ҚАЗ ҰТУ

Л.Ш. Балғабаева, А.С. Шанлаякова

БАСҚАРУДЫҢ МОДЕЛЬДЕРІ МЕН ӘДІСТЕРІ

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. СӘТБАЕВ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ ТЕХНИКАЛЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІ

Л. Ш. Балғабаева
А.С. Шанлаякова

БАСҚАРУДЫҢ МОДЕЛЬДЕРІ МЕН ӘДІСТЕРІ

Университеттің ғылыми - әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2011

ЖОК 004 (075.8)
ББК 32. 973я73

Б 22 ***Балғабаева Л.Ш., Шанлаякова А.С.*** Басқарудың модельдері мен әдістері: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2011. – 175 б.

ISBN 978–601–228–282–5

Оқу құралы мамандардың жұмыс жоспары мен осы пәннің жұмыс бағдарламасына және маманның дәрежелік сипаттамасына қойылған талаптарына негізделіп құрастырылған.

Оқу құралы 5В070400 – Есептеуіш техника және программалық қамтама, 5В070300 – Ақпараттық жүйелер, 050702 – Автоматтандыру мен басқару мамандықтарының студенттеріне, 6М0704, 6М0703 мамандықтарының магистранттарына арналған.

Әдебиеттер тізімі –21 атау.

ББК 32. 973я73

Пікір жазғандар: *Иманғалиев Ш.И.* – АЭжБИ, "Инженерлік кибернетика" кафедрасының техн. ғыл. канд., доценті;
Ахметова М.А. – АЭжБИ, "Компьютерлік технологиялар" кафедрасының техн. ғыл. канд., доценті;
Калижанова А.У. - Қ.И. Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ "ПОС және С" кафедрасының физ.- мат. ғыл. канд., доценті.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2011 жылғы жоспары бойынша басылды

КІРІСПЕ

Оқу құралының мақсаты – автоматтандырылған басқару жүйелерінің жұмыс барысында зерттеудің модельдері мен әдістерін игеруге, жүйенің моделін құруды, зерттеу есебін қоюды және математикалық әдістерді қолдануды үйрету болып табылады.

Математикалық бағдарламалаудың түрлері көп. Осы жұмыста келесі математикалық бағдарламалау есептері қарастырылған: сызықтық, бейсызықтық, транспорт, дискретті, динамикалық, тораптық, белгілеу және ойындар теориясы.

Сызықтық бағдарламалау есептерінің келесі түрлері қарастырылған: өнім шығарудың оптималды жоспары, металл өнімдерін тасымалдау, диета туралы, үлестіру есебі. Осы есептерге математикалық модель құру ережесі келтірілген.

Басқару есептерін шешу үшін іс жүзінде оның математикалық моделі қолданылады. Математикалық модель көмегімен есептеуге және болжауға болады. Оқу құралында басқарылатын жүйенің математикалық моделін құру жолдары көрсетілген.

Әрбір математикалық бағдарламалау есептерін шешетін әдістер тобы қарастырылған. Математикалық әдістер алгоритмдері мазмұнды берілген.

Сызықтық бағдарламалау есептерін шығаратын келесі әдістер қарастырылған: графикалық әдіс, тіке симплекс әдісі, қос мағыналы симплекс әдісі.

Транспорт есебінің оптималды шешімін іздеуге потенциалдар әдісі қарастырылған, ал тіректі шешімдерін табатын екі әдіс қарастырылған: минимальды элемент әдісі және солтүстік-батыс бұрыш әдісі.

Дискретті есептер шешімін Гоморидің кесіп түсіру немесе Ленд-Дойг әдістерімен табуға болады. Екі әдістер сандық алгоритмі келтірілген.

Белгілеу есебін шешуге Литтл алгоритмі таңдалған.

Бейсызықтық бағдарламалау есептерінің келесі түрлері қарастырылған: бірөлшемді, шартсыз көпөлшемді, шартты көпөлшемді. Осы есептер шешімін табатын келесі әдістер қарастырылған: алтын қиық, циклдік әрбір координата бойынша құлдилау, барынша тез құлдилау, Франк-Вульф, Ньютон-Рабсон.

Ойындар теориясының өз ерекшеліктері бар және ойындар шешімі ойыншылар стратегиясына байланысты. Ойындар теориясы бөлімінде келесі әдістер қарастырылған: графикалық әдіс, сызықтық бағдарламалау есебіне келтіру әдісі.

Сондай-ақ, оқу құралы басқарылатын жүйенің моделін құруды, зерттеу есептерін қоюды, математикалық әдістерді қолдануды және ізделінді нәтижелерді алу үшін есептеу әдістерін, көрсетілген нәтижелерді талдауды, басқарылатын операциялар шешімінің тиімділігін алдын ала сандық түрде негіздеуді үйретеді.

1. ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН КӘДІМГІ ЖОРДАН ШЫҒАРУЛАРЫ АРҚЫЛЫ ШЕШУ

Теңдеулер жүйесі келесі түрде жазылған болсын:

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n, \quad i = \overline{1,m} \tag{1.1}$$

Осы теңдеулермен кестені толтырсақ:

1.1- кесте

	x_1 ... x_s ... x_n
y_1	a_{11} ... a_{1s} ... a_{1n}
...	....
y_r	a_{r1} ... a_{rs} ... a_{rn}
...	....
y_m	a_{m1} ... a_{ms} ... a_{mn}

Теңдеу жүйесін шешу үшін жорданның шығаруын қолданамыз. “rs”-ші “a” шешуші элементі бар жордан шығаруларының бір қадамы бірінші кестені жаңа кестеге келесі бес ережемен аударады:

1^0. Шешуші элемент бірлікке ауыстырылады.

2^0. Шешуші бағанның қалған элементтері сол күйінде қалады.

3^0. Шешуші жолдың қалған элементтері өз таңбаларын ауыстырады.

4^0. Жаңа элементтер a'_{ij} келесі өрнек бойынша табылады:

$a'_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj} \quad (i \neq r,\ j \neq s)$ (төртбұрыш ережесі).

5^0. Кестенің барлық элементтері шешуші элементке бөлінеді.

Жордан шығаруларын қолданудың 3 тәсілі бар:

1. Кері матрицаны табу.

