойында орналасады. Сызбада мұндай жазықтықты тек профиль проекциясы арқылы беруге болады. Басқа проекциялаушы жазықтықтар сияқты, келесі қасиеттері бар: σ жазықтығы фронталь проекциялар жазықтығы мен көлбеу бұрышы α -қа



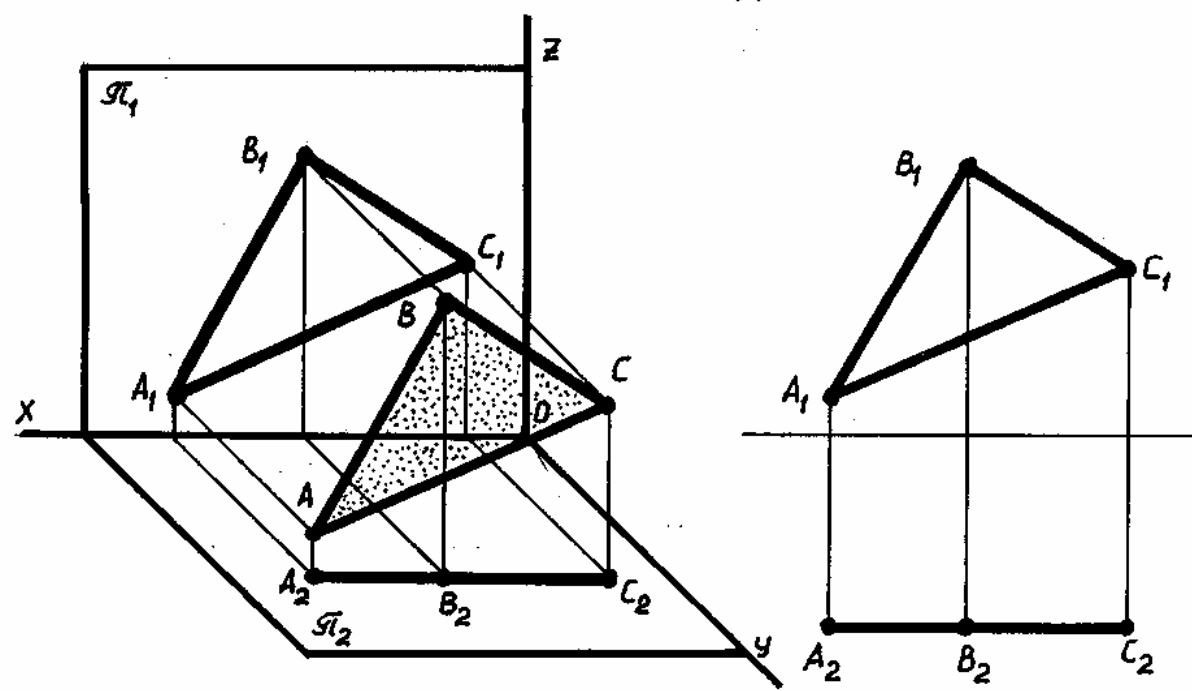
23-сурет



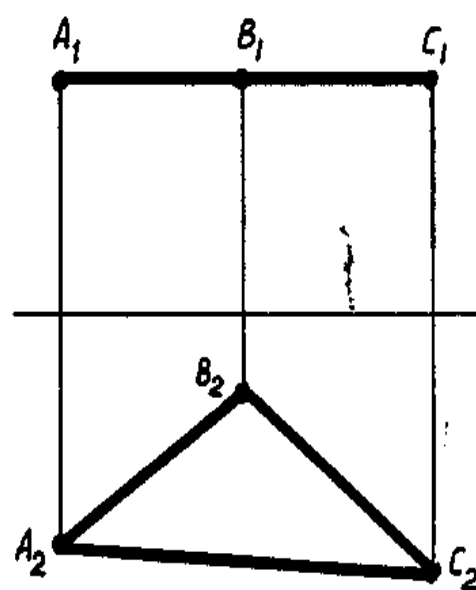
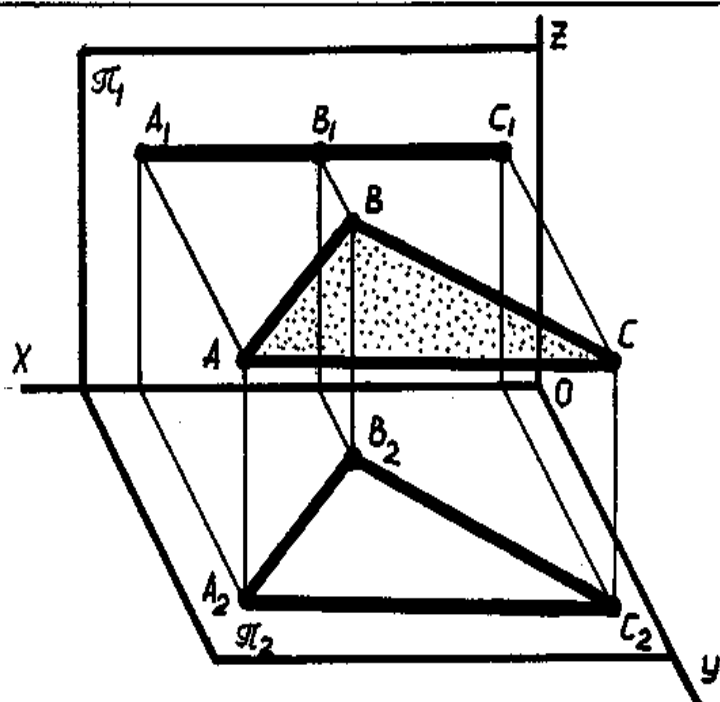
25-сурет



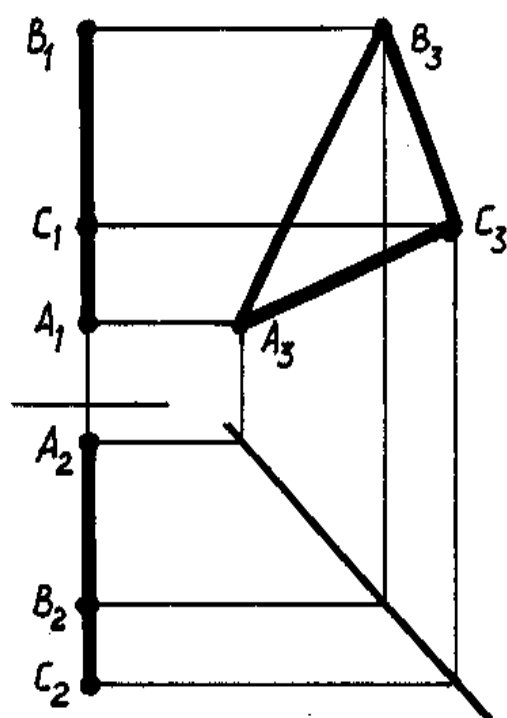
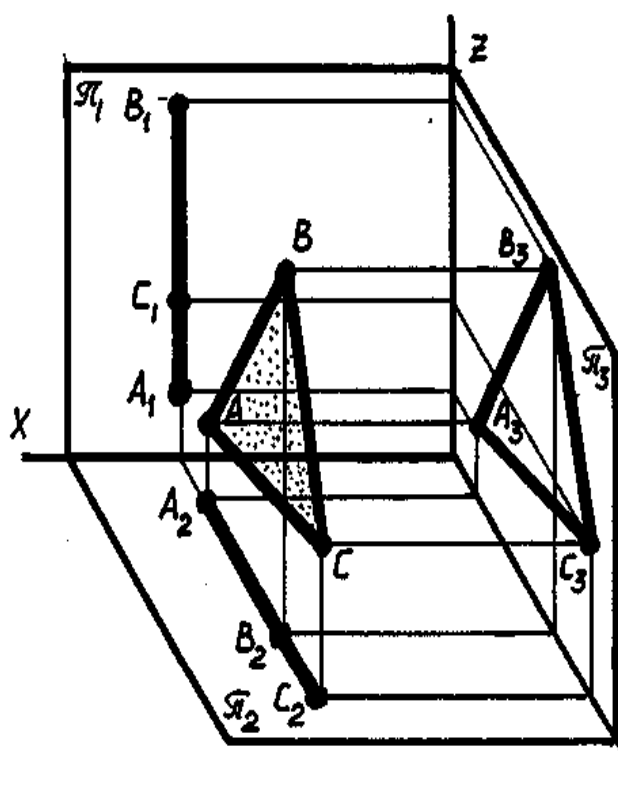
26-сурет



27-сурет



28-сурет



29-сурет

тең, $\alpha^\circ = \sigma \wedge \pi_1$ және горизонталь проекциялар жазықтығымен көлбеу бұрышы β° -қа тең, $\beta^\circ = \sigma \wedge \pi_2$.

Егер жазықтық проекциялар жазықтықтарының біріне параллель орналасса, ондай жазықтықты денгейлік жазықтық деп атайды. Мұндай жазықтықтың үш түрі бар. Олар: фронталь, горизонталь және профиль жазықтықтары деп атайды.

Егер жазықтық фронталь проекциялар жазықтығына параллель орналасса, ондай жазықтықты фронталь жазықтығы деп атайды (27-сурет). Мұндай жазықтықтың барлық нүктелері фронталь проекциялар жазықтығынан бірдей қашықтықта орналасады $|CC_1|=|BB_1|=|AA_1|$, немесе $y=const$. Сондықтан оның горизонталь проекциясы абсцисса осіне параллель түзу болып орналасады $\sigma_2(A_2, B_2, C_2) \parallel x$. Ал оның фронталь проекциясы сол жазықтықта жатқан жазық мүсіннің шынайы шамасын көрсетеді, немесе $\sigma_1(A_1, B_1, C_1) = \sigma(A, B, C)$ себебі $\sigma(A, B, C) \not\parallel \pi_1$. Фронталь жазықтығын тек горизонталь проекциясы арқылы көрсетуге болады.

Егер жазықтық горизонталь проекциялар жазықтығына параллель болса, ондай жазықтықты горизонталь жазықтығы деп атайды (28-сурет). Оның барлық нүктелерінің аппликаты бірдей болады $z=const$. Олай болса оның фронталь проекциясы абсцисса осіне параллель түзу болып орналасады. $\sigma_1(A_1, B_1, C_1) \parallel x$. Ал горизонталь жазықтықтың горизонталь проекциясы сол жазықтықта жатқан мүсіннің шынайы шамасын көрсетеді, $\sigma_2(A_2, B_2, C_2) = \sigma(A, B, C)$, себебі $\sigma(A, B, C) \parallel \pi_2$. Горизонталь жазықтығын тек фронталь проекциясы арқылы көрсетуге болады.

Егер жазықтық профиль проекциялар жазықтығына параллель болса, онда жазықтық профиль жазықтығы деп аталады (29-сурет). Жазықтықтың барлық нүктелері профиль проекциялар жазықтығымен бірдей қашықтықта болады $|AA_3|=|BB_3|=|CC_3|$ немесе жазықтықтың нүктелерінің абсциссалары бірдей $x=const$ болады. Мұндай жазықтықтың фронталь және горизонталь проекциялары абсцисса осіне перпендикуляр болады. Оның профиль проекциясы сол жазықтықта жатқан мүсіннің шынайы шамасын көрсетеді, $\sigma_3(A_3, B_3, C_3) = \sigma(A, B, C)$ себебі $\sigma(A, B, C) \parallel \pi_3$.

Негізгі: (1нег. [3-23]); (2нег. [3-51]); (3нег. [3-46]); (4нег. [3-53]).

Қосымша: (13қос. 19,20,21,22 есептер); (20қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Монжа. Эпюріне түсініктеме беріңіз?
2. Геометриялық элементтің бір проекциясы арқылы оның кеңістіктегі орыны анықтала ма?

4-дәріс.

Сызбаларды түрлендіру

Дербес жағдайда орналасқан түзулердің проекцияларынан олардың проекциялар жазықтықтарына көлбеулік бұрыштарын және кесінділердің ұзындықтарын бірден анықтауға болады, ал жалпы жағдай түзуінің

проекцияларынан мұндай керекті мағлұматтарды анықтауға болмайды. Сол сияқты проекциялаушы жазықтықтың проекцияларынан оның проекциялар жазықтықтарына көлбеу бұрыштарын, ал деңгейлік жазықтықтың проекцияларынан сол жазықтықта орналасқан әртүрлі жазық бейнелердің дұрыс көрінісін, нақты өлшемдерін анықтауға болады. Жалпы жағдайда орналасқан жазықтықтың проекцияларынан бұндай керекті мағлұматтарды алу мүмкін емес.

Сонымен мүсіндер проекциялар жазықтығына қарағанда дербес жағдайда орналасса онда мұндай есепті шешу едәуір жеңіл. Бірақ әртүрлі мүсіндерді проекциялағанда үнемі дербес жағдайда орналастыру мүмкін бола бермейді. Сондықтан есептерді шешуде қолайсыз жағдай болып келетін жалпы жағдайдағы элементтерді дербес жағдайға көшіру қажет болады.

Сызба геометрияда шығарылатын есептерді екі топқа бөлуге болады: бірінші орналасу есебі, екіншісі өлшеу есебі.

Орналасу есебін шешуде мүсіндер жағдайының өте ыңғайлысы деп олардың проекциялаушы жағдайын айтуға болады. Ал өлшеу есебінде мүсіннің проекциялар жазықтығына параллель орналасуын қамтамасыз ету қажет етеді.

Осыған байланысты орналасу және өлшеу есептерін шығаруда қандай жолмен ыңғайлы проекцияларды алуға болады деген сұрақ туындайды.

Қойылған сұрақтың жауабы жалпы жағдайда берілген мүсіннің проекцияларын дербес жағдайға айналдыру қажет етеді. Дербес жағдайға келтіру үшін мүсіннің жалпы жағдайдағы проекцияларын кеңістікте жылжыту не болмаса жаңа проекциялар жазықтығын қабылдау арқылы орындауға болады. Мүсіннің берілген проекциялары арқылы жаңа проекцияларын тұрғызу сызбаларды түрлендіру дейді.

Егер сызбаларды түрлендіру жылжыту арқылы орындалса, істелген қимылға байланысты: параллель жылжыту, проекциялаушы түзу арқылы айналдыру, деңгей түзуі арқылы айналдыру, тәсілдері қолданылады.

Ал егер сызбаларды жаңа проекциялар жазықтығын енгізу арқылы түрлендірілсес, онда маңызды тәсіл ретінде проекциялар жазықтықтарын алмастыру қолданылады.

Сызбаларды түрлендіру тәсілдері көп, біз солардың сызбаларды түрлендірудің проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсіліне тоқталамыз.

Сызбаларды түрлендіру арқылы негізгі төрт есеп шығарылады. Енді осы негізгі төрт есепті проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілімен қарастырайық.

Проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілі

Екі проекциялар жазықтықтарының біреуін жаңа проекциялар жазықтығына алмастыруға болады. Жаңа проекциялар жазықтығын алмастырылмаған проекциялар жазықтығына перпендикуляр және алмастырылмаған проекциялар жазықтығындағы дененің проекциясына ыңғайлап сызбаға енгізеді.

Сонымен егер π_1 -ді π_4 -ке алмастырсақ, онда $\pi_4 \perp \pi_2$ -ге, ал егер π_2 -ні π_4 -ке алмастырылса онда $\pi_4 \perp \pi_1$ -ге болады. Бұндай алмастырудың нәтижесінде ескі проекциялар жазықтықтар жүйесінен π_1/π_2 жаңа проекциялар жазықтықтар жүйесі π_2/π_4 не π_1/π_4 пайда болады. Проекциялар жазықтықтарын кезекпен алмастыруын жалғастыра беріп сызбадағы мүсіннің проекциялары есептің шешіміне әкелінеді. Есептің шешімін табуға бір не екі рет проекциялар жазықтықтарын алмастыру жеткілікті болады.

Сызбаларды проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілімен түрлендіруде келесі ережелер сақталады:

1. Ескі проекциялардың арасында абсцисса осі белгіленеді;
2. Алмастырылған проекциялар жазықтығындағы мүсін нүктелерінің проекцияларынан жаңа проекциялар жазықтығына перпендикуляр байланыс түзулері жүргізіледі;
3. Алмастырылған проекциялар жазықтығында жатқан нүктелердің ескі осіне дейінгі қашықтық өлшеніп, жаңа осьтен байланыс түзудің бойына салынады.

Ереже екі не одан да көп алмастырылғанда да қолданылады.

Енді сызбаларды түрлендіруде шығарылатын негізгі төрт есепті қарастырайық.

Бірінші есеп. Жалпы жағдайда орналасқан түзуді деңгейлік түзуге түрлендіру (40-сурет). Егер түзудің кесіндісі проекциялар жазықтығына параллель болса, онда кесінді осы проекциялар жазықтығына нақты шамамен проекцияланатынын жоғарыда дербес түзулерді қарастырғанда анықталған. Сондықтан жаңа проекциялар жазықтығы кесіндіге параллель болуы керек. Ол үшін екі проекциялар жазықтықтарының біреуін ғана алмастыру жеткілікті болады. Ал кесіндінің проекциялар жазықтықтарымен көлбеу бұрышын анықтау керек болған жағдайда алмастыратын проекциялар жазықтығы таңдалып алынуы қажет.

40-суретте фронталь проекциялар жазықтығы жаңа проекциялар жазықтығына немесе π_1/π_2 -ден π_2/π_4 жүйесіне алмастырылған. Жаңа жүйе осі, l түзуінің горизонталь проекциясы l_2 -ге параллель жүргізіледі. l_2 -нің l_2 және 2_2 проекцияларынан жаңа оське перпендикуляр жүргізіліп, оларға l және 2 нүктелердің фронталь проекцияларының абсцисса осімен қашықтығы өлшеніп, жаңа осьтен салынады. Тұрғызылған l_4 және 2_4 проекцияларын түзумен қосып l_4 проекциясы алынады. Сонда l түзуі π_2/π_4 жүйеде деңгейлік түзу болады, өйткені $l \parallel \pi_4$. Сонымен қатар l түзуінің горизонталь проекциялар жазықтығымен жасап жатқан көлбеу бұрышы α белгілі болады.

Егер l түзуімен фронталь проекциялар жазықтығының көлбеу бұрышын анықтау қажет болған жағдайда π_1/π_2 жүйеден π_2/π_4 жүйеге көшу қажет, немесе горизонталь проекциялар жазықтығын жаңа проекциялар жазықтығына алмастыру керек.

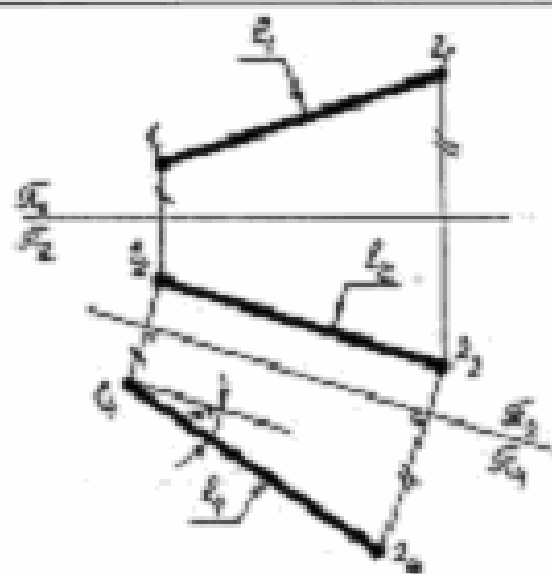
Сонымен бірінші есепті шешудің нәтижесінде кесіндінің ұзындығы және оның проекциялар жазықтықтарына көлбеу бұрыштары анықталады.

Екінші есеп. Деңгейлік түзуді проекциялаушы түзуге түрлендіру (41-сурет). Егер бірінші есепті шешуде екі проекциялар жазықтықтарының кез келген біреуін алмастыруға болатын болса, екінші есепті шешуде ол берілген түзуге байланысты болады. Егер фронталь түзуі берілсе, онда горизонталь проекциялар жазықтығын, ал горизонталь түзуі берілсе, онда фронталь проекциялар жазықтығын алмастыру қажет етіледі.

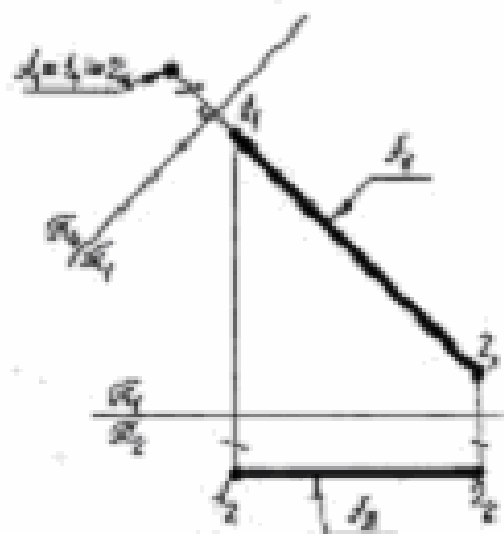
Проекциялаушы түзу проекциялар жазықтықтарының біреуіне перпендикуляр түзу болғандықтан жаңа проекциялар жазықтығы берілген түзуге перпендикуляр бағытталуы керек. Сонымен 41-суретте берілген түзу фронталь түзуі болғандықтан горизонталь проекциялар жазықтығын жаңа проекциялар жазықтығына алмастырып, π_1/π_2 жүйеден π_2/π_4 жүйеге көшіріледі. Жаңа жүйе осі фронталь түзудің фронталь проекциясына перпендикуляр жүргізіледі. f түзуінің горизонталь проекциясымен абсцисса осінің қашықтығын жаңа осьтен салғанда, оның жаңа жүйеде проекциялаушы түзуге алмасқанын көреміз.

Егер түзу жалпы жағдайда беріліп оны проекциялаушы түзуге түрлендіру қажет болған жағдайда оны екі рет түрлендіріп, алдымен деңгейлі одан кейін проекциялаушы түзу жасайды немесе ретімен бірінші және екінші есептердің шешімдері қолданылады.

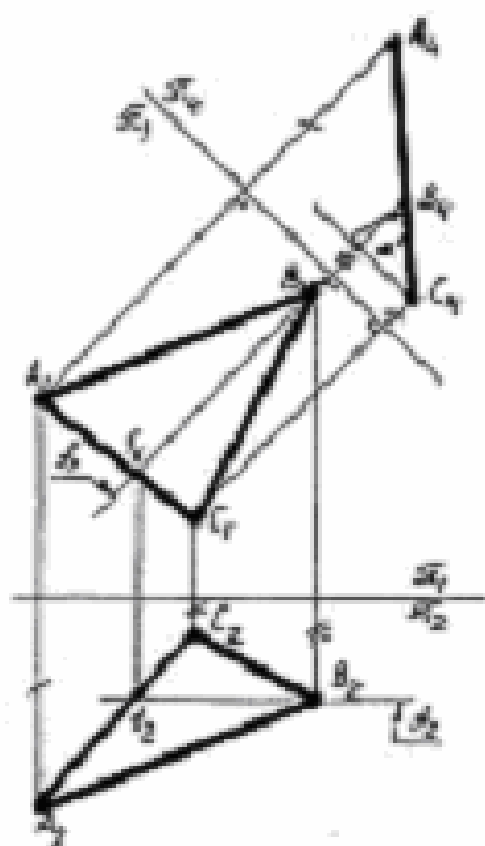
Үшінші есеп. Жалпы жағдайда орналасқан жазықтықты проекциялаушы жазықтыққа түрлендіру (42-сурет). Жалпы жағдайға орналасқан жазықтықты проекциялаушы жағдайда айналдыру, екі проекциялар жазықтығының кез келген біреуін алмастырса жеткілікті болады. Ал берілген жазықтықпен проекциялар жазықтықтарының көлбеу бұрышын анықтау керек болған жағдайда, алмастыратын проекциялар жазықтығы таңдалып алынуы қажет. Проекциялаушы жазықтық проекциялар жазықтықтарының біріне перпендикуляр орналасатын болғандықтан, жаңа проекциялар жазықтығын берілген жазықтыққа перпендикуляр етіп енгізіледі. Сызбада жаңа проекциялар жазықтығының перпендикуляр бағыты берілген жазықтықтың бас түзулері арқылы орындалады. Егер горизонталь проекциялар жазықтығы алмастырылса, онда жаңа проекциялар жазықтығы берілген жазықтықтың фронталь түзуінің фронталь проекциясына перпендикуляр болады. Ал егер фронталь проекциялар жазықтығы алмастырылса, онда жаңа проекциялар жазықтығы берілген жазықтықтың горизонталь түзуінің горизонталь проекциясына перпендикуляр болады. 42-суретте $\sigma(A, B, C)$ жазықтығы үшбұрышпен беріліп кеңістікте жалпы жағдайда орналасқан. Горизонталь проекциялар жазықтығы π_2 жаңа проекциялар жазықтығы π_4 ке алмастырылған. $\pi_4 \perp \pi_1$ -ге және $\pi_4 \perp \sigma$, себебі $\pi_4 \perp f$, $f \in \sigma$. σ жазықтығының фронталь түзуінің проекциясын тұрғызу оның



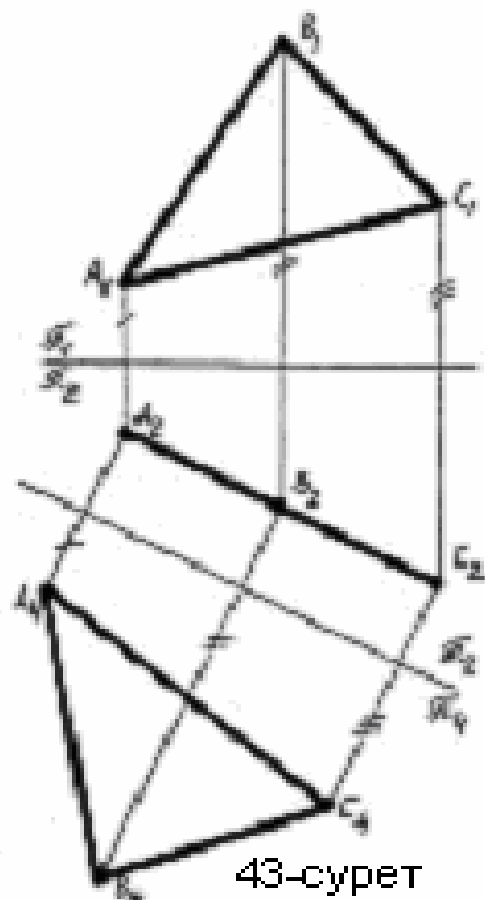
40-сурет



41-сурет



42-сурет



43-сурет

горизонталь проекциясынан басталады. B_2 проекциядан абсцисса осіне параллель f_2 жүргізіледі. Оның фронталь проекциясы B_1 және I_1 проекция арқылы f_1 проекциясы тұрғызылады. f_1 -ге перпендикуляр π_1/π_4 жүйесінің осі жүргізіледі. A_1, B_1, C_1 проекциялардан жүргізілген байланыс түзулері де жаңа оське перпендикуляр болады. A, B, C нүктелердің горизонталь проекциялары мен абсцисса осінің қашықтығы жаңа осьтен байланыс түзулердің бойына салынып тұрғызылған $A_4B_4C_4$ проекциялары бір түзудің бойында жатады, немесе берілген σ жазықтығы жаңа проекциялар жазықтығына перпендикуляр орналасқан. Берілген σ жазықтығының түзуге айналған $A_4B_4C_4$ проекциясымен жаңа остің арасындағы бұрыш σ жазықтығының фронталь проекциялар жазықтығына көлбеу бұрышын анықтайды, $\alpha = \sigma \wedge \pi_1$.

Егер жалпы жағдайда берілген жазықтық пен горизонталь проекциялар жазықтығының арасындағы көлбеу бұрышын анықтау қажет болған жағдайда жаңа π_2/π_4 жүйеге көшу қажет немесе фронталь проекциялар жазықтығы жаңа проекциялар жазықтығына алмастырылады. Есептің шешілу жолы жоғарыда қарастырылғандай болады. Жаңа π_2/π_4 жүйесінің осі берілген жазықтықтың горизонталь түзуінің горизонталь проекциясына перпендикуляр жүргізіледі. Жаңа оське, нүктелердің горизонталь проекцияларынан перпендикуляр жүргізілген байланыс түзулердің бойына алмастырылмаған проекциялар жазықтығындағы нүктелердің ескі оське дейінгі қашықтықтары салынып жазықтықтың жаңа проекциясы тұрғызылады. Берілген жазықтықтың жаңа проекциясымен жаңа жүйе осінің арасындағы бұрыш сол жазықтық пен горизонталь проекциялар жазықтығының арасындағы көлбеу бұрышы болады.

Үшінші есепті шығару нәтижесінде берілген жалпы жағдайда жатқан жазықтықтың проекциялар жазықтықтары мен көлбеу бұрыштары анықталады.

Төртінші есеп. Проекциялаушы жазықтықты деңгейлік жазықтыққа түрлендіру (43-сурет). Бұл есепті шығаруда үшінші есеп сияқты кез келген проекциялар жазықтықтарын алмастыра алмаймыз. Алмастыратын проекциялар жазықтығы берілген жазықтыққа байланысты. Егер фронталь проекциялаушы жазықтығы берілсе, онда горизонталь проекциялар жазықтығын алмастырып π_1/π_4 жүйеге, ал горизонталь проекциялаушы жазықтығы берілсе, онда фронталь проекциялар жазықтығын алмастырып π_2/π_4 жүйеге көшу қажет.

Деңгейлік жазықтық проекциялар жазықтықтарының біріне параллель жазықтық болғандықтан, жаңа проекциялар жазықтығын берілген жазықтыққа параллель орналастыру қажет. Сонымен 43-суретте горизонталь проекциялаушы жазықтық $\sigma(ABC) \perp \pi_2$ берілгендіктен, фронталь проекциялар жазықтығы π_1 жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -ке алмастырылған. $\pi_4 \perp \pi_2$ -ге және жаңа π_2/π_4 жүйе осі σ жазықтығының горизонталь проекциясына $A_2B_2C_2$ параллель жүргізілген. $A_2B_2C_2$ проекциялардан жаңа оське перпендикуляр байланыс түзулері жүргізіліп, олардың бойларына жаңа осьтен нүктелердің фронталь проекцияларымен абсцисса осінің қашықтығы өлшеніп $A_4B_4C_4$ проекциялары тұрғызылады. $A_4B_4C_4 = ABC$, себебі $\pi_4 \parallel \sigma(ABC)$.

Егер жазықтық жалпы жағдайда беріліп, оны деңгейлік жазықтыққа түрлендіру қажет болған жағдайда оны екі рет түрлендіруге тура келеді. Алдымен жазықтықты проекциялаушы, одан кейін деңгей жазықтық жасалады немесе ретімен үшінші және төртінші есептердің шешімдері қолданылады.

Негізгі:. (1нег. [23-35]); (2нег. [57-115]); (3нег. [46-82]); (4нег. [53-109]).

Қосымша:. (13қос 35,36,37,39в,40,41,42а есептер); (20қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Сызбаны түрлендіру не үшін қажет?
2. Сызбаны түрлендірудің қандай тәсілдері бар?
3. Сызбаны түрлендіру арқылы қандай негізгі есептер шығарылады?

5-дәріс. Түзулердің, түзу мен жазықтықтың және жазықтықтардың перпендикулярлығы

Көптеген жағдайда ара қашықтықты анықтау, кесіндінің ұзындығын өлшеу, берілген геометриялық мүсіндердің өзара бұрышын анықтау немесе проекциялар жазықтықтарымен көлбеу бұрыштарын және жазық мүсіндердің кескінін анықтау сияқты есептер шығаруға тура келеді. Мұндай есептерді өлшеу есептері дейді. Өлшеу есептерін шығаруда перпендикуляр басты рөл атқарады. Сондықтан перпендикулярлық сызбада қалай анықталатынын қарастырайық. Егер жазық бұрыштың қабырғалары проекциялар жазықтығына параллель болса, онда

бұрыштың қабырғалары және олардың арасындағы бұрыш сол жазықтыққа нақты шамамен проекцияланады. Себебі мұндай жазық бұрыштың жазықтығы проекциялар жазықтығына параллель болып келеді. Сонымен мұндай жағдайда сүйір бұрыш сүйір күйінде, доғал бұрыш доғал күйінде, тік бұрыш тік күйінде ешбір өзгеріссіз проекцияланады. Егер бұрыштың қабырғалары кеңістікте жалпы жағдайда орналасса, немесе проекциялар жазықтығына параллель болмаса, онда бұрыш өзгеріп проекцияланады.

Берілген ABC тік бұрыштың BC қабырғасы π' проекциялар жазықтығына параллель орналассын (59-сурет). Осы тік бұрыштың π' проекциялар жазықтығындағы проекциясы $A'B'C' = 90^\circ$ болатынын дәлелдеу керек. BC түзуі BB' және AB түзулеріне перпендикуляр, немесе $\tau(ABB'A') \perp BC$. BC қабырғасы π' -қа параллель болғандықтан $BC \parallel B'C'$. Олай болса $B'C' \perp \tau$ немесе $B'C' \perp B'A'$.

Сонымен, егер жазық тік бұрыштың бір қабырғасы проекциялар жазықтығына параллель болса ал екінші қабырғасы сол проекциялар жазықтығына перпендикуляр болмаса, онда тік бұрыш осы жазықтыққа тік бұрыш күйінде проекцияланады. Бұл теореманы тік бұрыштың тік бұрыш проекциялау теоремасы деп аталады.

Жоғарыдағы дәлелдерге сүйене отырып, доғал не сүйір бұрыштың бір қабырғасы проекциялар жазықтыққа параллель орналасатын болса, онда доғал бұрыштың сол проекциялар жазықтықтағы проекциясы доғал бұрыш, ал сүйір бұрыштың проекциясы сүйір бұрыш болып проекцияланатынына күмән жоқ.

Өзара перпендикуляр түзулер

Тік бұрыштың тік бұрышты проекциясы атты теоремасынан мынадай түсінік шығаруға болады. Кеңістікте берілген өзара перпендикуляр қиылысып не айқас орналасқан екі түзудің біреуі проекциялар жазықтығына деңгей орналасып, ал екінші түзу сол проекциялар жазықтығына проекциялаушы жағдайда орналаспаған жағдайда екі түзудің арасындағы тік бұрыш өзгеріссіз тік бұрыш күйінде проекцияланады. Біз үш деңгей түзуі бар екенін білеміз, енді солардың екеуіне тоқталайық.

Өзара перпендикуляр қиылысып не айқас орналасқан түзулердің біреуі фронталь түзуі болса, онда олардың фронталь проекциялары өзара перпендикуляр болады (60-сурет). a және f түзулері қиылысып, b және f түзулері айқаса орналасқан. Екеуінде де f фронталь түзуі, себебі $f_2 \parallel x$ сондықтан $f \parallel \pi_1$ -ге, ал a және b түзулері жалпы жағдайда жатыр, себебі олардың проекциялары x осіне көлбеу орналасқан.

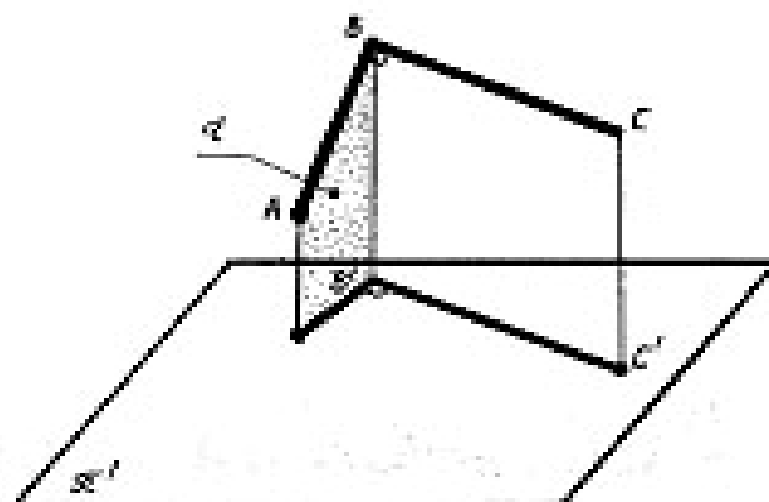
Өзара перпендикуляр қиылысып не айқас орналасқан түзулердің біреуі горизонталь түзуі болса, онда олардың горизонталь проекциялары өзара перпендикуляр болады (61-сурет). c және h түзулері қиылысып, d және h түзулері айқас орналасқан. Екеуінде де h горизонталь түзуі, себебі $h_1 \parallel x$ сондықтан $h \parallel \pi_2$ -ге ал c және d түзулері жалпы жағдайда жатыр, себебі олардың проекциялары x осіне көлбеу орналасқан.

Әрине, өне бойы өзара перпендикуляр түзулердің біреуі деңгей орналаса бермейді немесе екеуі де кеңістікте жалпы жағдайда орналасуы мүмкін. Мұндай жағдайда екеуінің арасындағы тік бұрыштың проекциялары өзгереді.

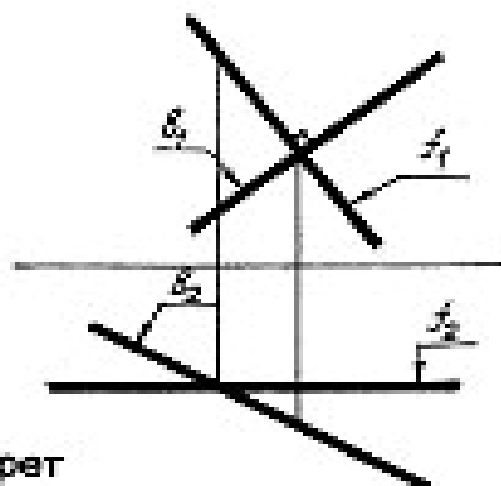
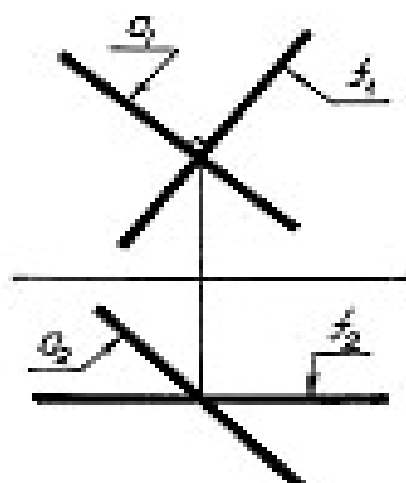
Енді жалпы жағдайда орналасқан түзуге түзуден тыс нүкте арқылы тік қиылысатын түзу тұрғызу не жалпы жағдайда орналасқан түзулер өзара перпендикуляр орналасқан ба? - деген сұраққа мысалдар келтірейік.

Әзірге мұндай есептердің жауабын проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілімен түрлендіру арқылы қарастыруға болады.

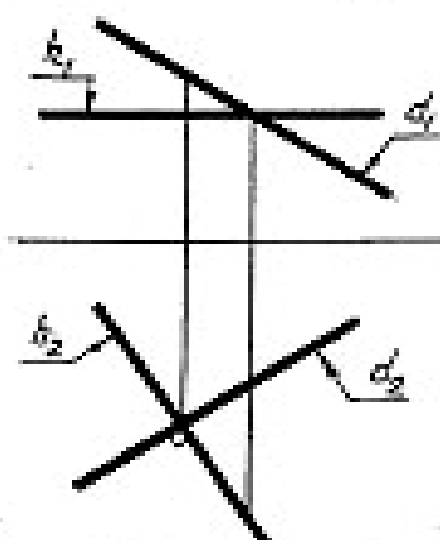
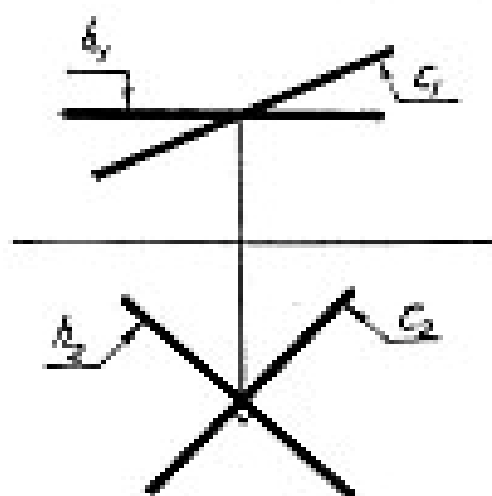
A нүктесі арқылы жалпы жағдайда орналасқан l түзуімен тік бұрыш жасап қиылысатын түзу тұрғызу керек болсын (62-сурет). Тік бұрыш проекциялар жазықтығына өзгеріссіз проекциялануы үшін, оның бір жағы немесе түзулердің біреуі проекциялар жазықтығына параллель болуы қажет екенін білеміз. Олай болса берілген l түзуін жалпы жағдайдан деңгей түзу жасау үшін, фронталь проекциялар жазықтығы π_1 -ді жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -ке алмастырып, π_1/π_2 жүйеден π_2/π_4 жүйесі тұрғызылған. Жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -те l түзуі параллель орналасады, $l \parallel \pi_4$. l_4 проекциясы l және 2 нүктелердің көмегі арқылы тұрғызылған. Жаңа жүйе осі l_2 -ге параллель жүргізіліп, $l_2, 2_2$



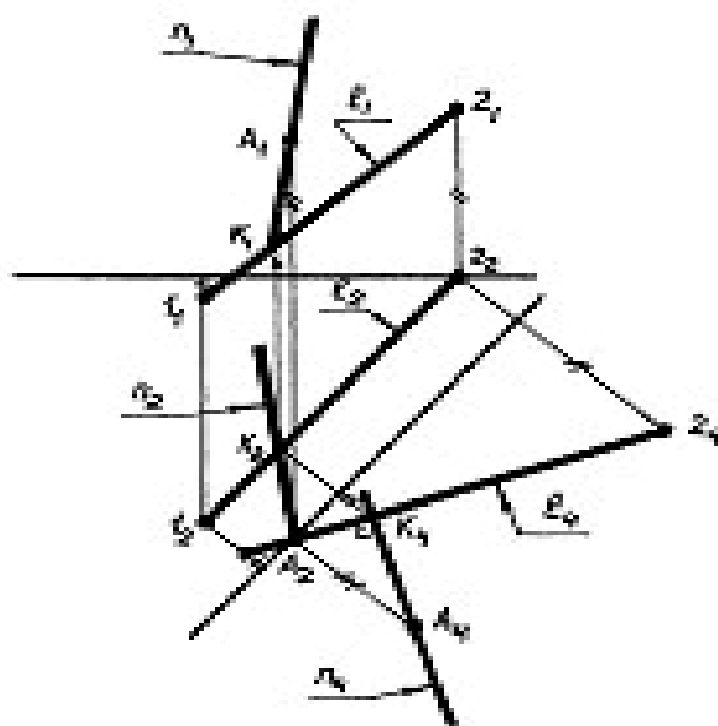
59-сурет



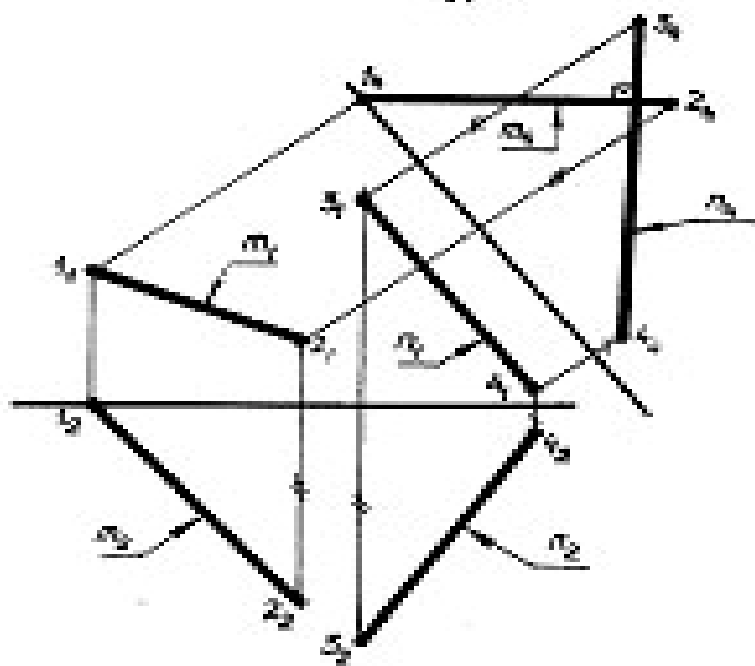
60-сурет



61-сурет



62-сурет



63-сурет

проекциялардан тік жаңа оське байланыс түзулері жүргізілген. Олардың бойына осы нүктелердің фронталь проекцияларымен абсцисса осінің қашықтығы өлшеніп 1_4 және 2_4 проекциялары тұрғызылған $1_4 2_4 = l_4$. Осы

жолмен A_4 -те тұрғызылған. Енді есептің талап етіп отырған түзуінің жаңа проекциялар жазықтығындағы проекциясы A_4 -тен l_4 -ке перпендикуляр етіп жүргізіледі, $n_4 \perp l_4 = K_4$. n түзуінің n_2 және n_1 проекциялары K нүктесінің көмегімен тұрғызылған. Ол үшін K_4 проекциядан есептің шешу жолына кері байланыс түзулері жүргізіліп, K_2 одан кейін K_1 тұрғызылып $A_2K_2=n_2$, $A_1K_1=n_1$ есептің шешімі аяқталады.