(1)-ші теңдеу жүйесін келесі түрде жазайық:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = a_i, \quad i = \overline{1,n} \tag{1.2}$$

1.2- кесте

	x_1 x_2 ... x_n
a_1	
a_2	
...	$A_{(n\times n)}$
a_n	

Жордан шығаруларын n-рет қолданып, жаңа кестеге келеміз:

1.3- кесте

	a_1 a_2 ... a_n
x_1	
x_2	
...	$A^{-1}{}_{(n\times n)}$
x_n	

1- мысал

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

1.4- кесте

	x_1	x_2	x_3	x_4
5	2	-5	3	1
-1	3	-7	3	-1
7	$\boxed{5}$	-9	6	2
8	4	-6	3	1

1.5- кесте

	x_1	x_2	x_3	5
x_4	-2	5	-3	1
-1	5	-12	6	-1
7	$\boxed{1}$	1	0	2
8	2	-1	0	1

1.6- кесте

	7	x_2	x_3	5
x_4	-2	7	-3	5
-1	5	-17	$\boxed{6}$	-11
x_1	1	-1	0	-2
8	2	-3	0	-3

1.7- кесте

	7	x_2	-1	5
x_4	3	-9	-3	-3
x_3	-5	17	1	11
x_1	6	-6	0	-12
8	12	-18	0	-18

/6

1.8- кесте

	7	x_2	-1	5
x_4	1/2	-3/2	-1/2	-1/2
x_3	-5/6	17/6	1/6	11/6
x_1	1	-1	0	-2
8	2	$\boxed{-3}$	0	-3

1.9- кесте

	7	8	-1	5	
x_4	3/2	-3/2	3/2	-3	
x_3	-19/6	17/6	-1/2	3	/(-3)
x_1	-1	-1	0	3	
x_2	-2	1	0	3	

1.10- кесте

	7	8	-1	5
x_4	-1/2	1/2	-1/2	1
x_3	19/18	-17/18	1/6	-1
x_1	1/3	1/3	0	-1
x_2	2/3	-1/3	0	-1

$$x_1 = 7\times\frac{1}{3}+8\times\frac{1}{3}+(-1)\times 0+5\times(-1)=0$$

$$x_2 = 7\times\frac{2}{3}+8\times\left(-\frac{1}{3}\right)+(-1)\times 0+5\times(-1)=-3$$

$$x_3 = 7\times\frac{19}{18}+8\times\left(-\frac{17}{18}\right)+(-1)\times\frac{1}{6}+5\times(-1)=-\frac{16}{3}$$

$$x_4 = 7\times\left(-\frac{1}{2}\right)+8\times\frac{1}{2}+(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+5\times 1=6$$

$$X^* = \left(0;\,-3;\,-\frac{16}{3};\,6\right)$$

2. Жордан-Гаусс әдісі.

Теңдеулер жүйесін келесі түрде жазамыз:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - a_i = 0, \quad i=\overline{1,n} \qquad (3)$$

Кестені толтырамыз:

1.11- кесте

	x_1	x_s	...	x_n	1
0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$-a_1$
0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$-a_2$
...	....				...
0	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}	$-a_n$

Бос мүшелі баған
(бос мүшелер бағаны)

Жордан шығаруларын n-рет қолданып, әрбір қадамнан кейін нөл-бағанды сызып, келесі түрдегі кестеге келеміз:

1.12-кесте

	1
x_1	b_1
x_2	b_2
...	...
x_n	b_n

2- мысал

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 - 5 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 7 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 - 8 = 0 \end{cases}$$

1.13- кесте

	x_1	x_2	x_3	x_4	1
0	2	-5	3	$\boxed{1}$	-5
0	3	-7	3	-1	1
0	5	-9	6	2	-7
0	4	-6	3	1	-8

1.14- кесте

	x_1	x_2	x_3	0	1
x_4	-2	5	-3	1	5
0	5	-12	6	-1	-4
0	$\boxed{1}$	1	0	2	3
0	2	-1	0	1	-3

1.15- кесте

	x_1	x_2	x_3	1
x_4	-2	5	-3	5
0	5	-12	6	- 4
0	$\boxed{1}$	1	0	3
0	2	-1	0	-3

1.16- кесте

	0	x_2	x_3	1
x_4	-2	7	-3	11
0	5	-17	6	-19
x_1	1	-1	0	-3
0	2	-3	0	-9

1.17- кесте

	x_2	x_3	1
x_4	7	-3	11
0	-17	$\boxed{6}$	-19
x_1	-1	0	-3
0	-3	0	-9

1.18- кесте

	x_2	0	1
x_4	-9	-3	9
x_3	17	1	19
x_1	-6	0	-18
0	-18	0	-54

/6

1.19- кесте

	x_2	1
x_4	-3/2	3/2
x_3	17/6	19/6
x_1	-1	-3
0	$\boxed{-3}$	-9

/(-3)

1.20- кесте

	0	1
x_4	-3/2	-18
x_3	17/6	16
x_1	-1	0
x_2	1	9

1.21- кесте

	1
x_4	6
x_3	-16/3
x_1	0
x_2	-3

$$X^* = \left(0; -3; -\frac{16}{3}; 6\right)$$

3. Гаусс әдісі.

Жордан шығаруларының әрбір қадамынан кейін 0-ші бағанды шығарып тастап, әрбір x_s үшін сәйкесті өрнекті жазып, шешуші жолды кестеден шығарып тастаймыз. Ең ақырғы қадамда x_i-дің мәнін табамыз:

1.22- кесте

	1
x_i	b_i

Осы табылған мәндерді үстіңгі өрнекке қоямыз, содан соң х-тардың мәнін табамыз.

3- мысал

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 - 5 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 7 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 - 8 = 0 \end{cases}$$

1.23- кесте

	x_1	x_2	x_3	x_4	1
0	2	-5	3	$\boxed{1}$	-5
0	3	-7	3	-1	1
0	5	-9	6	2	-7
0	4	-6	3	1	-8

1.24- кесте

	x_1	x_2	x_3	0	1
x_4	-2	5	-3	1	5
0	5	-12	6	-1	-4
0	$\boxed{1}$	1	0	2	3
0	2	-1	0	1	-3

$$x_4 = -2 \times x_1 + 5 \times x_2 + (-3) \times x_3 + 5$$

1.25- кесте

	x_1	x_2	x_3	1
0	5	-12	6	-4
0	$\boxed{1}$	1	0	3
0	2	-1	0	-3

1.26- кесте

	0	x_2	x_3	1
0	5	-17	6	-19
x_1	1	-1	0	-3
0	2	-3	0	-9

1.27- кесте

	x_2	x_3	1
0	-17	$\boxed{6}$	-19
0	-3	0	-9

$$x_1 = (-1)\times x_2 + 0\times x_3 + (-3)\times 1$$

1.28- кесте

	x_2	0	1
x_3	17	1	19
0	-18	0	-54

/6

1.29- кесте

	x_2	1
x_3	17/6	19/6
0	$\boxed{-3}$	-9

$$x_3 = \frac{17}{6}\times x_2 + \frac{19}{6}\times 1$$

1.30- кесте

	0	1
x_2	1	9

/(-3)