Сонымен A нүктесі арқылы тұрғызылған n түзуі және берілген l түзуі K нүктеде тік бұрышпен қиылысып екеуі де кеңістікте жалпы жағдайда орналасқан.

Келесі мысалда (63-сурет) m және n түзулері берілген. Енді осы түзулер өзара перпендикуляр орналасқан ба? - деген сұраққа жауап іздеп көрейік. Берілген түзулердің проекциялары x осіне параллель емес. Олай болса екеуі де кеңістікте жалпы жағдайда орналасқан. Сұрақтың жауабы берілген m не n түзулерінің біреуін деңгей түзуі жасағанда табылады. Горизонталь проекциялар жазықтығы π_2 жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -ке алмастырылған

Жаңа ось n түзуіне параллель жүргізіліп m түзуінің 1-2 нүктелерінің көмегімен, n түзуінің 3-4-нүктелерінің көмегімен жаңа проекциялар жазықтығындағы m және n түзулерінің проекциялары m_4 және n_4 тұрғызылған. Жаңа π_1/π_4 жүйеде n деңгей түзуіне айналды. m_4 және n_4 проекциялары өзара перпендикуляр. Олай болса кеңістікте жалпы жағдайда орналасқан m және n түзулері өзара тік бұрышпен айқаса орналасқаны анықталды.

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы

Егер түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, онда ол сол жазықтықтың екі қиылысу түзуіне перпендикуляр болатынын бізге геометриядан белгілі. Олай болса, сол жазықтықтың кез келген түзуіне, солардың ішінде жазықтықтың фронталь және горизонталь түзулеріне перпендикуляр болады.

Сызба геометрияда бұл түсінік түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы туралы теорема деп аталып төмендегіше айтылады.

Теорема: Түзу мен жазықтық өзара перпендикуляр болса, онда түзудің фронталь проекциясы жазықтықтың фронталь түзуінің фронталь проекциясына, горизонталь проекциясы жазықтықтың горизонталь түзуінің горизонталь проекциясына перпендикуляр болады.

Теорема жоғарыда қарастырылған өзара перпендикуляр түзулер арқылы дәлелденеді. 62- және 63- суреттерде шығарылған есептерге қайтып оралып, оларды түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығын қолданып шығаруға да болады екен. 62-суретте A нүктесі арқылы жалпы жағдайда орналасқан l түзуімен тік бұрыш жасап қиылысатын түзу тұрғызу керек болатын. Енді 64-суретке көшсек A нүктесі арқылы берілген l түзуіне перпендикуляр етіп жазықтық тұрғызылған. Жазықтық түзуге перпендикуляр болғандықтан сол жазықтықта жатқан кез келген түзулердің бәрі де осы түзуге перпендикуляр болады. Олай болса жазықтық фронталь және горизонталь түзулерімен беріліп немесе $\omega(f \cap h)$, A нүктесінен фронталь түзудің горизонталь проекциясы $f_2 \parallel x$

фронталь проекциясы $f_1 \perp l_1$, горизонталь түзудің фронталь проекциясы $h_1 \parallel x$ горизонталь проекциясы $h_2 \perp l_2$ -ге жүргізіледі. Сонда $\omega(f \cap h) \perp l$ болғандықтан олар бір нүктеде қиылысады. Есептің шарты бойынша сұрап отырған түзу осы қиылысу нүктесімен A нүктесі арқылы өтуге тиіс. Қиылысу нүктесін тұрғызу үшін ω жазықтығының түзуі a берілген l түзуімен фронталь бәсекелес $a_1 \equiv l_1$ орналасқан деп қарастырылып оның 1-2-нүктелерінің көмегімен тұрғызылған горизонталь a_2 проекциясы l_2 проекциясымен K_2 -де қиылысады. K_2 арқылы K_1 тұрғызылады. $K_2 A_2$ арқылы n_2 және $K_1 A_1$ арқылы n_1 проекциялары жүргізіледі. Сонымен 62-суреттегі есептің шешіміндегідей l түзуімен перпендикуляр қиылысып жалпы жағдайда орналасқан n түзуі тұрғызылды. 63-суретте жалпы жағдайда орналасқан m және n түзулері өзара перпендикуляр орналасқан ба? - деген сұрақтың сызбаларды түрлендіру арқылы жауабы ізделген. Енді оны басқа жолмен қарастырайық.

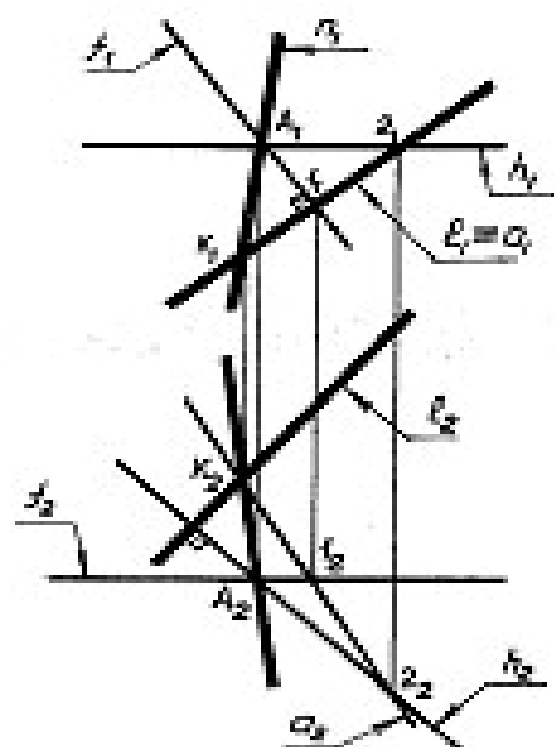
Егер екі түзу өзара перпендикуляр болса, онда олардың біреуінен екіншісіне перпендикуляр жазықтық тұрғызуға болады.

65-суретте m түзуінің A нүктесінен ω жазықтығын құрайтын фронталь f және горизонталь h түзулері жүргізілген. Олар A_2 арқылы байланыс түзулеріне перпендикуляр бағытта f_2 , оның фронталь проекциясы A_1 арқылы n түзуінің n_1 проекциясына перпендикуляр f_1 жүргізілген. Горизонталь h түзудің фронталь проекциясы h_1 A_1 арқылы байланыс түзулерге перпендикуляр, горизонталь проекциясы A_2 арқылы n түзуінің n_2 проекциясына перпендикуляр жүргізілген.

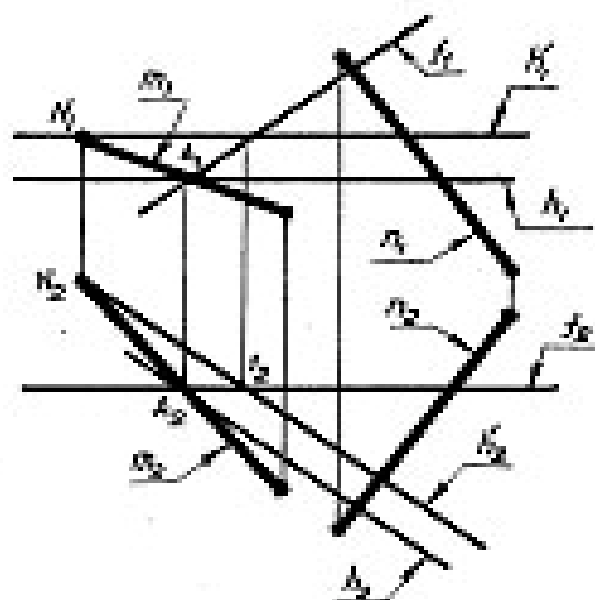
A нүктесі арқылы тұрғызылған $\omega(f \cap h)$ жазықтығы n түзуіне перпендикуляр болады. Себебі n түзуі жазықтықтың екі қиылысу түзуіне (f және h) перпендикуляр. Енді m түзуі ω жазықтығына тиістілігі анықталады. Түзу жазықтыққа тиісті болса, онда оның кем дегенде екі нүктесі жазықтыққа тиісті болуы қажет. m түзуінің бойынан N нүктесі алынып, оның фронталь проекциясы N_1 -ден жазықтықтың горизонталь түзуінің фронталь проекциясы h_1' жүргізілген. h_2' l_2 проекция арқылы h_2 -ге параллель жүргізілгенде N_2 арқылы өткен. Олай болса N нүктесі h' түзуіне тиісті, ал ол жазықтықтың түзуі. m түзуінің A және N нүктелері ω жазықтығына тиісті болғандықтан, түзудің өзі сол жазықтыққа тиісті, ал жазықтық екінші n түзуіне перпендикуляр.

Сонымен m түзуі арқылы n түзуіне перпендикуляр жазықтық тұрғызылғандықтан m және n түзулері өзара перпендикуляр болады. Егер перпендикуляр жазықтық тұрғыза алмаған жағдайда екі түзу өзара перпендикуляр болмайды.

D нүктесі арқылы $\omega(ABC)$ жазықтығына перпендикуляр орналасқан түзу тұрғызу керек (66а-сурет).



64-супет



65-супет

ω жазықтығында фронталь және горизонталь түзулері тұрғызылады. Фронталь түзуі f A_2 арқылы байланыс түзулеріне перпендикуляр f_2 проекциясы жүргізіліп A_1 және I_1 проекциялар арқылы f_1 тұрғызылған. Горизонталь түзуі h C_1 арқылы байланыс түзулеріне перпендикуляр h_1 проекциясы, C_2 және 2_2 проекцияларының көмегімен h_2 тұрғызылған. Енді D_1 проекциядан f_1 -ге перпендикуляр етіп d_1 проекциясын, D_2 -ден h_2 -ге перпендикуляр етіп d_2 проекциясы жүргізіледі. Сонымен D нүктесі арқылы жүргізілген d түзуі ω жазықтығына перпендикуляр орналасады. Себебі d түзуі ω жазықтығының фронталь f және горизонталь h екі түзуіне перпендикуляр.

Осы есептің шешімін проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілімен қарастырайық (66б-сурет). Түрлендірудің негізгі үшінші есебінің шешімін қолданып, жалпы жағдайда берілген ω жазықтығы проекциялаушы жазықтыққа келтіріледі. Ол үшін фронталь проекциялар жазықтығы π_1 жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -ке алмастырылған. π_2/π_4 жүйедегі жаңа ось жазықтықтың горизонталь түзуінің горизонталь проекциясына перпендикуляр бағытталған ω жазықтығының π_4 -тегі проекциясы $A_4B_4C_4$ түзу түрінде проекцияланады. D_4 -тен $A_4B_4C_4$ -ке перпендикуляр етіп d_4 проекциясы жүргізіледі. d_4 проекциясының бойынан алынған 2_4 проекциясының көмегімен 2_2 және 2_1 проекциялары тұрғызылған. $2_2 D_2 = d_2$, d_2 жаңа оське параллель орналасады. 2_1 проекция мен x осінің қашықтығы 2_4 проекциясы мен жаңа осьтің қашықтығына тең, $2_1 D_1 = d_1$.

Егер түзуге одан тыс орналасқан нүкте арқылы перпендикуляр жазықтық тұрғызу қажет болған жағдайда да жазықтықты фронталь және горизонталь түзулері арқылы берілгені ыңғайлы (67-сурет). S нүктесі арқылы m түзуіне перпендикуляр орналасқан жазықтық тұрғызылған. Екі түзудің перпендикулярлық белгісіне сәйкес $f \perp m$ және $h \perp m$, сондықтан $\sigma(f \cap h) \perp m$.

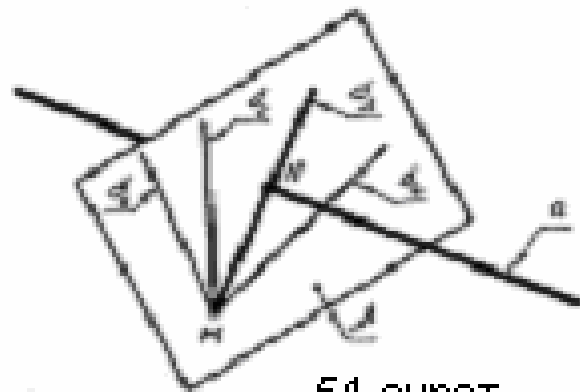
Өзара перпендикуляр жазықтықтар

Егер екі жазықтық өзара перпендикуляр болса, онда оның біреуі екіншіге перпендикуляр арқылы өтеді. Басқаша айтқанда екі жазықтықтың біреуі екіншісінде жатқан түзуге перпендикуляр болса, онда олар өзара перпендикуляр болады.

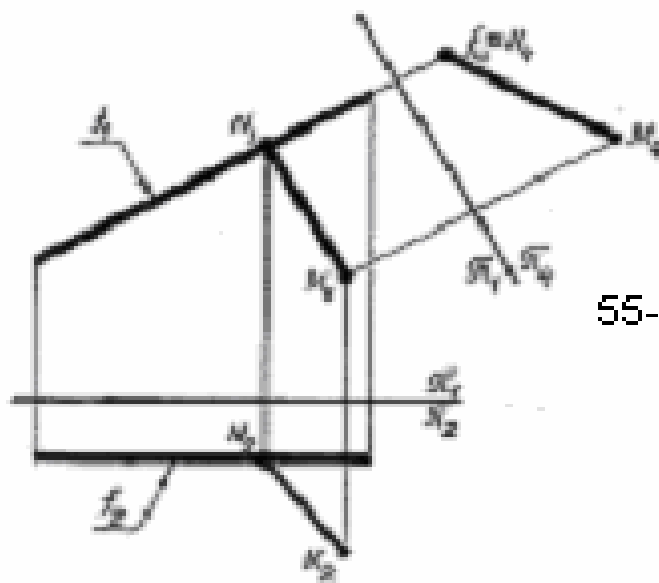
Мұндай есепті екі әдіспен шығаруға болады. Не түзу арқылы екінші жазықтыққа перпендикуляр жазықтық тұрғызылады, не жазықтық екінші жазықтықта жатқан түзуге перпендикуляр тұрғызылады.

Сонымен екі жазықтықтың перпендикулярлығы туралы есеп - түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы туралы есептің шешімімен орындалады.

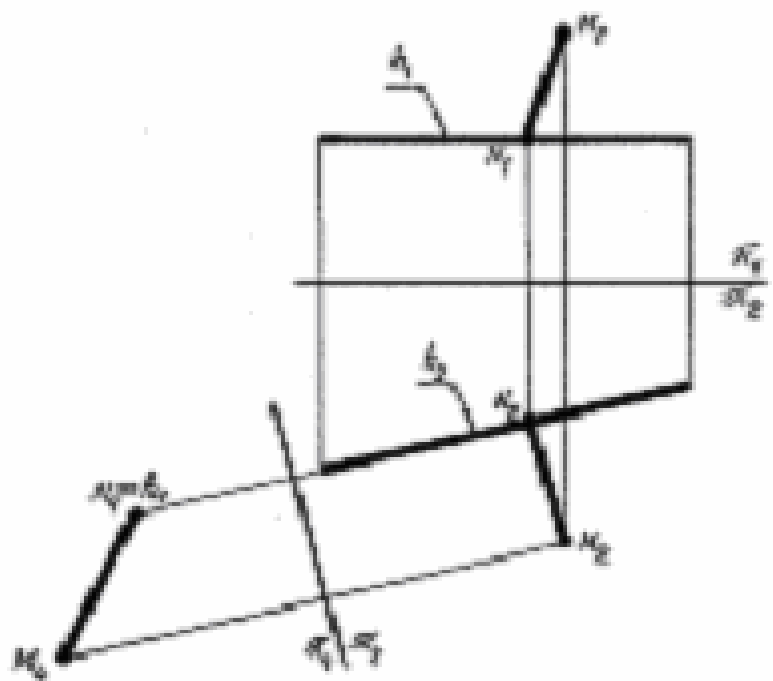
Егер нүкте арқылы жазықтыққа перпендикуляр жазықтық жүргізу қажет болса, онда қосымша жағдай берілуі қажет. Себебі нүкте арқылы сансыз көп жазықтықтар тұрғызуға болады, олардың бәрі перпендикуляр арқылы өтеді.



54-сурет



55-сурет



56-сурет

$\sigma(A, d)$ жазықтығына n түзуі арқылы перпендикуляр жазықтық тұрғызу керек (68-сурет). σ жазықтығында кез келген фронталь және горизонталь түзулері тұрғызылады. n түзуінен K нүктесі белгіленіп, сол нүктенің K_1 проекциясынан $m_1 \perp f_1$ -ге, K_2 проекциясынан $m_2 \perp h_2$ -ге жүргізіледі. Сонда m түзуі σ жазықтығының екі қиылысу түзулері $f \cap h$ -қа перпендикуляр болады. Олай болса берілген $\sigma(A, d)$ жазықтығы және тұрғызылған $\omega(n \cap m)$ жазықтығы өзара перпендикуляр болады.

Өлшеу есептері

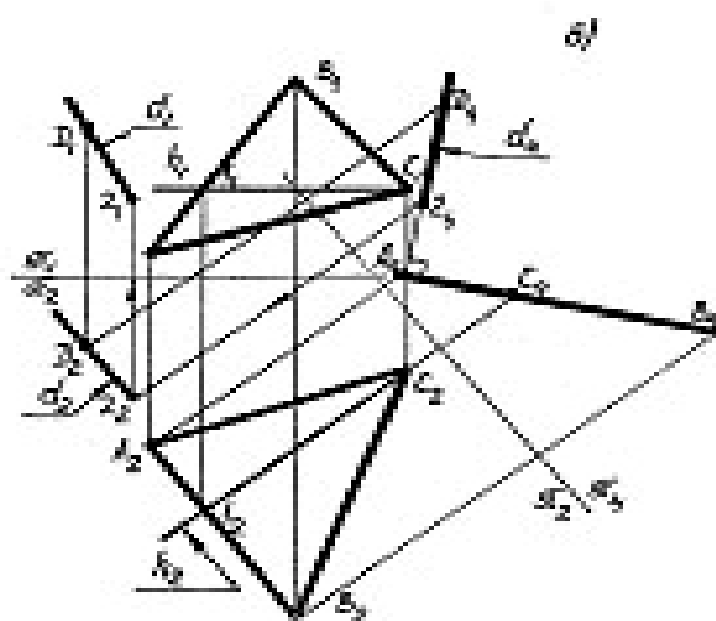
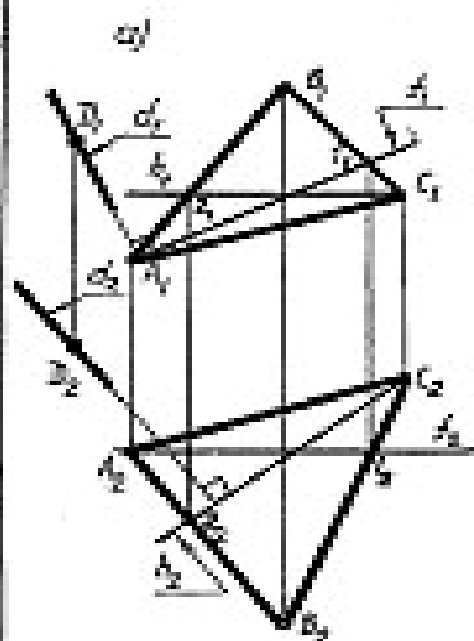
Қандай да болмасын мүсіннің кескіндерін көрсетуде оның басты элементтерін дербес жағдайда көрсету қажет. Ал барлық элементтерінің дербес жағдайын қамтамасыз ету ердайым мүмкін болмайды. Жалпы жағдайда орналасқан элементтердің нақты көріністері, өлшемдері өзгереді. Мұндай жағдайда олар әртүрлі жолдармен дербес жағдайға келтіріледі.

Күнделікті дағдыда өлшеуге байланысты есептер шығаруға тура келеді. Олар: екі нүктенің ара қашықтығын, нүкте мен түзудің ара қашықтығын, нүкте мен жазықтықтың ара қашықтығын, екі жазықтықтың ара қашықтығын табу. Сол сияқты әртүрлі геометриялық элементтердің өзара бұрыштарын, олардың проекциялар жазықтықтарымен көлбеу бұрыштарын және жазық мүсіндердің шынайы шамасын анықтау сияқты есептер.

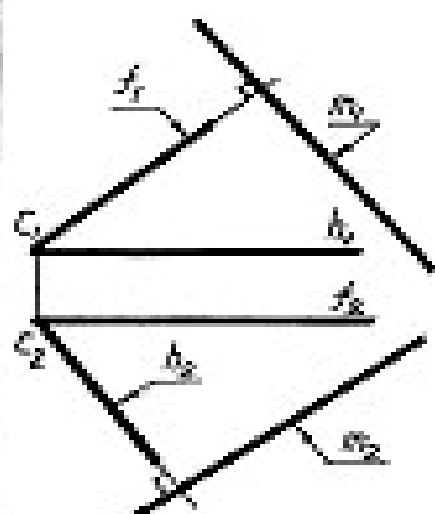
Қашықтықты анықтау

Екі нүктенің ара қашықтығы сол нүктелерді түзумен қосқандағы кесіндіге тең. Егер кесінді жалпы жағдайда болса, онда сызбаны түрлендірудің негізгі бірінші есебі қолданылып, кесінді деңгей жағдайға келтіріледі.

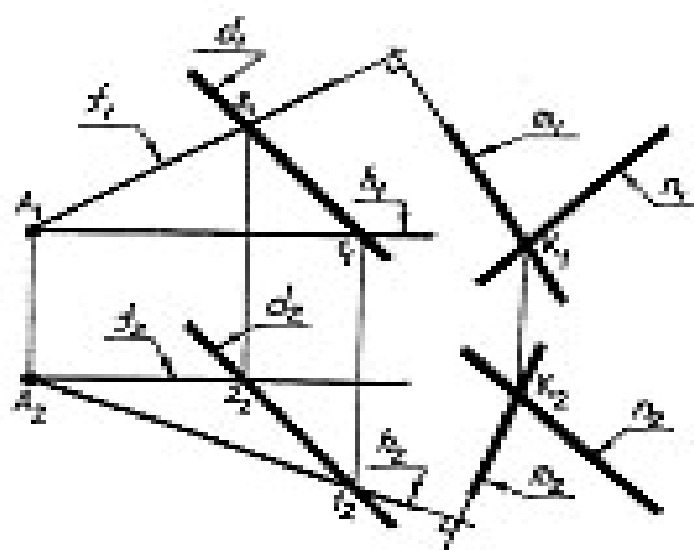
Нүкте мен түзудің ара қашықтығы - нүктеден түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығына тең (54-сурет). Жалпы алғанда M нүктесі арқылы a түзуіне перпендикуляр жазықтық тұрғызылады. σ жазықтығының кез келген түзулері (b, c, d, e) түзуге перпендикуляр орналасып, олардың ішінде тек біреуі ғана a түзуімен қиылысады, $d \cap a = N$. Қиылысу нүктесі N перпендикулярдың табаны болып есептеледі. Егер берілген түзу деңгей түзуі болса, онда сызбаны түрлендірудің негізгі екінші есебінің шешімі қолданылады. 55-сызбада M нүктесі мен f фронталь түзудің ара қашықтығы анықталған. Берілген түзу фронталь түзуі болғандықтан M нүктесі арқылы осы түзуге жүргізілетін f перпендикулярдың фронталь проекциясы өзара перпендикуляр болады $M_1 N_1 \perp f_1$. $M_2 N_2$ перпендикулярдың горизонталь проекциясы. $/N_4 M_4/ f$ түзуі мен M нүктесінің іздеп отырған қашықтығына тең. 56-сызбада берілген түзу горизонталь түзуі болғандықтан M нүктесі арқылы h түзуіне перпендикулярдың горизонталь проекциялары өзара перпендикуляр



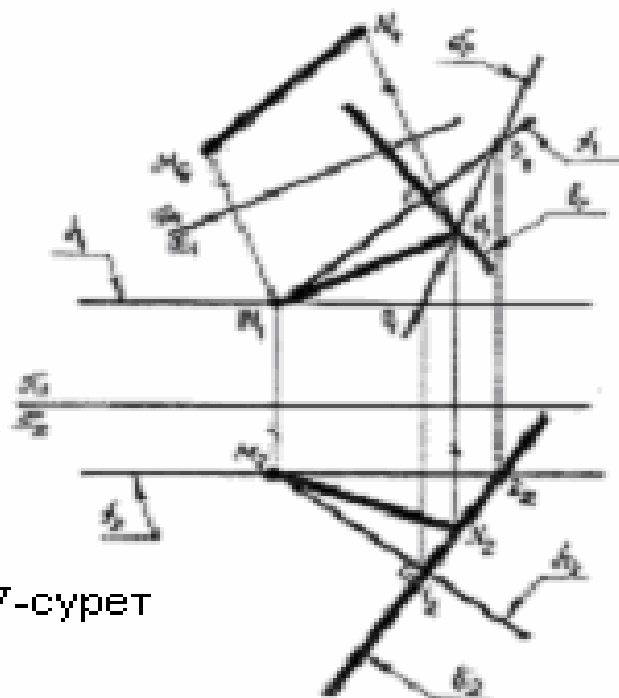
66-супер



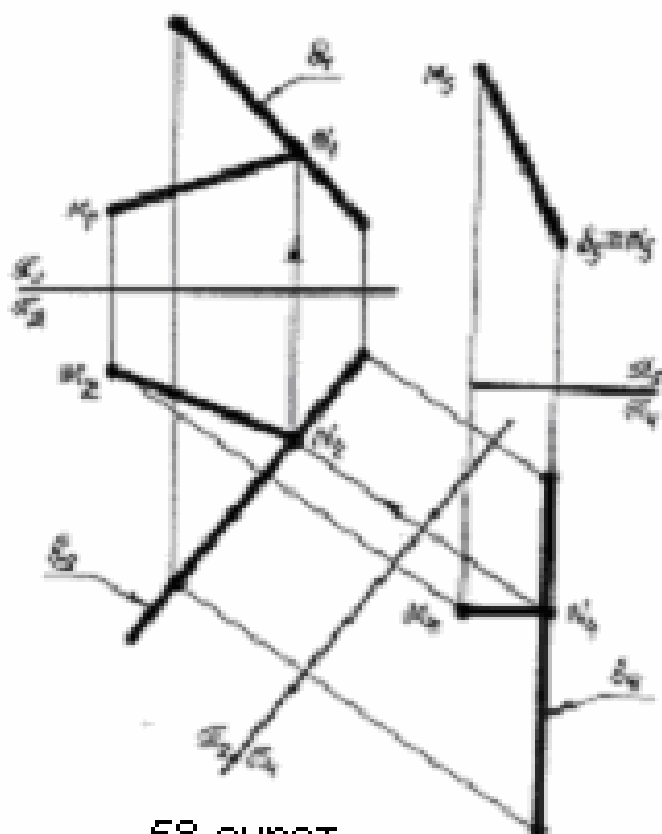
67-супер



68-супер



57-сурет



58-сурет

орналасады, $M_2N_2 \perp h_2$. Одан кейін N_1M_1 тұрғызылады. $/N_4M_4/ h$ горизонталь түзуі мен M нүктесінің нақты қашықтығына тең. N_1M_1 және

N_2M_2 нақты қашықтықтың сәйкес фронталь және горизонталь проекциялары.

57-суретте M нүктесі мен жалпы жағдайда орналасқан b түзуінің ара қашықтығы анықталған. Ол ара қашықтық M нүктесінен b түзуіне түсірілген перпендикуляр болып табылады. M нүктесі арқылы b түзуіне перпендикуляр жазықтық тұрғызылған, ол фронталь f және горизонталь h түзулері арқылы берілген $\sigma \in (f \cap h) \perp b$. Жазықтық пен түзудің қиылысу нүктесі, d түзуінің көмегімен табылған, $d \in \sigma$. d түзуінің горизонталь проекциясы $d_2 \equiv b_2$ деп $l_2, 2_2$ проекциялары арқылы $l_1, 2_1$ проекциялары тұрғызылған $l_1, 2_1 = d_1$, $d_1 \cap b_1 = N_1$ одан кейін N_2 проекциясы анықталады. Перпендикулярдың фронталь проекциясы M_1N_1 , горизонталь проекциясы M_2N_2 болады. Енді горизонталь проекциялар жазықтығын жаңа проекциялар жазықтығына алмастырып перпендикулярдың нақты ұзындығына тең $/M_4N_4/$ тұрғызылған. Сонымен M нүктесінен b түзуіне дейінгі қашықтық $/M_4N_4/$ -ке тең.

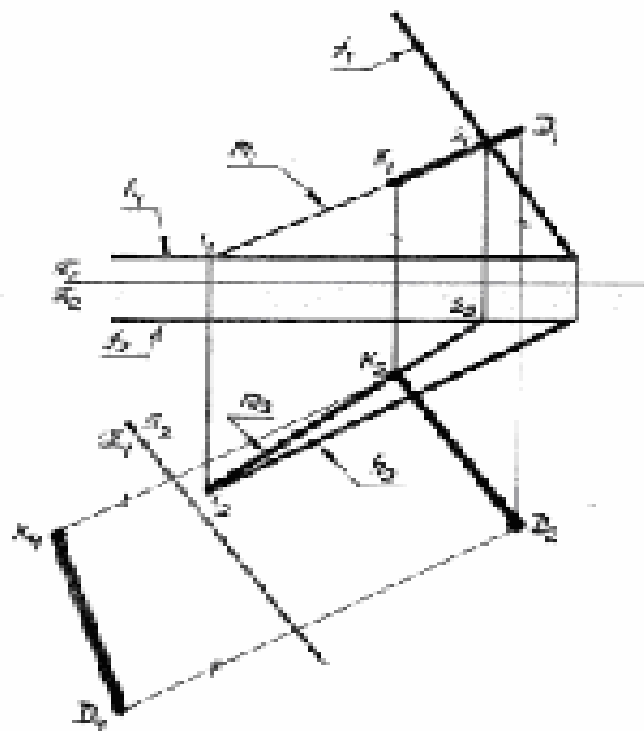
Бұл есептің жауабы M нүктесінен перпендикуляр жазықтық тұрғызбай-ақ бірден түрлендіріп сол жауапты алуға болады (58-сурет). Фронталь проекциялар жазықтығы π_1 -ді жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -ке алмастырып, түрлендірудің бірінші есебінің шешімімен b деңгей түзуі жасалады. Енді горизонталь проекциялар жазықтығы π_2 -ні келесі жаңа проекциялар жазықтығы π_5 -ке алмастырып, түрлендірудің екінші есебінің шешімімен b түзуі проекциялаушы түзуге келтірілген. Еске алатын жағдай, π_4/π_5 жүйеге көшкенде енді ескі жүйе болып π_2/π_4 есептеледі. Сондықтан жаңа осьпен M_5 -тің қашықтығы π_2/π_4 жүйе осімен M_2 -ге тең. Сол сияқты b_5 тұрғызылады. $/N_5M_5/$ проекциясы іздеп отырған M нүктесі мен b түзуінің ара қашықтығына тең. Ара қашықтықтың проекцияларын көрсету есептің шешуіне кері қарай орындалып тұрғызылады. M_4N_4 π_4/π_5 жүйенің осіне параллель орналасады. Одан кейін N_2 және N_1 проекциялары тұрғызылады. M_2N_2 және M_1N_1 ара қашықтықтың сәйкес горизонталь және фронталь проекциялары.

Нүкте мен жазықтықтың ара қашықтығы, нүкте арқылы жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығына тең (59-сурет). $\sigma(f \cap h)$ жазықтығы және D нүктесі берілген. Екеуінің ара қашықтығын табу керек. D нүктесінен жазықтыққа перпендикуляр тұрғызылады, оның фронталь проекциясы D_1 арқылы f_1 -ге, ал горизонталь проекциясы D_2 арқылы h_2 -ге перпендикуляр болады. Тұрғызылған перпендикуляр мен σ жазықтығының қиылысу нүктесі тұрғызылады. Ол үшін σ жазықтығының m түзуінің фронталь проекциясы перпендикулярдың фронталь проекциясымен сәйкес орналасқан деп қарап, $l_1, 2_1$ проекциялары арқылы $l_2, 2_2 = m_2$ тұрғызылған. m_2 D_2 ден жүргізілген перпендикулярдың проекциясымен K_2 -де қиылысады. Одан кейін K_1 тұрғызылады. Сонымен D_1K_1 және D_2K_2 - D нүктесі мен σ жазықтығының ара қашықтығының сәйкес фронталь және горизонталь проекциялары. Оны түрлендіріп D_4K_4 тұрғызылады. $/D_4K_4/ = /DK/$.

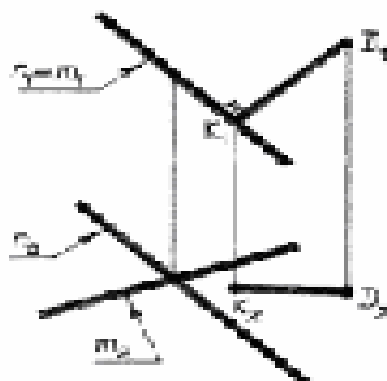
Бұл есепті басқаша шешуге болады, бірақ оған дейін 60-суретте берілген есепті қарастырайық. Берілген $\sigma(m \cap n)$ жазықтығы фронталь проекциялаушы жағдайда орналасқан $\sigma \perp \Pi_1$. D нүктесімен σ жазықтығының ара қашықтығын табу керек. Фронталь проекциялаушы жазықтыққа перпендикуляр түзу фронталь проекциялар жазықтығына параллель болады. Сондықтан D_1 проекциядан $n_1 \equiv m_1$ -ге жүргізілген перпендикуляр нақты ұзындықты көрсетеді. Перпендикулярдың горизонталь проекциясы $D_2 K_2$ байланыс түзулеріне перпендикуляр болады. Сонымен D нүктесі мен σ жазықтығының ара қашықтығы $/D_1 K_1/$ -ге тең. Ал 61-суретте $\sigma(d \cap e)$ жазықтығы горизонталь проекциялаушы жазықтық болғандықтан D нүктесі мен σ жазықтығының ара қашықтығы, D_2 проекциясынан $d_2 \equiv e_2$ -ге перпендикуляр жүргізу арқылы K_2 табылады. $/D_2 K_2/$ -ізделініп отырған ара қашықтықты көрсетеді. Себебі горизонталь проекциялаушы жазықтыққа жүргізілген перпендикуляр горизонталь проекциялар жазықтығына параллель болады. Ал оның фронталь проекциясы $D_1 K_1$ байланыс түзулеріне перпендикуляр орналасады.

Сонымен берілген жазықтық проекциялаушы жағдайда берілсе есептің шешімі жеңіл табылады. Ендеше 59-суреттегі $\sigma(f \cap h)$ жазықтығын проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілімен проекциялаушы жағдайға әкелуге болады. 62-суретте π_1/π_2 жүйеден π_2/π_4 жүйеге көшірілген. π_4 проекциялар жазықтығында σ жазықтығы проекциялаушы жағдайға келген. D_4 проекциядан $f_4 \equiv h_4$ -ке перпендикуляр жүргізіліп K_4 проекциясы тұрғызылған. Одан кері байланыс түзін жүргізіп K_2 және K_1 проекциялары белгіленген. $K_1 D_1$ және $K_2 D_2$ D нүктесі мен σ жазықтығының ара қашықтығының фронталь және горизонталь проекциялары. $/D_4 K_4/$ есептің шартымен ізделініп отырған D нүктесімен σ жазықтығының ара қашықтығы.

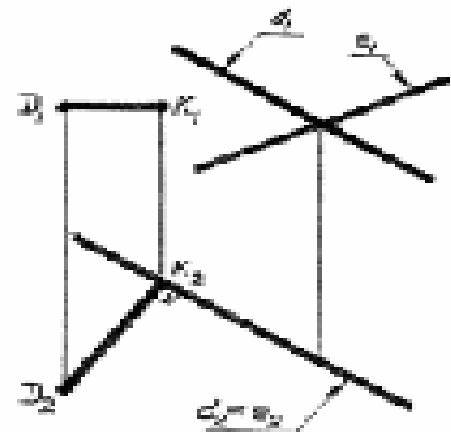
Өзара параллель түзулердің ара қашықтығы біреуінің кез келген нүктесінен екіншісіне тұрғызылған перпендикулярдың ұзындығымен өлшенеді. Перпендикулярдың ұзындығы нақты болу үшін, параллель түзулер проекциялаушы түзулер не бір деңгей жазықтықта жатулары қажет.



59-сурет

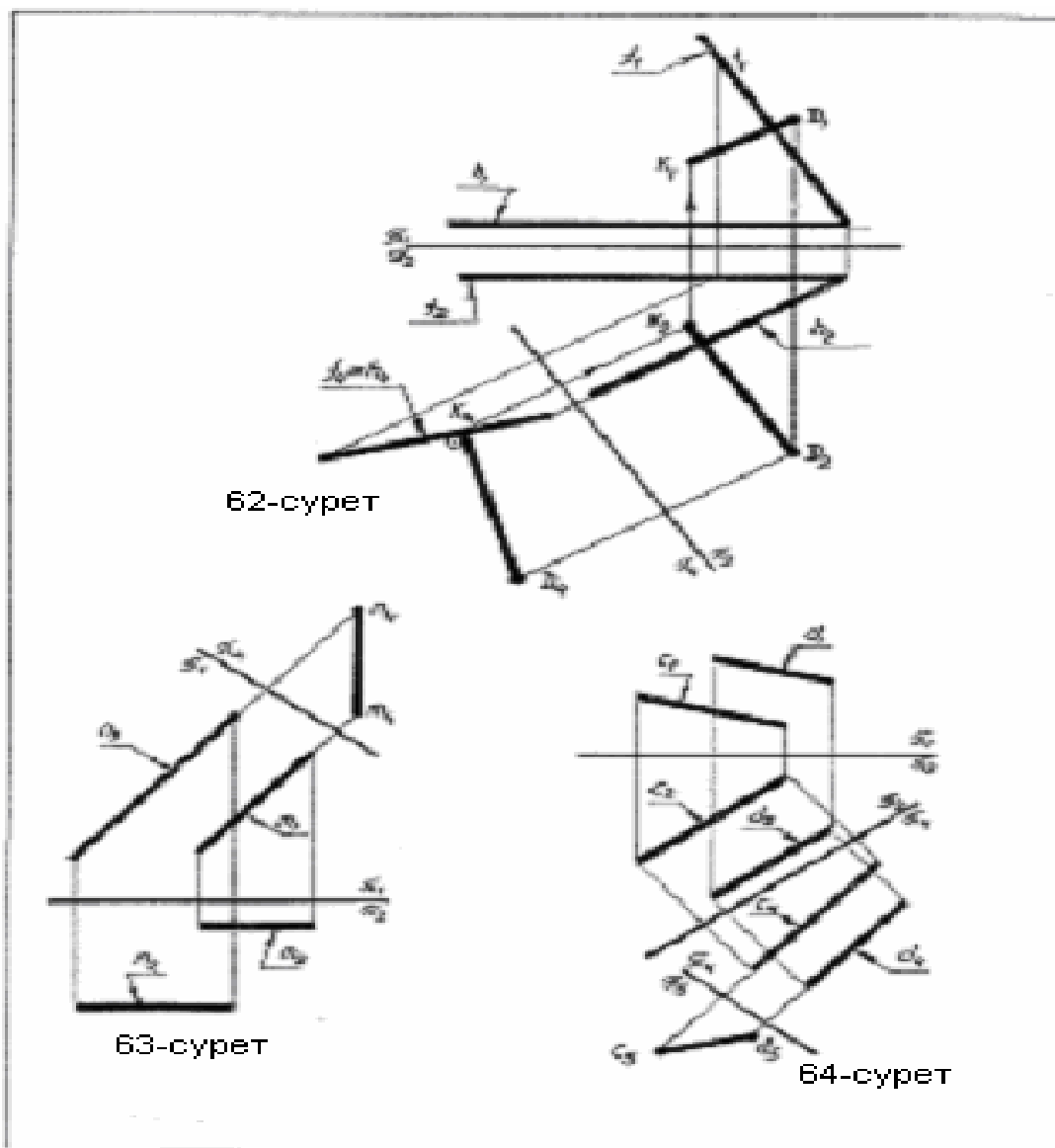


60-сурет



61-сурет

Егер параллель түзулер деңгей түзулері болса, онда бір рет түрлендіріліп проекциялаушы жағдайға әкелінеді (63-сурет). n және m түзулері фронталь түзулері болғандықтан горизонталь проекциялар жазықтығы π_2 жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -ке алмастырылған. Жаңа π_1/π_4 жүйеде түзулер проекциялаушы жағдайға көшкен. $|n_4 m_4|$ екі түзудің ара қашықтығы болады.