1.31- кесте

	1
x_2	-3

$$x_2 = -3$$

$$x_3 = \frac{17}{6}\times(-3) + \frac{19}{6}\times 1 = -\frac{51}{6} + \frac{19}{6} = -\frac{32}{6} = -\frac{16}{3}$$

$$x_1 = (-1)\times(-3) + 0\times(-\frac{16}{3}) + (-3)\times 1 = 3 - 3 = 0$$

$$x_4 = -2\times 0_1 + 5\times(-3) + (-3)\times(-\frac{16}{3}) + 5 = -15 + \frac{48}{3} + 5 = 6$$

$$X^* = \left(0;\ -3;\ -\frac{16}{3};\ 6\right)$$

1 - тапсырма. Келесі сызықты теңдеулер жүйесін шешу керек:

1) $\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{array}\right\};$ 2) $\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{array}\right\};$

3) $\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{array}\right\}$;

4) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{array}\right\}$;

5) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0 \end{array}\right\}$;

6) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{array}\right\}$;

7) $\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{array}\right\}$;

8) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -7 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 19 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \end{array}\right\}$;

9) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \end{array}\right\}$;

10) $\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{array}\right\}$;

11) $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \end{array}\right\}$;

12) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{array}\right\}$;

13) $\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{array}\right\}$;

14) $\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$;

15) $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4&=5\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4&=3\\ 3x_1+2x_2+8x_3+4x_4&=5\\ 3x_1+4x_2+14x_3+9x_4&=4 \end{aligned}\right\};$

16) $\left.\begin{aligned} 4x_1+7x_2\qquad\qquad&=-10\\ x_1+2x_2\qquad\qquad&=-3\\ 7x_3-4x_4&=-1\\ -5x_3+3x_4&=1 \end{aligned}\right\};$

17) $\left.\begin{aligned} 2x_1-5x_2+3x_3+x_4&=5\\ 3x_1-7x_2+3x_3-x_4&=-1\\ 5x_1-9x_2+6x_3+2x_4&=7\\ 4x_1-6x_2+3x_3+x_4&=8 \end{aligned}\right\};$

18) $\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-2x_4&=6\\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4&=18\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4&=4\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4&=-8 \end{aligned}\right\};$

19) $\left.\begin{aligned} 7x_1+x_2+3x_3-8x_4&=3\\ 2x_1+3x_2+4x_3-2x_4&=1\\ -3x_1-2x_2-9x_3-x_4&=-4\\ 7x_1-3x_2-4x_3-7x_4&=8 \end{aligned}\right\};$

20) $\left.\begin{aligned} 7x_1+x_2-2x_3+3x_4&=11\\ 2x_1+x_3-4x_4&=-8\\ x_1+4x_2+5x_3+x_4&=10\\ 2x_1-2x_2+4x_3+9x_4&=39 \end{aligned}\right\};$

21) $\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-2x_4&=6\\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4&=18\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4&=4\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4&=-8 \end{aligned}\right\};$

22) $\left.\begin{aligned} 4x_1-17x_2-6x_3-5x_4&=-17\\ 43x_1+24x_2-x_3+3x_4&=28\\ x_2+2x_3+x_4&=9\\ 2x_1+x_2\qquad\qquad&=1 \end{aligned}\right\};$

23) $\left.\begin{aligned} x_1+4x_2\qquad-x_4&=5\\ 2x_1-3x_2+x_3+x_4&=3\\ x_1\qquad+2x_3-x_4&=3\\ 2x_2-3x_3+2x_4&=3 \end{aligned}\right\};$

24) $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+x_4&=-3\\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4&=8\\ x_1+x_2+3x_3-2x_4&=6\\ -x_1+2x_2+3x_3+5x_4&=3 \end{aligned}\right\};$

25) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{array}\right\}$;

26) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \end{array}\right\}$;

27) $\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 14x_4 + 18x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 + 19x_3 + 25x_4 + 30x_5 = 15 \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 9 \\ x_1 - 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 14 \end{array}\right\}$;

28) $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 82x_5 = 84 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 6 \\ x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 27x_5 = 27 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 1 \end{array}\right\}$;

29) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 - 7x_4 = -8 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 10x_4 = 2 \\ 7x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -14 \end{array}\right\}$;

30) $\left.\begin{array}{l} x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 9 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_3 - 4x_4 = -5 \end{array}\right\}$;

31) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{5}x_2 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 2 \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 25 \\ -3x_1 + 4x_2 - 11x_3 + 4x_4 = 8 \end{array}\right\}$;

32) $\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{10}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 15 \\ \frac{1}{5}x_1 - 8x_2 + 6x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 14x_2 - 30x_3 + 2x_4 = 1 \end{array}\right\}$;

33) $\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 20 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -9 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -6 \end{array}\right\};$

34) $\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ 7x_1 - 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{array}\right\};$

35) $\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 6 \end{array}\right\};$

36) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1 \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{array}\right\};$

37) $\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{array}\right\};$

38) $\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 4 \end{array}\right\};$

39) $\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\};$

40) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{array}\right\};$

2. МАТЕМАТИКАЛЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУДЫҢ ЖАЛПЫ ЕСЕПТЕРІ

Халық шаруашылығын ұйымдастыру кезінде көптеген мәселелер туындайды: өнім санын оптималдандыру, бұйым сапасын оптималдандыру, қаржы бөлу, жабдықтардың типтік өлшемдерін оптималдандыру және т.с.с. Осындай мәселелерді шешу үшін математикалық модельдер қолданған жөн. Математикалық модель көмегімен қойылған мәселені болжауға және есептеуге болады.

Модель – ақиқатты нақты белгілеу. Математикалық модельді тұрғызу үшін тәуелсіз және тәуелді айнымалыларды енгізеді. Тәуелсіз айнымалылар – есептің негізгі шешімдерін табу кезінде қолданылады. Олар тиімділік айнымалымен, қозғаушы күштермен байланысты. Математикалық модель мақсатты функция мен шектеулерден тұрады. Мақсатты функция – деп тәуелсіз айнымалылардың максимальды немесе минимальды мәнін іздейтін функцияны айтады. Шектеулер – ол тәуелсіз айнымалылар жиынтығының дәлдік шегін анықтайтын теңдеулер жүйесі.

4-мысал. Қоспаның ең жақсы құрамын анықтау (диета туралы).

Мал шаруашылығында малға тәулікте берілетін жем құрамы жоспарланады. Жем құрамында белгілі бір қоректі заттар болуы тиіс. Жем бірлігінің бағасы белгілі. Жем түрлерін таңдаған сәтте олардың жалпы бағасы минимальды болатындай және қоректі заттар қажетті мөлшерде болуы тиіс.

Негізгі белгілеулер:

n ($j = \overline{1,n}$) - жем түрлері;

m ($i = \overline{1,m}$) - қоректі заттар саны;

a_{ij} - j-ші жемнің бірлігіндегі i-ші заттың бірлігі;

b_i - тәуліктегі қоректі заттың қажеттілігі;

c_j - j-ші жем бірлігінің бағасы;

x_j - жем түрлерінің мөлшері.