Егер параллель түзулер кеңістікте жалпы жағдайда орналасса, онда сызбаны екі рет түрлендіруге тура келеді (64-сурет). Ретімен бірінші және екінші негізгі есептердің шешімдері қолданылып, деңгей одан кейін проекциялаушы түзулер жасалады. Бірінші түрлендіруде π_1 проекциялар жазықтығы π_4 проекциялар жазықтығына алмастырылып c_4d_4 проекциялары тұрғызылған, екінші түрлендіруде π_2 проекциялар жазықтығы π_5 проекциялар жазықтығына алмастырылып π_4/π_5 жүйе алынған. Осы жүйеде c және d түзулері проекциялаушы жағдайда орналасқан. Тұрғызылған $|c_5d_5|$ екі параллель түзудің ара қашықтығы болады.

Айқас орналасқан түзулердің ара қашықтығы екі түзуге перпендикуляр болатын түзуге тең. Егер перпендикуляр екі параллель түзулерде өте көп болса, ол айқас түзулерде жалғыз. Екі айқас орналасқан түзудің біреуі проекциялаушы болса, онда екеуінің арасындағы перпендикуляр проекциялар жазықтықтарының біріне параллель болады. 65-суретте өзара айқас орналасқан n және m түзулері берілген, $n \neq m$. n түзуі фронталь проекциялаушы, ал m түзуі жалпы жағдайда орналасқан. Перпендикулярдың фронталь проекциясы m_1 проекциясымен тік бұрыш жасайды, $D_1K_1 \perp m_1$ және

DK перпендикуляры фронталь проекциялар жазықтығына параллель болғандықтан D_1K_1 нақты ұзындықты көрсетеді. Оның горизонталь проекциясы D_2K_2 байланыс түзулеріне перпендикуляр бағытталады. Сонымен DK перпендикуляр түзуі n түзуіне де m түзуіне де перпендикуляр болады.

Өзара айқас орналасқан түзулердің біреуі деңгей орналасса, онда сол түзуді проекциялаушы түзуге айналдыру қажет (66-сурет). Берілген f фронталь, d жалпы жағдай түзулері. π_1/π_2 жүйеден π_1/π_4 жүйеге көшіп жаңа ось f_1 -ге перпендикуляр жүргізілген. Сызбаларды түрлендіру ережесін орындай отырып f_4 және d_4 проекциялар тұрғызылған. $f_4 \perp d_4 = K_4$ және f_4 проекцияның бойынан D_4 белгілеп, DK перпендикулярдың фронталь горизонталь проекциялары тұрғызылған. D_1K_1 жаңа оське параллель орналасады. f және d түзулерінің ара қашықтығы $|D_4K_4|$ -ке тең. D_1K_1 және D_2K_2 ара қашықтықтың сәйкес фронталь және горизонталь проекциялары. Өзара айқас орналасқан және екеуі де жалпы жағдай түзулері болса, олардың ара қашықтығын табу үшін түрлендірудің бірінші және екінші негізгі есептерінің шешімдерін қолдану қажет етеді (67-сурет). Түзулердің біреуі деңгей одан кейін проекциялаушы түзуге келтіріледі. π_1 проекциялар жазықтығы π_4 проекция жазықтығына алмастырылып, жаңа жүйе осі m_2 проекцияға параллель жүргізілген. Жаңа жүйеде m түзуі деңгей орналасқан. Екінші рет түрлендіруде π_2 проекциялар жазықтығы π_5 проекциялар жазықтығына алмастырылған. π_4/π_5 жүйесіндегі ось m_4 -ке перпендикуляр енгізілген. Сонымен ізделініп отырған ара қашықтық D_5K_5 –ке тең болады. Есепті шешу бағытына қарсы проекциялар түзулерін жүргізіп D_4K_4 , D_2K_2 және D_1K_1 проекциялары тұрғызылады.

Егер параллель түзу мен жазықтықтың ара қашықтығын анықтау қажет болған жағдайда, түзудің бойынан кез келген нүкте алып сол нүктемен жазықтықтың ара қашықтығы анықталады. Мұндай есептер жоғарыда қарастырылды.

Параллель орналасқан жазықтықтардың да ара қашықтығы осылай табылады. Жазықтықтардың бірінен нүкте алып, сол нүктемен екінші жазықтықтың ара қашықтығы тұрғызылады.

Бұрышты анықтау

Жалпы жағдайда түзудің проекциялар жазықтықтарына көлбеу бұрыштары сызбаны түрлендіру арқылы анықталады. Ал түзу деңгей жағдайда болса: егер ол фронталь түзуі болса оның фронталь проекциясынан горизонталь проекциялар жазықтығымен және профиль проекциялар жазықтығымен жасап жатқан бұрыштар анықталады егер; горизонталь түзуі болса оның горизонталь проекциясынан, фронталь және профиль проекциялар жазықтықтарымен жасап жатқан бұрыштар анықталады; егер профиль түзуі болса оның профиль проекциясынан, фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарымен жасап жатқан бұрыштарды бірден анықтауға болады.

Жалпы жағдай түзуінің фронталь проекциялар жазықтығымен көлбеу бұрышын анықтау керек болған жағдайда горизонталь проекциялар жазықтығы, ал оның горизонталь проекциялар жазықтығымен көлбеу бұрышын анықтау қажет болған жағдайда фронталь проекциялар жазықтығы алмастырылады.

Сонымен түзудің проекциялар жазықтықтарына көлбеу бұрыштары сызбаны түрлендірудің негізгі бірінші есептің шешімін қолдану арқылы анықталады.

Жазықтықтың проекциялар жазықтықтарына көлбеу бұрыштары да жоғарыдағыдай анықталады. Егер: жазықтық фронталь проекциялаушы болса, онда оның горизонталь және профиль проекциялар жазықтықтарымен; горизонталь проекциялаушы болса, онда оның фронталь және профиль проекциялар жазықтықтарымен; профиль проекциялаушы болса, онда оның фронталь және горизонталь проекциялар жазықтықтарымен жасап жатқан көлбеу бұрыштары сызбадан бірден анықталады. Жалпы жағдай жазықтығының фронталь проекциялар жазықтығымен жасап жатқан бұрышты анықтау горизонталь проекциялар жазықтығын алмастыру арқылы, ал горизонталь проекциялар жазықтығымен жасап жатқан бұрышты анықтау фронталь проекциялар жазықтығын алмастыру арқылы тұрғызылады.

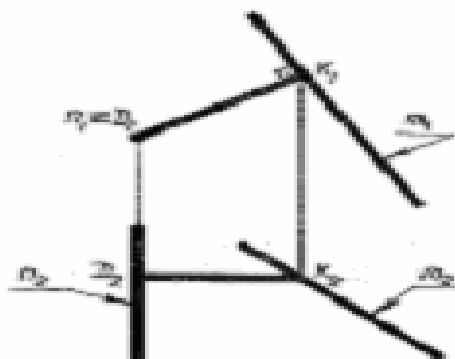
Сонымен мұндай есептер сызбаны түрлендірудің негізгі үшінші есебінің жолымен шығарылады.

Екі қиылысу не айқасу түзулерінің ара бұрыштары түзулер құрайтын жазықтыққа параллель жазықтыққа өзгеріссіз проекцияланады.

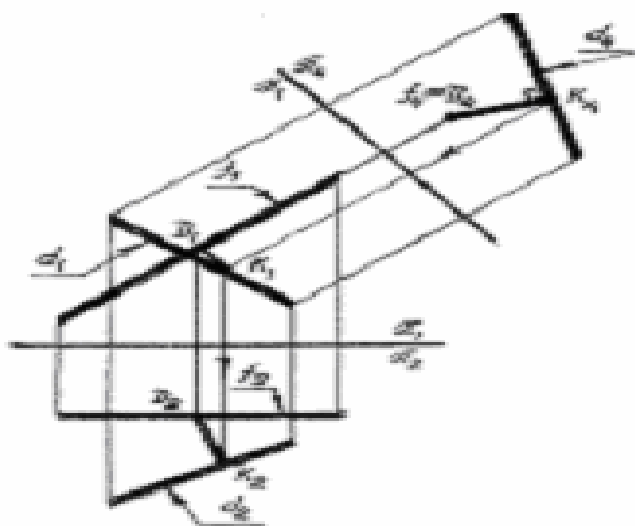
Жалпы жағдайда орналасқан a және b түзулерінің арасындағы бұрышты анықтау керек (68-сурет).

a және b түзулері бір жазықтық құраса, онда ол жазықтық кеңістікте жалпы жағдайда орналасады, себебі a және b түзулері кеңістікте жалпы жағдайда орналасқан. Олай болса сол жазықтықтағы бұрыштың проекциялары өзгеріп проекцияланады. a және b түзулерінің арасындағы бұрыштың нақты өлшемін осы екі түзу құрайтын $\sigma(a \cap b)$ жазықтығын деңгей жазықтық жасағанда көруге болады. 68-суретте π_1/π_4 жүйе осі σ жазықтығының фронталь түзуінің фронталь проекциясы f_1 -ге перпендикуляр жүргізілген, немесе π_4 жаңа проекциялар жазықтығы π_2 проекциялар жазықтығын алмастырып σ жазықтығына перпендикуляр енгізілген. Сондықтан $a_4 \equiv b_4$ -немесе $\sigma_4 \perp \pi_4$. Екінші түрлендіруде, π_1 проекциялар жазықтығы π_5 -ке алмастырылып π_4/π_5 жүйесіне көшірілген. Бұл жүйеде π_5 проекциялар жазықтығы σ жазықтығына параллель орналасады. Олай болса жүйе осі $a_4 \equiv b_4$ -ке параллель болады. π_5 проекциялар жазықтығында тұрғызылған a_5 және b_5 проекциялардың арасындағы α° бұрышы осы екі түзудің арасындағы нақты бұрышқа тең. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш та сызбаларды түрлендіріп табылады. Берілген жазықтық жалпы жағдайда болса, оны проекциялаушы жағдайға алмастыруға болады. 69-суретте $\omega(m \cap n)$

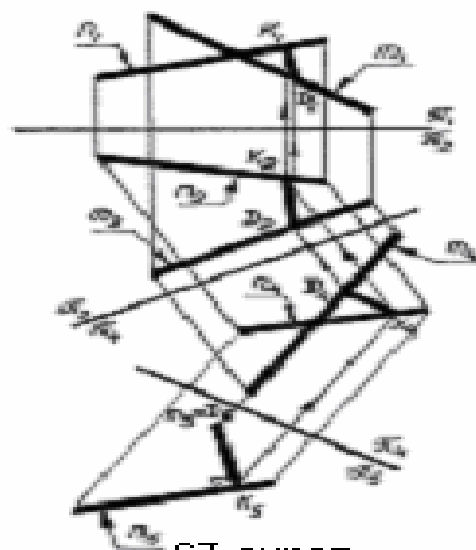
жазықтығы және d түзуі берілген. Екеуінің арасындағы бұрышты анықтау үшін ω жазықтығын түрлендіріп жалпы жағдайдан проекциялаушы жазықтық жасалған. d_4 проекциясы мен $m_4 \equiv n_4$ проекциясының арасындағы бұрыш ізделініп отырған бұрышқа тең, $d_4 \wedge m_4 \equiv n_4 = \alpha^\circ$ немесе $\alpha^\circ = d \wedge \omega$.



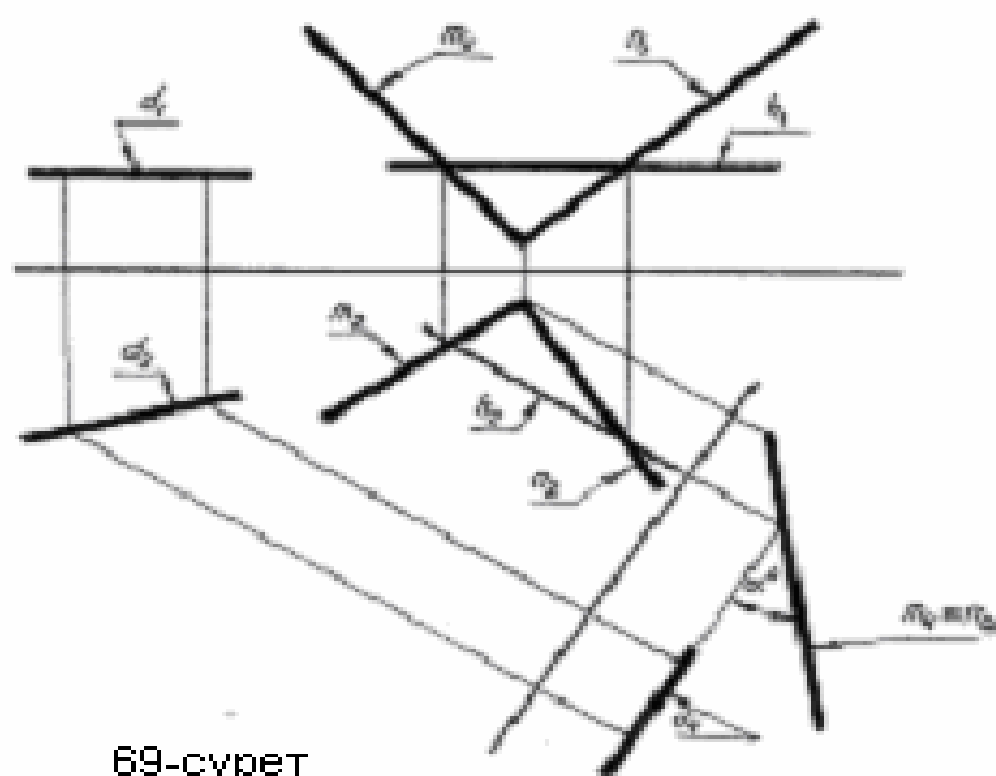
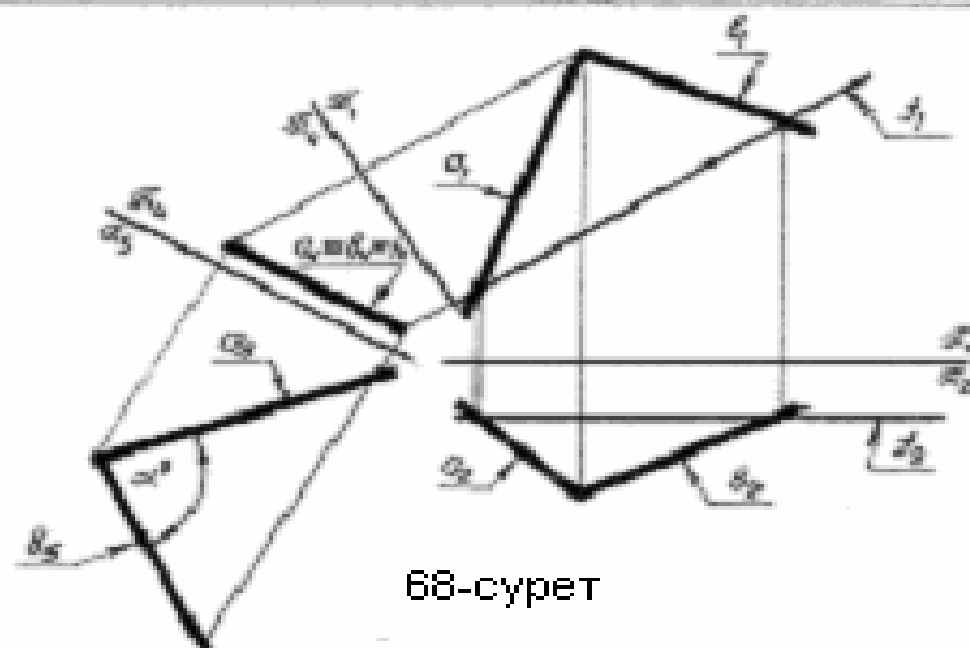
65-сурет

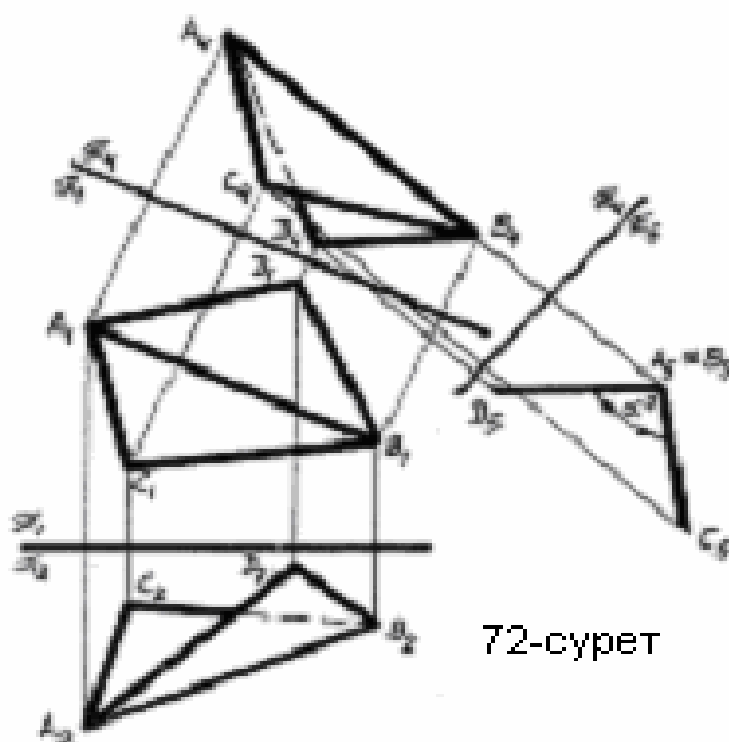
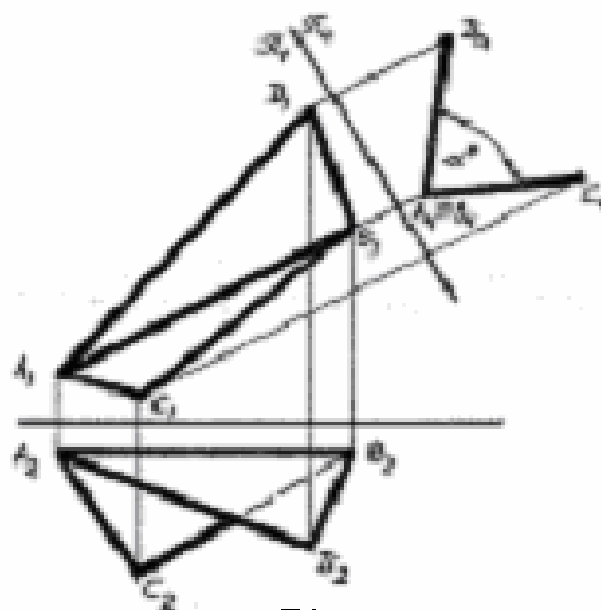
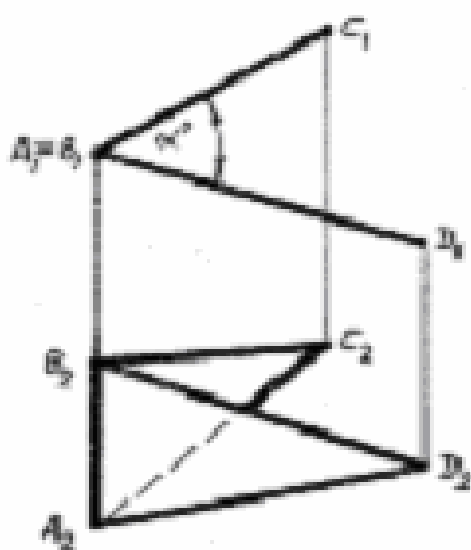


66-сурет



67-сурет





Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш екі жақты болады. Екі жазықтықтың өзара қиылысуларында екі жұп немесе төрт бұрыш пайда

болады. Егер екі жақты бұрыштың жақтары проекциялаушы болса не қырлары проекциялар жазықтыққа перпендикуляр болса, онда бұрыш өзгеріссіз проекцияланады.

70-суретте ABC және ABD екі үшбұрыштың арасындағы екі жақты бұрышы көрсетілген. Екі үшбұрышқа ортақ AB қыры фронталь проекциялаушы $A_1 \equiv B_1$, ал жақтары фронталь проекциялар жазықтығына түзу түрінде проекцияланған. Сондықтан A_1C_1 және A_1D_1 , проекциялардың арасындағы екі жақты бұрыш шынайы шамасында көрінеді, $\alpha^\circ = \angle ABC = \angle ABD$.

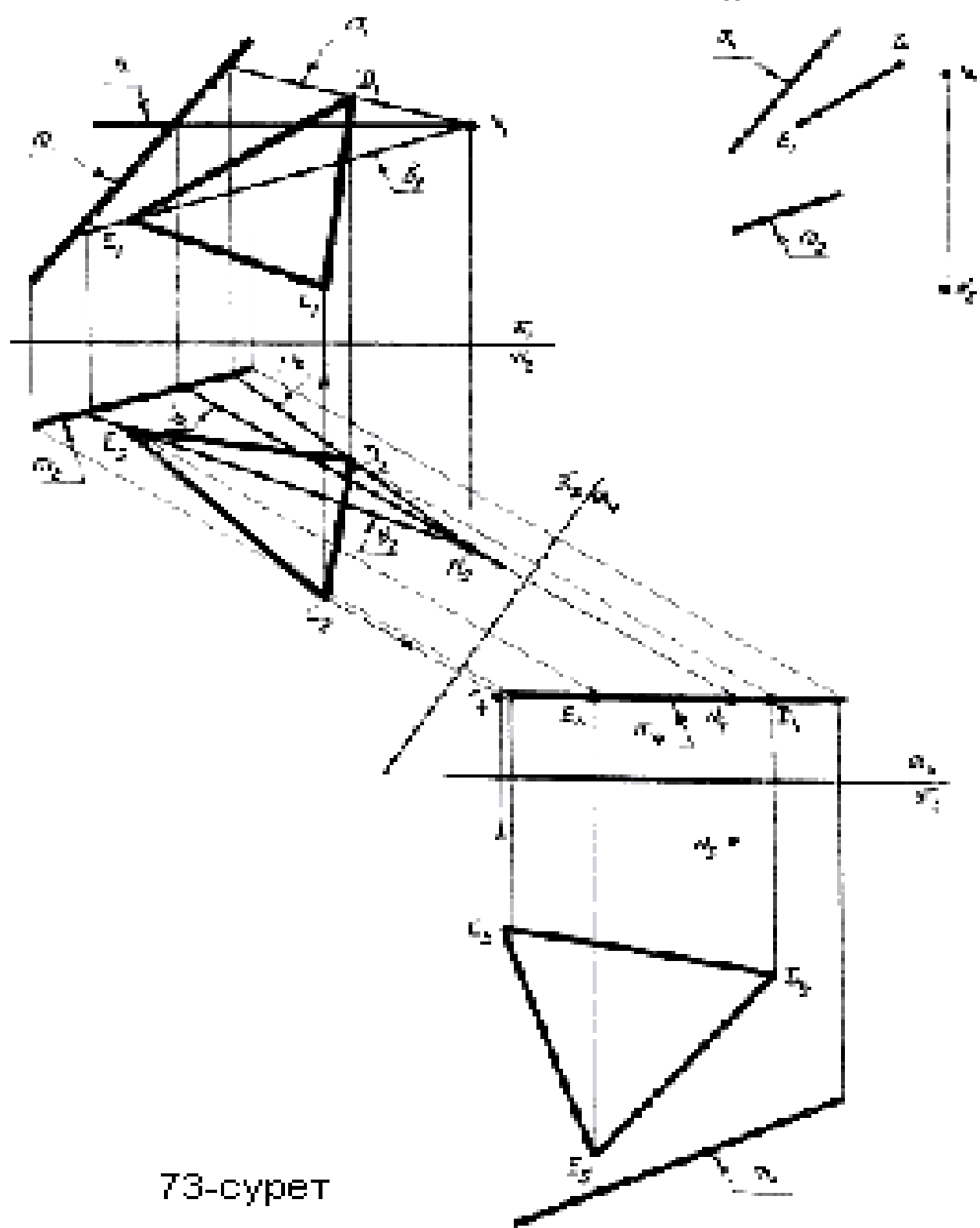
Ал 71-суретте екі үшбұрыштың ортақ қыры AB деңгей орналасқан (суретте фронталь). Екі жақты бұрышты анықтауға горизонталь проекциялар жазықтығын жаңа проекциялар жазықтығына алмастырса жеткілікті болады. Жаңа проекция осі A_1B_1 -ге перпендикуляр бағытталған. Жаңа π_1/π_4 жүйедегі ABC және ABD үшбұрыштары 70-суреттегі жағдайға келтірілді. Жаңа проекциялар жазықтығында екі жақты бұрыш шынайы түрінде проекцияланған $\alpha^\circ = \angle A_4D_4A_4C_4 = \angle A_4D_4A_4C_4 = \angle A_4D_4A_4C_4$.

72-суретте екі жақты бұрыштың AB қыры жалпы жағдайда орналасқандықтан сызбаны екі рет түрлендіру қажет етіледі. Бірінші түрлендіруде π_2 проекциялар жазықтығы π_4 проекциялар жазықтығына алмастырылып, екі үшбұрыштың ортақ қыры AB деңгей жағдайға келтірілген (71-суреттегі екі үшбұрыштың берілуіне). Ал екінші рет түрлендіруде π_1 проекциялар жазықтығы π_5 проекциялар жазықтығына алмастырылып, екі үшбұрыштың AB қыры проекциялаушы жағдайға келтіріліп (70-суреттегі екі үшбұрыштың берілуіне), ізделініп отырған екі жақты бұрыш тұрғызылған, $\alpha^\circ = \angle A_5D_5A_5C_5 = \angle A_5D_5A_5C_5 = \angle A_5D_5A_5C_5$.

Жазық мүсіннің шынайы шамасын анықтау

Сызба геометрияның есептерінде әртүрлі жазық геометриялық мүсіндердің әсіресе үшбұрыштың, шаршының, тікбұрыштың не басқа да заттардың шынайы шамасын анықтауға тура келеді. Кейбір жағдайларда геометриялық мүсіндердің шарты арқылы оның проекцияларын тұрғызу қажет болады. Бұндай есептерді шығару сызбаларды түрлендіру арқылы берілген мүсінді деңгей жағдайға әкелу арқылы орындалады. Есептің қажет шарты орындалғаннан кейін оның проекцияларын тұрғызу онша қиындық туғызбайды.

$\sigma(N, m)$ жазықтығында орналасқан CDE тең қабырғалы үшбұрыштың проекцияларын тұрғызу керек (73-сурет). Есептің берілгені 73а суретте кішірейтіліп көрсетілген.



73-супер

σ жазықтығының a және b түзулерінің көмегімен үшбұрыштың ED қырының горизонталь проекциясы E_2D_2 тұрғызылған. Сызбаның оқылу сапасын төмендетпеу мақсатында көмекші түзулер нүктелерінің проекциялары белгіленбеген. σ жазықтығында горизонталь түзуі h тұрғызылып π_2/π_4 жүйе осі h_2 ге перпендикуляр жүргізілген. (π_1 проекциялар жазықтығы π_4 проекциялар жазықтығына алмастырылған). π_2/π_4 жүйе осінен N, D, E және m түзуінің аппликаталарын өлшеп, жаңа осьтен сәйкес байланыс түзулердің бойынан N_4, D_4, E_4 және m_4 тұрғызылған. π_4 проекциялар жазықтығына σ жазықтығы перпендикуляр болғандықтан оның проекциясы түзу түрінде проекцияланады. Енді горизонталь проекциялар жазықтығы π_2 жаңа проекциялар жазықтығы π_5 -ке алмастырылып келесі π_4/π_5 жүйесі тұрғызылған. Бұл жүйе осі N_4, D_4, E_4 және m_4 -ке параллель енгізілген. π_4 проекциялар жазықтығында жатқан нүктелердің проекцияларынан жаңа оське перпендикуляр байланыс түзулері жүргізіліп олардың бойына жаңа осьтен π_2/π_4 жүйе осінен нүктелердің горизонталь проекцияларының қашықтықтары салынып N_5, m_5 және E_5, D_5 тұрғызылған. Сонымен σ жазықтығы π_5 проекциялар жазықтығына параллель орналасқандықтан тең қабырғалы үшбұрыштың бір қабырғасының ұзындығы $|E_5D_5|$ -ке тең, олай болса $E_5C_5=C_5D_5=D_5E_5$. Циркульдің көмегімен C_5 тұрғызылады. C_5 -тен есептің шешілу бағытына қарсы байланыс түзуі жүргізіліп C_4, C_2 және C_1 проекциялары тұрғызылған. C_4 проекциясы E_4, N_4, D_4, m_4 түзудің бойында орналасады. C_2 проекциясы мен π_2/π_4 осінің қашықтығы C_5 проекциясымен π_4/π_5 осінің қашықтығына тең, ал C_1 проекциясы мен π_1/π_2 осінің қашықтығы C_4 проекция мен π_2/π_4 осінің қашықтығына тең болады.

Сонымен σ жазықтығында орналасқан тең қабырғалы EDC үшбұрышының проекциялары тұрғызылды.

Негізгі: (1нег. [27-35]); (2нег. [75-84]); (3нег. [53-64]); (4нег. [72-83]).

Қосымша: (13қос 35,36,37,38 есептер); (20қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Екі түзудің, түзу мен жазықтықтың және жазықтықтардың перпендикулярлығы қалай анықталады?
2. Қандай жағдайда екі түзудің арасындағы бұрыш өзгеріссіз проекцияланады?
3. Тік бұрышты проекциялау теоремасы қалай?

6-дәріс.

Негізгі орналасу есептері

Орналасу есептері деп әртүрлі геометриялық мүсіндердің өзара орналасуларын анықтайтын есептерді атайды. Мысалы нүктелердің, түзулердің және жазықтықтардың бір-бірімен орналасуларын анықтау. Негізгі орналасу есептері небәрі алты есептен тұрады. Олар: нүктелердің өзара орналасуы; нүкте мен түзудің өзара орналасуы; түзулердің өзара орналасуы; нүкте мен жазықтықтың өзара орналасуы; түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы; жазықтықтардың өзара орналасуы.

Енді осы аталған негізгі есептерді жеке талдайық.

Нүктелердің өзара орналасуы

Екі нүкте бір бірімен сәйкес не сәйкессіз орналасуы мүмкін. Егер нүктелер сәйкес орналасса, онда олардың бір аттас проекциялары сәйкес болады (92-сурет). A және B нүктелері өзара сәйкес орналасқан, себебі $A_1 \equiv B_1$ және $A_2 \equiv B_2$. Егер нүктелер өзара сәйкес орналаспаса онда олардың не фронталь не горизонталь проекциялары сәйкес орналаспайды. Сондықтан олар қалай орналасқан? - деген сұрақ туады. C және D нүктелерінің фронталь проекциялары $C_1 \equiv D_1$, ал горизонталь проекциялары $C_2 \equiv D_2$. Бұндай нүктелерді фронталь бәсекелес нүктелер дейді. Фронталь проекциялар жазықтығында D нүктесі көрінеді, себебі оның горизонталь проекциясы D_2 C_2 проекциядан төмен жатыр. M және N нүктелердің горизонталь проекциялары $M_2 \equiv N_2$, ал фронталь проекциялары $M_1 \equiv N_1$. Бұндай нүктелерді горизонталь бәсекелес нүктелер дейді. Горизонталь проекциялар жазықтығында M нүктесі көрінеді, себебі оның фронталь проекциясы M_1 N_1 проекциядан жоғары орналасқан.

Сызбада сызықтардың көрінетіндігі бәсекелес нүктелер арқылы осы жолмен анықталады.

Нүкте мен түзудің өзара орналасуы

Нүкте түзде жатуы не жатпауы мүмкін. Егер нүкте түзде жатса, онда оның бір аттас проекциялары түзудің бір аттас проекцияларында жатады. 93-суретте A нүктесі l түзуінде жатыр, себебі $A_1 \in l_1$ және $A_2 \in l_2$. Егер нүкте түзде жатпаса, оның проекцияларының біреуі түзудің бір аттас проекциясында жатпайды. B нүктесі l түзуінен төмен орналасқан, себебі $B_2 \in l_2$, ал B_1 проекциясы l_1 проекциясынан төмен. C нүктесі l түзуінен бері орналасқан, себебі $C_1 \in l_1$, ал C_2 проекциясы l_2 проекциясынан төмен.

Түзулердің өзара орналасуы

Екі түзу өзара үш жағдайда орналасуы мүмкін: өзара параллель, өзара қиылысып және өзара аяқас (94-сурет).

Кеңістікте екі түзу өзара параллель болса, онда олардың бір аттас проекциялары параллель болады. (Егер түзулер профиль түзулері болмаса). 94а-суретте a және b түзулері кеңістікте параллель орналасқан, себебі $a_1 \parallel b_1$ және $a_2 \parallel b_2$.

Екі түзудің ортақ нүктесі болса, онда олар өзара сол нүктеде қиылысады (94б-сурет). c және d түзулерінің ортақ K нүктесі бар, себебі $c_1 \cap d_1 = K_1$ және $c_2 \cap d_2 = K_2$, $K_1 K_2$ байланыс түзуі сызбаның абсцисса осіне перпендикуляр орналасқан.

Кеңістікте екі түзу не параллель болмаса, не қиылыспаса, онда олар аяқас орналасады (94в сурет). m және n түзулерінің проекцияларында. 1-2 нүктелерінің фронталь 3-4-нүктелерінің горизонталь проекцияларында қиылысулары байқалады. Бірақ 1-2-нүктелердің горизонталь проекциялары, 3-4-нүктелердің фронталь проекциялары сәйкес емес. m және n түзулерінің бұл жерлерде ортақ нүктелері жоқ, сондықтан олар өзара аяқас орналасқан.

Нүкте мен түзудің өзара орналасуы

Нүкте түзуде жатуы не жатпауы мүмкін. Егер нүкте түзуде жатса, онда оның бір аттас проекциялары түзудің бір аттас проекцияларында жатады. 93-суретте A нүктесі l түзуінде жатыр, себебі $A_1 \in l_1$ және $A_2 \in l_2$. Егер нүкте түзуде жатпаса, оның проекцияларының біреуі түзудің бір аттас проекциясында жатпайды. B нүктесі l түзуінен төмен орналасқан, себебі $B_2 \in l_2$, ал B_1 проекциясы l_1 проекциясынан төмен. C нүктесі l түзуінен бері орналасқан, себебі $C_1 \in l_1$, ал C_2 проекциясы l_2 проекциясынан төмен.

Түзулердің өзара орналасуы

Екі түзу өзара үш жағдайда орналасуы мүмкін: өзара параллель, өзара қиылысып және өзара айқас (94-сурет).

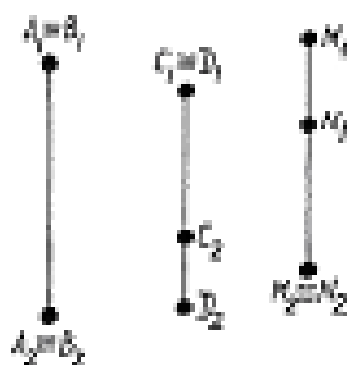
Кеңістікте екі түзу өзара параллель болса, онда олардың бір аттас проекциялары параллель болады. (Егер түзулер профиль түзулері болмаса). 94а-суретте a және b түзулері кеңістікте параллель орналасқан, себебі $a_1 \parallel b_1$ және $a_2 \parallel b_2$.

Екі түзудің ортақ нүктесі болса, онда олар өзара сол нүктеде қиылысады (94б-сурет). c және d түзулерінің ортақ K нүктесі бар, себебі $c_1 \cap d_1 = K_1$ және $c_2 \cap d_2 = K_2$, $K_1 K_2$ байланыс түзуі сызбаның абсцисса осіне перпендикуляр орналасқан.

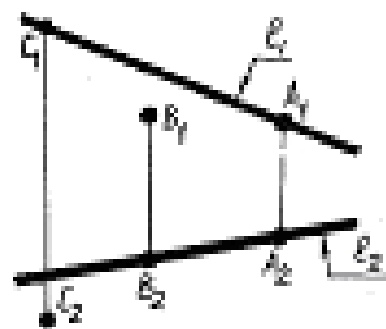
Кеңістікте екі түзу не параллель болмаса, не қиылыспаса, онда олар айқас орналасады (94в сурет). m және n түзулерінің проекцияларында. 1-2 нүктелерінің фронталь 3-4-нүктелерінің горизонталь проекцияларында қиылысулары байқалады. Бірақ 1-2-нүктелердің горизонталь проекциялары, 3-4-нүктелердің фронталь проекциялары сәйкес емес. m және n түзулерінің бұл жерлерде ортақ нүктелері жоқ, сондықтан олар өзара айқас орналасқан.

Нүкте мен жазықтықтың өзара орналасуы

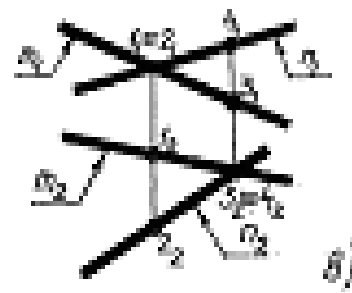
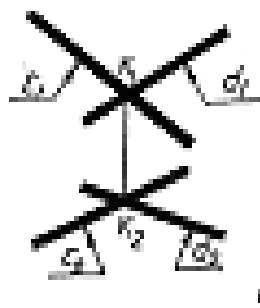
Нүкте екі жағдайда: жазықтықта жатуы не жатпауы мүмкін. Егер нүкте жазықтықта жатса, онда ол сол жазықтықтың кез келген түзуінің бойында жатады (95-сурет). Осы қасиетті қолданып жазықтықта орналасқан нүктенің проекциясы тұрғызылады. Не болмаса нүктенің жазықтықта жатпайтыны не жататыны дәлелденеді. 95а-суретте $\omega(A, B, C)$ жазықтығы және N, M нүктелері берілген. N және M нүктелерінің ω жазықтығымен өзара орналасуын анықтау



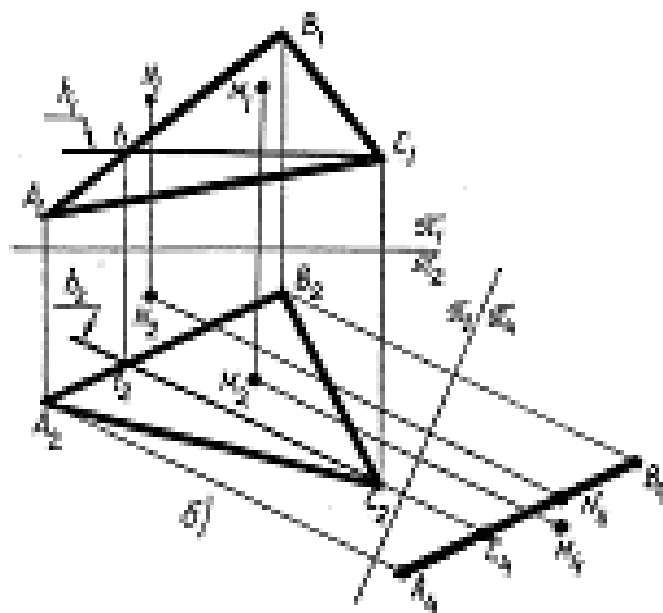
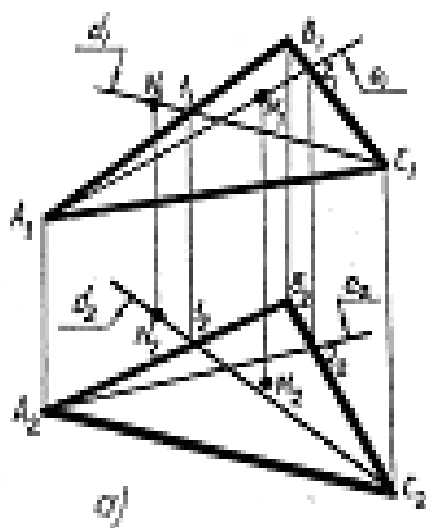
92-сурет



93-сурет



94-сурет



95-сурет

керек. ω жазықтығынан d түзуі алынып, оның фронталь проекциясы N_1 арқылы жүргізілген. C және I нүктелердің көмегімен тұрғызылған d_2 проекциясы N_2 арқылы өткен. N нүктесінің бір аттас проекциялары d түзуінің

бір аттас проекцияларында орналасқан. Олай болса $N \in d$. Ал d түзуі ω жазықтығының түзуі немесе $d \in \omega$. Сондықтан N нүктесі ω жазықтығында орналасқан. M нүктесі де жазықтықтың e түзуі арқылы анықталған. $e \in \omega$, $e_1 \equiv A_1 2_1 M_1$, $A_2 2_2 \equiv e_2$, $M_2 \notin e_2$. Олай болса M нүктесі ω жазықтығынан тыс орналасқан.

Бұл есептің жауабын сызбаны түрлендіру арқылы да табуға болады (95б-сурет). Жалпы жағдайда орналасқан $\omega(A, B, C)$ жазықтығынан проекциялаушы жазықтық жасалса, қарастырылып отырған N және M нүктелердің жазықтықпен орналасулары бірден анықталады. ω жазықтығының горизонталь түзуінің горизонталь проекциясына перпендикуляр жаңа ось жүргізілген. Нүктелердің горизонталь проекцияларынан жаңа оське перпендикуляр байланыс түзулері жүргізіліп, олардың бойына жаңа осьтен сол нүктелердің аппликаталары салынып A_4 , B_4 , C_4 және N_4 , M_4 проекциялары тұрғызылған. π_4 проекциялар жазықтығында ω жазықтығы перпендикуляр орналасқан. N_4 проекциясы ω жазықтығының проекциясын да жатыр, ал M_4 одан тыс. Сондықтан N нүктесі ω жазықтығында орналасқан, ал M нүктесі ω жазықтығынан тыс орналасқан.

Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы

Түзу мен жазықтық өзара үш жағдайда орналасуы мүмкін:

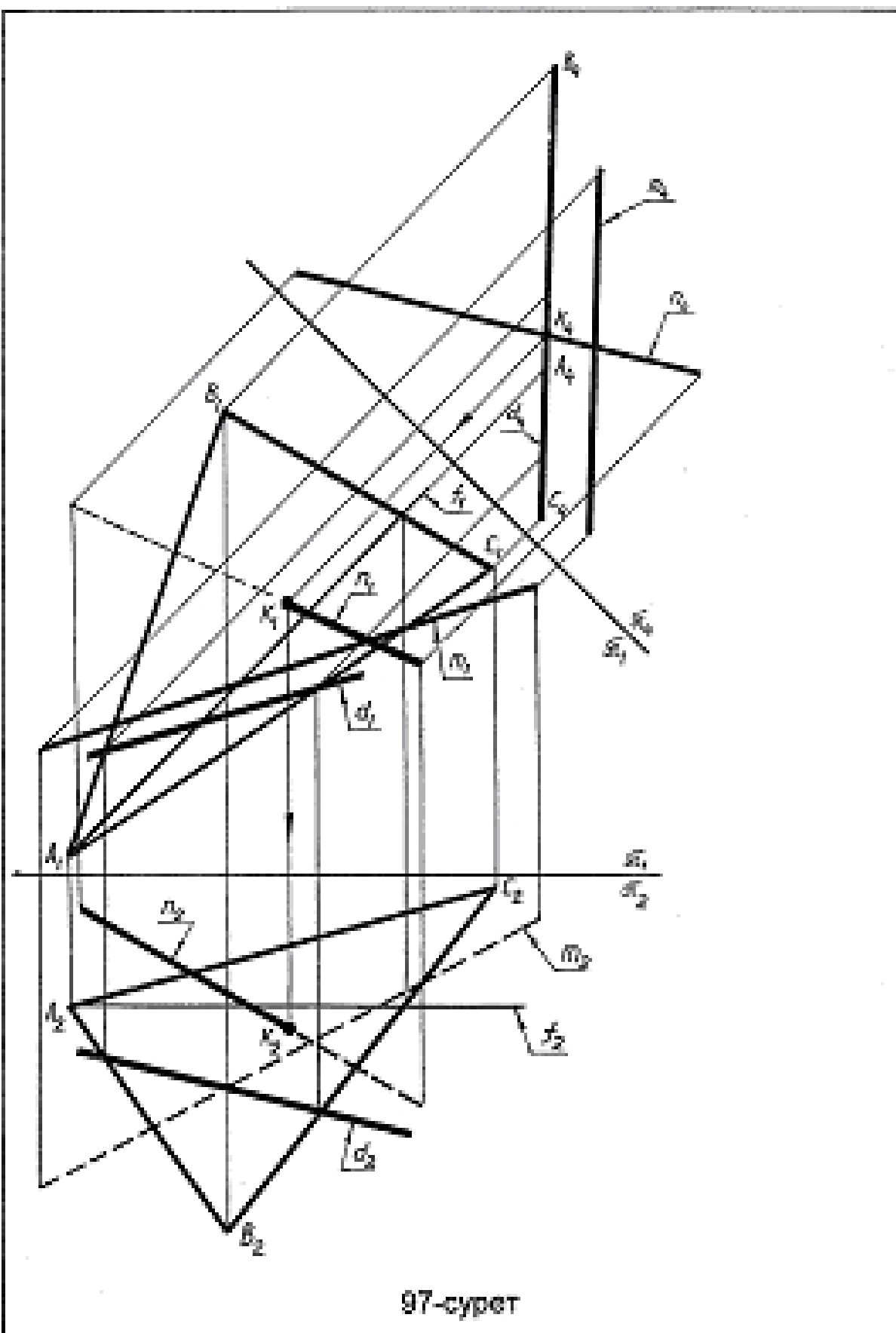
- 1) түзу жазықтықта жатады;
- 2) түзу жазықтыққа параллель;
- 3) түзу жазықтықпен қиылысады.

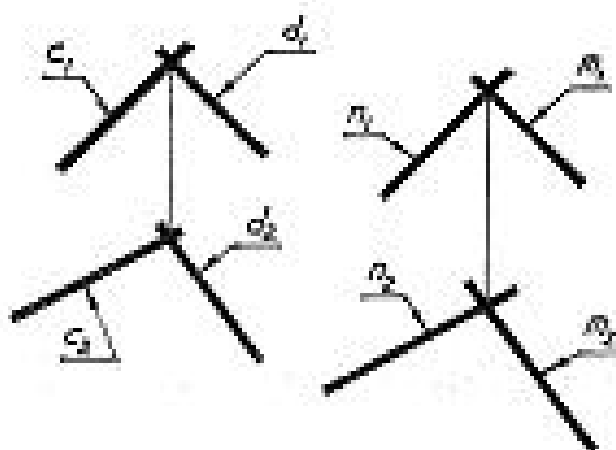
Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуын анықтау жалпы алғанда екі түзудің өзара орналасуын анықтау болып табылады. Екі түзудің біреуі берілген, ал екіншісі жазықтықтың түзуі.

96-суретте $\sigma(A, B, C)$ жазықтығы және d , m , n түзулері берілген. Осы түзулердің жазықтықпен орналасуын анықтау керек.

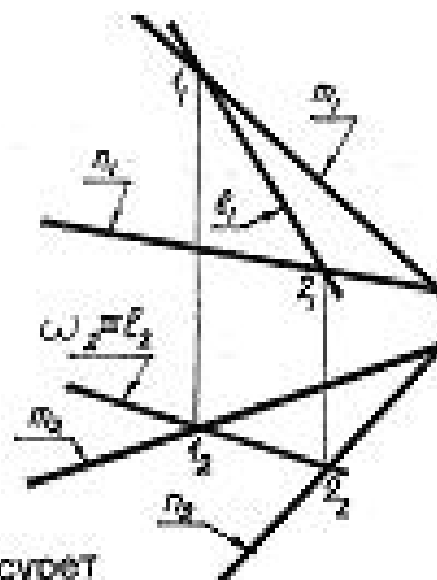
σ жазықтығынан d түзуімен фронталь бәсекелес жатқан a түзуін алып оның горизонталь проекциясы тұрғызылады. $1_1 2_1 \equiv a_1 \equiv d_1$, $1_2 2_2 \equiv a_2 \equiv d_2$. Сонымен d түзуінің бір аттас проекцияларымен a түзуінің бір аттас проекциялары сәйкес болды. Онда $d \in a$, $a \in \sigma$, олай болса d түзуі σ жазықтығында орналасқан. алынған. Ол m түзуімен фронталь бәсекелес, $m_1 \equiv b_1$, $3_1 4_1 \equiv b_1$, $3_2 4_2 \equiv b_2$, b түзуінің горизонталь проекциясы m түзудің горизонталь проекциясымен параллель орналасқан $b_2 \parallel m_2$. Олай болса m түзуі σ жазықтығымен параллель орналасқан $m \parallel \sigma$.

Осы шешу жолымен n түзуінің σ жазықтығымен орналасуы анықталған. σ жазықтығынан n түзуімен горизонталь бәсекелес c түзуі алынған, $n_2 \equiv c_2$. 5- және 6-нүктелердің көмегімен c түзуінің фронталь проекциясы c_1 тұрғызылған. c_1 проекциясы n_1 проекциясымен K_1 -де қиылысады. K_1 арқылы K_2 тұрғызылады. K

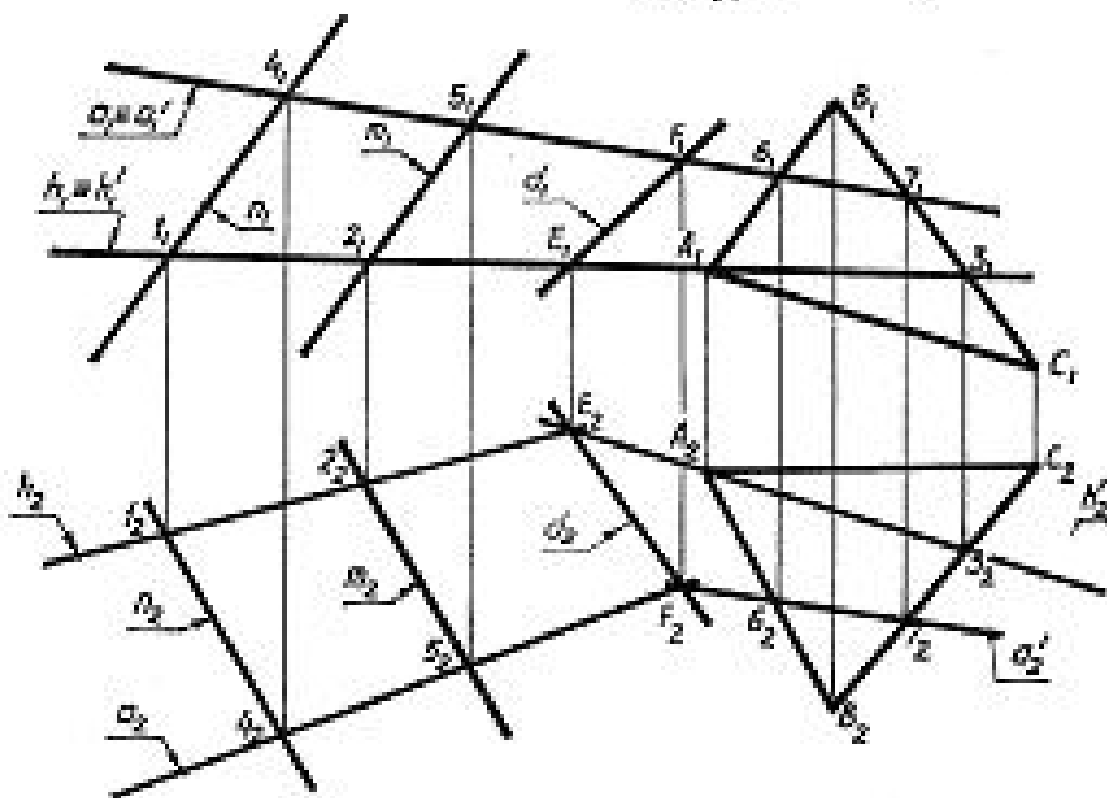




98-сурет



99-сурет



100-сурет

Енді m түзуінің орналасуын қарастырайық. Ол үшін σ жазықтығынан b түзуі n түзуімен σ жазықтығының қиылысу нүктесі болады, $n \cap \sigma = K$. n

түзуінің көрінетіндігі бәсекелес 7-8 нүктелер арқылы фронталь проекциясы, 6-9 нүктелер арқылы горизонталь проекциясы анықталған. Енді осы есептің шешімі проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілімен 97- суретте көрсетілген. Горизонталь проекциялар жазықтығы π_2 жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -ке алмастырылған. σ жазықтығында фронталь түзуі жүргізіліп жаңа проекциялар осі сол түзудің фронталь проекциясына перпендикуляр жүргізілген. Нүктелердің фронталь проекцияларынан жаңа оське перпендикуляр байланыс түзулері жүргізіліп олардың бойларына нүктелердің ординаталары салынған. Сонда π_4 проекциялар жазықтығында σ жазықтығы проекциялаушы жазықтық болады. σ жазықтығының проекциясымен d түзудің проекциясы сәйкес түскен $\sigma_4(A_4B_4C_4) \equiv d_4$. m түзуінің проекциясы параллель орналасқан, $\sigma_4(A_4B_4C_4) \parallel m_4$ және n түзуінің проекциясы қиылысқан $\sigma_4(A_4B_4C_4) \cap n_4 = K_4$. Олай болса: d түзуі σ жазықтығында орналасқан $d \in \sigma$, m түзуі σ жазықтығына параллель орналасқан $m \parallel \sigma$ және n түзуі σ жазықтығымен K нүктеде қиылысқан $n \cap \sigma = K$ деген қорытынды шығады.

Сонымен түзу мен жазықтықтың өзара орналасуын анықтау үшін, сол жазықтықтан берілген түзумен бәсекелес түзу алып, одан кейін бәсекелес түзулердің өзара орналасуын анықтау керек, не болмаса жазықтықты түрлендіріп проекциялаушы жазықтық жасау қажет.

Жазықтықтардың өзара орналасуы

Әдетте жазықтықтардың өзара орналасуының үш жағдайы кездеседі:

- 1) екі жазықтық өзара беттеседі;
- 2) екі жазықтық өзара параллель;
- 3) екі жазықтық өзара қиылысады.

Егер екі жазықтық өзара беттессе, онда оның біреуіндегі кез-келген түзуге сәйкес орналасқан екінші жазықтықта түзу болады.

Параллель жазықтықтар белгілі теоремамен анықталады.

Теорема: Егер бір жазықтықтағы екі қиылысу түзулері екінші жазықтықтағы екі қиылысу түзулеріне параллель болса, онда екі жазықтық өзара параллель болады.

Егер $\omega(c \cap d)$ жазықтығы беріліп, одан тыс орналасқан D нүктесінен сол жазықтыққа параллель жазықтық тұрғызу қажет болса (98 сурет), D нүктесінен ω жазықтығының c және d түзулеріне параллель болатын m және n түзулері жүргізіледі. $n_1 \parallel c_1$, $n_2 \parallel c_2$ және $m_1 \parallel d_1$, $m_2 \parallel d_2$. Сондықтан $n \parallel c$ және $m \parallel d$. D нүктесі арқылы тұрғызылған n және m түзулері σ жазықтығын құрайды. Ол берілген ω жазықтыққа параллель болады, себебі оның берілген ω жазықтыққа параллель болады, себебі оның құрамындағы

екі қиылысқан түзулер берілген жазықтықтың екі түзуіне параллель.

Екі жазықтық түзу арқылы қиылысады. Оны тұрғызу екі жазықтықтың кез келген өзара ортақ екі нүктесі арқылы орындалады. Екі қиылысу жазықтықтың біреуі жалпы, екіншісі проекциялаушы жазықтық болса, онда олардың қиылысу түзуінің бір проекциясы сызбадан бірден белгілі болады

(99-сурет). $\omega(\omega_2)$ жазықтығы горизонталь проекциялаушы болғандықтан, оның $\sigma(m \cap n)$ жазықтығымен қиылысу түзуінің горизонталь проекциясы $l_2 \equiv \omega_2$ болады. Оның фронталь проекциясы l_1 1-2 нүктелерінің көмегімен тұрғызылады. р жалпы жағдай жазықтықтары болса, олардың өзара орналасуы әдетте екі қос бәсекелес түзулер арқылы анықталады. 100-суретте $\sigma(m||n)$ және $\omega(A, B, C)$ жалпы жағдайларда орналасқан жазықтықтардың өзара орналасуының шешімі көрсетілген. Жазықтықтарда өзара фронталь бәсекелес орналасқан екі горизонталь түзуі жүргізілген, h және h' , $h' \in \omega$ $h \in \sigma$. 1-2- және A , 3- нүктелердің көмегімен олардың горизонталь проекциялары h_2 , h_2' тұрғызылған. Екі қос түзудің горизонталь проекциялары үш жағдайда болуы мүмкін:

1) $h_2 \equiv h_2'$ болса, онда есептің шешімі аяқталды. Берілген екі жазықтық өзара беттеседі;

1) $h_2 \equiv h_2'$ болса, онда есептің шешімі аяқталды. Берілген екі жазықтық өзара беттеседі;

2) $h_2 || h_2'$;

3) $h_2 \cap h_2' = E_2$, онда E нүктесі қиылысу түзуінің нүктесі болады.

Шешімде екінші не үшінші жағдай болса, онда есептің шешімі екінші қос түзу жүргізу арқылы қайталанады. Екінші қос түзулер a және a' бірінші қос түзулерге басқа бағытта жүргізіледі. Екінші қос түзулердің горизонталь проекцияларын тұрғызғанда тағы екі жағдай кездеседі:

1) $a_2 || a_2'$, онда екі жазықтық өзара параллель орналасады;

2) $a_2 \cap a_2' = F_2$, онда F нүктесі қиылысу түзуінің нүктесі болады.

Тұрғызылуда табылған E және F нүктелері екі жазықтықтың қиылысу түзуінің нүктелері болады. $E_1 F_1 = d_1$, $E_2 F_2 = d_2$. Сонымен $\sigma \cap \omega = d$.

Негізгі: (1 нег. [35-42]); (2 нег. [115-125]); (3 нег. [82-93]); (4 нег. [109-120]).

Қосымша: (13 қос., 24, 25, 26 есептер); (20 қос.); (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай есептерді орналасу есептері дейді?
2. Нүкте және түзу қандай жағдайда жазықтыққа тиісті болады?
3. Параллель, қиылысқан және айқас орналасқан түзулерді қалай анықтайды?
4. Екі жазықтықтың параллельдігі қалай анықталады?
5. Түзу мен жазықтықтың параллель белгісі қалай?

7-дәріс.

Көпжақтар

Сызбада көпжақ - оның төбесінің және қырларының проекциялары арқылы беріледі, немесе олардың проекцияларын тұрғызу нүктенің және түзудің кесінділерін тұрғызу арқылы орындалады. Көпжақтардың ішінде көбірек тарағандары жәй көпбұрыштардан тұратын пирамида және призма түрлері.

Егер көпжақтың барлық жақтарының бір ортақ нүктесі болса (біреуінен басқасы), онда мұндай көпжақты пирамида деп атайды (88-сурет).

Егер көпжақ призма бетімен және қырларына параллель емес екі өзара параллель жазықтықтармен шектелмесе, онда мұндай көпжақты призма деп атайды (89-сурет).

Пирамиданың не призманың беттерінде жатқан нүктенің проекциялары сол бетте жатқан түзудің проекцияларында жатады. Сондықтан ондай нүктенің берілген проекциясынан сол бетте жатқан түзудің проекциясын жүргізу арқылы, оның екінші проекциясы тұрғызылады (88-сурет). N нүктесінің N_2 проекциясы берілген. Егер N_2 проекциясы сызбада көрініп жатса, онда N нүктесі пирамиданың ASB жағындағы нүкте болады. Онда $S_2 N_2$ арқылы $S_2 I_2$ түзуі жүргізіледі. $S_2 I_2 \cap A_2 B_2 = I_2$. $S_1 I_1$ түзуінің фронталь проекциясы $S_1 I_1$ тұрғызылып оған N_2 -ден байланыс түзуін жүргізіп N_1 тұрғызылады. Ал егер N_2 көрінбей орналасса, онда ол пирамиданың ASC жағында орналасқан. $S_2 C_2 \cap A_2 C_2 = C_2$, $S_1 C_1 \cap A_1 C_1 = C_1$, онда оның фронталь проекциясы N_1' болады. Осылай K нүктесінің K_2 проекциясы арқылы оның K_1 проекциясы тұрғызылған. Мұнда да K_2 көрініп жатса, онда $K \in ABC$ фронталь проекциясы K_1 , ал K_2 көрінбей жатса, онда $K \in ABC$ фронталь проекциясы K_1' болады.

Көпжақтардың жазықтықпен қиылысуы

Көпжақ пен жазықтықтың қиылысуынан пайда болған көпбұрышты қима дейді. Көпбұрыштың төбесі көпжақтың жазықтықпен қиылысқан қырларының санына тең. Сондықтан көпбұрыштың төбелері қырлардың жазықтықпен қиылысу нүктелері болып келеді. Мысалы, төртбұрышты пирамиданың қимасы үшбұрыш, төртбұрыш не бесбұрыш болуы мүмкін.

Көпжақты бет жазықтықпен қиылысқанда пайда болатын қима - қырлар және жақтар деп аталатын екі тәсілдің бірімен тұрғызылады. Қырлар тәсілімен тұрғызуда түзу мен жазықтықтың өзара орналасу есебінің шешімі бірнеше рет қайталанатын. Мұнда түзудің орнына көпжақтың қырлары қатынасады. Екінші тәсілде екі жазықтықтың өзара орналасуын анықтайтын есептің шешімі қолданылады. Екінші тәсілді қолдану, көпжақтың жақтары проекциялаушы жағдайда орналасса өте ыңғайлы болады. Қалған жағдайларда қырлар тәсілі тиімді болып келеді.

Егер қию жазықтығы проекциялаушы жазықтық болса, онда қиманы тұрғызу жеңіл болады, себебі оның бір проекциясы түзу түрде қию жазықтықпен сәйкес орналасады (90-сурет).

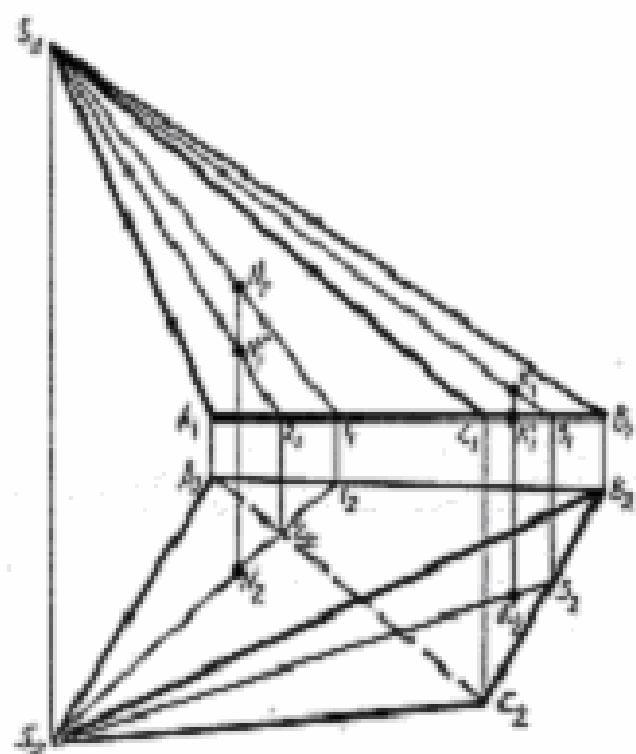
Егер қию жазықтығы проекциялаушы жазықтық болса, онда қиманы тұрғызу жеңіл болады, себебі оның бір проекциясы түзу түрде қию жазықтықпен сәйкес орналасады (90-сурет). $SABCD$ пирамиданы фронталь проекциялаушы $\tau(\tau_1)$ жазықтығымен қиғанда қиманың фронталь проекциясы $1_1 2_1 3_1 4_1$ түзу түрде τ_1 сәйкес орналасады. Оның горизонталь проекциясы $1_2 2_2 3_2 4_2$ төртбұрыш түрінде проекцияланады. Пирамиданың профиль

қырында орналасқан қиманың 4_2 проекциясы SAD жағы арқылы жүргізілген горизонталь h түзуі арқылы тұрғызылған.

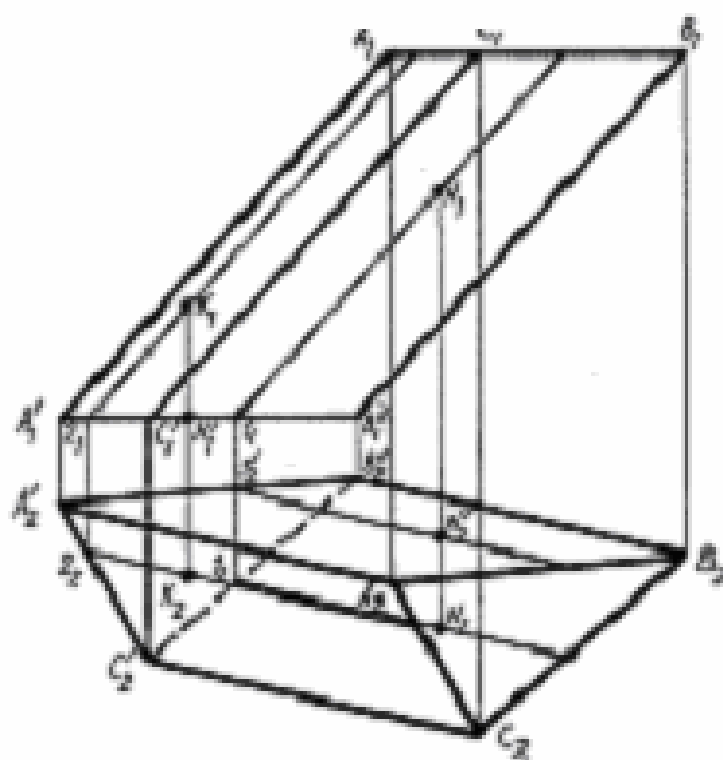
91-суретте қию жазықтығы $\tau(D, M, N)$ жалпы жағдайда орналасқан, пирамиданың да жақтары жалпы жағдайда берілген. Қиманы тұрғызу бірінші немесе қырлар тәсілімен орындалған. Пирамиданың қырлары түздің кесіндісі ретінде қарастырылып, олардың жазықтықпен өзара орналасулары анықталады. Егер олар жазықтықпен қиылысса, қиылысу нүктелері қиманың төбе нүктелері болады. τ жазықтығынан пирамиданың SC қырымен фронталь бәсекелес орналасқан s түзуі жүргізілген, $s \in \tau$, $s_1 \equiv S_1C_1$ $s_1 \cap D_1N_1 = I_1$, $s_1 \cap D_1M_1 = 2_1$ 1-және 2-нүктелердің көмегімен s_2 $C_2 \cap D_2N_2 = I_2$, $s_2 \cap D_2M_2 = 2_2$. s_2 проекциясы пирамиданың қыры S_2C_2 проекциясымен T_2 -де қиылысады. Одан кейін T_1 проекциясы тұрғызылады, $s_2 \cap S_2C_2 = T_2$. T нүктесі τ жазықтығының пирамиданың SC қырымен қиылысу нүктесі болады.

Осы жолмен: m түзуінің көмегімен SB қырынан F нүктесі; n түзуінің көмегімен AB қырынан E нүктесі; d түзуінің көмегімен AC қырынан K нүктесі табылған. Табылған $TFEK$ нүктелерінің көрінетіндігі еске алына отырып оларды қосу арқылы қима тұрғызылған.

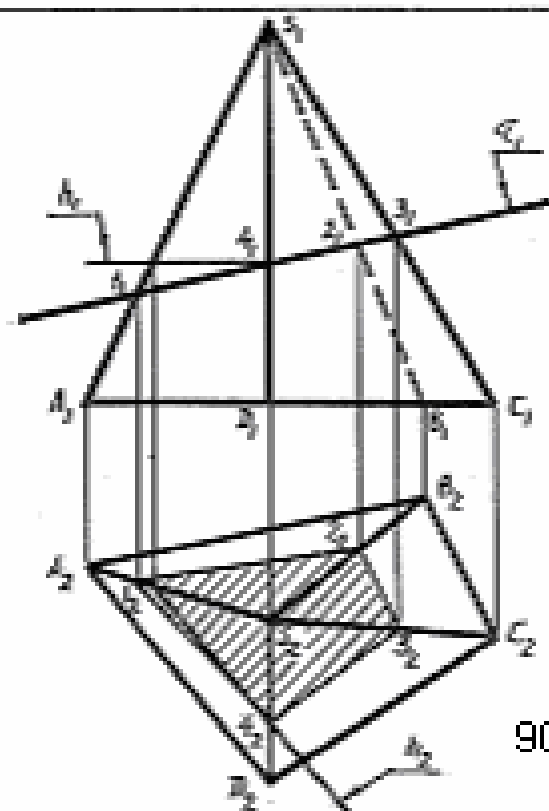
Бұл есептің шешімін, проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілімен, сызбаны түрлендіру арқылы алуға болады (92-сурет). Егер τ жазықтығына перпендикуляр бағытталған жаңа проекциялар жазықтығына τ жазықтығымен пирамида проекцияланса, қиманың проекциясы қию жазықтығымен сәйкес түзу күйінде проекцияланады немесе есептің шешімі 90-суреттегі шешімге келеді. Ол үшін горизонталь проекциялар жазықтығы жүйесінің осі енгізілген. Пирамиданың және τ жазықтығы нүктелерінің барлық фронталь проекцияларынан жаңа оське перпендикуляр байланыс түзулері жүргізілген. Жаңа осьтен байланыс түзулердің бойына сәйкес нүктелердің ординаталары салынып пирамиданың $S_4A_4B_4C_4$ жазықтықтың $D_4M_4N_4$ проекциялары тұрғызылған. Қию жазықтығы π_4 -ке перпендикуляр болғандықтан оның проекциясы түзу түрінде кескінделеді. Олай болса осы түзудің бойында қима да түзу түрінде кескінделіп жазықтықтың проекциясымен сәйкес орналасады. Пирамиданың қырларымен қиылысқан нүктелерді T_4 , F_4 , E_4 , K_4 белгілеп, олардың фронталь және горизонталь проекциялары тұрғызылған. Тұрғызылған T_1 , F_1 , E_1 , K_1 және T_2 , F_2 , E_2 , K_2 көпбұрыштар қиманың фронталь және горизонталь проекциялары болады.



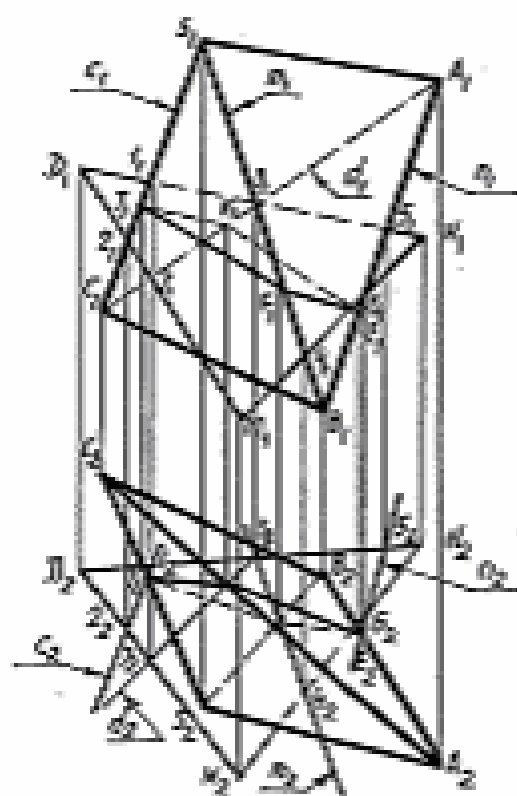
88-cypet



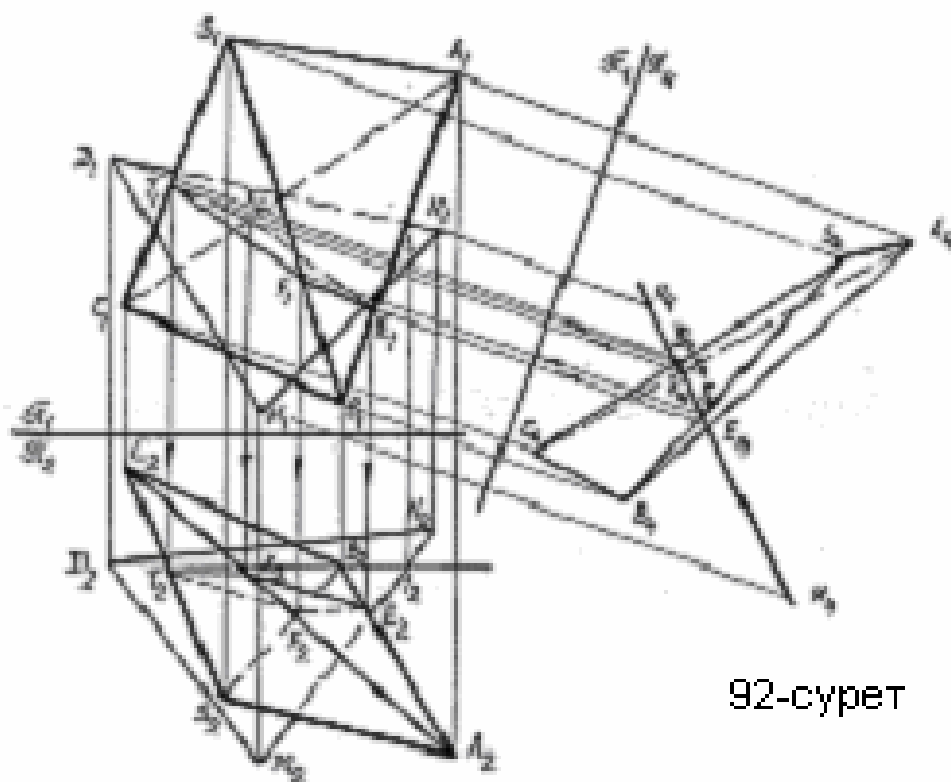
89-cypet



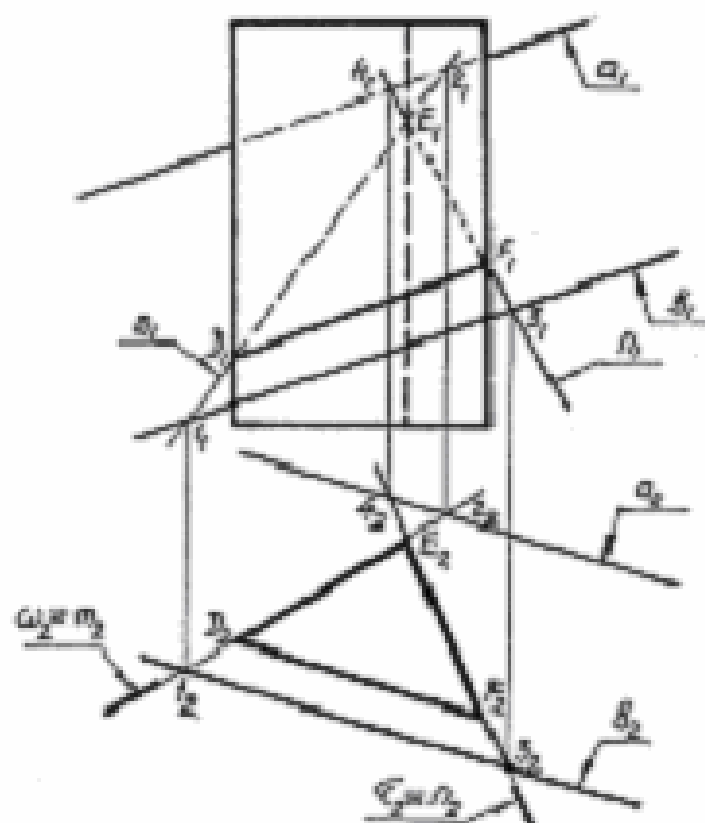
90-сурет



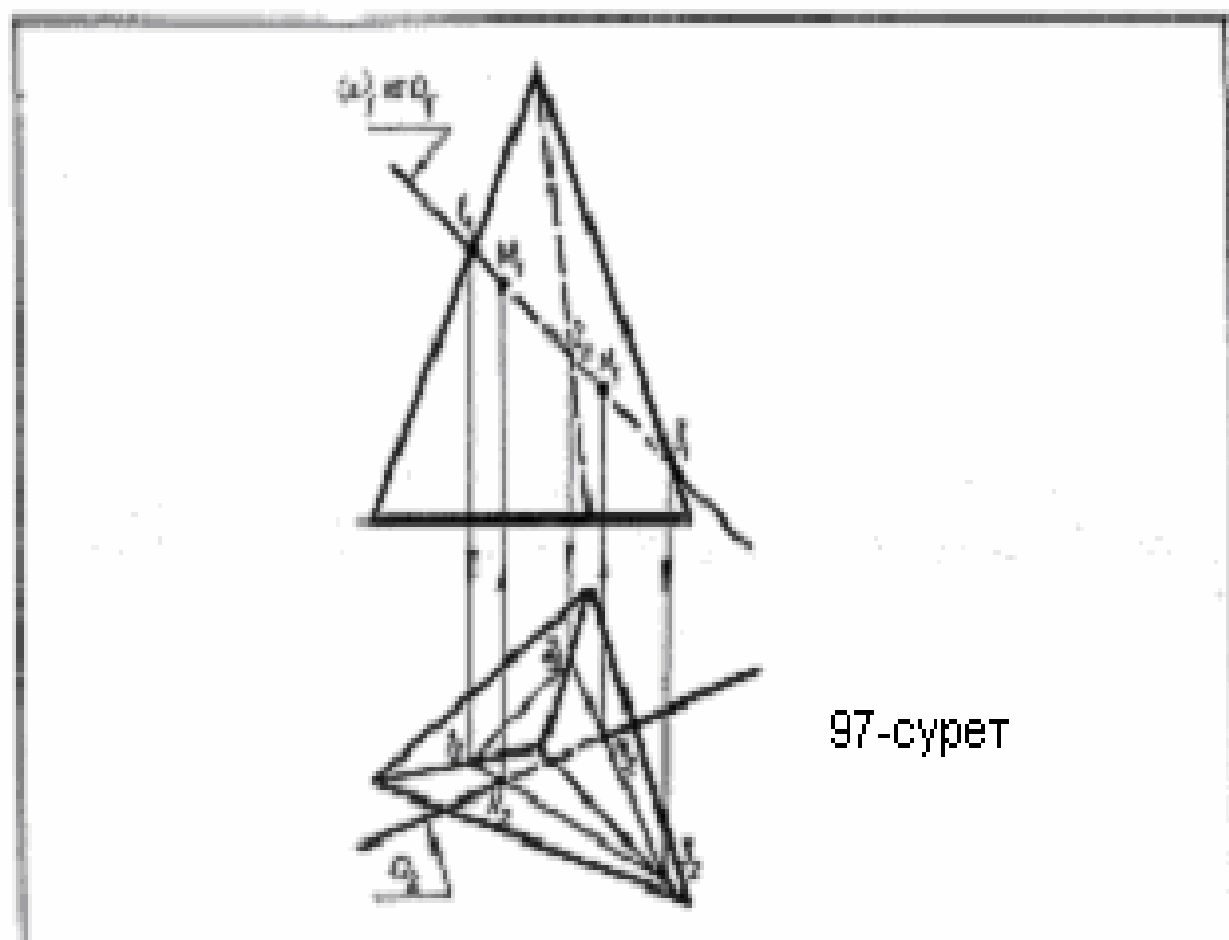
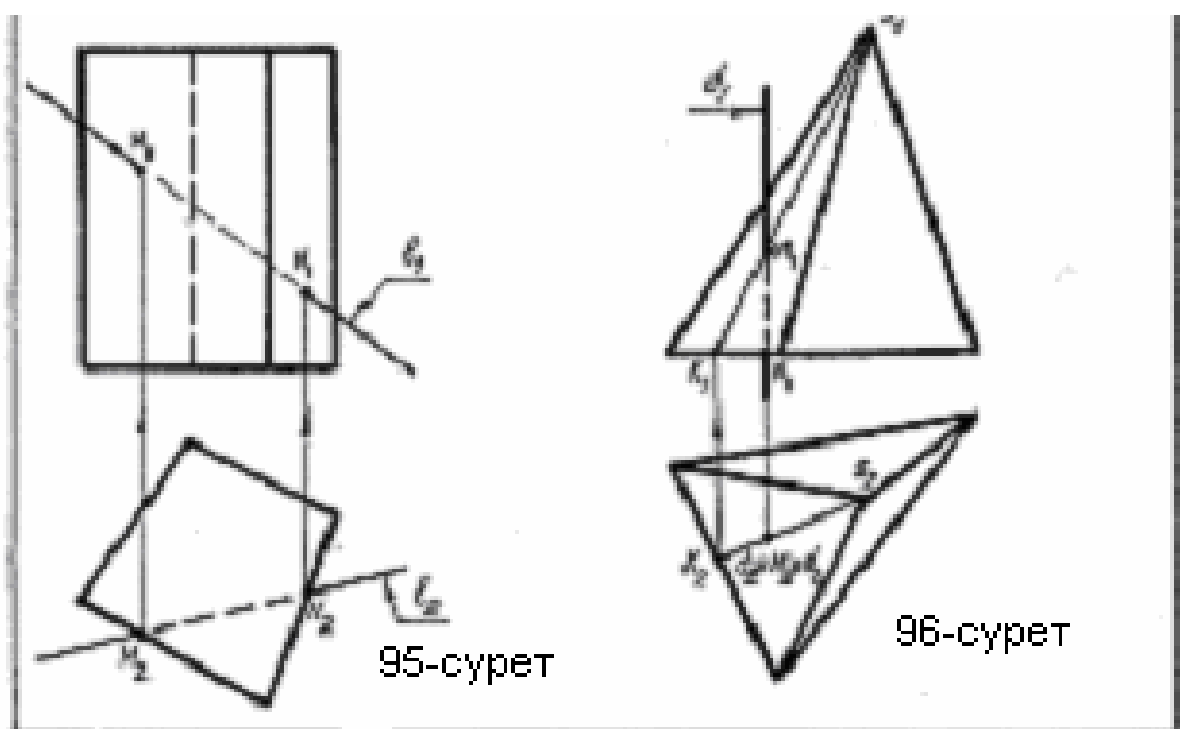
91-сурет



92-сypет



93-сypет



Үшбұрышты призманың $\sigma(a \parallel b)$ жазықтығымен қиылысқандағы қиманың проекцияларын тұрғызу 93-суретте берілген. Призманың бүйір жақтары горизонталь проекциялаушы, ал табандары деңгей орналасқан. Мұндай есепті жақтар тәсілімен шығару өте ыңғайлы. Призманың сол жағы арқылы қосымша горизонталь проекциялаушы $\omega(\omega_2)$ жазықтығы жүргізілген. Сонда ω жазықтығы σ жазықтығымен m түзуі арқылы қиылысады, $\omega_2 \cap \sigma = m_2$. Оның фронталь проекциясы m_1 сол жақтың фронталь проекциясын $|D_1E_1|$ кесінді арқылы қиып өтеді. $|DE|$ кесіндісі қию жазықтықтың осы жақпен қиылысу сызығы болады. Оң жақ арқылы екінші қосымша горизонталь проекциялаушы $\tau(\tau_2)$ жазықтығы жүргізіліп $|EF|$ кесіндісі тұрғызылған. $|D_1E_1F_1|$ қиманың фронталь проекциясы, оның горизонталь проекциясы призманың горизонталь проекциясымен сәйкес орналасады.

Көпжақтардың түзумен қиылысуы

Түзу көпжақпен көп дегенде екі нүктеде қиылысады. Олардың қиылысу нүктесін тұрғызу, жалпы қағидада, түзу арқылы көмекші жазықтық жүргізіп, одан кейін жазықтықпен көпжақтың қимасы тұрғызылады. Қимамен түзудің қиылысу нүктелері ізделініп отырған нүктелер болады. Қима тұрғызуда түзу не шеңбер сияқты жәй сызықтар болу үшін, көмекші жазықтық проекциялаушы не деңгей болуы қажет. Мұндай жағдайда есептің шешімі жеңілдейді.