Қарапайым актілер:

1) Жем түрлерінің жалпы бағасын минимальдау.
2) Тәулікте қоректі заттар мөлшерін қанағаттандыру.

Есептің математикалық моделі:

$$z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i ,$$

$$x_j \ge 0, i = \overline{1, m} .$$

5- мысал. Өнім шығарудың оптималды жоспары.

Кәсіпорын n түрлі өнім шығарады ($j = \overline{1, n}$). a_{ij} -арқылы j-ші өнім бірлігіне жұмсалатын i-ші шикізат бірлігін; b_i ($i = \overline{1, m}$) арқылы – i-ші шикізаттың толық көлемін; C_j арқылы –j-ші өнімнен кәсіпорын алатын пайданы; a_j , A_j арқылы – алдын ала белгіленіп шығарылатын өнімнің төменгі және жоғарғы шегін белгілейміз.

Шикізат көлемі бойынша технологиялық іске асыратын, шығарылатын өнімнің көлемін қанағаттандыратын және де кәсіпорынға үлкен пайда әкелетін өнім шығаратын жоспардың тиімділігін анықтау.

Тәуелсіз айнымалылар:

x_j, $j = \overline{1, n}$ -шығарылатын өнім көлемі.

Қарапайым актілер:

1) Кәсіпорын пайдасын максимальдау.
2) Шығарылатын өнім көлемін қанағаттандыру.
3) Шикізат көлемінің шектілігін ескеру.

Есептің математикалық моделі:

$$z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max ,$$

$$\left.\begin{aligned} & a_j \le x_j \le A_j ,\ j = \overline{1,n} \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ,\ i = \overline{1,m} \end{aligned}\right\},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

6-мысал. Металл өнімдерін тасымалдауды жоспарлау (транспорт есебі).

Өндірістік қуаттары a_i-ге тең бірыңғай металл өнім шығаратын металлургия завод жеткізушілері m қалада орналасқан. Ал n қалада тұтынатын көлемі b_j -ға тең металл өнімдерін тұтынушылар бар. Бұл қалалар теміржол желілерімен байланысқан және қалалардың өзара қашықтықтары берілген a_{ij} , к-жүк бірлігінің арақашықтық бірлігіне тасымалдау құны, к$=\left[\dfrac{тн}{T \cdot км}\right]$. Материалдық-техникалық жабдықтау басқармасына транспорт шығындары минимальды болатындай етіп, тұтынушыларды жеткізіп берушілерге бекіту керек.

Келесі белгілеулер енгізейік:

$C_{ij} = k \cdot a_{ij} [\dfrac{тн}{T}]$ тасымалдау құны.

Тәуелсіз айнымалылар: x_{ij} -тасымалданатын металл өнімдерінің көлемі.

Қарапайым актілер:

1) Транспорт шығындарын минимальдау.
2) Тұтынушылардың сұраныстарын толық қамтамасыз ету.
3) Өндіріс қуаттарының шектілігін ескеру.

Есептің математикалық моделі:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j,\ j=\overline{1,n} \\ &\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i,\ i=\overline{1,m} \end{aligned}\right\},$$

$$X_{ij} \geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

7- мысал. Белгілеу (үлестіру) туралы есеп.

n механизмдерді үлестіру туралы есепте әрбір механизм тек бірден бір жұмысты орындайтын етіп және әрбір механизмнің берілген өнімділігі бойынша әрбір жеке жұмыстың жалпы тиімділігі максимальды болатындай етіп, n жұмысқа бөлу керек.

Белгілеулер:

a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ - i-ші механизмнің j-ші жұмыстағы өнімділігі,

x_{ij} - i-ші механизмді j-ші жұмысқа белгілеу.

Қарапайым актілер:

1) Процесс тиімділігін максимальдау.
2) Бір механизм бір жұмысты орындайды.
3) Бір жұмыс тек бір механизммен орындалу керек.

Есептің математикалық моделі:

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \to \max,$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i=\overline{1,n} \\ &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j=\overline{1,n} \end{aligned}\right\},$$

$$x_{ij} = \begin{cases} \textit{1, егер i – механизм j-жұмысқа белгіленген болса,} \\ \textit{0, егер i – механизм j-жұмысқа белгіленбеген болса.} \end{cases}$$

8 – мысал

Өнеркәсіпте шикізат қоры, жұмыс күші және құрал-жабдықтар бар. Осы өнеркәсіпке кез келген 4 түрлі шығарылатын өнімнің түрі керек. Берілген бірлік өнімнің түрін дайындаудағы қор шығындары, өнеркәсіптен алынған пайда келесі кестеде көрсетілген:

Өнімнің түрі / Қордың түрі	1	2	3	4	Қордың көлемі
Шикізат, кг	3	5	2	4	60
Жұмыс күші, адам	22	14	18	30	400
Жабдықтау, станок-адам	10	14	8	16	128
Бірлік өнімнің пайдасы, тг	30	25	56	48	

Осы берілген мәліметтерді қолданып, пайда максимальды болу үшін қандай өнім ассортиментін шығару керек?

Шешімі:

Тәуелсіз айнымалылар енгізейік:

x_1, x_2, x_3, x_4 - өнім ассортименті.

Есептің математикалық моделі:

$$z = 30x_1 + 25x_2 + 56x_3 + 48x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 60 \\ 22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4 \le 400 \\ 10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 16x_4 \le 128 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

9 – мысал

Мұнай өңдеуші зауыт 4 жартылай фабрикат алады: 400 мың литр алкилит, 250 мың литр крекинг– бензин, 350 мың литр тура өңдеуден алынған бензин және 100 мың литр изопентон. Осы төрт компоненттерді әртүрлі пропорциямен араластыру нәтижесінде үш түрлі авиациялық бензин шығады:

А бензині: 2:3:5:2

В бензині: 3:1:2:1

С бензині: 2:2:1:3

Көрсетілген бензин сорттарының 1 мың литрінің бағасы 120 тг, 100 тг, 150 тг. Компоненттерді максимальды пайдалану шарты бойынша, барлық өнімнің осы құнына қол жеткізуге болатын компоненттерді араластыру жобасын анықтау.

Айнымалылар енгізейік:

x_1, x_2, x_3 – А, В, С бензин түрлерін шығару жоспары.

Есептің математикалық моделі:

$$z = 120x_1 + 100x_2 + 150x_3 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{12}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{2}{8}x_3 \le 400 \\ \frac{3}{12}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{2}{8}x_3 \le 250 \\ \frac{5}{12}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{1}{8}x_3 \le 350 \\ \frac{2}{12}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{8}x_3 \le 100 \end{array}\right\},$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

2 - тапсырма. Келесі есептердің математикалық моделін құру керек:

1) Өндірістің жоспарлануы 1:2:3 қатынасымен кәсіпорын өнімінің үш түрін (А, Б, В) шығаруы керек, саны 200 бірлік еңбек ресурстары пайдаланады және өндірілген өнімінің бөлігі өндіріс ішіндегі тұтыну болады. Кестеде берілген өнімінің өндіріс бірлігін есептегендегі өндіріс аралық еңбек шығыны, коэффициенттері берілген.