Дербес жағдайда түзу мен көпжақтың қиылысу нүктелерін бірден анықтауға болады (95-сурет). Призманың бүйір жақтары горизонталь проекциялаушы орналасқандықтан ℓ түзуімен қиылысу нүктелері олардың горизонталь проекциясынан бірден анықталады.

Сол сияқты проекциялаушы түзумен көпжақтың қиылысу нүктелері де жеңіл тұрғызылады. Горизонталь проекциялаушы d түзуімен пирамиданың қиылысу нүктелерін тұрғызу (96-сурет) сол беттің түзуі SK арқылы табылған. Оның горизонталь проекциясы S_2K_2 d_2 арқылы жүргізіледі. $S_1K_1 \cap d = M_1$, ал екінші қиылысу нүктесі пирамиданың табанында орналасқан. Тұрғызылған M және N нүктелері іздеп отырған нүктелер болады.

Үшбұрышты пирамидамен жалпы жағдайда орналасқан a түзуінің қиылысу нүктелері 97-суретте келтірілген. M және N нүктелерін тұрғызу үшін a түзуімен сәйкес орналасқан $\omega(\omega_1)$ фронталь проекциялаушы жазықтығы жүргізілген $a_1 \equiv \omega_1$. Қиманың фронталь проекциясы $1_12_13_1 \equiv \omega_1$, ал горизонталь проекциясы $1_22_23_2$ болады. Қиманың горизонталь проекциясы $1_22_23_2$ -нің a_2 -мен қиылысқан M_2 және N_2 проекциялары іздеп отырған қиылысу нүктелерінің горизонталь проекциясы болады. Одан кейін M_1 және N_1 проекциялары тұрғызылып a түзуінің көрінетіндігі пирамида арқылы анықталады.

Негізгі: (1нег. [46-51]); (2нег. [125-140]); (3нег. [93-108]); (4нег. [120-132]).

Қосымша: (13қос 32, 33, 34 есептер); (20қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Тетраэдрдың қанша қыры және жағы бар?
2. Платон денелері деп аталатын денелерді атаңыз?
3. Қандай жағдайда нүкте не түзу көпжаққа тиісті болады?
4. Призмы және пирамидаға түсінік беріңіз?

8-дәріс.

Қисық сызықтар туралы түсінік

Сызықтар түзу сызық және қисық сызық болып екіге бөлінеді. Қисық сызық кеңістікте үздіксіз қозғалыстағы нүктенің траекториясы ретінде қарастырылады. Сызықтағы нүктенің қозғалыс бағыты сол нүктеден сызыққа жүргізілген жанамамен анықталады. 117-суреттегі ℓ сызығының a жанама түзуінің K нүктесіндегі жағдайы қиюшы түзудің шекті жағдайы деп аталады (сызықтың N нүктесі K нүктесіне ұмтылады).

Қисық сызықтар жазық және кеңіс сызықтары болып екіге бөлінеді. Жазық қисық сызықтардың барлық нүктелері бір жазықтықта жатады.

Екінші ретті қисықтар: шеңбер, эллипс, гипербола, парабола, т.с.с. жазық қисық сызықтарға жатады.

Қисық сызықтар математика теңдеуімен және графика түрінде беріледі. Кейде математика теңдеуімен берілген қисық сызықты заңды, ал графикалы берілген қисық сызықты заңсыз деп атайды. Заңсыз қисық сызықтар тек графика арқылы беріледі. Мысал ретінде жер қыртысын, геологиялық тілікті жатқызуға болады. Егер қисық сызықтың кез келген нүктесі тек жалғыз жанама түзуі болса онда оны тегіс қисық сызық дейді (117-сурет). Мұндай қисық сызықтың барлық нүктелерін қарапайым нүктелер дейді. Сонымен қатар қисық сызықтарда ерекше нүктелер болады. Майысу нүктесі N (118 а сурет). Қисық сызық N нүктесінде t түзуімен жанаса отырып түзудің екінші жағына өтеді. Бірінші және екінші дәрежелі қайту нүктелері (118 б, в суреттер). Бұл нүктелерде қисық сызық түзумен жанаса отырып, түзудің екінші жағына не бір жағымен кері қайтады. Түйінді нүкте (118 сурет). Бұл нүктеде қисық сызық өзін-өзі қиып өтеді. Сынық нүкте (118 д сурет). Бұл нүктеде қисық сызық екі жанама түзу арқылы кері қайтады.

Қисық сызықтардың проекциялық негізгі қасиеттері:

Жалпы жағдайда қисық сызықтың жанама түзуінің проекциясы сол қисық сызықтың проекциясына да жанама болады;

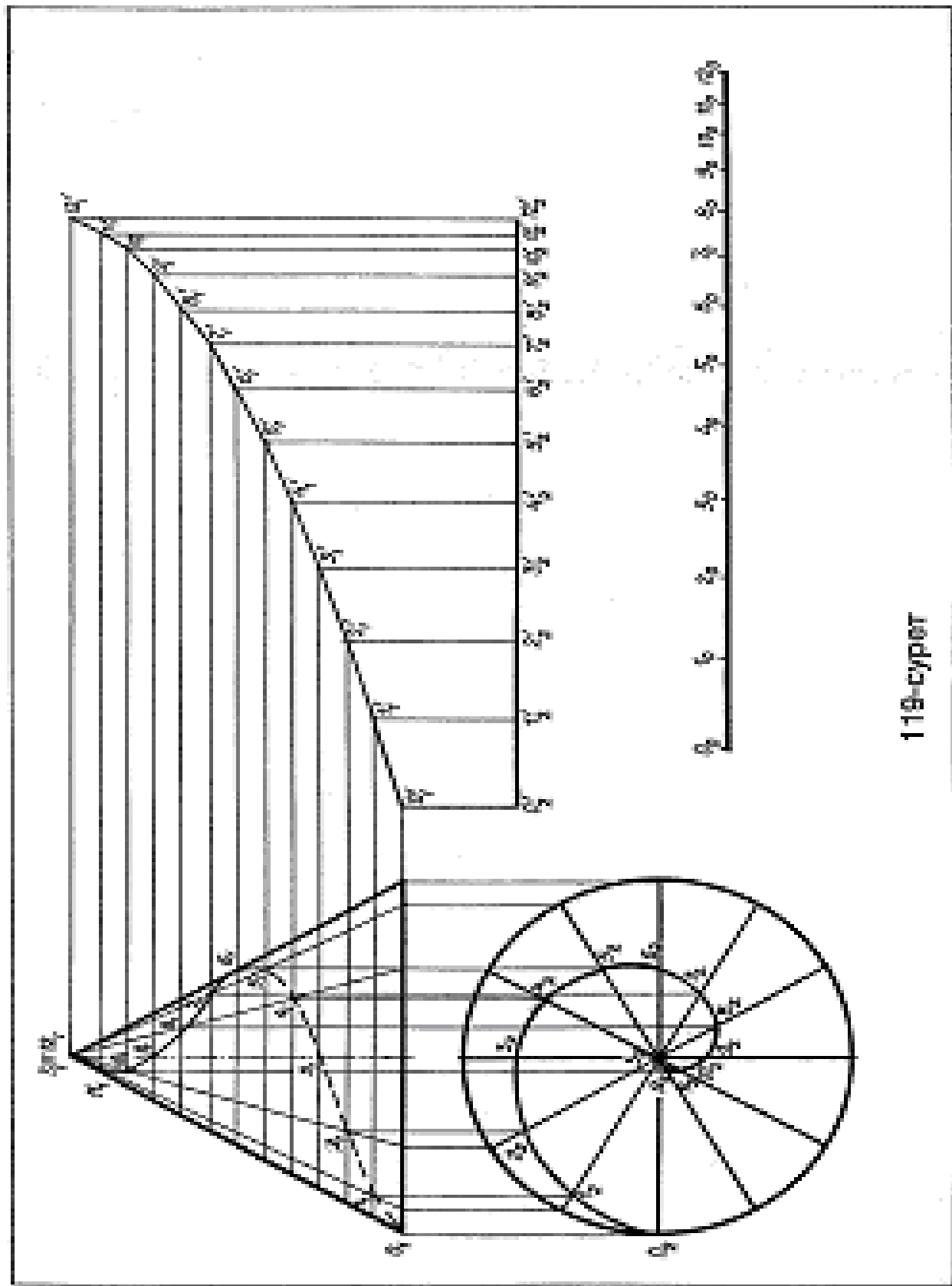
Проекцияланғанда алгебралық жазық қисықтардың реті сақталады.

Жалпы жағдайда қисық сызықтың жанама түзуінің проекциясы сол қисық сызықтың проекциясына да жанама болады;

Проекцияланғанда алгебралық жазық қисықтардың реті сақталады.

Бұрама сызық

Барлық нүктелері бір жазықтықта жатпайтын қисық сызықты кеңіс қисық сызық деп атайды. Кеңіс қисық сызықтардың кескіні қайтымды болу үшін, оның кем дегенде екі проекциясы белгілі болу керек. Олардың ішінде көп тарағаны және техникада да көп қолданылатыны бұрама сызықтар. Беттің



жасаушысы және осі арқылы нүктенің бірқалыпты қозғалысының траекториясын бұрама сызық дейді. Бұрама қозғалыс - күрделі қозғалыс болып

есептеледі, себебі ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстардан тұрады.

Нүктенің бетті бір айналғандағы биіктігі бұраманың қадамы деп аталады.

Бұрама сызық цилиндр бетінде орындалса - оны цилиндрлік бұрама сызық деп атайды. Мұндай сызықтың фронталь проекциясы синусоида; ал горизонталь проекциясы шеңбер болып проекцияланады.

Конус бетінде орындалған бұрама сызықты конустық бұрама сызық деп атайды. Конустық бұрама сызықтың фронталь проекциясы амплитудасы нөлге ұмтылған синусоида, ал горизонталь проекциясы Архимед спиралі болады.

Цилиндрлік не конустық бұрама сызықтардың проекцияларын тұрғызу жолы бірдей, сондықтан 119-суретте конустық бұрама сызықтың проекцияларын тұрғызу көрсетілген. Ол үшін конустың табан шеңбері және оның биіктігі бірдей бөліктерге бөлінген (12 бөлікке бөлінген және нүктелері белгіленбеген). Көрсетілген мысалда конустың биіктігі бір қадам деп есептелген. Бөлінген нүктелерден конус жасаушыларының горизонталь, одан кейін фронталь проекциялары тұрғызылған. Нүктелердің фронталь проекцияларынан жүргізілген горизонталь түзулер конустың жасаушыларымен қиылысқан $0_1, 1_1, 2_1, \dots, 12_1$ нүктелері бұрама сызықтың нүктелері болады. Одан кейін нүктелердің горизонталь проекциялары $0_2, 1_2, 2_2, \dots, 12_2$ тұрғызылады. Нүктелердің бір аттас проекциялары қисық сызық арқылы қосылады.

Егер бұрама сызықтың фронталь проекциясының көрінетін бөлігі солдан оңға қарай көтерілсе, онда бұрама сызық оңқай, кері жағдайда солақай бұрама деп аталады. Қарастырылған мысалда солақай бұрама көрсетілген.

Бұрама сызық тек цилиндр не конус беттерінде ғана орындалмайды. Мысалы, тор бетінде, глобоидальды тісті бұрама бетінде де кездестіруге болады.

Бұрама сызықтың ұзындығы жуықтап хорда тәсілімен орындалады. $0_2 1_2, 1_2 2_2, 2_2 3_2, \dots$ доғалары түзудің кесіндісі ретінде қарастырылады. Бұл кесінділер горизонталь проекциясының қасынан x осіне параллель жүргізілген түзуге салынады.

$$|0_2' 1_2'| = |0_2 1_2|, |1_2' 2_2'| = |1_2 2_2|, |2_2' 3_2'| = |2_2 3_2|, \dots$$

$0_2' 1_2', 2_2', \dots$ проекцияларынан жоғары және нүктелердің фронталь проекцияларынан горизонталь жүргізілген байланыс түзулердің қиылысқан жерінде $0_1', 1_1', 2_1' \dots$ проекциялары тұрғызылады. Бұл тұрғызылудың мақсаты кеңіс сызығын, жазық сызық жасау. Қалауша жүргізілген түзудің бойына $|0_1' 1_1'| = |0_0 1_0|, |1_1' 2_1'| = |1_0 2_0|, |2_1' 3_1'| = |2_0 3_0|$ кесінділерін салып, конусты бұрама сызықтың ұзындығы $|0_0 1_0|$ анықталады.

Негізгі: (2нег. [140-150]); (3нег. [106-108]); (4нег. [133-138]).

Қосымша: (20қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтар:

1. Қисық сызықтар қалай жасалады?

2. Қисық сызықтың қандай нүктелері айрықша нүкте дейді?
3. Қандай сызықтар болады?

9-дәріс

Қисық беттер

Сызба геометрияда беттер, белгілі бір заңдылықпен кеңістіктегі сызықтың бірқалыпты қозғалысы не жылжуы ретінде қарастырылады. Кез келген бетте, жалпы жағдайда, екі сызықты бөлуге болады. Біртектес сызықтың кез келген сызығы, екінші біртектес сызықтың барлық сызықтарымен қиылысады. Олай болса беттің кез келген нүктесінен екі түзу жүргізуге болады. Олардың біреуі жасаушы ℓ , екіншісі бағыттаушы АВ сызықтар деп аталды (102 сурет). Жасаушы ℓ сызығының бағытын АВ бағыттаушы сызығы анықтайды.

Кинематикалы тәсілмен жасалған бетте жасаушы өзгеріссіз не белгілі уақыт өткенде ұзарып, қысқаруы не түрі өзгеруі мүмкін. Бір беттің өзі бірнеше түрмен жасалуы мүмкін. Мысалы цилиндрді: бірінші, ось арқылы жасаушыға параллель түзудің айналуымен; екінші, шеңбердің қозғалысы арқылы, қозғалу бағыты шеңбер жазықтығына перпендикуляр; үшінші, түзу арқылы сфераның қозғалысымен жасалуы мүмкін. Егер конусты алсақ оны да: бірінші, S нүктесінде айналу осімен белгілі бұрышпен қиылысатын жасаушы түзудің айналуы арқылы; екінші, радиусы нөлге ұмтылатын шеңбер арқылы (шеңбердің жазықтығы айналу оське перпендикуляр) жасауға болады.

Сонымен беттердің жасалу жолдары көп, бірақ солардың жеңілі таңдалған жөн.

Беттер және олардың анықтауыштары

Бетті анықтайтын шарттарды беттің анықтауышы дейді. Беттердің анықтауышы геометриялық және алгоритмдік бөліктерден тұрады. Анықтауыштың геометриялық бөлігі нүктелерден, түзулерден не сызықтардан құралады. Ал алгоритмдік бөлігі жасаушының қозғалу заңдылығы жазбаша кейде ауызша айтылады.

Жазықтық - беттердің ең айрықша қарапайым түрі. Оның анықтауышы $\sigma(A, B, C) \Rightarrow (AB, C)$. Жазықтықтың үш нүктесі анықтауышының геометриялық бөлігін түрлендіріп АВ кесіндісі және С нүктесі жасалған (102 - сурет). АВ бағыттаушыны С нүктесі арқылы жүргізілген ℓ жасаушыны қиып өтеді.

Пирамидалы беттер жасаушы ℓ түзуі мен бағыттаушы d сынық сызықтар арқылы беріледі. Беттің кез келген жасаушысы S нүктесі арқылы өтеді (103-сурет).

Призма беттері пирамида беттері сияқты көпжақты беттер болғандықтан бұлардың да жасаушысы ℓ түзуі бағыттаушысы d сынық сызығы болады (104-сурет). Айырмашылығы жасаушы s бағытында өзара параллель болады.

Торс беттері олардың қыры деп аталатын кеңістіктегі d сызығының проекцияларымен беріледі. Беттің жасаушылары қырымен жанасып өзара қиылысады (105-сурет).

Цилиндрлік беттер бағыттаушы d жасаушы ℓ арқылы анықталады. Жасаушының бағыты s -ке параллель орналасады (106-сурет).

Конустық беттер жасаушы ℓ -дың бағыттаушы d бағытында қозғалуы арқылы беріледі. Конустық беттің барлық жасаушылары S ортақ нүктесі болады (107-сурет).

Цилиндрлік және конустық беттерді торс бетінің дербес жағдайы ретінде қарастыруға болады. Цилиндрлік бетте қыр сызығы шексіз нүктеге, ал конустық бетте нүктеге айналады.

Жоғарыда қарастырылған беттерде N нүктесінің проекциялары көрсетілген. Нүкте бетке тиісті болса, онда ол сол беттің жасаушысына тиісті. Олай болса нүктенің берілген проекциясынан беттің жасаушысы жүргізілу арқылы оның екінші проекциясы тұрғызылады.

Беттердің түрлері өте көп. Оларды жіктеу осы уақытқа дейін шешуі табылмаған мәселелердің бірі. Бұған ең басты себеп кейбір беттерді жіктеудің бірнеше класына бірден жатқызуға болады. Мысалы конусты бетті түзу сызықты не айналу беті деуге болады. Төменде тек беттердің техникада көбірек тараған: түзу сызықты, бұрама, айналу, циклдік және топографиялық беттері қарастырылған.

Бұрама беттер

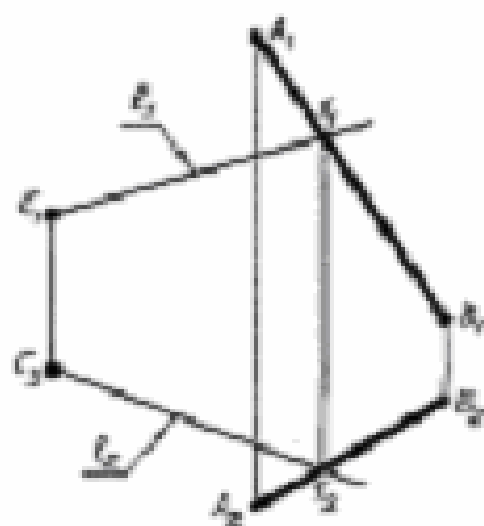
Қандай да болмасын сызықтың бұрама бағытта қозғалысы арқылы жасалатын бетті - бұрама бет дейді. Бұрама беттердің ішінде геликоид түрі техникада көбірек тараған. Геликоид түзудің цилиндрлік бұрама сызық бағытындағы қозғалысы арқылы жасалады. Оның анықтаушысының геометриялық бөлігі беттің айналу осі, жасаушысы және қадамынан тұрады. Беттің осі мен жасаушысы қиылысатын болса, геликоидты жабық, ал олар айқасса ашық геликоид деп аталады. Геликоидтың осі мен жасаушысының арасындағы бұрышқа байланысты тік және көлбеу геликоид деп ажыратады. Егер айналу осі мен жасаушысының арасындағы бұрыш 90° болса тік геликоид, ал олардың арасындағы бұрыш 90° -тан өзге болса көлбеу геликоид деп аталады.

112-суретте жабық тік геликоид көрсетілген. Тік геликоид ℓ жасаушысының екі бағыттаушысы арқылы қозғалысынан жасалған. Бағыттаушысының біреуі беттің айналу осі i , ал екіншісі цилиндрлік бұрама сызық m . Жасаушы ℓ өзінің барлық жағдайында беттің айналу осіне перпендикуляр болады, $\ell \perp i$.

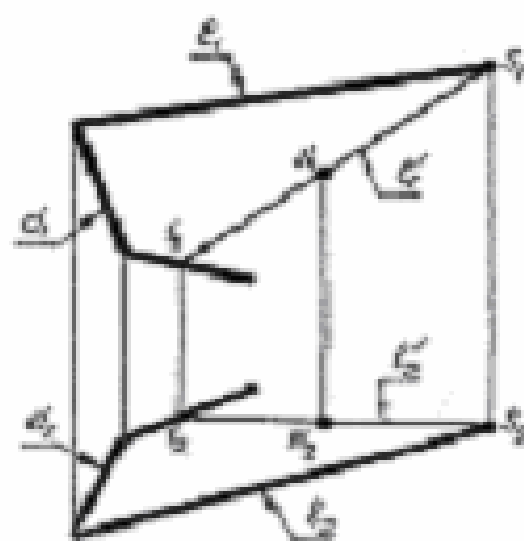
Жабық көлбеу геликоидты тұрғызу 113-суретте көрсетілген. Беттің жасаушысы ℓ кесіндісінің бір шет нүктесі айналу осі i түзуінің бойымен қозғалса, екінші шет нүктесі цилиндрлі бұрама сызықтың m бойымен қозғалады. Жасаушының екі бағыттаушылары арқылы жылжу кезіндегі барлық жағдайында белгілі бір конустың жасаушысына параллельдігі сақталады. α° бұрышымен берілген конус көлбеу геликоидтың бағыттаушы конусы деп аталады. Көлбеу геликоидтың барлық жасаушыларының бағыттары бағыттаушы конустың сәйкес жасаушыларына параллель болады.

Айналу беттері

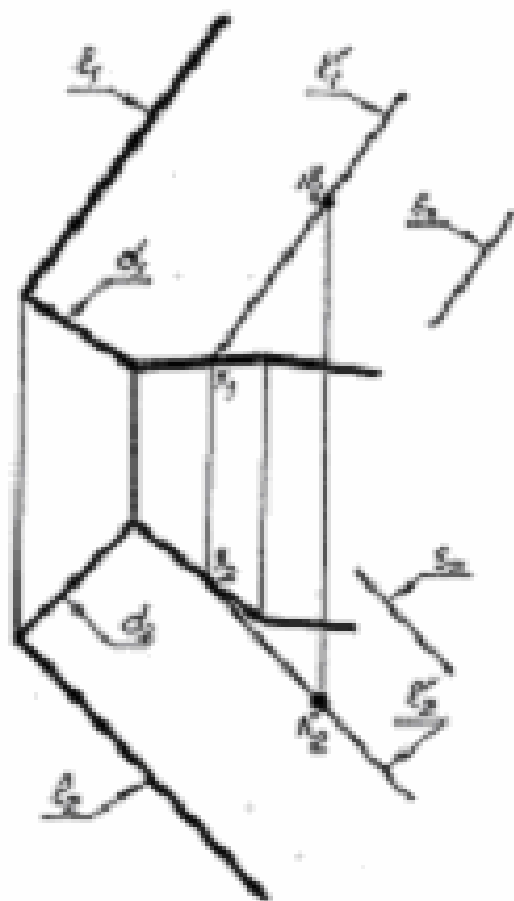
Түзу не қисық сызықты жасаушылардың тұрақты түзу төңірегінде айналуынан жасалған беттерді айналу беттері деп атайды. Мұндай айналу беттердің айналу осьтерін проекциялар жазықтықтарының біріне



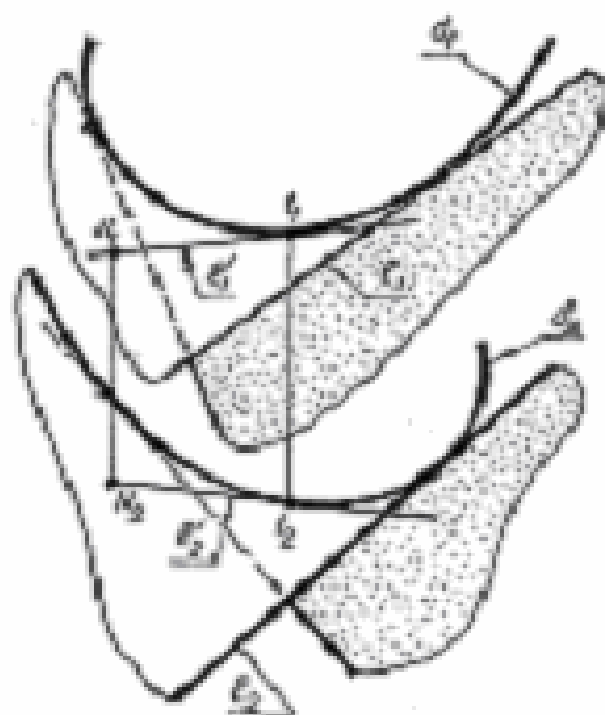
102-сурет



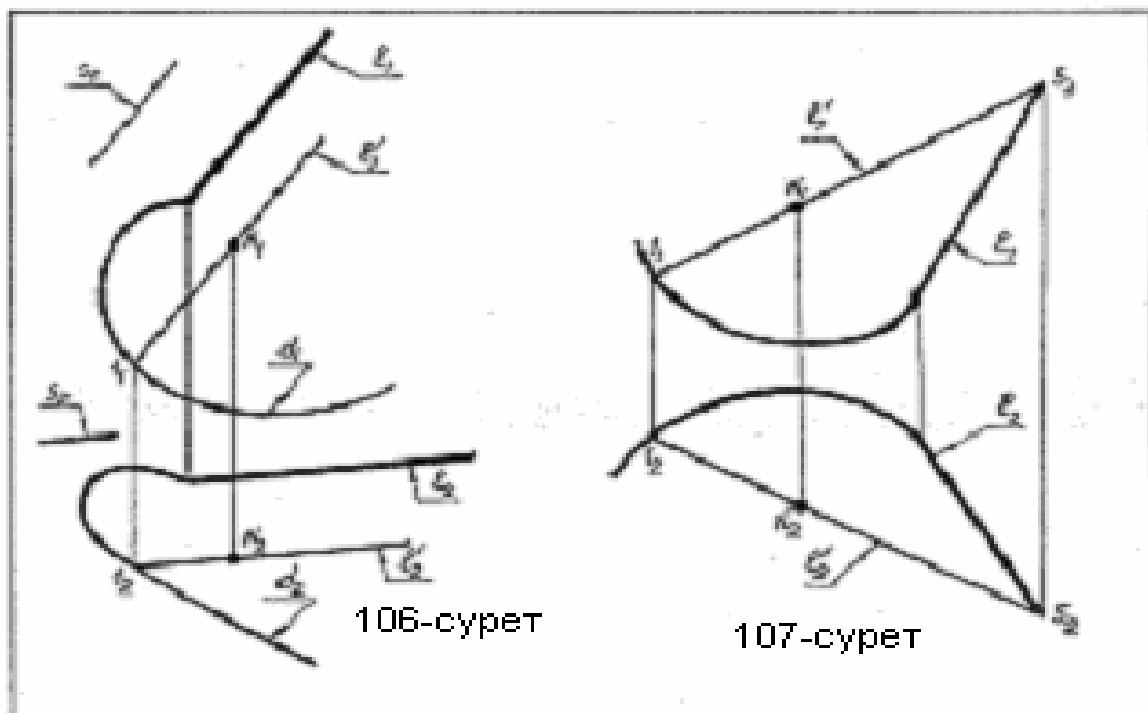
103-сурет



104-сурет



105-сурет



перпендикуляр етіп алады. Бетті жасаушының кез келген нүктесі, центрі айналу осьте жататын шеңбер жасайды. Беттің параллелі деп аталатын шеңбердің жазықтығы айналу оське перпендикуляр болады. Беттің ең үлкен параллелін экватор ең кіші параллелін мойны деп атайды.

Айналу беттеріне бізге бұрыннан таныс тік дөңгелек конус пен тік дөңгелек цилиндр жатады. Бұлардың жасаушылары түзу сызық болып, конуста айналу осімен қиылысып, цилиндрде параллель орналасады. Сонымен қатар жасаушылары әртүрлі қисық сызықтар болатын сфера, тор, эллипсоид, параболоид және басқалары жатады.

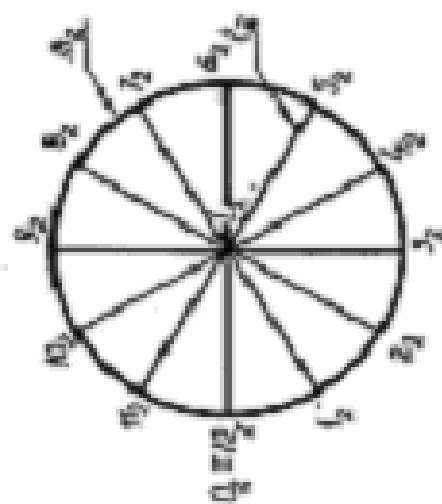
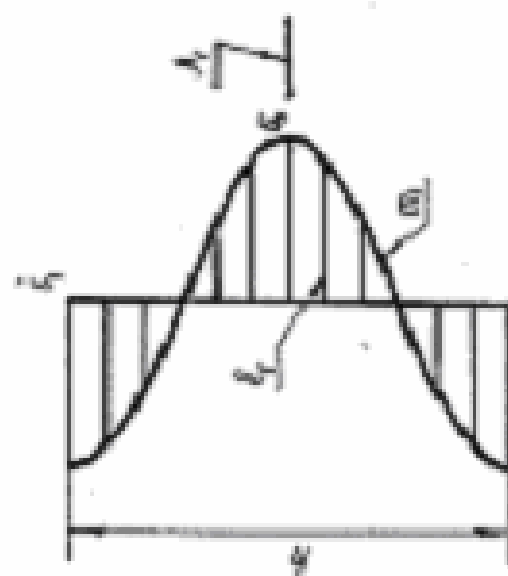
Сфера $\sigma(d,i)$, қайда: d -шеңбер (жасаушы), i -айналу осі. Шеңбер өзінің диаметрі арқылы айналады.

Эллипсоид $\omega(d,i)$, қайда: d -эллипс (жасаушы) симметрия осімен, i -айналу осі. Эллипстің үлкен не кіші осі төңірегінде айналдыру арқылы жасалады.

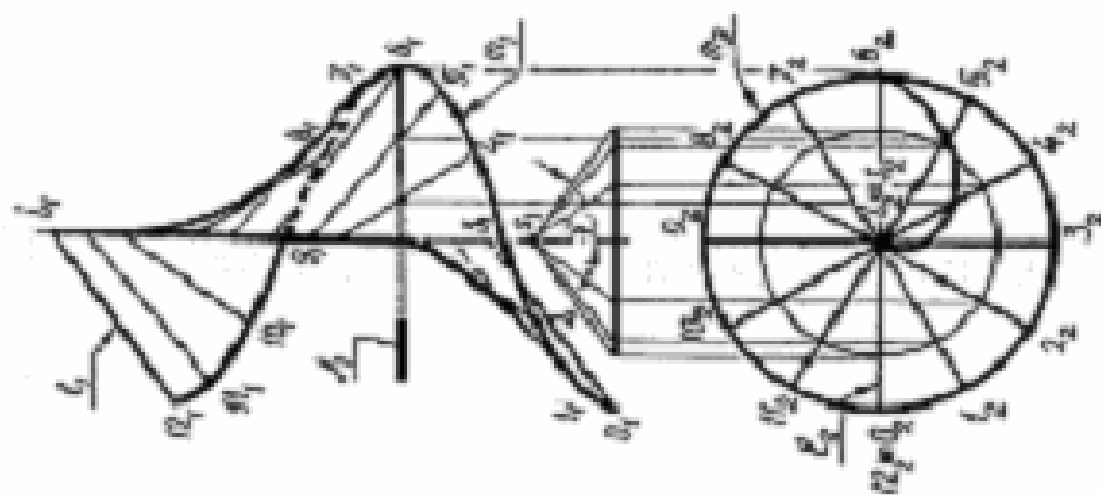
Параболоид $\tau(d,i)$, қайда: d -парабола симметрия осімен, i -айналу осі. Параболаның осі арқылы айналдырып жасалады.

Тор $\phi(d,i)$, қайда: d -шеңбер, i -айналу осі. Шеңбердің жазықтығында жатқан, бірақ шеңбердің центрінде жатпайтын айналу осі арқылы төртінші ретті қисық сызықты тор беті жасалады. Тор ашық және жабық болып екіге бөлінеді. Егер айналу осі i жасаушы шеңбермен не жанамай не қиылыспаса онда ашық тор дейді (114-сурет). Ал егер айналу осі i шеңбермен жанап (115-сурет), не қиылысса (116-сурет), онда жабық тор дейді.

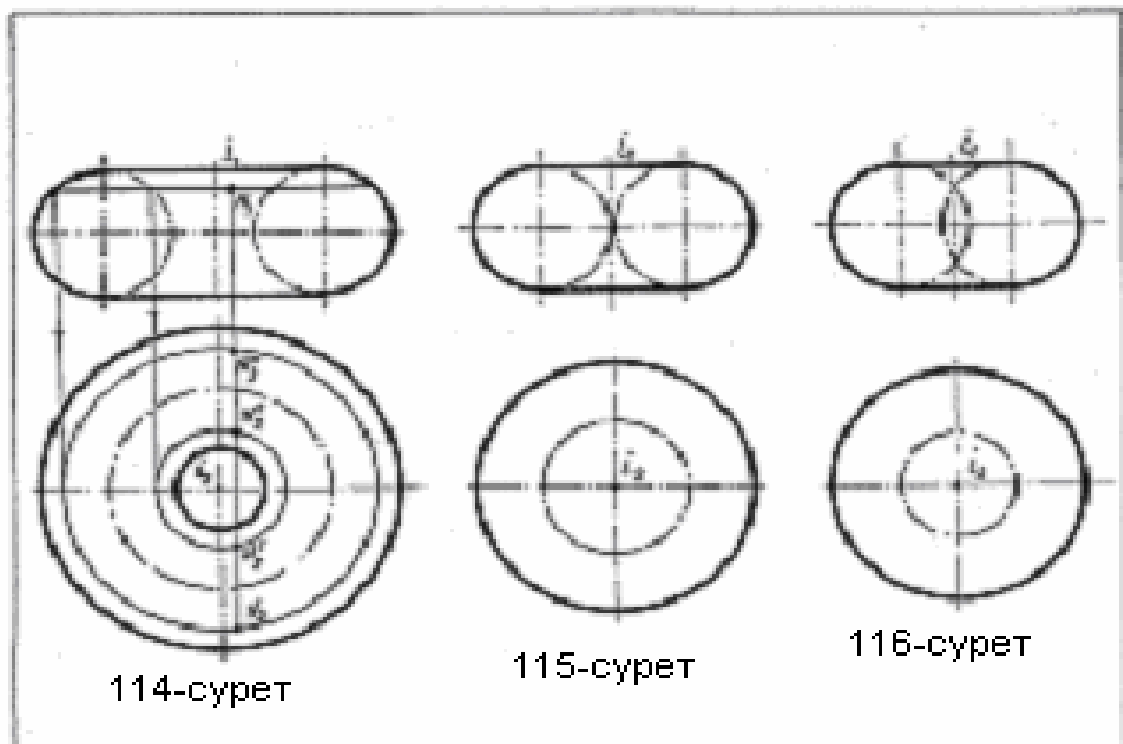
114-суретте тор бетіне тиісті N нүктесінің берілген фронталь проекциясы N_1 арқылы оның горизонталь проекциясын тұрғызу көрсетілген. N_1 проекциясы арқылы беттің параллелі жүргізілген. Ол айналу осіне перпендикуляр болады. Жалпы жағдайда N нүктесі екі параллельде орналасуы мүмкін. Егер N_1



112-cypet



113-cypet



проекциясы тордың көрінетін жағында орналасса, онда оның горизонталь проекциясы N_2 болады. Көрінбей жатса, онда N_2' , N_2'' және N_2''' болады.

Тор төртінші ретті бет болып саналады. Беттің реті деп оның теңдеуіндегі белгісіздің ең жоғары дәреже көрсеткішін айтады. Міне сондықтан да N нүктесінің жалпы жағдайда төрт шешімі болады.

Негізгі: (1нег. [42-46]); (2нег. [150-160]); (3нег. [111-123]); (нег. [138-148]).

Қосымша: (13қос., 49, 50-56 есептер); (20қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Беттер сызда қалай беріледі?
2. Әртүрлі анықтауышпен берілетін беттерлі атаңыз?

10-дәріс.

Түзу сызықты беттер

Түзу сызықты беттердің өзі жайылатын не жайылмайтын беттер болып екіге бөлінеді. Егер бетті бүкпей не үзбей жазықтықпен беттестіру мүмкін болса, ондай бетті жайылатын бет дейді. Мұндай беттерге торс, конустық және цилиндрлік беттер жатады.

Қалған түзу сызықты беттердің бәрі жайылмайтын бетке жатады. Жайылмайтын түзу сызықты бет жалпы жағдайда, бағыттауыштар деп аталатын үш сызықтармен қиылысатын түзулердің жыйыны ретінде қарастырылады. Кейбір беттер бірден екі бағыттауыш арқылы жылжыған түзудің қозғалысы арқылы жасалады. Түзу өзінің барлық жағдайында белгілі бір кейбір жазықтыққа параллель болып қалады. Мұндай жазықтықты параллелизм жазықтығы деп атайды. Параллелизм жазықтығы бар беттер небәрі үшеу. Оларды гиперболаиды, параболоид, коноид, цилиндронид, жалпы атпен, Каталан беттері деп атайды.

Егер түзу сызықты беттің екі бағыттауышы түзулер болса, мұндай бетті гиперболалы параболоид деп атайды. Бұл екінші ретті бет кейбір оқулықтарда қиғаш жазықтық деп аталып жүр (126-сурет). Беттің a және b айқас орналасқан түзлері бағыттауышы болады, λ_2 параллелизм жазықтығы. Егер a және b түзлері өзара параллель болса, онда әдеттегі жазықтық болар еді. Бет бөлігінің қаңқасын тұрғызу оның көптеген жасаушы түзулерін жүргізу арқылы орындалады. Параллелизм жазықтығы λ_2 фронталь жазықтығы болғандықтан, бірінші жасаушылардың горизонталь проекциялары $d_2 \parallel \lambda_2$ жүргізіледі, одан кейін олардың фронталь проекциялары тұрғызылады. Суретте бетте орналасқан N нүктесінің берілген горизонталь проекциясы N_2 арқылы, оның фронталь N_1 проекциясын тұрғызу көрсетілген.

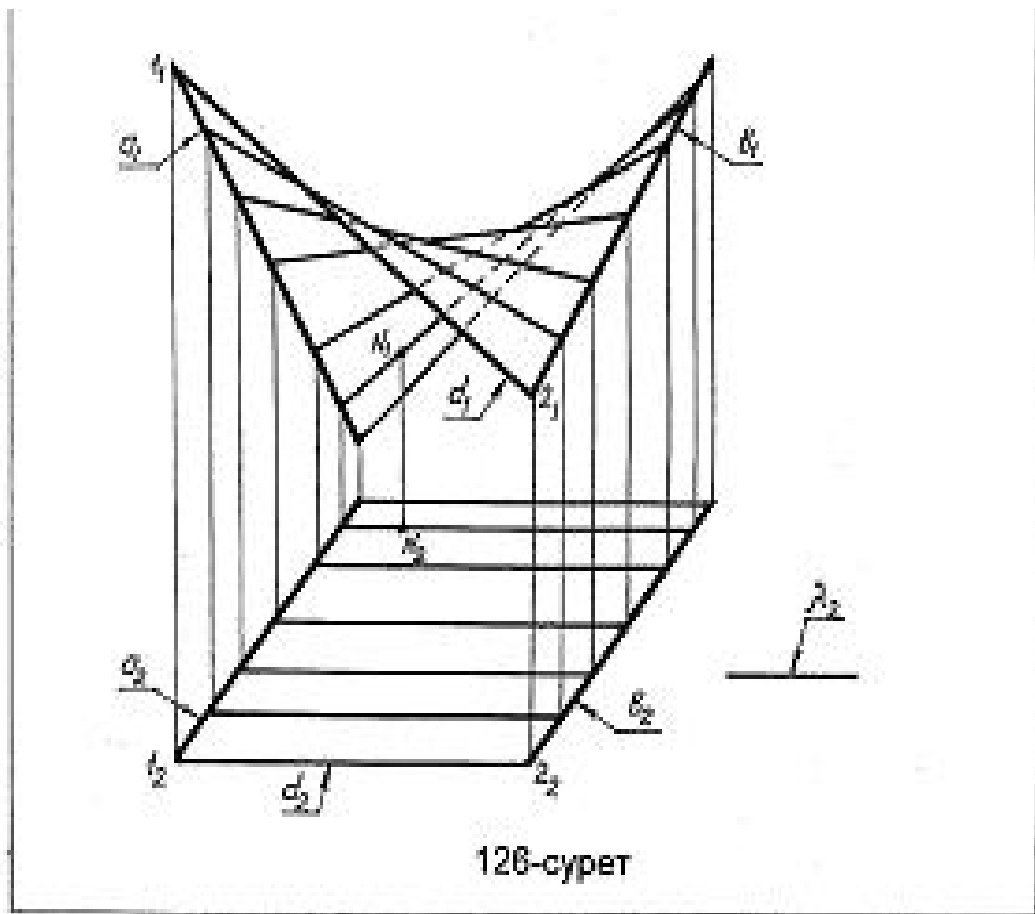
Беттің айырмашылығы - оның кез келген нүктесінен беттің екі түзуін жүргізуге болады. Қимада қию жазықтығы xOz , не yOz координата жазықтықтарына параллель болса парабола, xOy координата жазықтығына параллель болса гипербола болады.

Егер түзу сызықты беттің бағыттаушыларының бірі түзу, екіншісі қисық сызық болса, ондай бет каноид деп аталады (127-сурет). Каноид бетінің қаңқасын тұрғызу гиперболалы параболоид бетінің қаңқасын тұрғызумен бірдей. Бетте жатқан нүктенің параллелизм жазықтығы перпендикуляр проекциялар жазықтығындағы проекциясы белгілі болса, оның екінші проекциясы жеңіл тұрғызылады. N нүктенің N_2 проекциясынан λ_2 параллелизм жазықтығына параллель жүргізіледі, $1_2 2_2 \parallel \lambda_2$. Оның $1_1 2_1$ фронталь проекциясы тұрғызылып, оған N_2 -ден байланыс түзуі арқылы N_1 тұрғызылады.

Егер түзу сызықты беттің екі бағыттауышы қисық сызық болса, ондай бетті цилиндроид деп атайды (128-сурет). Беттің қаңқасын тұрғызу жоғарыда қарастырған беттерден ешбір айырмашылығы жоқ. Нүктенің берілген проекциясы жасаушының белгілі проекциясында болса, (параллелизм жазықтығы берілген проекцияда) оның екінші проекциясын тұрғызу онша қиындық туғызбайтынын жоғарыда көрдік. Егер нүктенің белгілі проекциясы параллелизм жазықтығына перпендикуляр емес жазықтықта болса, есептің шешімі күрделі болады. Суретте K нүктенің берілген K_2 проекциясы арқылы оның фронталь проекциясы K_1 -ді тұрғызу көрсетілген. Бұл жағдайда алдымен цилиндроидтың қаңқасы тұрғызылады. K нүктесі арқылы өтетін цилиндроидтың кез келген b сызығының горизонталь проекциясы K_2 арқылы жүргізіледі, $K_2 \in b_2$. Осы b сызығының горизонталь проекциясы b_2 бойынша, оның фронталь проекциясы b_1 тұрғызылады. K_2 -ден b_1 -мен қиылысқанша байланыс түзуін жүргізіп K_1 тұрғызылады.