Ресурстар	Шығын шамасы		
	А	Б	В
А	-	0.5	0.2
Б	-	-	0.2
Еңбек	2	3	1

Соңғы өнімнің ең үлкен шамасынан кәсіпорынға тиімді жоспарды анықтау керек.

2) Малға берілетін тәуліктік азық мөлшерін жасауда жас пішен (50 кг- нан артық емес) және сүр шөпті (85 кг- нан артық

емес) пайдалануға болады. Азық мөлшерінің белгілі нәрлілігі (азық өлшемінің саны 30- дан кем емес) және құрамында құнарлы заттар болуы керек: ақуыз (1 кг-нан артық емес), кальций (100 г-нан артық емес) және фосфор (80 г-нан артық емес).

Келесі кестеде аталған компоненттердің әрбір азықтың (тағамның) 1 кг-дағы мөлшері және осы азықтардың өзіндік құны (тн/кг) туралы мағлұмат көрсетілген:

Компоненттер / Өнімдер	Азық мөлшерінің саны	Ақуыз г/кг	Кальций г/кг	Фосфор г/кг	Өзіндік құны тн/кг
Жас пішен	0,5	40	1,25	2	1,2
Сүр шөп	0,5	10	2,5	1	0,8

Өзіндік құны минимальды болатындай оптималды азық мөлшерін анықтау керек.

3) Кәсіпорын екі түрлі А және В автомобиль бөлшегін шығарады. Кәсіпорын бұрғыланатын, жонылатын, тегістелетін дайын металдарды сатып алады. Кәсіпорын станок бөлімінің өнімділігін сипаттайтын мәліметтер кестеде берілген.

Станоктар	Әр станоктың өнімділігі (сағ/бөл)		Станок уақытының бағасы (тг)
Жонылатын	25	40	20
Бұрғыланатын	28	35	14
Тегістелетін	35	25	17.5

А бөлшегін шығаратын дайын зат құны 2 теңге, В бөлшегі шығарылатын дайын зат құны 3 теңге. А және В бөлшектерін 5 және 6 теңгеден сатады. Шығарылатын өнім жоспарының тиімділігін табу керек. (Бір сағатта әртүрлі бөлшектің қаншасы шығарылады).

4) Совхозда 6 жыл көлемінде бағыла алатын, жүз басты ірі қара малдан тұратын табын бар. Малдың бөлігін мына бағалармен, 600, 580, 560, 540, 520 және 500 теңге мал басы үшін жыл соңына сәйкес сатуға болады. Табындағы қалған мал саны

келесі жылдың соңында екі есеге көбейеді. Сатудың жобаланған мерзімдегі (6 жыл) мал көп пайда келтіретін, ең қолайлы жобасын анықтау керек.

5) Өнеркәсіпке 2 партия фанер келіп түсті, әрқайсысында 400 және 250 тақта сәйкес. Осылардан үш кесу тәсілі бойынша комплект дайындау керек, 4 деталь 1-түрінен, 3 деталь 2-түрінен және 2 деталь 3-түрінен. Фанер партиясы әрқайсысы әртүрлі әдіспен кесіледі.

Кесу тәсілі келесі кестеде көрсетілген:

1- партия				2- партия		
Кесу тәсілі / Деталь	1	2	3	Кесу тәсілі / Деталь	1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Комплектлерді дайындаудың максимальды санын қамтамасыз етуге болатындай материалдарды кесуді талап етеді.

6) Үш мұнай өндіру заводтары күнделікті 6,5 және 6 млн. литр бензин өнімділігімен сұраныстары 4,8 және 7 млн. литр құрайтын үш бензин сақтау орнын қамтамасыз етеді. Бензин сақтау орнына құбыр өткізгіштерімен тасымалданады.

1 км-ге 100 л бензинді айдау шығыны 0,2 теңгені құрайды. Бірінші бензин сақтау орнының сұранысын толық қанағаттандыруға міндетті, екінші және үшінші бензин сақтау орнына бензиннің жеткізілмегені үшін 1 литрге 0,8 теңге және қатысты 1 теңге айыпқұнын төлеу керек.

Арақашықтық кестесі берілген (завод үшінші сақтау орнымен байланысты емес) (км):

Бензин сақтау орны / Заводтар	1	2	3
1	120	180	-
2	300	100	80
3	200	250	120

Жалпы көлік шығындарының неғұрлым аз шығуы сұраныстың толық қанағаттандырылмағаны үшін айыпқұн және құбыр өткізгіштерімен бензин тасымалдаудың ең жақсы, тиімді жоспарын жасау керек.

7) Дәрі-дәрмек жасау фирмасы он екі ай ішінде, осы фирманың басты қарсыласы шығарған дәрімен бәсекес жаңа дәрі жасап шығаруды жоспарлайды. Жаңа дәріні жасап шығару үш кезеңнен тұрады: жай, әдеттегідей және жылдам қарқынмен өтуі мүмкін. Кезең түрлері кестеде берілетін (кестеде бірінші сан-ұзақтық (ай), екінші-шығын (мың. тг) қаржы және уақыт шығынының әртүрлі кезеңіне қатысты.

Кезеңдер / Қарқын	Теориялық зерттеулер	Зертханалық тәжірибелер	Үкіметтің қолдауы	Өтім
Жай	5,5	3,6	6,1	5,8
Әдеттегідей	4,7	2,8	4,1	4,10
Жылдам	2,10	1,12	2,3	3,15

Фирма шығыны 25 мың теңгеден аспайтын шарт бойынша он екі ай ішінде жаңа дәріні жасап шығарудың ең жақсы әдісін табу керек.

8) Ұзындығы 3м болатын 100 бөренені 1,5 м, 1 м, 0,75 м өлшемдерімен әрқайсысын үш келтекке кесу керек. Сонымен қатар, әр өлшемді келтектердің саны бірдей болу керек. Комплекттердің максимальды санын алу үшін, кесудің оптималды жобасын анықтау (әр комплектке үш өлшемді келтектен келеді).

9) Дайындалатын бөлікшеге ұзындығы 111 см, 69 металл сымдары келіп түсті. Оларды міндетті түрде берілетін 1:4:2 қатынасымен дайындыққа 19, 23 және 30 см түрінде кесу керек. Дайындыққа арналған жинақтар санын арттыру үшін ыңғайлы, тиімді түрде қалай сымдарды кесуге болады?

10) Үш А2, А2, А3 теміржол станцияларында 120, 110 және 130 жүк тиелген вагондар тұрып қалды. Бұл вагондарды міндетті

түрде В1, В2, В3, В4 және В5 – теміржол бекеттеріне жіберу керек.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Бекеттерге әр вагонның қажеттілігі 80, 60, 70, 100 және 50. А2 теміржол бекетінен В2 және В4 бекеттеріне вагондарды жеткізу мүмкін еместігін ескеріп және бір вагонның жеткізілу тарифі С матрицасымен анықталатынын біле тұра, тасымалдаудың жалпы құны аз болатын жоспарды құру керек.

11) Үш жер бөлікшесі бар, оған жүгері, бидай, арпа, тары егілуі мүмкін. Әр жер бөлікшесінің ауданы 600, 180 және 220 га тең. Жүгері, бидай, арпа, тары тұқымдарының бар болуын ескеріп, бұл дақылдардың 290, 180, 170 және 420 га себілуі қажет. Әр жер бөлікшесіндегі дақылдың түсімі әртүрлі және ол С матрицасымен беріледі:

$$C = \begin{pmatrix} 40 & 45 & 50 \\ 30 & 28 & 22 \\ 18 & 22 & 14 \\ 24 & 18 & 16 \end{pmatrix}$$

Әр жер бөлікшесінде әр дақылдан қанша га сепкенде, жалпы егін түсімі ең көп мөлшерде болатынын анықтау керек.

12) Келесі кестеде берілгендерді анықтап, транспорт есебін шығару керек:

Жіберу пункттері	Белгілеу пункттері					Қорлар
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	1	2	3	1	4	180
А2	6	3	4	5	2	220
А3	8	2	1	9	3	100
Тұтынушылар	120	80	160	90	50	

$$D = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 60 & \infty & \infty \\ \infty & 70 & \infty & 70 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

D матрицасында сандар жүктерді жіберу пунктінен белгіленген пунктке жіберілетін жүк санын анықтайды. (∞ белгісі жіберу пунктінен белгіленген пунктке тасымалдауға шектеу жоқ дегенді білдіреді).

13) Бес түрлі жұмысқа 60, 30, 45 және 25 санды төрт бейінді (профиль) мамандардың оптималды бөлінуін құрастыру керек. Әрбір жұмыс түріне мамандар қажеттілігі 20, 40, 25, 45 және 30-ға тең. Келесі матрица маманның мәлім жұмыстағы қолданылу тиімділігін сипаттайды.

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

14) Құрылыс құмын үш карьерден 4 құрылыс алаңына тасымалдайды. Берілген өнімнің карьер бір күнге α_i (тоннамен), алаңға қажетті құмды b_k (тоннамен), құмды шығаруға кеткен шығын α_i (ақшамен) және транспорт шығыны c_{ik} (ақшамен) келесі кестеде көрсетілген.

a_i \ b_k	40	35	30	45	α_i
46	4	3	2	5	3
34	1	1	6	4	2
40	3	5	9	4	1

Жетіспеген құмның саны күніне 30 т. Мұны келесі үш жолмен қарастырамыз:

а) бірінші карьердегі өнімнің өсуі, қосымша жұмсалған күш;

ә) екінші карьердегі өнімнің өсуі, қосымша жұмсалған күш;

б) эксплуатация жаңа карьердегі жұмсалған күшті өндіруге 5 тенге/т және алаңды транспорттауға $c_{41} = 2, c_{42} = 3, c_{43} = 1$ (тенге/т).

Оптималды жоспарды, карьердегі алаңды мықтап бекіту және құмды әкелудің ең тиімді вариантын анықтау.

15) 4 авиасызыққа (авиалиния) қызмет ету 3 түрлі ұшақ бар $i-$түрлі саны a_i; жолаушылардың саны, k сызықпен жөнелетін B_k; i түрі k-сызығы бар бір ұшаққа кететін қанаушының (эксплуатационные) шығындары c_{ik}-ға тең және жолаушылардың жалпы саны, берілген уақытта ұшақты әкелуге болатын $i-$түрі k-сызығы λ_{ik}. Сандық мәліметтер:

B_k / a_i	Авиасызық			
	20000	10000	150000	40000
15	500/5	1200/7	1000/20	2200/12
$c_{ik} / \lambda_{ik} = 10$	750/9	1800/4	1500/8	3300/10
25	1000/6	2450/8	2000/4	4350/5

Авиасызыққа ұшақтарды бөлудің оптималдылығын анықтап, суммалық шығындарды минимальдау.

16) Мұнай өңдеу заводына ай сайын d_i мөлшерінде m кен орнынан мұнай келеді. Мұнайдан өңдеу жолымен номенклатурадағы жоба келісімімен b_j мөлшерінде n түрлі мұнай өнімдері алынады. Әртүрлі кен орындарындағы мұнай түрлері химиялық құрамымен ерекшеленеді. j кен орнынан шыққан мұнай бірлігінен i мұнай өнімі a_{ij} деп берілген. Заводта a_i кен орнынан q_j түрлі j өнімдері үшін мұнай сақтайтын сыйымдылықтар бар. Егер c_i кен орнынан $i-$н мұнай өңдеудің үлес шығындары белгілі болса, ең аз шығын кезіндегі номенклатура жобасының орындалуы үшін әр кен орнынан мұнайдың қанша мөлшерін өңдеу қажеттігін анықтау керек.

Төменде шартты бірліктермен: $m=5$, $n=3$ мәндері келтірілген:

i	1	2	3	4	5
D_i	100	150	400	50	200
c_i	5	2	6	7	3
a_i	100	150	450	60	200

j	1	2	3
b_j	700	90	90
q_j	800	150	150

j \ i	1	2	3	4	5
$a_{ij} = 1$	0,6	0,5	0,7	0,8	0,9
$a_{ij} = 2$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,05
$a_{ij} = 3$	0,1	0,3	0,2	0,1	0,05

17) Мейрамхана бастығы келесі 4 күнге жұмыс жоспарын ойлай отырып, күнделікті қол сүрткіштің артық болуын естен шығармауы керек. Мейрамханаға 4 күн ішіндегі қол сүрткіштің қажеттілігі мынаған тең: 110, 210, 190, 100 және мүмкін болатын үш әдіспен қанағаттандырылады:

– пайдаланылатын жаңа қол сүрткіштер бағасы 5 теңге;

– күн соңында пайдаланылатын қол сүрткіштерді тез кір қабылдауға өткізу (кір бір түнде жуылады, әр қол сүрткіштің жуылу бағасы 1 теңге);

– күн соңында кір қабылдауға пайдаланылған қол сүрткіштерді өткізгендегі оның жуылу мерзімі 24 сағат, бағасы 0,5 теңге.

Қалайда шығынның аз болуын қамтамасыз ететін ең тиімді есептің шешімін табу керек.