Техникада көп тараған түзу сызықты беттерге бір қуысты гиперболаид та жатады. Бір қуысты гиперболаид сызбада үш айқас түзулердің проекцияларымен беріледі. 129-суретте бір қуысты гиперболаид $\phi(m,n,d)$ жасаушыларының біреуінің тұрғызылуы көрсетілген. m түзуінің бойынан E

нүктесін алып, E және n түзуі жазықтық құрайды деп қарастырылған, $\tau(E, n)$.



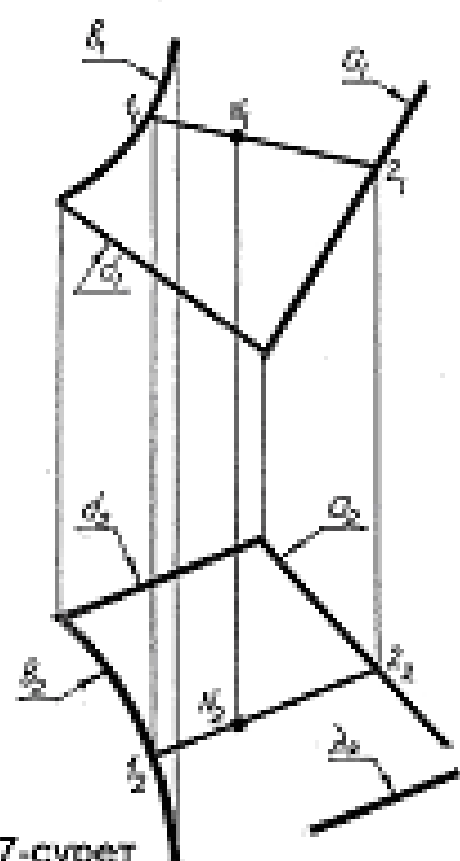
жазықтығы мен d түзуінің қиылысу D нүктесі тұрғызылған $a_1 \equiv d_1$, $a_1 \cap f_1 = 3_1$, $a_1 \cap h_1 = 4_1$, $a_2 \cap f_2 = 3_2$, $a_2 \cap h_2 = 4_2$, $3_2 4_2 = a_2$, $a_2 \cap d_2 = D_2$ одан кейін D_1 тұрғызылған. D және E нүктелері арқылы жүргізілген v түзуі бір қуысты гиперболоидтың жасаушысы болады. E нүктесі m түзуін сызғанда, оған сәйкес v түзуі бір қуысты гиперболоидты сызып шығады. Гиперболоидтың параболоид сияқты бір қуысты гиперболоидтың кез келген нүктесінен осы бетте жататын екі түзу жүргізуге болады. Қию жазықтығы бір қуысты гиперболоидтың осіне перпендикуляр болса - қимада эллипс, қию жазықтығы гиперболоидтың осіне параллель болса - қимада гипербола пайда болады.

Негізгі: (1нег. [42-46]); (2нег. [150-160]); (3нег. [111-123]); (4нег. [138-148]).

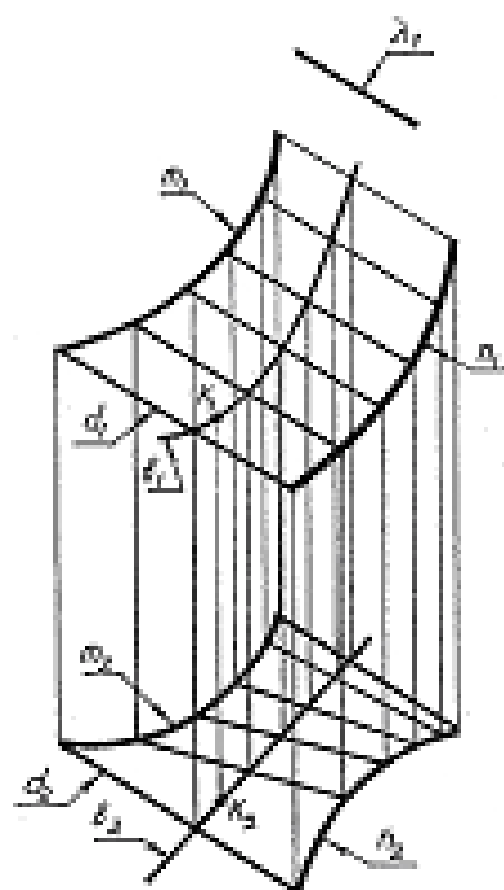
Қосымша: (13қос., 49, 50-56 есептер); (20 қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

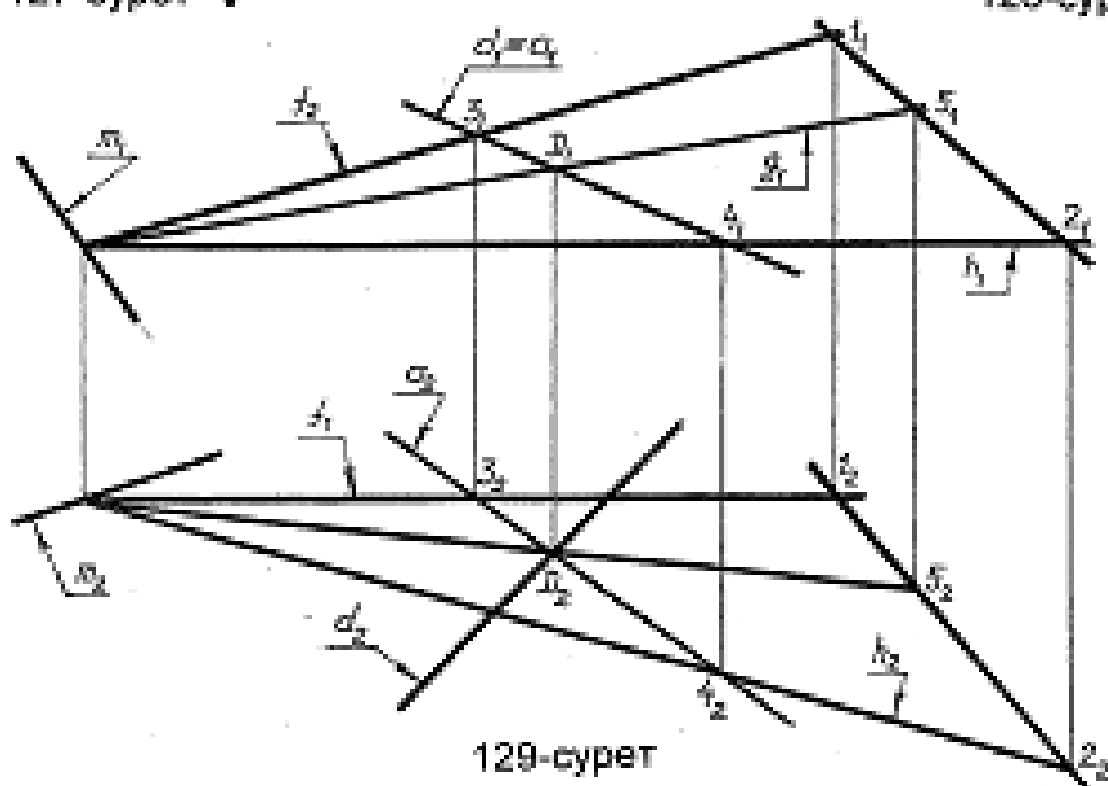
1. Каноид бетін сызбада қалай беруге болады?
2. Параллелизм жазықтығымен бағыттаушы қисық сызықтар болса, ол қандай бет ?



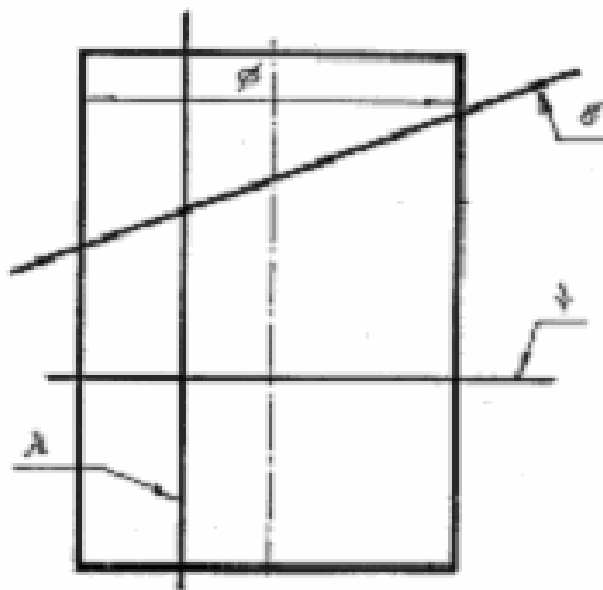
127-сypет



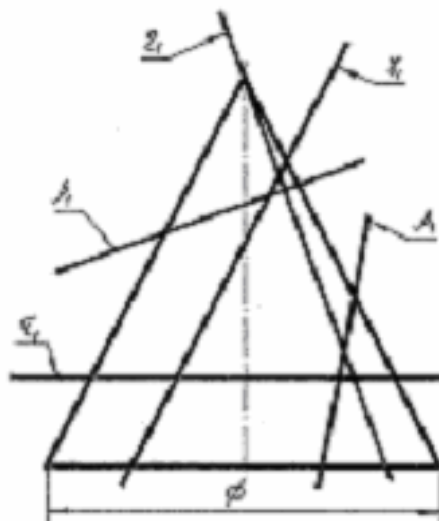
128-сypет



129-сypет



120-сурет



121-сурет

11-дәріс

Беттерде орналасу есептері

Беттерге байланысты нүктенің, оның қаңқасын тұрғызу сияқты орналасу есептеріне жататын сұрақтардың жауаптары жоғарыда таныстырылды. Енді бетке байланысты басқа да орналасу есептері бар. Олар:

- 1) беттердің жазықтықпен қиылысуы;
- 2) беттердің түзумен қиылысуы;
- 3) беттерге жанама жазықтық тұрғызу;
- 4) беттердің өзара қиылысуы.

Беттердің жазықтықпен қиылысуы

Қисық беттердің жазықтықпен қиылысуы жалпы жағдайда жазық қисықты береді. Бірақ қию жазықтығы түзу сызықты беттерді жасаушы арқылы қиса, онда жазық қисық ыдырап түзу болады. Жалпы мұндай есеп көмекші жазықтықтар тәсілімен шешіледі. Берілген бетте бірсыпыра сызықтар алу үшін көмекші жазықтықтар жүргізіледі. Көмекші жазықтықты таңдауда ең басты белгі, түзулер не шеңберлер сияқты қарапайым графикалық сызықтар алу. Бетпен қию жазықтығының және көмекші жазықтықтың қиылысу сызықтары бәсекелес сызықтар болады, сондықтан сызықтың нүктесін тұрғызу бәсекелес сызықтар тәсілімен табылады.

Егер қию жазықтығы проекциялаушы болса, қиылысу сызығын тұрғызу жеңіл орындалады. Сондықтан қию жазықтығы жалпы жағдай жазықтығы болса, оны түрлендіру арқылы проекциялаушы жағдайға келтіру тиімді екеніне күмән жоқ.

Қиылысу сызығының жоғары, төмен, сол, оң орналасқан тірек нүктелері болады. Олар қиылысу сызығының аралық нүктелерін қандай шекте іздеу керектігіне және оның көрінетін не көрінбейтін бөліктерін анықтауға көмектеседі.

Қию жазықтығының орналасуына байланысты цилиндр бетінде әртүрлі жазық мүсіндер пайда болады (120-сурет): шеңбер, егер қию жазықтығы ν цилиндрдің айналу осіне перпендикуляр болса; эллипс, егер қию жазықтығы σ цилиндрдің барлық жасаушыларын қиып, оның осіне перпендикуляр болмаса; тік бұрыш, егер қию жазықтығы λ цилиндрдің айналу осіне параллель болса.

Қию жазықтығының орналасуына байланысты конус бетінде де әртүрлі жазық мүсіндер алуға болады (121-сурет): екі қиылысу түзлері, егер қию жазықтығы η конустың төбесі арқылы өтсе; шеңбер, егер қию жазықтығы τ конустың айналу осіне перпендикуляр болса; эллипс, егер қию жазықтығы ρ конустың барлық жасаушыларын қиып, бірақ оның айналу осіне перпендикуляр болмаса; парабола, егер қию жазықтығы γ конустың бір жасаушысына параллель болса; гипербола, егер қию жазықтығы β конустың екі жасаушысына параллель болса.

112-113-суреттерде жабық тік және көлбеу геликоидтардың айналу осьтеріне перпендикуляр σ жазықтығымен қиылысулары көрсетілген. Жазықтық тік геликоидпен 6-жасаушы арқылы қиылысқан. Көлбеу геликоидпен қиылысуда қимада Архимед спиралі атты сызық пайда болады. Ол қию жазықтығымен жасаушылардың қиылысу нүктелері арқылы тұрғызылады.

Беттердің түзумен қиылысуы

Түзудің бетпен қиылысу нүктелерін жалпы жағдайда төмендегі алгоритм арқылы анықталады:

- 1) берілген түзу арқылы көмекші жазықтық жүргізіледі;

- 2) берілген бетпен көмекші жазықтықтың қиылысу сызығы тұрғызылады;
- 3) түзумен беттің қиылысу нүктелері болатын, сызықпен түзудің қиылысу нүктелері тұрғызылады;
- 4) бет арқылы түзудің көрінетіндігі анықталады.

Беттің дербес жағдай орналасуы түзумен қиылысу нүктелерін ешбір тұрғызусыз бірден анықтауға мүмкіндік береді. 127-суретте тік цилиндрмен ℓ түзуінің қиылысу нүктелері M және N олардың горизонталь проекцияларынан бірден анықталады.

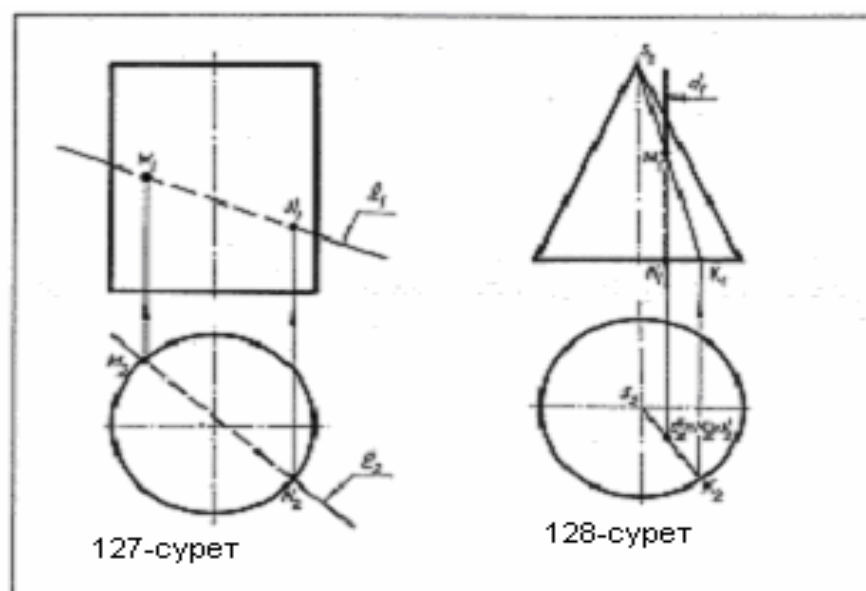
Сол сияқты проекциялаушы d түзуі мен тік конустың қиылысу нүктелерін анықтау да онша көп қиындық туғызбайды (128-сурет). d_2 проекция арқылы конус жасаушысының S_2K_2 арқылы конус жасаушысының горизонталь проекциясы жүргізіледі. Оның фронталь проекциясы $S_1K_1 \cap d_1 = M_1$. Екінші қиылысу нүктесі N конустың табанында орналасқан.

Негізгі: (1нег. [42-46]); (2нег. [150-160]); (3нег. [111-123]); (4нег. [138-148]).

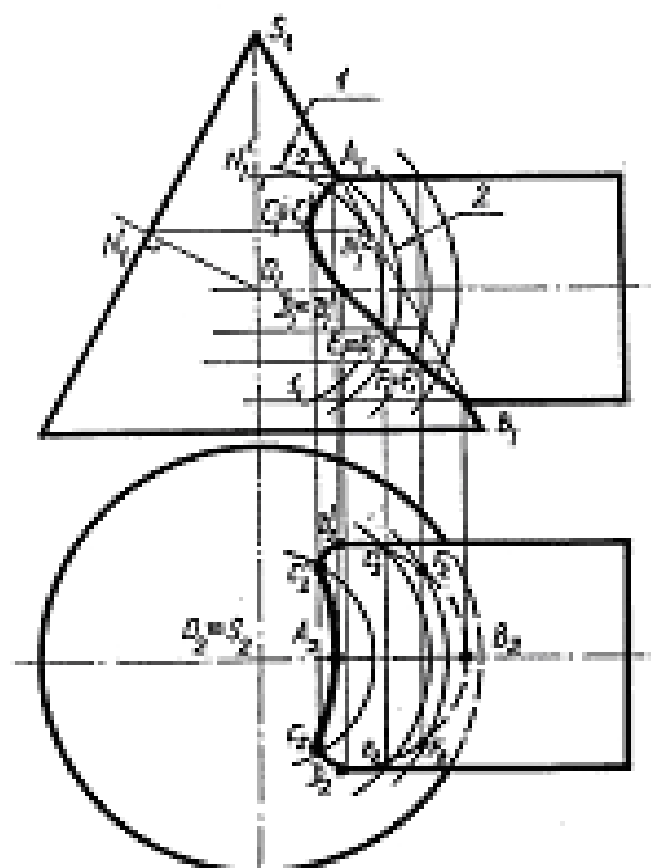
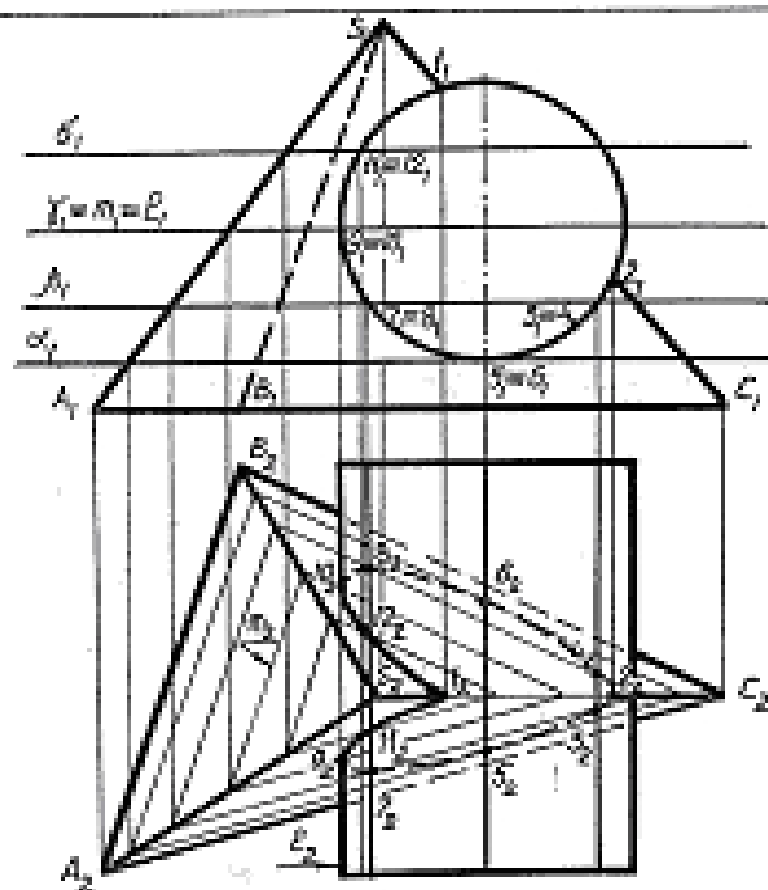
Қосымша: (13қос., 64-67 есептер); (20қос.); (21қос.).

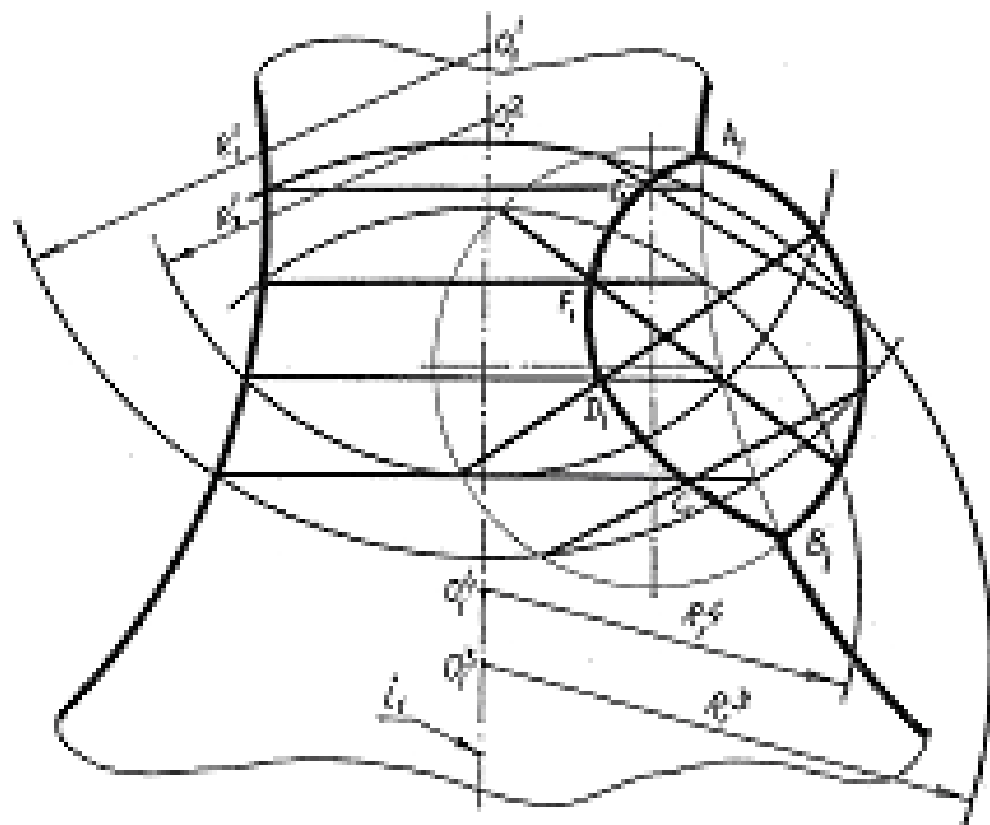
Бақылау сұрақтары:

1. Нүктенің бетке тиістілік шарты қалай?
2. Тік конусты жазықтықпен қиғанда, қимада қандай қисық сызықтар пайда болады?
3. Сфераны және цилиндрды жазықтықпен қиғанда, қимада қандай қисық сызықтар пайда болады?

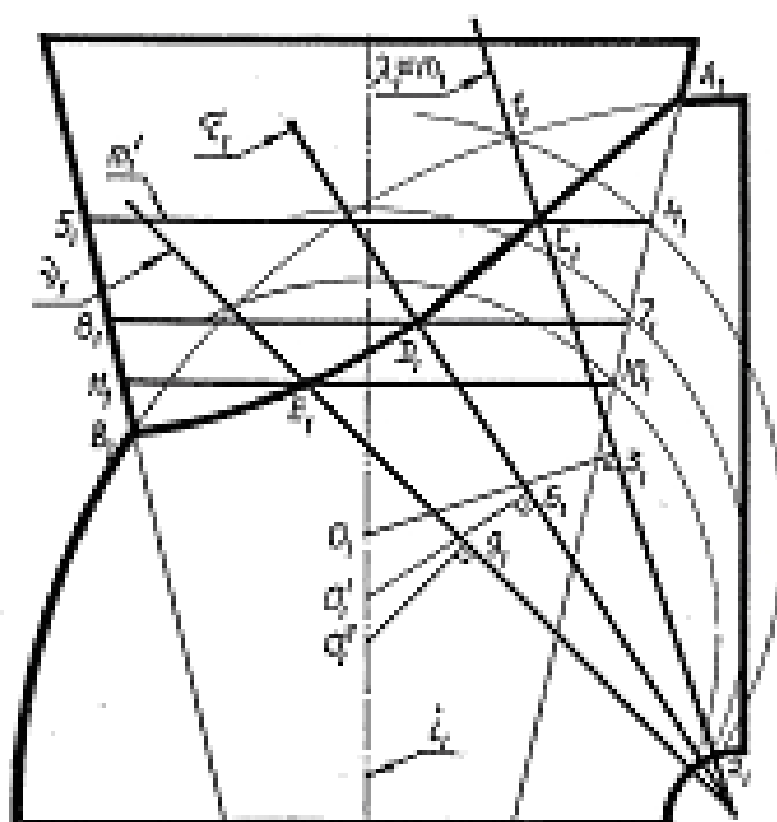


Қисық бет пен көпжақтың қиылысуында жалпы алғанда жазық сызық пайда болады. Көпжақтың беттері қисық бетпен қиылысуында көпжақтың қырларында ортақ нүктелері бар жазық қисық сызық алынады. Сондықтан





160-супер



161-супер

қиылысу сызықтарын тұрғызуда қисық бетпен жазықтықтың қиылысу есебі шығарылады. Қиылысу сызықтарын тұрғызу олардың тірек нүктелерінен басталады. Көмекші жазықтықтар әртүрлі жағдайда болуы мүмкін. Солардың ішінен қарапайым сызықтар беретіні таңдалады.

Қисық беттердің өзара қиылысу сызықтарын тұрғызу көмекші жазықтықтар және көмекші сфералар тәсілдерімен орындалады. Екі беттің қиылысу сызығы бірден екі бетке тиісті нүктелердің жиынтығы болғандықтан беттерге ортақ бірқатар нүктелерді тауып, оларды қосу қажет. Осы мақсатта берілген беттерді бірден қиятын көмекші жазықтық β не сфера жүргізіледі (157-сурет). Алынған a және b сызықтары өзара қиылысуы (A және B нүктелері), жанасуы, не болмаса бөлек орналасуы мүмкін. Егер сызықтардың өзара ортақ нүктесі болса, онда ол екі беттің қиылысу сызығының нүктесі болады. Көмекші жазықтықтың не сфераның кеңістіктегі жағдайын өзгертіп керекті мөлшерде нүктелер алып, олардың көрінетіндігін еске ала отырып қисық сызықпен қосады.

Кейбір жағдайда екінші ретті беттердің қиылысу сызығы ыдырап, екінші ретті жазық қисық сызықтар береді. Мұндай жағдайда қисық сызықтың түрі белгілі болса, онда оның нүктелерін тұрғызбай, негізгі элементтері арқылы орындалады. Мұндай жағдайды беттердің ерекше қиылысуы дейді.

Өзара қиылысу беттердің біреуі проекциялаушы болса, есептің шешілуі жеңіл болады. Мұндай жағдайда проекциялаушы беттен қиылысу сызығының

қажет нүктелері бірден табылады. Демек қандай болмасын цилиндрлі не конусты беттерді кейбір жағдайда түрлендіріп проекциялаушы жағдайға келтірілгені жөн.

Есеп қандай тәсілмен шешілсе де алдымен тірек нүктелерін тұрғызудан басталады. Олар қандай шекте қиылысу сызығының нүктелерін тұрғызуға және қиылысу сызығының көрінетіндігін анықтауға мүмкіндік береді.

158-суретте үшбұрышты пирамида мен тік айналу цилиндрдің қиылысу сызығын тұрғызу көрсетілген. Цилиндр фронталь проекциялаушы болғандықтан, қиылысу сызығының фронталь проекциясы цилиндрдің фронталь проекциясымен сәйкес орналасады. Онда горизонталь проекциясы тұрғызылса болғаны. Пирамиданың SC қырымен цилиндрдің қиылысуы 1-және 2-тірек нүктелерін береді. Сол сияқты шет сол жақта орналасқан 9-және 10-нүктелер, ең төмен орналасқан 5-және 6-нүктелер де тірек нүктелері болады. Олар горизонталь көмекші жазықтықтар арқылы тұрғызылады. Цилиндрдің центрі арқылы жүргізілген γ горизонталь жазықтығы цилиндрді жасаушылар арқылы, пирамиданы үшбұрыш m арқылы қияды.

Олардың горизонталь проекциялары ℓ_2 және m_2 одан 9_2 және 10_2 проекциялары тұрғызылады. 5- және 6-нүктелердің горизонталь проекциялары да цилиндрге жанама $\alpha(\alpha_1)$ жазықтығының көмегімен олардың горизонталь проекциялары 5_2 және 6_2 тұрғызылады. Осы жолмен $\beta(\beta_1)$ жазықтығының көмегімен 7-,8-және 3-,4-нүктелер, $\sigma(\sigma_1)$ жазықтығының көмегімен 11-,12-нүктелердің проекциялары тұрғызылады. Сызбаның оқу

сапасын төмендетпеу үшін көмекші жазықтықтармен пирамиданың қиылысу сызықтары белгіленбеген.

Қиылысу сызығының горизонталь проекциясының $9_2, 11_2, 1_2, 12_2, 10_2$ аралығы көрініп, қалған бөлшегі көрінбей жатады.

13-дәріс Беттердің өзара қиылысуы. Көмекші сфералар тәсілі

159-суретте айналу беттері тік конус және цилиндрдің қиылысу сызығын тұрғызу көрсетілген. Беттердің айналу осьтері O нүктеде қиылысқан. Қиылысу сызығы көмекші сфералар тәсілімен тұрғызылған. Фронталь проекциядан беттердің жоғары A төменгі B тірек нүктелері белгіленіп, олардың горизонталь проекциялары A_2, B_2 тұрғызылады. Олар конустың фронталь очерк жасаушының горизонталь проекциясында жатады. Көмекші сфералардың центрі $O(O_1)$ деп белгіленіп, оның ең үлкен $R_{\max}$ және ең кіші $R_{\min}$ радиустары анықталады. Ең үлкен радиус O нүктесінен беттердің ең қашық тірек нүктесіне тең, суретте $R_{\max} = |OB|$, себебі $|O_1A_1| < |O_1B_1|$.

Ең кіші сфераның радиусы O нүктесінен іштей жанама конусқа және цилиндрге жүргізілген шеңберлердің үлкеніне тең. Ол үшін O_1 -ден конустың бетіне $|O_1N_1|$ және цилиндрдің бетіне $O_1N'_1$ перпендикулярлар жүргізіледі. $|O_1N_1| > |O_1N'_1|$ болғандықтан $R_{\min} = |O_1N_1|$ -ге тең болады. Осы радиуспен жүргізілген 1-сфера конус

бетін шеңбермен жанап, цилиндр бетін шеңбермен қияды. Конус пен жанасу нүктелерін $N_1N_1^2$ қосып және цилиндрмен қиылысу 1_22_1 нүктелерін қосып, сәйкес конустың және цилиндрдің параллельдері тұрғызылады.

Осы екі параллельдің қиылысуы беттердің қиылысу сызығының нүктелерін C және C^1 береді. Олардың горизонталь проекциялары конустың $N N^2$ параллелінде жатады.

2-көмекші сфера қиылысу сызығының горизонталь проекциясының көрінетін бөлігін анықтау үшін жүргізілген. Ол цилиндрдің ось жазығында жататын конусты қиятын сфера.

Көмекші сфераның ең үлкен радиусынан кіші, көмекші сфераның ең кіші радиусынан үлкен етіп кез келген радиуспен центрі O_1 арқылы көмекші сфералар жүргізіліп E және F нүктелері тұрғызылған. Қиылысу сызықтың фронталь проекциясы көрінетін қисық сызық, ал оның горизонталь проекциясы тұйық симметриялы қисық сызық болады. Горизонталь проекциясының $D_2C_2A_2C'_2D'_2$ бөлігі көрініп, қалған бөлігі көрінбейді.

Екі беттің қиылысу сызығын көмекші сфералар тәсілімен салғанда екі жағдай кездеседі. Бірінде көмекші сфералардың бәрі де бір центрден жүргізіледі, сондықтан оны центрлес сфералар тәсілі деп атайды. Екіншіде көмекші сфералардың центрлері әр жерде болады, сондықтан оны центрлес емес сфералар тәсілі деп атайды. 159-суреттегі есеп центрлес сфералар тәсілімен шығарылған.

160-суретте айналу беті мен сфераның қиылысу сызығын тұрғызудың фронталь проекциясы көрсетілген. Есеп центрлес емес сфералар тәсілімен

шығарылған. Ол үшін тірек нүктелері А және В белгіленгеннен кейін R_1, R_2, R_3 және R_4 радиустарымен, әртүрлі $0_1, 0_2, 0_3$ және 0_4 центрлерден сфералар жүргізілген. Сфералардың центр нүктелері айналу беттің осінде орналасқан. Ербір жүргізілген сфералар айналу бетін және берілген сфераны шеңбер арқылы қияды. Олардың өзара қиылысуы (С, D, E, F) қиылысу сызығының нүктесі болады. Шеңберлердің фронталь проекциялары түзу түрінде проекцияланған.

Осы тәсілмен шығарылған 161-суретте қиық конуспен тор бетінің төрттен бір бөлігінің қиылысу сызығын тұрғызу крсетілген. Олардың тек фронталь проекциясы берілген. Фронталь проекциялар жазықтығына конустық айналу осі параллель тордың айналу осі перпендикуляр орналасқан. Конустың очерк жасаушылары мен тордың очерк меридианасымен қиылысқан нүктелер тірек нүктелер А және В болады. Қиылысу сызығының аралық нүктелерін табу үшін тордың центрі арқылы фронталь проекциялаушы $\lambda(\lambda_1)$ жазықтығы жүргізілген. Оның диаметрі $m = |12|$ немесе $m_1 = |1_1 2_1|$, центрі $3(3_1)$. $3(3_1)$ нүктесінен $\lambda(\lambda_1)$ жазықтығына тұрғызылған перпендикуляр конустың осін $0(0_1)$ нүктеде қияды. Центрі $0(0_1)$ нүктесі етіп $1(1_1)$ және $2(2_1)$ нүктелері арқылы өтетін сфера жүргізіледі. Жүргізілген сфераның центрі конустың осінде жатқандықтан олар осьтес айналу беттері болады. Осьтес айналу беттері шеңберлер бойымен қиылысады. Сфера конусты $m(m_1')$ шеңбермен қияды. $m(m_1)$ және $m(m_1')$ қиылысуынан керекті қиылысу сызығының $C(C_1)$ нүктесі тұрғызылады. Осы жолмен τ және v жазықтықтардың көмегімен $D(D_1)$, $E(E_1)$ нүктелері тұрғызылған.

Көңіл аударатын нәрсе С, D, E, нүктелері кеңістікте симметриялы қос нүктелер болып саналады. Олар бетте көрінетін және көрінбейтін жақтарында орналасқан.

Негізгі: (1нег. [46-51]); (2нег. [125-140]); (3нег. [93-108]); (4нег. [120-132]).

Қосымша: (13қос., 57-63 есептер); (20қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Қиылысу сызығын тұрғызуда көмекші сфералар тәсілі қалай таңдалады?

2. Қиылысу сызығын тұрғызуда қандай нүктелер тірек, аралық деп аталады?

14-дәріс

Беттердің жаймасы. Көпжақтардың жаймасы

Беттердің жаймасын орындау инженер мамандарға жиі кездесетін іс. Оны орындауда күрделілігі әртүрлі беттермен жұмыс істеуге тура келеді. Бетті өте жұқа және иілімді, бірақ қысылмайтын және созылмайтын деп қарастырылады.

Онда кейбір беттерді бір жазықтыққа үзбей бүктеусіз жаюға болады. Мұндай беттерді жайылатын беттер деп атайды. Жайылатын беттерге цилиндрлі, конусты, торс беттері және көпжақтардың барлық түрлері жатады. Қалған барлық беттер жайылмайтын беттерге жатады. Бірақ жайылмайтын беттердің де жаймасын жуықтап орындайды.

Беттің жаймасы орындалғанда, бет пен жайманың арасында өзара бір мәнді сәйкестілік орналасады. Беттегі нүктеге не сызыққа жаймада сондай нүкте не сызық сәйкес болады. Осыған байланысты келесі қасиеттері бар:

1. Беттегі және оның жаймасындағы өзара сәйкес сызықтардың ұзындықтары бір-біріне тең болады. Немесе бетті жайғанда оның сызықтарының ұзындығы өзгермейді;

2. Беттегі екі сызықтың арасындағы бұрыш жаймадағы сәйкес екі сызықтың арасындағы бұрыш өзара тең болады;

3. Беттегі тұйық сызықтың ауданы жаймадағы сәйкес тұйық сызықтың ауданы өзара тең болады;

4. Беттегі түзу жаймада да сәйкес түзу болады;

5. Беттегі параллель түзулер жаймадада сәйкес параллель түзу болады.

Беттердің жаймалары келесі тәсілдермен орындалады:

1. Үшбұрыштар. 2. Нормаль қима. 3. Цилиндрлер. 4. Жазба.

Беттің жаймасы қандай тәсілмен орындалса да алдымен берілген проекциялардан жаймаға керекті элементтері, олардың шынайы өлшемдері анықталып, қалған элементтерінің белгісіз шынайы өлшемдері анықталып алынуы қажет.

Аталған тәсілдердің орындалу мәнісін мысалдар арқылы анықтауға болады.

Көпжақтардың жаймасы жазықтықта көпбұрыш түрінде орналасады. Олардың жаймасын орындау, әрбір жақтардың шынайы өлшемдерімен бір-бірін тіркестіре салу арқылы тұрғызылады. Жайма тек шынайы өлшеммен тұрғызылатындықтан көпжақтың қырларының шынайы өлшемдері арқылы орындау ыңғайлы болып келеді. Кейбір жағдайда беттің диагоналі қажет болады.

Үшбұрышты призманың толық жаймасын орындау 162-суретте көрсетілген. Призманың бүйір беттері тіртбұрыштар болғандықтан, олардың жаймасы да төртбұрыштан тұрады. Суретте призманың бүйір қырлары фронтальдар болғандықтан олардың $|A_1F_1|$, $|B_1E_1|$, $|C_1D_1|$ проекциялары сәйкес қырлардың шынайы ұзындықтарына тең. Олай болса CD қыры арқылы призма бетін жая бастауға болады (162а-сурет).

CDBE бетін CD арқылы айналдырғанда B_1 және E_1 проекциялары C_1D_1 қырына перпендикуляр орын ауыстырады. Олай болса призма қырларының барлық нүктелерінен орын ауыстыру бағыттарына қарай сызықтар жүргізіледі. В нүктесінің С нүктесі арқылы айналу радиусы $|C_2B_2|$ -ге тең, осындай радиуспен Е нүктесі де D нүктесі арқылы айналады $|D_2E_2|$. $|C_2B_2| = |D_2E_2|$. Центрі C_1 арқылы $R = |C_2B_2|$ және центрі D_1 арқылы $R = |D_2E_2|$ доғалар жүргізіліп B_0 және E_0 нүктелері тұрғызылады. Келесі AFBE беті BE қыры арқылы айналдырылады. А нүктесінің радиусы $R = |B_2A_2|$, F нүктесінің радиусы $R = |F_2E_2|$, $|B_2A_2| = |F_2E_2|$. Осы жолмен үшінші AFCD беті де тұрғызылады. С нүктесінің айналу радиусы $R = |A_2C_2|$, D нүктесінің айналу радиусы $R = |F_2D_2|$. B_0 нүктесі арқылы C_0 нүктесін, A_0 арқылы C_0 нүктесін циркульмен бұрып табаны тұрғызылады.

Осылай оның екінші табаны да орындалады. Призма бетінде орналасқан К нүктесінің жаймада орналасуы суреттен түсінікті.

Егер призманың бүйір қырлары жалпы жағдайда орналасса, онда сызбаны түрлендіріп деңгей жағдайға әкелінуі қажет.

Сонымен призманың жаймасын жазба тәсілімен орындалуы көрсетілді. Мұндай бетті нормаль қима тәсілімен де осындай жайма тұрғызуға болады (162б-сурет). Ол үшін фронталь проекциялаушы $\beta(\beta_1)$ жазықтығы призманың қырына перпендикуляр жүргізілген. β жазықтығы мен призманың 123 қимасы тұрғызылып, оның шынайы мөлшері $1_4 2_4 3_4$ тұрғызылған. Енді бос жерге беттің жаймасын орындауға болады. Қалаулы бағытта түзу жүргізіліп оның бойына қиманың шынайы мөлшері салынады. $|3_0 1_0| = |3_4 1_4|$, $|1_0 2_0| = |1_4 2_4|$, $|2_0 3_0| = |2_4 3_4|$. $1_0, 2_0, 3_0$ нүктелерден сол түзуге перпендикуляр екі жаққа қарай түзулер жүргізіліп, олардың бойына призма қырларының шынайы ұзындықтары салынады. $|1_0 A_0| = |1_4 A_4|$, $|1_0 F_0| = |1_4 F_4|$... Жаймада K_0 нүктесі сол беттің түзуі арқылы тұрғызылған. Одан кейін призманың астыңғы және үстіңгі табандары тұрғызылады.

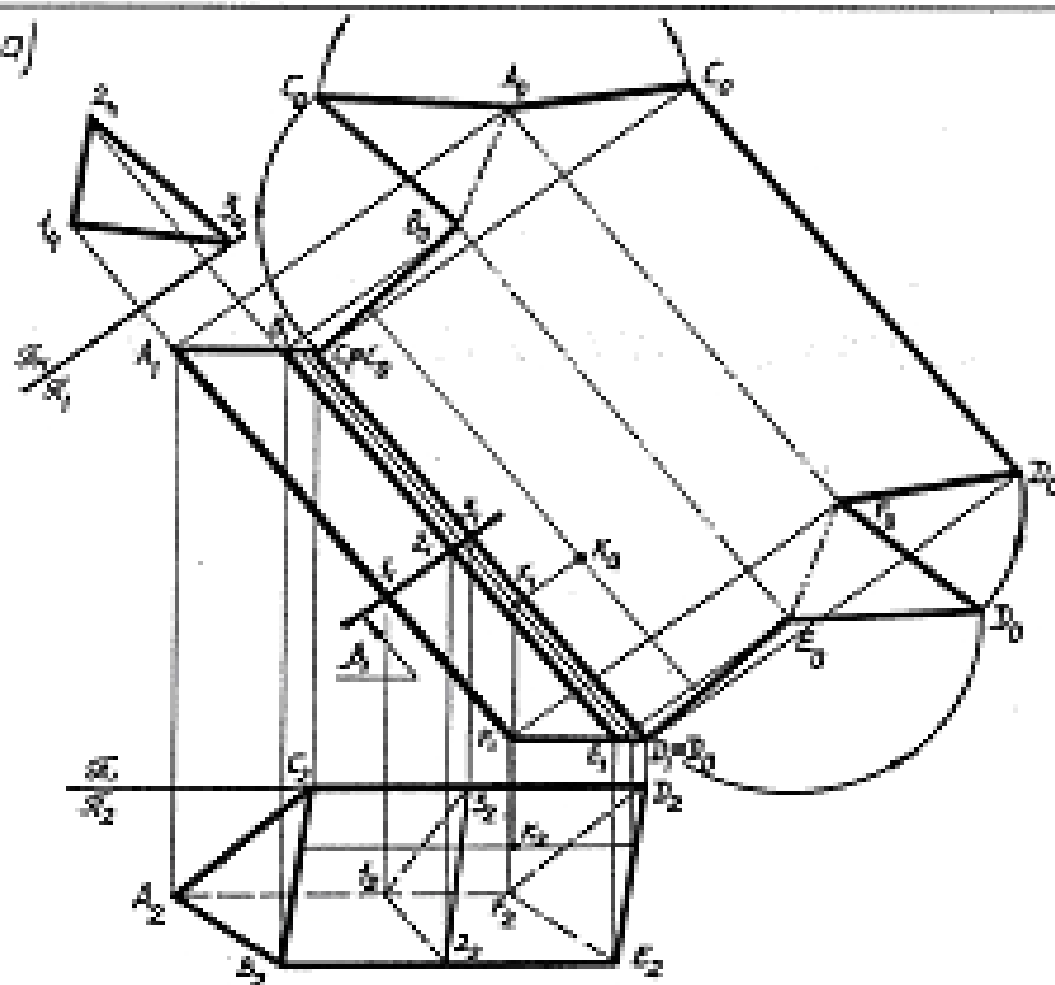
Призманың бүгілетін қырлары үзілме екі нүктелі сызықпен көрсетіледі.

163-суретте үшбұрышты пирамиданың толық жаймасын тұрғызу көрсетілген. Пирамиданың табаны ABC горизонталь деңгей орналасқан, $A_2 B_2 C_2 = ABC$. Бүйір беттері жалпы жағдайда орналасқан. Сондықтан бүйір беттердің шынайы өлшемдерін анықтау қажет. Ол үшін бүйір беттерді құрайтын қырлардың шынайы өлшемдерін тапса жеткілікті болады. Пирамиданың фронталь проекциясының жанынан $S'_1 O_1$ түзуін жүргізіп, O_1 нүктеден горизонталь түзуге бүйір қырларының горизонталь проекциялары өлшеніп салынады. $|O_1 B'_1| = |B_2 S_2|$, $|O_1 C'_1| = |C_2 S_2|$, $|O_1 A'_1| = |A_2 S_2|$. B'_1, C'_1, A'_1 нүктелерін S'_1 нүктесімен қосып SB, SC, SA қырларының шынайы өлшемдері табылады. Олар $|SB| = |S'_1 B'_1|$, $|SC| = |S'_1 C'_1|$, $|SA| = |S'_1 A'_1|$ тең.

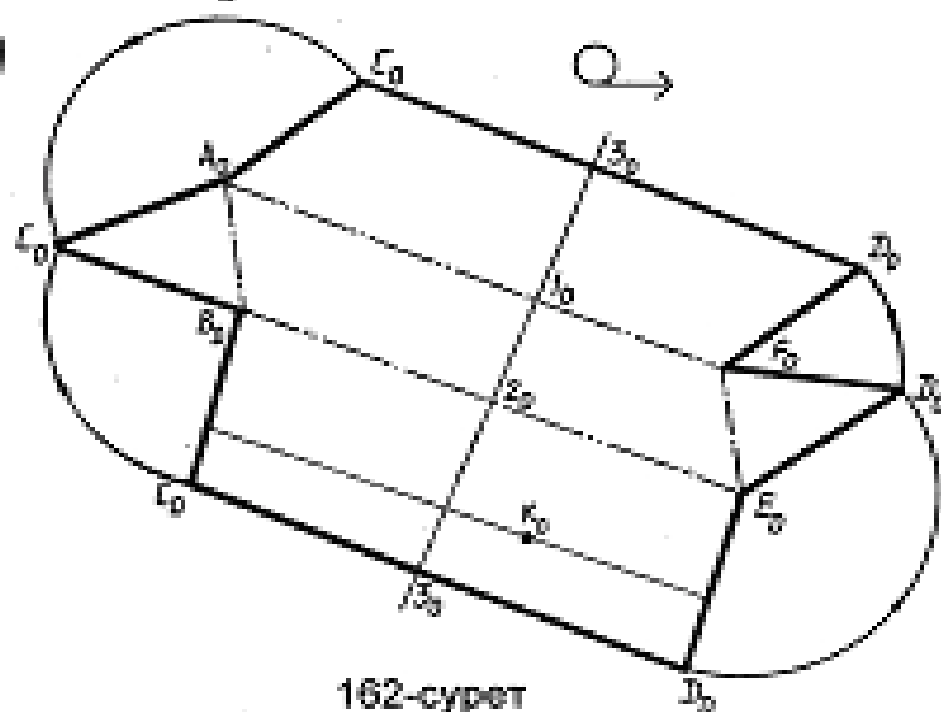
Пирамиданың табан бетінің горизонталь проекциясы шынайы екендігін пайдаланып осыған бүйір беттерді құрастырса жеткілікті (163а-сурет). Ол үшін әрбір бетте пирамиданың төбе нүктесі S- тің орны табылса жеткілікті. Центрі $B_2 \equiv B_0$ арқылы радиусы $R = |S'_1 B'_1|$, центрі $C_2 \equiv C_0$ арқылы радиусы $R = |S'_1 C'_1|$, центрі $A_2 \equiv A_0$ арқылы радиусы $R = |S'_1 A'_1|$ жүргізілген доғалардың қиылысулары S^0 нүктесінің әрбір бүйір бетте орналасуын анықтайды. S_0 нүктесін сәйкес табан нүктелерімен қосып пирамиданың жаймасы аяқталады. Беттегі N нүктесінің жаймадағы орны сол бет арқылы жүргізілген түзудің көмегімен анықталған. Пирамиданың жаймаға қажет қырларының шынайы өлшемдерін анықтағаннан кейін, оның жаймасын бөлек жерге орындауға болады (163б-сурет). Ол үшін қалаулы бағытта түзу жүргізіліп оған пирамиданың бір қырының ұзындығы салынады. Одан кейін табан өлшемі салынып, оны пирамиданың төбе нүктесімен қосып пирамиданың бір беті тұрғызылады. Қалғандары жалғастырылып тұрғызыла береді. $|S_0 A_0| = |S'_1 A'_1|$. A_0 нүктеден радиусы $|A_2 B_2|$ -ге тең және S_0 нүктеден радиусы $|S'_1 B'_1|$ -ге тең жүргізілген доғалар өзара қиылысып B_0

нүктесін береді. Осылай C_0 және A_0 нүктелері тұрғызылады.
 $|B_0C_0| = |B_2C_2|$, $|S_0C_0| = |S'_1C'_1|$,

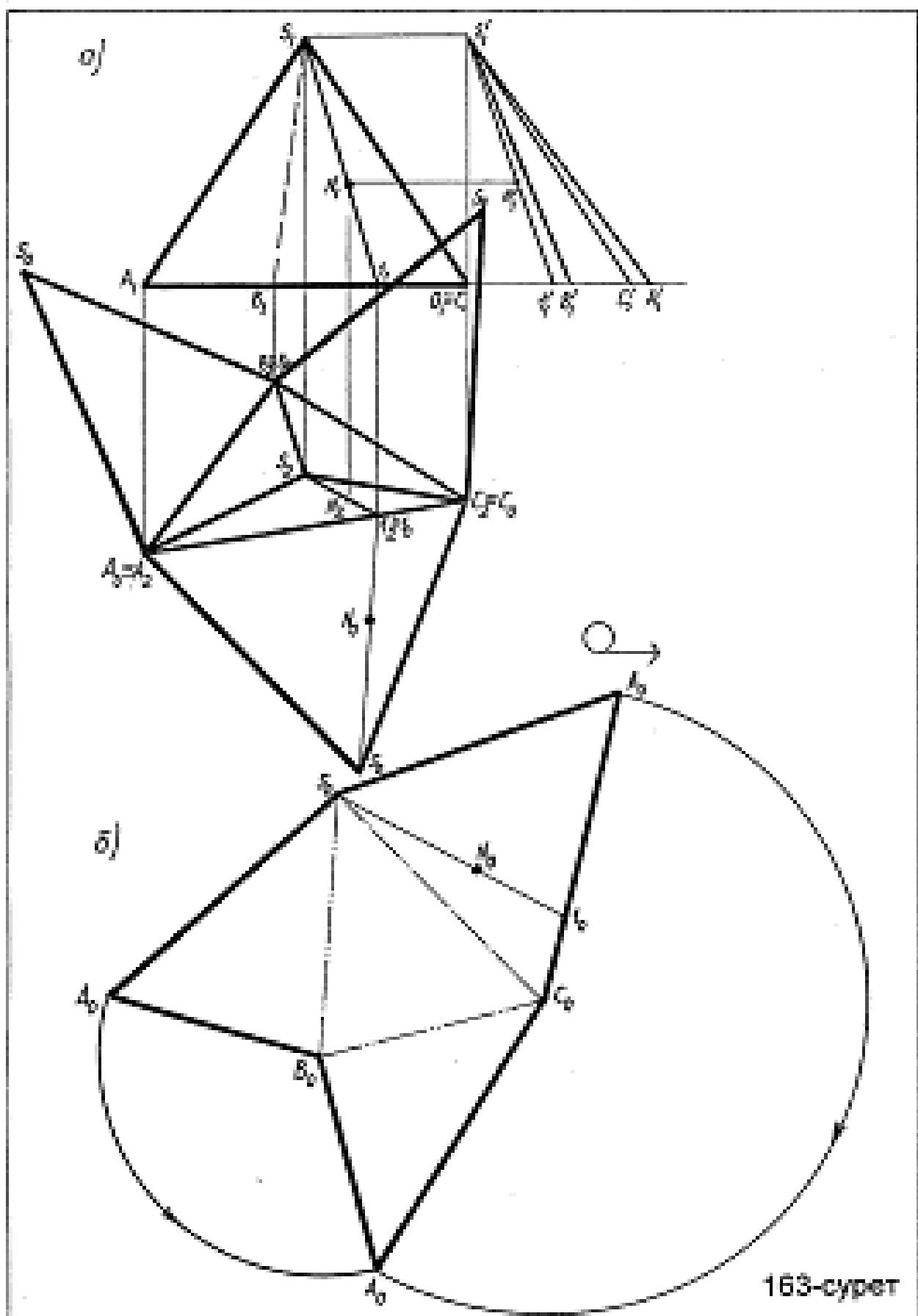
а)

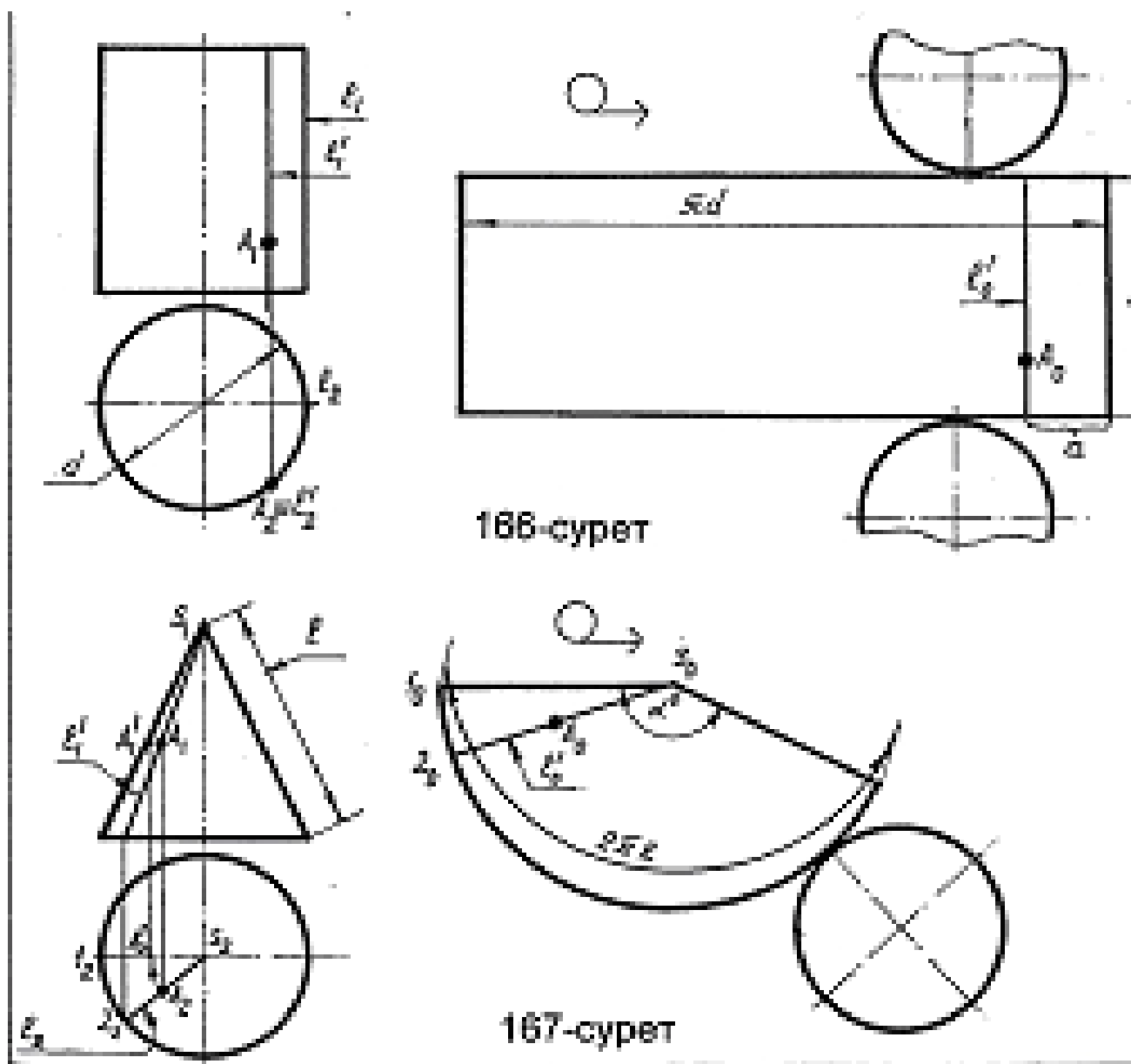


б)



162-сурет





166-сурет

167-сурет

$|C_0A_0| = |C_2A_2|$, $|S_0A_0| = |S_1'A_1'|$. Енді B_0 және C_0 нүктелері арқылы A_0 нүктесін айналдырып пирамиданың табаны тұрғызылады. N_0 нүктесі жоғарыдағы жолмен тұрғызылған. Пирамиданың бүгілетін қырлары үзілме екі нүктелі сызықпен, қалғандары жуан тұтас сызықпен жүргізіліп жайма тұрғызу аяқталады. Пирамиданың жаймасы үшбұрыштар тәсілімен тұрғызылған. $|S_0A_0| = |S_1'A_1'|$. A_0 нүктеден радиусы $|A_2B_2|$ -ге тең және S_0 нүктеден радиусы $|S_1'B_1'|$ -ге тең жүргізілген доғалар өзара қиылысып B_0 нүктесін береді. Осылай C_0 және A_0 нүктелері тұрғызылады. $|B_0C_0| = |B_2C_2|$, $|S_0C_0| = |S_1'C_1'|$, $|C_0A_0| = |C_2A_2|$, $|S_0A_0| = |S_1'A_1'|$. Енді B_0 және C_0 нүктелері арқылы A_0 нүктесін айналдырып пирамиданың табаны тұрғызылады. N_0 нүктесі жоғарыдағы жолмен тұрғызылған. Пирамиданың бүгілетін қырлары үзілме екі нүктелі сызықпен, қалғандары жуан тұтас сызықпен жүргізіліп жайма тұрғызу аяқталады. Пирамиданың жаймасы үшбұрыштар тәсілімен тұрғызылған.

15-дәріс Қисық беттердің жаймасы

Тік айналу цилиндрдің жаймасы тікбұрыштан және екі шеңберден тұрады (166-сурет). Тікбұрыштың ұзындығы πd -ға тең, биіктігі $\ell_0 = \ell_1$. Беттегі А нүктесінің жаймадағы орны, сол нүкте арқылы жүргізілген жасаушының көмегімен тұрғызылады. Ол үшін $a = \ell_2 \ell'_2$ тікбұрышқа салынып ℓ'_0 жасаушысы жүргізіледі.

Оның бойына цилиндрдің табанынан A_1 -ге дейінгі ұзындық салынып A_0 тұрғызылады.

Тік айналу конустың жаймасы айналу секторы болып, оның радиусы конустың жасаушысы ℓ -ға тең болады (167-сурет). Оның орта бұрышы $\alpha^\circ = 2\pi R/\ell$ не болмаса табан шеңберінің ұзындығына тең болады. Конустың бетінде орналасқан А нүктесінің жаймадағы орны оның А нүктесі арқылы жүргізілген жасаушысының көмегімен тұрғызылады. Ол үшін жаймаға $|1_0 2_0| = |1_2 2_2|$ салынып $S_0 2_0$ арқылы ℓ'_0 жүргізіледі. Оған $S_1 A'_1$ салып A_0 нүктесі тұрғызылады.

168-суретте көлбеу орналасқан конустың жаймасын тұрғызу көрсетілген. Жайма үшбұрыштар тәсілімен орындалған. Конустың табан шеңбері 12-ге бөлініп, олардан жасаушылар жүргізілген. Жасаушылардың арасындағы бетті үшбұрыш ретінде қарастырылса, онда конустық бетінде 12 үшбұрыш пайда болады. Әрбір үшбұрыштың екі қыры конустың жасаушылары, ал үшіншісі -хорда. Суретте хордалар шынайы шамада, ал жасаушылар көлбеу орналасқан- дықтан, олардың шынайы ұзындықтарын анықтау қажет. Сол үшін олардың горизонталь проекциялары өлшеніп K_1 нүктесінен горизонталь түзудің бойына салынады. Немесе $|K_1 1'_1| = |S_2 1_2|$, $|K_1 2'_1| = |S_2 2_2|$... (Суретте конус симметриялы болғандықтан, оның симметриялы бір жағын ғана тұрғызу көрсетілген). Үшбұрыштың екінші катеті $S_1 K_1$ болады. Тұрғызылған $1'_1, 2'_1, 3'_1, \dots$

нүктелерді S_1 -мен қосқанда шыққан ұзындықтар сәйкес жасаушылардың шынайы ұзындықтарына тең. Енді бос жерде қалауша алынған түзуден үш - бұрыштар тұрғызу арқылы конустың жаймасы тұрғызылады. $|S_0 1_0| = |S_1 1'_1|$, $|1_0 2_0| = |1_2 2_2|$, $|S_0 2_0| = |S_1 2'_1|$... Конустың табан нүктелері $1_0, 2_0, 3_0, \dots$

қисық сызықпен қосылып, оған табан шеңберін тұрғызу мен жайма тұрғызу аяқталады. Бетте орналасқан N нүктенің жаймадағы орны, сол нүкте арқылы жүргізілген конустың жасаушысы $S_1 3$ арқылы тұрғызылады. Ол үшін $|3_0 1_0| = |3_2 1_2|$, $|1_0 3_0| = |1_2 3'_1|$, $|S_0 N_0| = |S_1 N'_1|$.

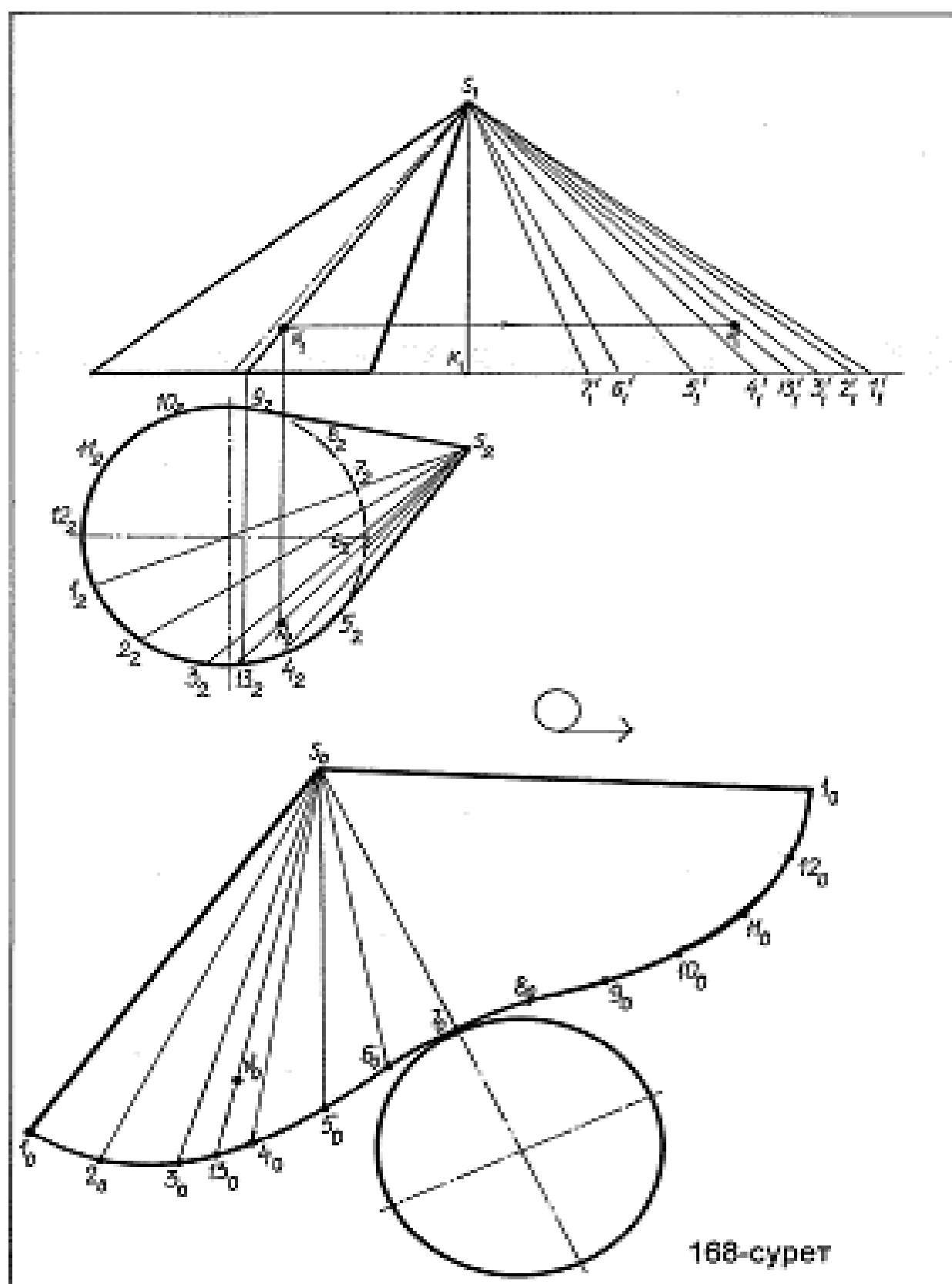
Жазба тәсілімен орындалған көлбеу цилиндр бетінің жаймасы 169-суретте көрсетілген. Оның горизонталь проекциясында табан шеңбері шынайы өлшеммен проекцияланған. Сызбаны т%орлендіріп жасаушыларының ұзындығы анықталған. Жаңа проекциялар жазықтығы π_4 -те цилиндрдің жасаушылары параллель орналасуын пайдаланып, осы жазықтыққа цилиндрді жаюға болады. Шет орналасқан цилиндрдің 1-жасаушысы арқылы оның бетін кесіп жайғанда барлық жасаушылардың нүктелерінің жылжу

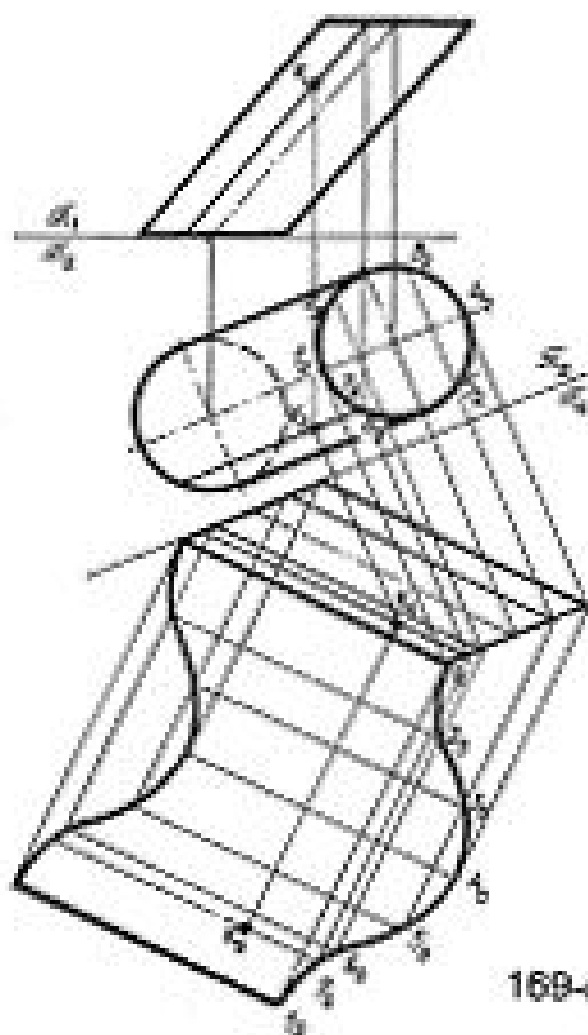
бағыты жасаушыларға перпендикуляр болады. Сол бағытта түзулер жүргізіліп, олардың бойынан сәйкес жасаушылардың нүктелері табылады. Мысалы $|1_0 2_0| = |1_2 2_2|$, $|2_0 3_0| = |2_2 3_2|$, ... Одан кейін жасаушылардың шек нүктелерін иіп қисық сызықпен қосады. К нүктесінің жаймадағы орны сол нүкте арқылы жүргізілген цилиндрдің 7-жасаушысының көмегімен тұрғызылға Жайылмайтын беттердің жаймасын жуықтап орындағанда, сол беттер жайылатын беттермен алмастырылады.

Мысалы, сфера не тор беттері цилиндр бетімен алмастыру арқылы олардың жаймаларын жуықтап тұрғызуға болады. Сондықтан мұндай жолмен орындалған жаймалар цилиндр тәсілімен тұрғызылған деп есептеледі. Егер 170-суретте берілген тор цилиндр бетіне жайылса, онда оның беті жыртылып бірнеше жапырақтарға бөлінер еді. Олай болса, оның жаймасын орындау үшін бетті тең меридианаларға бөліп, бір бөлігінің жаймасы тұрғызылса жеткілікті болады. Әрине бет көбірек меридианаларға бөлінсе орындалған жайма дәлірек болатыны белгілі.

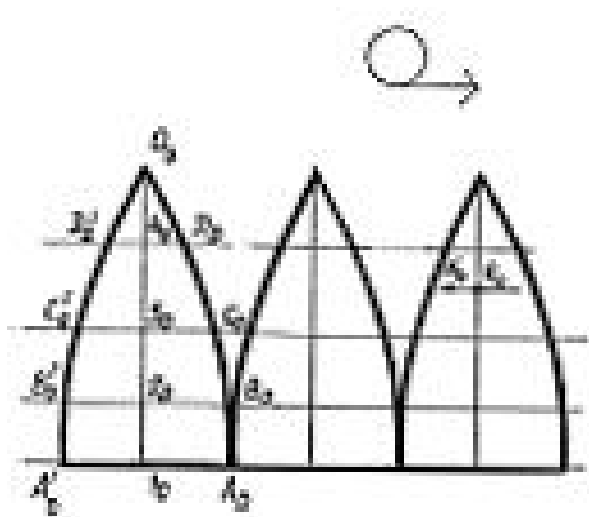
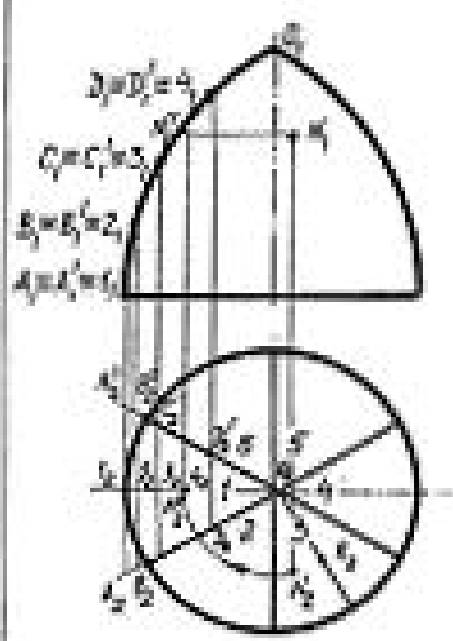
Бірақ суретте жайманың тұрғызылу жолы түсінікті болу үшін, тор беті тек алты бөлікке бөлінген. Жаймада оның үш бөлігі ғана көрсетілген. 1,2,3,4,0 қалауша алынған нүктелер арқылы цилиндрдің жасаушылары өтеді деп қарастырылады. Олар фронталь проекциялаушы түзулер болғандықтан олардың ұзындықтары $|A_2 A'_2|$, $|B_2 B'_2|$, $|C_2 C'_2|$ және $|D_2 D'_2|$ болады. Енді жайманы тұрғызу үшін бос

жерге қалауша горизонталь түзуі жүргізіледі. Оған 1_0 нүктесінен перпендикуляр түзу жүргізіліп $|1_0 2_0| = |1_1 2_1|$, $|2_0 3_0| = |2_1 3_1|$, $|3_0 4_0| = |3_1 4_1|$ және $|4_0 0_0| = |4_1 0_1|$ ұзындықтар салынып $2_0, 3_0, 4_0$ және 0_0 нүктелері тұрғызылады. Осы нүктелерден жүргізілген горизонталь түзулерге: 1_0 нүктеден оңға $|1_2 A_2| = |1_0 A_0|$, солға $|1_2 A'_2| = |1_0 A'_0|$; 2_0 нүктеден оңға $|2_2 B_2| = |2_0 B_0|$, солға $|2_2 B'_2| = |2_0 B'_0|$; 3_0 нүктеден оңға $|3_2 C_2| = |3_0 C_0|$, солға $|3_2 C'_2| = |3_0 C'_0|$; 4_0 нүктеден оңға $|4_2 D_2| = |4_0 D_0|$, солға $|4_2 D'_2| = |4_0 D'_0|$ ұзындықтары салынып оң жақтан A_0, B_0, C_0, D_0 , сол жақтан A'_0, B'_0, C'_0, D'_0 нүктелері тұрғызылады. Тұрғызылған нүктелерді бір-бірімен қисық сызықпен және 0_0 нүктесімен қосып беттің бір бөлігінің жаймасы тұрғызылады. Қалған бес бөлігі осыған тең болады.

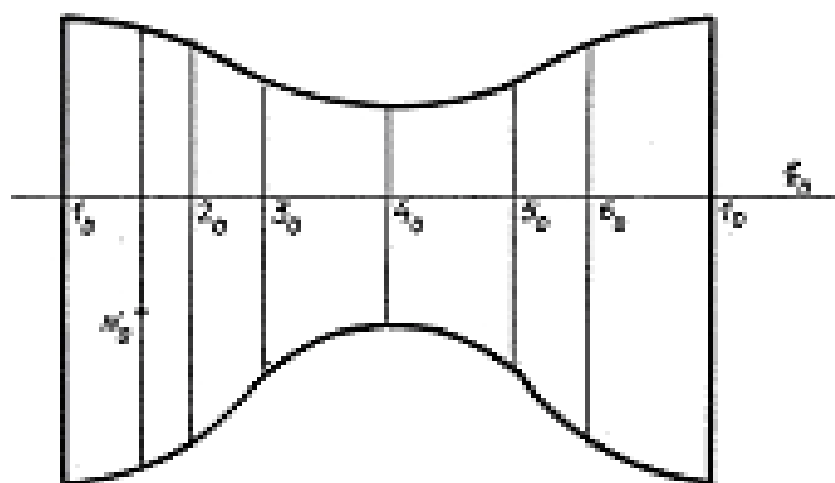
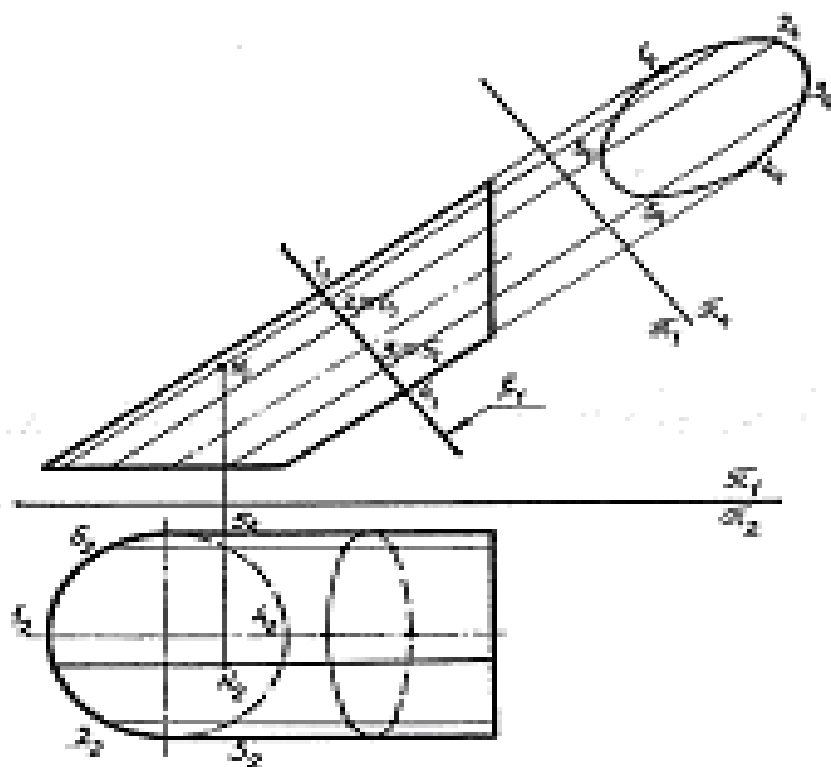




169-сурет



170-сурет



171-cyper

бас меридианаға дейін бұрылып N_2' одан кейін N_1' тұрғызылды. Жаймадағы бөліктің орта сызығына $|3_1N_1'|$ не $|4_1N_1 N_1'|$ ұзындығы салынып R_0 тұрғызылады. R_0 арқылы жүргізілген горизонталь түзуге $|N_2R_2| = |N_0R_0|$ ұзындық салынып N_0 нүктесі табылады.

171-суретте эллипсті цилиндрдің бүйір бетінің жаймасы нормаль қима тәсілімен орындалған. Беттің жасаушыларына перпендикуляр $\omega(\omega_1)$ фронталь проекциялаушы жазықтық жүргізіледі. Беттің ω жазықтығымен қиылысқан қимасы тұрғызылып, оның шынайы шамасы анықталады. Қиманың шынайы шамасы $1_42_43_44_45_46_41_4$ алты бөлікке бөлініп, олардан жасаушылар жүргізіледі. Сонда цилиндрдің беті алты трапецияға бөлінеді. Трапециялар құрайтын жасаушылардың ұзындықтары фронталь проекцияларынан алынады. Жайма орындау үшін қалауша горизонталь түзуі жүргізіліп, оған $|1_02_0| = |1_42_4|$, $|2_03_0| = |2_43_4|$, $|3_04_0| = |3_44_4| \dots$ ұзындықтары салынып $1_0, 2_0, 3_0 \dots$ нүктелері белгіленеді. Бұл нүктелерден бірінші жүргізілген түзуге перпендикуляр түзулер жүргізіледі. Олардың бойына сәйкес жасаушылардың ұзындықтары салынады. Мысалы фронталь проекциядан 1_1 проекциядан цилиндрдің төменгі жақ жасаушысы өлшеніп, 1_0 нүктеден төмен, 1_1 проекциядан жасаушының жоғары жағы өлшеліп 1_0 нүктеден жоғары салынады. Қалған жасаушылар да осылай тұрғызылып, шет нүктелері қисық сызықпен қосылады.

172-суретте үшбұрыштар тәсілімен орындалған гиперболалы параболоид бетінің жаймасы көрсетілген. Бет $AL \div BC$ түзулері мен және фронталь параллелизм жазықтығымен берілген.

Алдымен беттің тығыз қаңқасы тұрғызылады. Жасаушылар арасындағы беттің диагональдары жүргізіліп үшбұрыштар алынады. AD және BC кесінділердің және олардың арасындағы нүктелердің ара қашықтықтары тік бұрышты үшбұрыш тәсілі арқылы анықталған. $|AD| = |A_1'D_1'|$, $|BC| = |B_2'C_2'|$. Жасаушылардың ұзындықтары олардың фронталь проекцияларына тең. Жүргізілген диагональдардың ұзындықтары анықталады. Олар $|B_11_1'|$, $|2_13_1'|$, $|4_15_1'|$, $|6_17_1'|$, $|8_1D_1'|$ ұзындықтарға тең. Енді жоғарыда қарастырылған жолмен беттің жаймасы бос жерге орындалады. Қалауша түзу жүргізіліп оның бойына $|B_0A_0| = |B_1A_1|$ салынады. A_0 -ден $|A_01_0| = |A_11_1'|$ радиуспен B_0 -ден $|B_01_0| = |B_11_1'|$ радиуспен жүргізілген доғалар 1_0 нүктеде қиылысады. Осылай үшбұрыштар жалғастырылып тұрғызыла береді.

Негізгі: (1нег. [61-69]); (2нег. [196-214]); (3нег. [150-167]); (4нег. [176-193]).

Қосымша: (13қос., 69,70 есептер); (20 қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Жайма орындаудың қандай тәсілдері бар?
2. Беттердің жаймасы не үшін қажет?

2.3 Зертханалық сабақтардың жоспары

1 – тапсырма. Кіріспе. Сызба құралдары. Сызбаларды орындаудың жалпы ережелері. Конструкторлық құжаттарға қойылатын талаптар.Графикалық Auto Cad жүйемен танысу. Іске қосу. Қажет әмірлерді экранда орналастыру. 3сағат.

Тапсырма: Auto Cad жүйенің көмегімен пішім даярлау. А3 пішімде графикалық жұмыстардың мұкабасын даярлау.

Негізгі әдебиеттер: (9 нег.[19-44]);(10 нег. [3-5, 12-40])

Қосымша әдебиеттер: (20 қос.); (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Конструкторлық құжаттарға қандай жалпы талаптар қойылады?
2. Стандарт не үшін керек ?
3. Auto Cad жүйенің бас терезесінің негізгі элементтерін атаңыз?
4. Түзудің,шеңбердің, көпжақтың сызбалары қалай орындалады?
5. Центрі мен радиусы берілген шеңбер қалай орындалады?
6. Auto Cad жүйесі қалай қосылады?

2–тапсырма. Стандартты аксонометриялардың түрлері, бұрмалану коэффициенттері, осьтердің орналасуы. Координаталар арқылы нүктенің, түзудің аксонометриясын тұрғызу. Auto Cad. жүйе арқылы екі өлшемді примитивті құрастыру. Бастапқы жаттығулар. . Сызба тұрғызу, оны жылжыту не түзету жолдарын үйрену. 5 сағат.

Тапсырма: Auto Cad жүйеде, А3 пішімде әртүрлі геометриялық элемент - терден тұратын жазық дененің сызбасын орындау.

Негізгі әдебиеттер: (1 нег. [3-23]); (2 нег. [3-51]); (3 нег. [3-46]); (4 нег. [3-53]); (9 нег.[48-83]);

Қосымша әдебиеттер: (13 қос. 1а, б, 17,18 есептер); (20 қос.); (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Проекциялаудың түрлерін және олардың бір-бірінен айырмашылығын анықтаңыз?
2. Проекциялау аппаратының элементтерін атаңыз?
3. Шеңбердің диаметрін, бұрыштың өлшемдерін қалай қоюға болады?
4. Жанама түзулер қалай орындалады?
5. Берілген кесіндіні белгілі бұрышқа қалай бұруға болады?
6. Auto Cad қалай сөндіріледі?

3–тапсырма. Нүктенің, түзудің және жазықтықтың проекциялары. Кеңістіктегі жалпы не дербес жағдайда орналасқан түзулер және жазықтықтар, олардың қасиеттері. Auto Cad жүйесімен элементтің қасиеттерін басқару, жаңа қабаттар құрастыру және қолдану. Сызба орындау. 5 сағат.

Тапсырма: Екі көрініс арқылы үшінші көрініс, өлшем қою, қажетті тілік орындау. Жұмысты нобайы арқылы Auto Cad жүйеде орындау.

Негізгі әдебиеттер: (1 нег. [3-23]); (2 нег. [3-51]); (3 нег. [3-46]); (4 нег. [3-53]).

Қосымша әдебиеттер: (13 қос. 19,20,21,22 есептер); (20 қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Монж эпюріне анықтама беріңіз?
2. Геометриялық бейненің бір проекциясы кеңістіктегі жағдайды анықтай ала ма?
3. Деңгей және проекциялаушы түзулердің қасиеттерін атаңыз?
4. Әмір жолы және мәтін терезесі не үшін қажет?
5. Берілген кесіндіні қалай ұзартуға болады?
6. Берілген кесіндіге параллель кесінді қалай орындалады?

4–тапсырма. Сызбаларды түрлендіру. Проекциялар жазықтықтарын алмастыру тәсілі. Сызбаны түрлендірумен шығарылатын негізгі есептер. Қашықтықты, бұрышты және жазық дененің нақты шамасын анықтау. Auto Cad жүйеде үшөлшемді графиканың мақсаты және қолданылатын орны..Қатты денелердің әмірлерімен танысу. Қатты денелерді ажырату не біріктіру. . 5 сағат.

Тапсырма: Нобайы арқылы А3 пішімде Auto Cad жүйеде қатты дененің аксонометриясын орындау.