18) Электроқұралдар заводы шырақтар, электрошайнектер және электроплиталар шығарады. Келесі жылғы өнімдердің өтім деңгейі (завод сұранысты толық қанағаттандыруы керек):

Бұйымдар	Тоқсандар (кварталы)			
	1	2	3	4
Шырақтар	2000	1500	3000	1000
Электрошайнектер	150	1500	1000	1500
Электроплиталар	1000	3000	1500	3000

Әр тоқсанның соңында завод әр бұйым түрінен 1000-нан кем шығармауы керек. Бірінші тоқсанның басында бұйым қоры жоқ. Бір тоқсандағы ең көп жұмыс уақыты 8000 сағат. Бір шырақты жасау үшін 0,5 сағат, электрошайнекке - 2 сағат, электроплитаға - 1,5 сағат уақыт керек. Төртінші тоқсанда шырақтардың жасалуы мүмкін емес, өйткені завод бұл кезде кәсіпорынға біраз жөндеу жұмыстарын жүргізуді жолға қойды. Қоймада әр бұйым түрлерін сақтау шығыны завод үшін 5 теңге құрайды. Қоймада өнімдерді сақтау шығыны кемітуге байланысты өндіріс жоспарын жасау керек.

19) Екі А және В ерітпе қоспаларын алу үшін 4 металл қолданылады. А және В ерітпе қоспаларындағы металдардың құрамына қойылған талаптар төменде берілген:

Ерітпе қоспасы	Металдардың құрамына қойылған талаптар	Бағасы (тг/т)
А	1 металдың 80% артық еместігі 1 металдың 80% артық еместігі 4 металдың 80% артық еместігі	200
В	2 металдың 40% 60% дейінгі 2 металдың 30% кем еместігі 3 металдың 70% артық еместігі	300

1, 2, 3 және 4 металдар шығарылатын кеннің сипаттамасы мен қоры кестеде көрсетілген:

Кен	Ең үлкен қор	Құрамы (%)					Бағасы (тг/т)
		1	2	3	4	Басқа құрамдас бөліктері	
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	-	50

А және В ерітпе қорытпаларын сатудағы пайданы арттыру керек. (Нұсқау: ерітпе қоспасын дайындауда қолданылатын және кеннен алынатын металл тоннасының мөлшерін (санын) белгілеңіз).

20) Өнеркәсіп көкөніс мерзімі кезінде, көкөнісі бар балапан сорпасынан консерві шығарады. Мерзім басталмай тұрып, балапандарды тасымалдауға келісімшартқа отырады. Балапандардың бағасы өнеркәсіптің сатып алу партиясының өлшеміне байланысты және 100 қысқарады. Егер балапандар әкелінген апта ішінде пайдаланылмайтын болса, өнеркәсіптің жалға алған тоңазытқышында сақтайды. Балапандарды сатып алуға және сақтауға кететін шығындарды азайту үшін әр аптада сатып алатын балапандар санын анықтау керек. Балапандарға деген апталық қажеттілік 300 дананы, ал жұмыс периоды 5 аптаны құрайды. Бағалардың және шығындардың шамасы кестеде келтірілген. Көріп отырғанымыздай, алғашқы аптада өнеркәсіп 600 балапан сатып алған.

Бастапқы мәліметтер:

Балапандар саны (мың тал)	Бағасы	Артық (мың тал)	Сақтаудың құны
1	75	1	5
2	140	2	10
3	205	3	15
4	270	4	25
5	330	5	35
6	390	6	50
7	445		
8	500		
9	550		

21) Кәсіпорын бүкіл көкөніс маусымы ішінде балапанмен қосылған көкөніс сорпасы консервілерін шығарады. Балапандарды жеткізу келісімі маусым басталмай тұрып келісіледі. Балапан бағасы кәсіпорынмен сатып алынатын мөлшер шамасынан тәуелді және ол 100 еселі. Егер балапандар кәсіпорынға жеткізілген аптада пайдаланылмаса, оларды кәсіпорын ақы төлеп уақытша пайдалануға алған тоңазытқыштарға сақтау керек. Жұмыс уақыты 5 аптаға созылғанда, әр аптада балапанның қажеттігі 300 түйір, осы шарт бойынша балапанның сатып алыну және сақталу шығынының

жалпы санын кеміту үшін әр аптада сатып алынатын балапан санын табу керек. Баға және шығын бірліктері кестеде келтірілген. Бірінші аптада кәсіпорын 600 балапаннан кем сатып алмайтынын байқаймыз.

Балапандар саны (100 түйірден)	Бағасы	Артық (100 түйірден)	Сақтау үшін бағасы
1	150	1	10
2	280	2	20
3	410	3	30
4	540	4	50
5	660	5	70
6	780	6	100
7	890		
8	1000		
9	1100		

22) Мұнай кәсіпорнынан мұнай өңдеу заводына бір мұнай құбырымен m түрлі мұнай айдалады. Мұнайдың әртүрі қосылғанда c_{ij} шығыны болады. Мұнай айдағаннан кейін, әртүрлі мұнайдың қосылғандағы шығынын кемітудің жалпы сомасын есептеу керек. Төменде $m = 4$ деп алғандағы сандар келтірілген.

i \ j	1	2	3	4
1	х	3	2	5
2	6	х	4	3
3	2	2	х	1
4	4	6	5	х

23) Кәсіпкерде көлемі α зат сыятын қойма бар, онда бастапқы уақыттағы кейбір заттардың сақтандыру қорының мөлшері k тең. 1-ден T уақыт аралығында кәсіпкер затты сатып алады және сатады. Оның T уақытта D тең затты сатып алу мүмкіндігі бар. a_{ij} сол уақыттағы затты сату бағасы, b_{ij} бар қорды толықтырып T уақытындағы затты сатып алу бағасы T

уақытындағы затты сақтау бағасы. Сатылған және сатып алынған зат мөлшерін, кәсіпкердің жалпы пайдасын арттыратын, сатылған және сатып алынғаннан кейін сақталатын зат мөлшерін анықтау керек. Сан түрінде берілген мәндерді қолдану керек:

$$\alpha = 10, \quad k_0 = 0, \quad D = 25, \quad T = 4.$$

T	1	2	3	4
A_i	5	7	4	3
B_i	4	5	1	5
C_i	1	4	2	3

24) Кәсіпорын (А, Б және В) үш түрлі өнім шығарады. Кәсіпорынның пайдасы сұранысқа байланысты. Сұраныс төрт күйдің (I, II, III, IV) бірін қабылдайды. Келесі матрицадағы α_{ik} $k-$ күйінде i – өнімді шығару кезінде табатын пайданы сипаттайды:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & III & IV \end{array} \\ \begin{array}{c} \grave{A} \\ \acute{A} \\ \hat{A} \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Сұраныстың кез келген күйінде пайданың орташа шамасын қамтамасыз ететіндей шығарылатын өнімнің тиімді пропорциясын анықтау керек. Сұраныс күйін толығымен анықталмаған деп есептеңіз.