Негізгі әдебиеттер: (1 нег. [23-35]); (2 нег. [57-115]); (3 нег. [46-82]); (4 нег. [53-109]).

Қосымша әдебиеттер: (13 қос. 35,36,37,39в, 40, 41, 42а есептер); (20 қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Сызбаны түрлендіру не үшін қажет?
- 2.Примитив дегеніміз не?
- 3.Шеңберлерді іштей не сырттай қалай түйндестіруге болады?
- 4.Көлбеу бұрышы 30° ұзындығы 70 мм болатын кесіндіні қалай орындауға болады?

5-тапсырма. Түзулердің, түзу мен жазықтықтың және жазықтықтардың перпендикулярлығы. Нүктеден түзуге не жазықтыққа перпендикуляр түсіру. Перпендикуляр түзулер және жазықтықтар тұрғызу. 2 сағат.

Негізгі әдебиеттер: (1нег. [27-35]); (2нег. [75-84]); (3нег. [53-64]); (4нег. [72-83]).

Қосымша әдебиеттер: (13 қос.35,36,37,38 есептер); (20қос.); (21қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Екі түзудің, түзу мен жазықтықтың және жазықтықтардың перпендикулярлығы қалай анықталады?
2. Қандай жағдайда екі түзудің арасындағы бұрыш сызбада өзгеріссіз проекцияланады?
3. Тік бұрыштың тік проекциясының теоремасы қалай айтылады?

6-тапсырма. Негізгі орналасу есептері. Нүктелердің, түзулердің және жазықтықтардың өзара орналасулары. Жаңа қабаттарды құрастыру. Сызықтардың түстері, қалыңдығы және түрлері. 3 сағат.

Негізгі әдебиеттер: (1 нег. [35-42]); (2 нег. [115-125]); (3 нег. [82-93]); (4 нег. [109-120]).

Қосымша әдебиеттер: (13 қос., 24, 25, 26 есептер); (20 қос.); (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай орналасу есептері бар?
2. Нүктенің, түзудің жазықтыққа тиістік белгілері қандай?
3. Паралель, қиылысып және айқаса орналасқан түзулердің сызбадағы белгісі?
4. Тік орналасқан кесіндіні оңға не солға қалай параллель жылжытуға болады?
5. Біржолды мәтінді қалай орындауға болады?
6. Тілінген не қиылған бетті қалай сызықшалауға болады?

7-тапсырма. Негізгі орналасу есептері. Нүктелердің, түзулердің және жазықтардың өзара орналасулары. Жаңа қабаттарды құрастыру. Сызықтардың түстері, қалыңдығы және түрлері. 2 сағат.

Негізгі әдебиеттер: (1 нег. [35-42]); (2 нег. [115-125]); (3 нег. [82-93]); (4 нег. [109-120]).

Қосымша әдебиеттер: (13 қос., 24, 25, 26 есептер); (20 қос.); (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

7. Қандай орналасу есептері бар?
8. Нүктенің, түзудің жазықтыққа тиістік белгілері қандай?
9. Паралель, қиылысып және айқаса орналасқан түзулердің сызбадағы белгісі?
10. Тік орналасқан кесіндіні оңға не солға қалай параллель жылжытуға болады?
11. Біржолды мәтінді қалай орындауға болады?
12. Тілінген не қиылған бетті қалай сызықшалауға болады?

8-тапсырма. Көпжақтар. Көпжақпен жазықтықтың және түзудің қиылысуы. Қима тұрғызудың қырлар және жақтар тәсілі. 2 сағат.

Тапсырма: А3 пішімде SABC пирамида мен DMN жазықтығының қиылысуын тұрғызып, пирамиданың аксонометриясын және қимасын салу. Жұмыс Auto Cad жүйеде орындалады.

Негізгі әдебиеттер: (1 нег. [46-51]); (2 нег. [125-140]); (3 нег. [93-108]); (4 нег. [120-132]).

Қосымша әдебиеттер: (13 қос., 32, 33, 34 есептер); (20 қос.); (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Тетраэдрдың қанша қыры және жағы бар?
2. Платон денелері деп аталатын көпжақтарды атаңыз?
3. Берілген кесіндіні тең екіге бөлуге болады?
4. Тетіктің көріністері қалай тұрғызылады?
5. Сызбаны түзету қалай орындалады?
6. Қалай өлшем санды сөреде орындауға болады?
7. Көпжақтың бір жағын қалай өшіруге болады?

9-тапсырмар. Көпжақтар. Көпжақпен жазықтықтың және түзудің қиылысуы. Қима тұрғызудың қырлар және жақтар тәсілі. 2 сағат.

Тапсырма: А3 пішімде SABС пирамида мен DMN жазықтығының қиылысуын тұрғызып, пирамиданың аксонометриясын және қимасын салу. Жұмыс Auto Cad жүйеде орындалады.

Негізгі әдебиеттер: (1 нег. [46-51]); (2 нег. [125-140]); (3 нег. [93-108]); (4 нег. [120-132]).

Қосымша әдебиеттер: (13 қос., 32, 33, 34 есептер); (20 қос.); (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

8. Тетраэдрдың қанша қыры және жағы бар?
9. Платон денелері деп аталатын көпжақтарды атаңыз?
10. Берілген кесіндіні тең екіге бөлуге болады?
11. Тетіктің көріністері қалай тұрғызылады?
12. Сызбаны түзету қалай орындалады?
13. Қалай өлшем санды сөреде орындауға болады?
14. Көпжақтың бір жағын қалай өшіруге болады?

10-тапсырмар. Көпжақтар. Көпжақпен жазықтықтың және түзудің қиылысуы. Қима тұрғызудың қырлар және жақтар тәсілі. 2 сағат.

Тапсырма: А3 пішімде SABС пирамида мен DMN жазықтығының қиылысуын тұрғызып, пирамиданың аксонометриясын және қимасын салу. Жұмыс Auto Cad жүйеде орындалады.

Негізгі әдебиеттер: (1 нег. [46-51]); (2 нег. [125-140]); (3 нег. [93-108]); (4 нег. [120-132]).

Қосымша әдебиеттер: (13 қос., 32, 33, 34 есептер); (20 қос.); (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

15. Тетраэдрдың қанша қыры және жағы бар?
16. Платон денелері деп аталатын көпжақтарды атаңыз?
17. Берілген кесіндіні тең екіге бөлуге болады?
18. Тетіктің көріністері қалай тұрғызылады?
19. Сызбаны түзету қалай орындалады?
20. Қалай өлшем санды сөреде орындауға болады?
21. Көпжақтың бір жағын қалай өшіруге болады?

11-тапсырма. Біріктірулер. Бұрандалы біріктірулер. Сызбада ішкі және сыртқы бұранданың көрсетілуі. Бұранданың түрлері және олардың белгіленуі. 2 сағат.

Тапсырма: Жалғастық тәріздес тетіктің нобайын орындау. Қажет өлшемдерін және тіліктерін орындау.

Негізгі әдебиеттер: (9 нег. [195-237]); (10 нег. [147-153]).

Қосымша әдебиеттер: (14 қос.); (16 қос.); (20 қос.); (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Нобай дегеніміз не?

2. Нобай орындау қандай талаппен жүзеге асырылады?
3. Тетікпен жалпы танысқанда неге көңіл аудару қажет?
4. Тетіктің бас көрінісін және көріністер санын қалай анықтайды?
5. Нобай орындау реті қалай?
6. Тетіктің өлшемдері қалай қойылады?
7. Бұrandаның өлшемін қалай анықтау керек?

12-тапсырма. Біріктірулер. Бұrandалы біріктірулер. Сызбада ішкі және сыртқы бұrandаның көрсетілуі. Бұrandаның түрлері және олардың белгіленуі. 2 сағат.

Тапсырма: Жалғастық тәріздес тетіктің нобайын орындау. Қажет өлшемдерін және тіліктерін орындау.

Негізгі әдебиеттер: (9 нег. [195-237]); (10 нег. [147-153]).

Қосымша әдебиеттер: (14 қос.); (16 қос.); (20 қос.); (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

8. Нобай дегеніміз не?
9. Нобай орындау қандай талаппен жүзеге асырылады?
10. Тетікпен жалпы танысқанда неге көңіл аудару қажет?
11. Тетіктің бас көрінісін және көріністер санын қалай анықтайды?
12. Нобай орындау реті қалай?
13. Тетіктің өлшемдері қалай қойылады?
14. Бұrandаның өлшемін қалай анықтау керек?

13 –тапсырма. Мамандық бойынша сызба орындау. Сұлбада қолданылатын элементтердің шартты белгіленулерімен танысу Баспа платаның жұмыс және жинастыру сызбасы. Баспа платаның құрастыру сызбасы. Сипаттізім толтыру реті. 3 сағат.

Тапсырма: Баспа платаның нобайын және оның сызбасын Auto Cad жүйеде орындау. Жұмыс 2 парақ А3 пішімде орындалады.

Негізгі әдебиеттер: (11 нег.)

Қосымша әдебиеттер: (18 қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Баспа плата дегеніміз не?
2. Платадағы тесіктердің қайсысын біріктіру, бекіту, құрастыру тесік дейді?
3. Баспа плата торабы деген не?
4. Құрастыру сызбасы не үшін қажет?
5. Құрастыру сызбаға қандай өлшемдер қойылады?
6. Плата мен элементтің ең кіші қашықтығы қанша?
7. Сипаттізім дегеніміз не және ол қалай толтырылады?

14 –тапсырма. Мамандық бойынша сызба орындау. Сұлбада қолданылатын элементтердің шартты белгіленулерімен танысу Баспа платаның жұмыс және жинастыру сызбасы. Баспа платаның құрастыру сызбасы. Сипаттізім толтыру реті. 2 сағат.

Тапсырма: Баспа платаның нобайын және оның сызбасын Auto Cad жүйеде орындау. Жұмыс 2 парақ А3 пішімде орындалады.

Негізгі әдебиеттер: (11 нег.)

Қосымша әдебиеттер: (18 қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Баспа плата дегеніміз не?
2. Платадағы тесіктердің қайсысын біріктіру, бекіту, құрастыру тесік дейді?
3. Баспа плата торабы деген не?
4. Құрастыру сызбасы не үшін қажет?
5. Құрастыру сызбаға қандай өлшемдер қойылады?
6. Плата мен элементтің ең кіші қашықтығы қанша?
7. Сипаттізім дегеніміз не және ол қалай толтырылады?

15-тапсырма. Беттер және олардың анықтаушы. Бұрама, айналу және сызықты беттер. Беттерге тиісті нүктенің, түзудің проекцияларын тұрғызу. Беттердің өзара қиылысуы. 5 сағат.

Негізгі әдебиеттер: (1 нег. [42-61]); (2 нег. [150-196]); (3 нег. [111-150]); (4 нег. [138-170]).

Қосымша әдебиеттер: ((13 қос. 49,50,51,53,57,60 есептер.); (20 қос.), (21 қос.).

Бақылау сұрақтары:

1. Беттер сызбада қалай беріледі?
2. Әртүрлі анықтауышпен берілетін беттерді атаңыз?
3. Тік конусты жазықтықпен қиғанда қандай қисық сызықтар шығады?
4. Тік цилиндрды жазықтықпен қиғанда қандай қисық сызықтар шығады?

1.4 Оқытушының жетекшілігімен студенттердің орындайтын өзіндік жұмыстары (СОӨЖ) бойынша өткізілетін сабақтардың жоспары

№	Тапсырма	Өткізу түрі	Әдістемелік ұсыныс	Ұсынылған әдебиет
1	Сызба орындауда қолданылатын негізгі ережелер. Стандартты аксонометрия проекцияларын тұрғызу.	Тренинг кеңес. Есеп	КҚБЖ (20 қос.), (21 қос.)	(1 нег. [3-4]), (2 нег. [3-31]), (3 нег. [3-23]), (4 нег. [3-28]), (10 нег. [3-103]) (13 қос. 9, 10, 11, 12, 17, 18 есептер).
2	Аксонометрия мен проекциялардың байланысы.	Тренинг кеңес	(19 қос.) Есеп шығару	(1 нег. [14-23]), (2 нег. [31-57]), (3 нег. [23-46]), (4 нег. [28-53]), (13 қос. 19, 20, 21, 22, 23 есептер).
	Сызбаларды түрлендіру.	Тренинг		(1 нег. [23-35]),

3	Өлшем есептері.	кеңес	(19 қос.) Есеп шығару	(2нег.[57-115]), (3нег.[46-82]), (4нег.[53-109]), (13қос.35-42 есептер).
4	Негізгі орналасу есептері.	Есептер шығару	(19 қос.) Есеп шығару	(1нег.[35-42]), (2нег.[115-125]), (3нег.[82-93]), (4нег.[109-120]), (13қос.24-31 есептер).
5	Негізгі орналасу есептері.	Есептер шығару	(19 қос.) Есеп шығару	(1нег.[35-42]), (2нег.[115-125]), (3нег.[82-93]), (4нег.[109-120]), (13қос.24-31 есептер).
6	Көпжақтың жазықтықпен және түзумен қиылысуы.	Жаттығу есептер шығару	(19 қос.) Есеп шығару	(1нег.[42-56]), (2нег.[125-140]), (3нег.[93-106]), (4нег.[120-133]) (13қос.32,33,34 есептер).
7	Көпжақтың жазықтықпен және түзумен қиылысуы.	Жаттығу есептер шығару	(19 қос.) Есеп шығару	(1нег.[42-56]), (2нег.[125-140]), (3нег.[93-106]), (4нег.[120-133]) (13қос.32,33,34 есептер).
8	Беттердің жазықтықпен, түзумен және өзара қиылысуы.	Жаттығу есептер шығару	(19 қос.) Есеп шығару	(1нег.[56-61]), (2нег.[140-196]), (3нег.[106-150]), (4нег.[133-176]), (13қос.49-53,57, 60,64 есептер).
9	Беттердің жазықтықпен, түзумен және өзара қиылысуы.	Жаттығу есептер шығару	(19 қос.) Есеп шығару	(1нег.[56-61]), (2нег.[140-196]), (3нег.[106-150]), (4нег.[133-176]), (13қос.49-53,57, 60,64 есептер).
10	Екі көрініс арқылы үшінші көрініс және қажет тілік орындау.	Нобайын дайындау	Жұмыс AutoCadта орындалады	(12нег.), (19қос.), (20қос.), (21қос.)

11	Екі көрініс арқылы үшінші көрініс және қажет тілік орындау.	Нобайын дайындау	Жұмыс AutoCadта орындалады	(12нег.), (19қос.), (20қос.), (21қос.)
12	Берілген көріністер арқылы аксонометрия тұрғызу.	Нобайын дайындау	Жұмыс AutoCadта орындалады	(12нег.), (19қос.), (20қос.), (21қос.)
13	Көпжақтың жазықтықпен қиылысуы және көпжақтың аксонометриясы.	Есептің шешімінің нобайы.	Жұмыс AutoCadта орындалады	(12нег.), (19қос.), (20қос.), (21қос.)
14	Баспа платаның жұмыс және құрастыру сызбасын орындау. Сипаттізім толтыру.	Нобайын дайындау	Жұмыс AutoCadта орындалады	(11 нег. [55-88]), (18 қос.)
15	Баспа платаның жұмыс және құрастыру сызбасын орындау. Сипаттізім толтыру.	Нобайын дайындау	Жұмыс AutoCadта орындалады	(11 нег. [55-88]), (18 қос.)

2.5 Студенттердің өзіндік жұмысы (СӨЖ) бойынша жоспар.

№	Тапсырма	Әдістемелік ұсыныс	Ұсынылған әдебиет
1	Сызбаны орындауға жалпы ережелер: МЕСТ 2.104-68; МЕСТ 2.301-68; МЕСТ 2.302-68; МЕСТ 2.303-68; МЕСТ 2.304-81; МЕСТ 2.305-68; МЕСТ 2.307-68; МЕСТ 2.311-68 МЕСТ2.312- 68; МЕСТ 2.313-68.	КҚБЖ–н қолдану, МЕСТ–ні оқу	(9нег.[19-44]); (10нег.[3-5,12-40]); (20қос.); (21қос.).
2	Мұқаба бетін дайындау. Мәтінді орындау.	Жұмысты AutoCadта орындау	(10 нег. [3-103]), (12 нег.)
3	А3 пішімде геометриялық элементтерден тұратын жазық сызба орындау.	Жұмысты AutoCadта орындау	(12нег.)
4	Сызбаларды түрлендірудің жазық параллель жылжыту, ось арқылы айналдыру тәсілдері. Түзулердің, түзу мен жазықтықтың және жазық-тықтардың перпендикулярлығы.	(19 қос.) Есеп шығару	(1нег.[23-35]), (2нег.[57-115]), (3нег.[46-82]), (4нег.[53-109]).
	Берілген екі көрініс арқылы үшінші		(11нег. [25-210]),

5	көрініс, қажет тілік және дененің аксонометриясын орындау. AutoCAD жүйеде 3D тұрғызу. Қатты денелер- мен жұмыс істеу.	Жұмысты AutoCadта орындау	(12нег.), (19қос.) (20қос.), (21қос.). (22қос.)
6	Берілген екі көрініс арқылы үшінші көрініс, қажет тілік және дененің аксонометриясын орындау. AutoCAD жүйеде 3D тұрғызу. Қатты денелер- мен жұмыс істеу.	Жұмысты AutoCadта орындау	(11нег. [25-210]), (12нег.), (19қос.) (20қос.), (21қос.). (22қос.)
7	Беттердің анықтауышы. Сызықты беттер.	(19 қос.) Есеп шығару	(1нег.[56-61]), (2нег.[140-196]), (3нег.[106-150]), (4нег.[133-176]).
8	Беттердің жаймасы. Жайма орынду тәсілдері.	(19 қос.) Есеп шығару	(1нег.[61-69]), (2нег.[196-214]), (3нег.[150-167]), (4нег.[176-193]).
9	Беттердің жаймасы. Жайма орынду тәсілдері.	(19 қос.) Есеп шығару	(1нег.[61-69]), (2нег.[196-214]), (3нег.[150-167]), (4нег.[176-193]).
10	Көпжақтың жазықтықпен қиылысуы және оның аксонометриясы.	Жұмысты AutoCadта орындау	(12нег.) (19қос.) (20қос.)(21қос.)
11	Көпжақтың жазықтықпен қиылысуы және оның аксонометриясы.	Жұмысты AutoCadта орындау	(12нег.) (19қос.) (20қос.)(21қос.)
12	Көпжақтың жазықтықпен қиылысуы және оның аксонометриясы.	Жұмысты AutoCadта орындау	(12нег.) (19қос.) (20қос.)(21қос.)
13	Баспа платаның жұмыс және құрастыру сызбасын орындау. Сипаттізім толтыру.	Жұмысты AutoCadта орындау	(11 нег.) (18қос)
14	Баспа платаның жұмыс және құрастыру сызбасын орындау. Сипаттізім толтыру.	Жұмысты AutoCadта орындау	(11 нег.) (18қос)
15	Баспа платаның жұмыс және құрастыру сызбасын орындау. Сипаттізім толтыру.	Жұмысты AutoCadта орындау	(11 нег.) (18қос)

4.6 Курс бойынша жазбаша жұмыстың тақырыптары

Бақылау жұмыстардың тақырыптары:

1.Өлшеу және орналасу есептерін шығару.

2.Беттер. Беттердің жазықтықпен, түзумен және өзара қиылысуына есептер шығару.

Графикалық жұмыс тақырыптары:

1. Графикалық жұмыстың мұқабасын даярлау.
2. Жазық фигураның сызбасын орындау.
3. Берілген екі көрініс арқылы үшінші көрініс тұрғызу және аксонометриясын салу.
4. Көпжақтың жазықтықпен қиылысуы.
5. Баспа платаның монтаждау, құрастыру сызбаларын және сипаттізімін орындау.

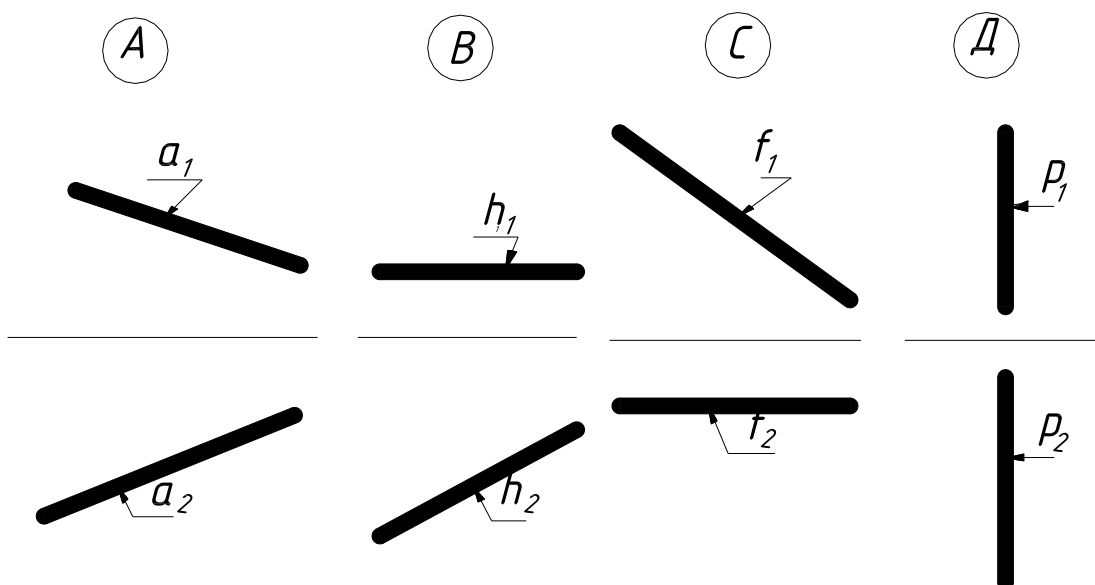
Ұсынылатын әдебиеттер:

Негізгі әдебиеттер: (1 нег., 2 нег., 3 нег., 4 нег., 5 нег.).

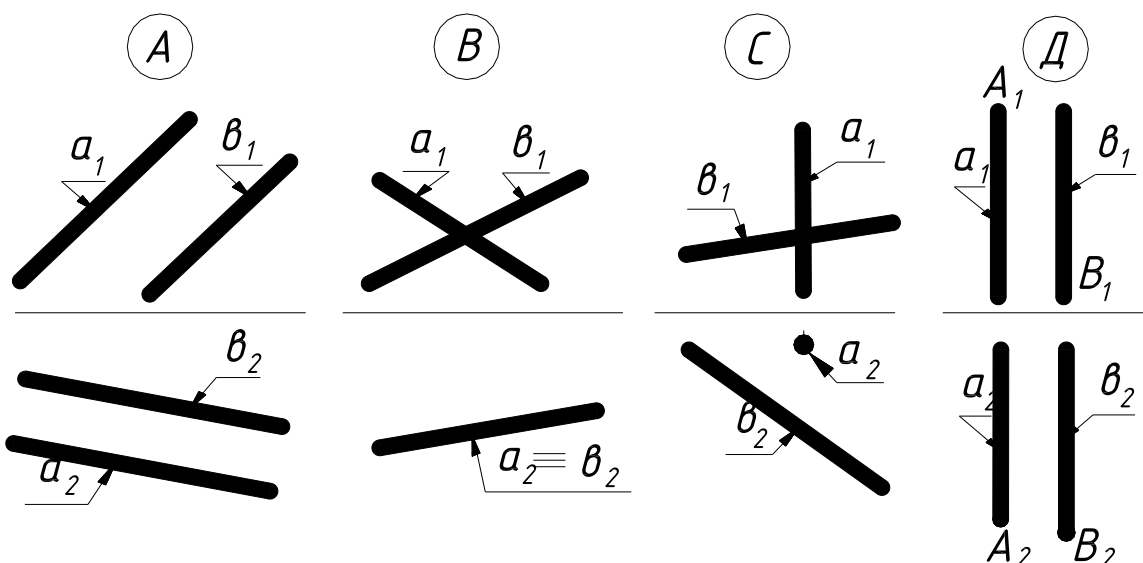
Қосымша әдебиеттер: (7 қос., 8 қос., 9 қос., 16 қос.).

4.7 Өзіндік бақылау үшін тест тапсырмалары

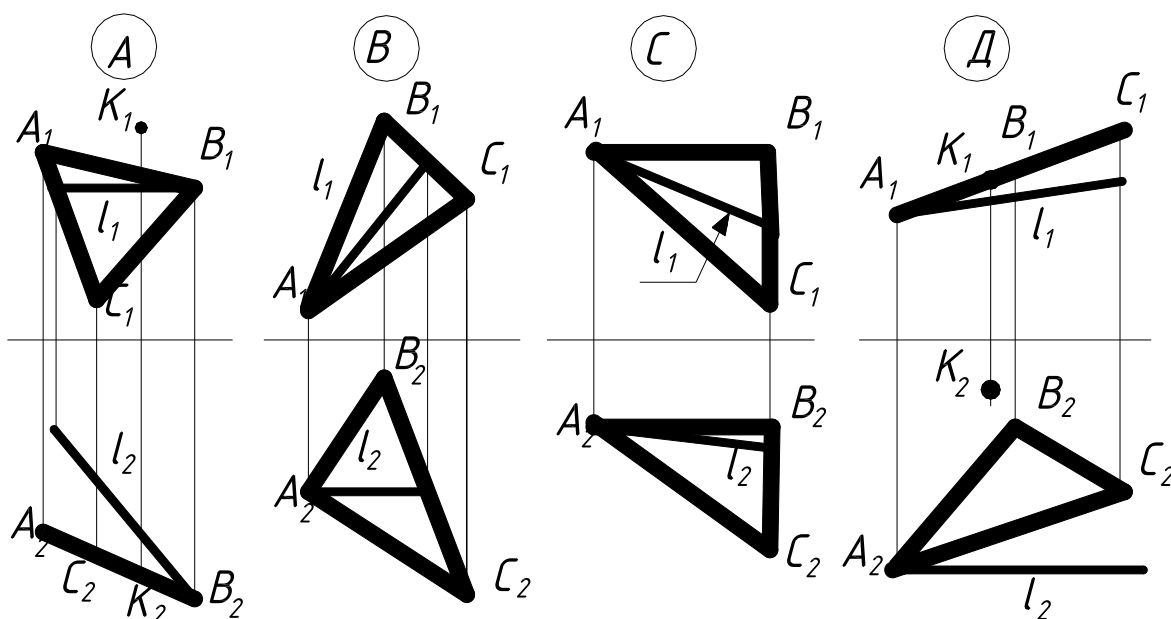
А. Сызбаның қайсысында: 1.профиль түзуі; 2.жалпы жағдайдағы түзу;
3.горизонталь түзуі; 4.фронталь түзуі; 5.фронталь проекциясы нақты ұзындыққа тең; 6.горизонталь проекциясы нақты ұзындыққа тең.



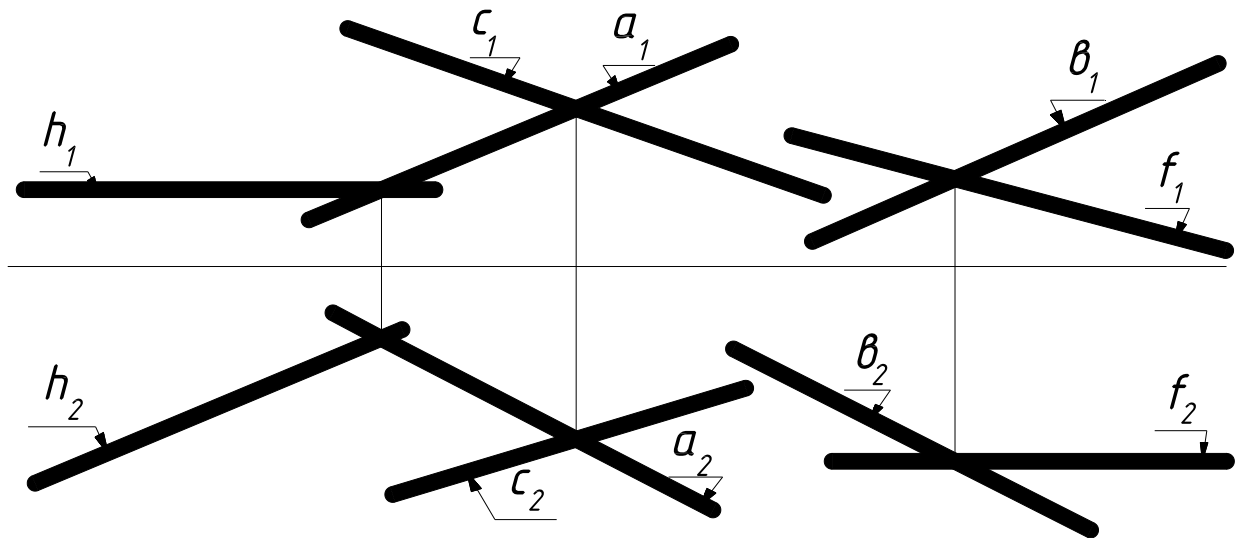
Б. Сызбаның қайсысында: 1.параллель түзулер; 2.қиылысқан түзулер;
3.айқасқан түзулер



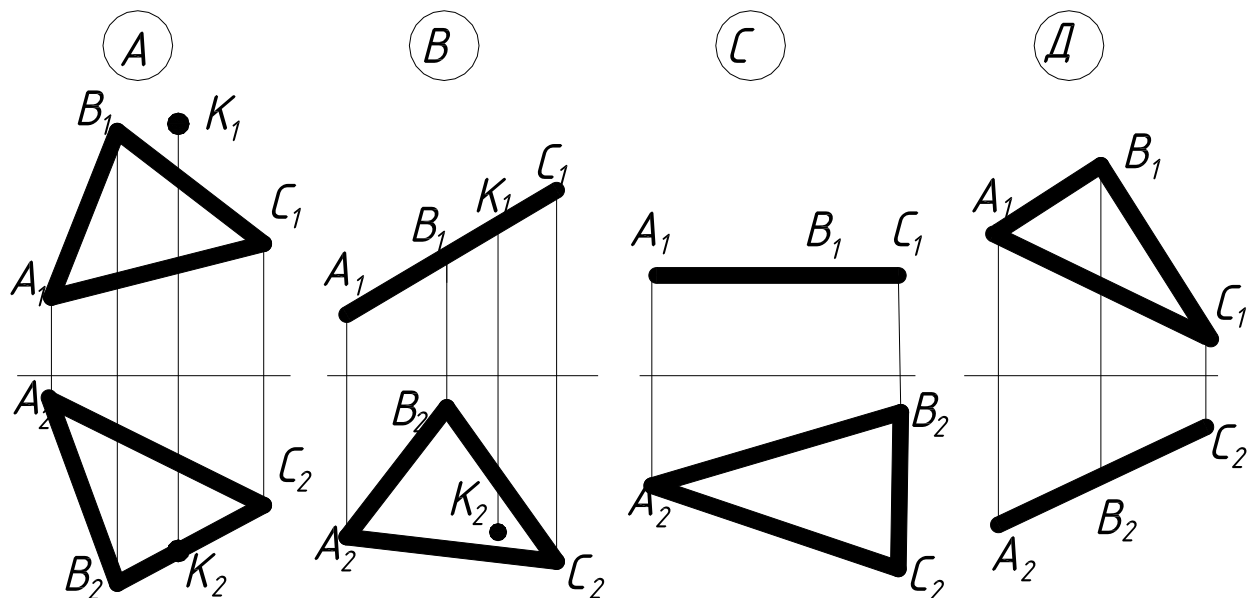
В. Сызбаның қайсысында: 1. К нүктесі $\omega(ABC)$ жазықтығына тиісті емес? 2. $\omega(ABC)$ жазықтығының фронталь түзуі көрсетілген? 3. L түзуі $\omega(ABC)$ жазықтығына тиісті?



Г. Көрсетіңіз: 1. параллель түзулерді? 2. жалпы жағдайдағы өзара қиылысқан түзулерді? 3. жалпы жағдайдағы өзара айқасқан түзулерді? 4. Біреуі жалпы жағдайда, екіншісі фронталь проекциялар жазықтығына параллель өзара қиылысқан түзулерді? 5. Біреуі жалпы жағдайда, екіншісі горизонталь проекциялар жазықтығына параллель өзара қиылысқан түзулерді? 6. деңгей өзара айқасқан түзулерді?

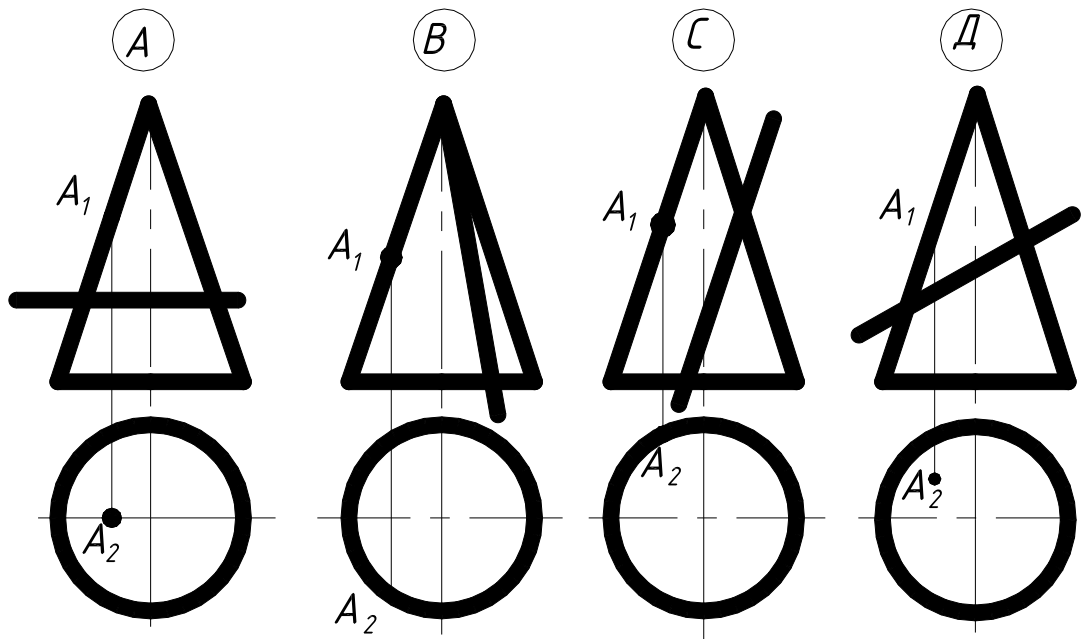


Д. Сызбаның қайсысында: 1. К нүктесі. $\omega(ABC)$ жазықтығына тиісті емес? 2. $\omega(ABC)$ жазықтығы горизонталь проекциялаушы? 3. $\omega(ABC)$ жазықтығы фронталь проекциялаушы? 4. $\omega(ABC)$ жазықтығы горизонталь проекциялар жазықтығына параллель? 5. $\omega(ABC)$ жазықтығы жалпы жағдайда?



Е. Сызбаның қайсысында: 1. А нүктесі конус бетіне тиісті? 2. берілген жазықтықпен қиғанда қимада шеңбер шығады? 3. берілген жазықтықпен

қиғанда қимада конустың жасаушысы шығады? 4. берілген жазықтықпен қиғанда қимада эллипс шығады? 5. . берілген жазықтықпен қиғанда қимада парабола шығады?



Тест сұрақтарының жауабы.

А. 1.Д; 2.А; 3.В; 4.С; 5.С; 6.В.

Б. 1.А; 2.В; 3.С,Д

В. 1.Д; 2.В; 3.В; 4.А.

Г. 1.а,в; 2.а,с; 3.с,в; 4.в,г; 5.а, h; 6. г, h.

Д. 1.А; 2.Д; 3.В; 4.С; 5.А.

Е. 1.А; 2.А; 3.В; 4.Д; 5.С.

5. Курс бойынша емтихан сұрақтары

1. Проекциялау әдісі. 2. Центрілік, қиғаш параллель және тік параллель проекциялар. 3. Центрілік және тік параллель проекциялардың қасиеті. 4. Сызбаның қайтымдылығы. 5. Аксонометриялық координата жүйесі және оның түрлері. 6. Тік бұрышты стандартты аксонометрияның осьтерде бұрмалану коэффициенттерін атаңыз? 7. Аксонометрия осьтерін графикалық жолмен қалай тұрғызуға болады? 8. Координатамен берілген нүктенің, түзудің аксонометриясын қалай тұрғызуға болады? 9. Монж эпюры туралы түсінік. 10. Нүктенің, түзудің және жазықтықтың проекциясы. 11. Жалпы және дербес орналасқан түзулер және олардың қасиеттері. 12. Жазықтықтың жалпы және дербес жағдайлары және қасиеттері. 13. Сызбаны түрлендірудің қандай тәсілдері бар? 14. Түрлендіру не үшін қажет? 15.

Түрлендіру арқылы қандай негізгі есептер шығарылады? 16. Тік бұрышты проекциялау теоремасы қалай? 17. Екі түзудің перпендикулярлығы қалай? 18. Түзу мен жазықтықтың және екі жазықтықтың перпендикулярлығы қалай анықталады? 19. Қандай жағдайда екі түзудің арасындағы бұрыш өзгеріссіз проекцияланады? 20. Нүкте мен түзудің өзара орналасуы. 21. Екі түзудің өзара орналасуы. 22. Нүкте мен жазықтықтың өзара орналасуы. 23. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы. 24. Жазықтықтардың өзара орналасуы. 25. Бәсекелес нүктелер қалай анықталады? 26. Сызбада көрінетін -дікті анықтау қалай? 27. Екі жазықтықтың параллельдік белгісі қалай? 28. Қандай жағдайда нүкте және түзу көпжаққа тиісті болады? 29. Призма және пирамидаға түсінік беріңіз? 30. Көпжақтың жазықтықпен және түзумен қиылысуы қалай орындалады? 31. Беттер қалай жасалады? 32. Беттердің анықтаушы дегеніміз не? 33. Беттердегі нүктенің, түзудің проекциялары қалай тұрғызылады? 34. Беттердің өзара қиылысуы қалай орындалады? 35. Беттердің өзара қиылысуын тұрғызу тәсілдері қалай таңдалады? 36. Қиылысу сызығын тұрғызуда қандай нүктелер тірек, аралық нүктелер дейді? 37. Беттердің жаймасы не үшін қажет? 38. Жайма орындаудың қандай тәсілдері бар? 39. Негізгі жазудың ауқым өлшемдері қанша? 40. Негізгі пішімдерді атаңыз және олардың өлшемдері қандай? 41. Жуан сызықтың қалыңдығы қандай және ол неге байланысты? 42. Қарып номері қалай анықталады? 43. Тілік не қима орындалғанда метал қалай сызықшаланады? 44. Сызбада бірдей элементтердің өлшемдері қалай орындалады? 45. Тілік пен қиманың айырмашылығы неде? 46. Нобай дегеніміз не, ол сызбадан қандай айырмашылығы бар? 47. Тетіктің нобайын орындауға қандай талаптар қойылады? 48. Құрастыру сызбада қандай өлшемдер қойылады? 49. Плата мен элементтің ең жақын арасы қаншаға тең? 50. Сипаттізім дегеніміз не, ол қалай толтырылады?

Глоссарий

Аксонометрия [гр.] - заттың кескінін жазықтықта көрсету тәсілі. Жазықтықта заттың кескінімен қатар ось жүйесі бірге көрсетіледі.

Абсолюттік координаталар. Ара қашықтық немесе бастапқы қолданушы координат жүйе нүктесінің бұрышқа қатынасымен берілген нүктенің орны.

Ағымдағы шұғыл объектілі бекіту. Объектінің белгілі нүктелеріне автоматты бектудің тұрақты әрекет етуші тәртібі.

Анықтауыш нүктелер. Ассоциативті өлшемдерді салу үшін қолданылатын нүктелер. AutoCAD оларды DEFPOINTS атты арнайы қабатта тұрғызылады және түр өзгерту үшін және өлшеніп отырған объектінің ассоциативті өлшемдердің белгілерін өзгерткенде қолданылады. Анықтауыш нүктелер (fit points) бұл нүктелер арқылы сплайндік сызық не тура өтуі тиіс, не берілген аралықтан аспайтындай өтуі керек.

Аралша (island). Тұйық контурлы штрихпен шектелген, басқа тұйық контур ішінде орналысатын аймақ.

Ассоциативті сызықша. Шектеулі контурдың өзгеруіндегі, автоматты өзгертуші, тұйық жердегі сызықша.

Ассоциативті өлшем. Өлшемдер объектілеріндегі өзгертулерінің автоматты жаңартылған өлшем.

AutoCAD терезесі. Суреттерден, менюден, панельдерден және бұйрықтық жолдан тұратын аймақтың жинақтық аты.

Атаусыз бөлім. Түрлі сызбалар, ұқсас мөлшерлер және басқа объектілерді енгізуге болмайтын атаусыз бөлім.

Атрибуттың сипаттамасы. Блок сипаттамасына кіретін және мәтіндік ақпараттарды сақтауға арналған AutoCAD объектісі. Атрибуттың белгілері оны сипаттағанда немесе суретке блок қойған кезде беріледі.

Атрибуттың белгісін айту. Алдын-ала анықталмаған белгілері бар атрибутты блокты қойғанда шығатын мәтіндік жол.

Инвариант [фр.] - белгілі бір түрлендіру кезінде өзгеріссіз қалатын кескін. Мыс.: бір координата жүйесінен басқа жүйеге көшкенде.

Эпюр [фр.] - проекциялар жазықтықтарын беттестіріп алынған фигураның жазық сызбасы (проециясы).

Конгруэнт [лат.] - беттестіргенде тең мөлшерлі және ұқсас.

Ортогональ [гр.] - тік бұрышты.

Проекция [лат.] - қандай да болмасын заттың жазықтықтағы кескіні.

Қонысбай Сәлімжанұлы

ИНЖЕНЕРЛІК ЖӘНЕ КОМПЬЮТЕРЛІК ГРАФИКА

Оқу- әдістемелік кешен

(050716-Аспап жасау, 050719-Радиотехника, электроника және
телекоммуникация мамандықтары үшін)

Редактор

Техникалық редактор

Кафедра отырысы № 5 09 сәуір 2011ж

Машина жасау институтының ОӘК отырысы

№ _____ ” _____ ” _____ 2011ж

Басылуға ” _____ ” _____ 2011 ж. қол қойылды. Таралымы ____ Пішімі
60x84 1/16. Типография қағазы. Көлемі 7,7 , ес.- б.т. Тапсырыс № _____

Қ.И.Сәтбаев атындағы Қаз ҰТУ ғылыми-техникалық баспа орталығы
Алматы қаласы, Ладыгина көшесі, 32