25) Кәсіпорын тез бұзылатын өнім шығарады. Ол өнімдерді кәсіпорын бірден тұтынушыға (А стратегиясы), сақтау үшін қоймаға (Б стратегиясы) жіберуі мүмкін немесе ұзақ сақтау үшін қосымша өңдеуге (В стратегиясы) жіберуі мүмкін.

Тұтынушы бұл өнімді бірден алуы мүмкін (I стратегия), аз уақыт ішінде алуы мүмкін (II стратегия) немесе ұзақ уақыттан соң ғана сұраныс жасауы мүмкін (III стратегия).

Егер кәсіпорын А стратегиясын таңдаса, онда өнімді сақтауға және өңдеуге қосымша шығын қажет етілмейді. Алайда, егер тұтынушы II немесе III стратегияны таңдаса, онда кәсіпорын өнімнің қандай да бір бөлігінің бұзылу салдарынан шығынға ұшырайды. Керісінше, егер кәсіпорын В стратегиясын, ал тұтынушы I стратегияны таңдаса, онда кәсіпорын шығынға ұшырайды.

Келесі шығындар матрицасын ескере отырып, «минимакстік критерийін» (шығынның кепілденген орташа деңгейі) қолданып, тұтынушыға қоймаға жіберілетін және қосымша өңделуден өтетін өнімдердің тиімді қатынасын анықтау керек:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} I & II & III \end{array} \\ \begin{array}{c} \grave{A} \\ \acute{A} \\ \hat{A} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

26) Бөлмені жылыту үшін отын сатып алу керек. Алайда, отын шығыны және оның бағасы қысқы мезгілдегі ауа-райына тәуелді (жылы, қалыпты және өте суық қысқы ауа райы; келесі кестені қараңыз):

Ауа-райы	жылы	қалыпты	Өте суық
Шығын, т	5	10	18
Бағасы, тг/т	10	16	20

Қазіргі уақытта көмірді минимальды бағамен (10 тг/т) алып, қолданылмай артылған көмірді көктемде 5 тг/т сатуға болады. Көмірді сатып алу кезінде үш стратегияның біреуін таңдауға болады: A_1 -5 т, A_2 – 10 т және A_3 -18 т.

Мұндай ұқсас бөлмелер 100 деп болжағанда, «минимакстік критерийін» қолданып, қор жинаудағы оптималды стратегияны анықтау керек.

27) Дүкенге әртүрлі пропорциядағы үш типті (А, Б және В) тауарлар түсірілуі мүмкін. Оларды сату, яғни дүкенге түсетін пайда (α_{ik}) тауар түріне және сұраныс күйіне байланысты. Сұраныс күйі үш түрлі күймен сипатталуы мүмкіндігін және сұраныс сәннің өзгеруіне байланыстылығын және оны алдын ала жобалау мүмкін еместігін ескергенде, тауарларды сатып алуда тиімді пропорцияны анықтау керек. Тиімділікті анықтау

барысында келесі матрица кезіндегі орташа кепілденген пайда шарты қолданылады:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} I & II & III \end{array} \\ \begin{array}{c} \grave{A} \\ \acute{A} \\ \hat{A} \end{array} & \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 14 \\ 13 & 18 & 15 \end{pmatrix} \end{array}$$

28) Үш кәсіпорынның құрылысына бөлінген, жалпы сомасы 120 млн теңгені құрайтын капиталдық салымның тиімді үлестірілуін анықтау керек. Жылдың соңында капиталдың салымдағы әрбір млн теңгені қайтарып алу шамасы (млн теңге) тек кәсіпорынға ғана байланысты емес, сонымен қатар оған берілген жабдықтар шамасына да байланысты. Бұл тәуелділіктер келесі кестеде келтірілген:

Кәсіп-орын	Капитал-дық салымның мөлшері	Қайта-рып алу	Капитал-дық салымның мөлшері	Қайта-рып алу	Капитал-дық салымның мөлшері	Қайта-рып алу
I	15-ке дейін	1,5	15-30	0,5	30-дан жоғары	0
II	20-ға дейін	1,0	20-40	0,4	40-50	0,2
III	10-ға дейін	1,2	10-15	1,0	15-30	0,5

29) Егер зауыт өнімінің жалпы шығарылуы 150 бірлік болғанда, арақашықтығы 100 км болатын, екі шығын пункттерінің арасында салынған зауыттың орнын және әрбір пунктке жеткізілетін өнімнің шамасын анықтау керек.

Бірлік өнімнің сату бағасының, әрбір шығын пунктіне жеткізілетін өнімнің санына x_i ($i=1,2$) тәуелділігі және бірлік өнімді тасымалдауға кететін шығынның зауыт пен шығын пунктінің арақашықтығына y_i тәуелділігі келесі кестеде берілген:

Шығын пункті	Сату бағасы, теңге бірлік	Шығындар тг/бірлік
1	$15-0{,}1x_1$	$1{,}5+0{,}1y_2$
2	$12-0{,}08x_2$	$1{,}5+0{,}05y_2$

30) Өнім екі технологиялық режимде шығарылуы мүмкін. Режимдердің әрқайсысына кететін шығын сәйкесінше $21x_1^{4/3}$ және $4x_2^{3/2}$ тең, мұндағы x_1 және x_2 – 1 және 2-ші технологиялық режимдерде өңделетін өнімдердің көлемі. Сондай-ақ 2-ші технологиялық режим сыртқы шикізаттарды қолдануы мүмкін. Шикізатты тасымалдауға кететін қосымша шығындардың шамасы $400x_2^{1/2}$ тең. Шығарылатын өнімнің жалпы саны 100 бірлікті қамтамасыз ететін екі технологиялық режимді тиімді қолдануды анықтау керек.

3. СЫЗЫҚТЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ ЕСЕПТЕРІН ГРАФИКАЛЫҚ ӘДІСПЕН ШЫҒАРУ (N=2)

Сызықтық бағдарламалау есебінің математикалық моделі келесі түрде берілген болсын:

$$Z = p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \max$$
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le a_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le a_2$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \le a_3$$

Жазықтықта декарттық тікбұрыштық координаталар жүйесін енгізіп және әрбір сан жұбына (x_1, x_2) жазықтықта x_1 және x_2 координаталары бар нүктесін қатар қойып салыстырамыз. Ең алдымен берілген есептің мүмкін шешулеріне сәйкес келетін нүктелер жиынын көрейік. Ол үшін бірінші сызықтық теңсіздікті қарастырайық:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le a_1$$

Ол теңсіздік түзуі $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = a_1$ жазықтықты екіге бөлгеннен пайда болатын екі бөліктің біреуін анықтайды.

Мұндай кезде сәйкес жарты жазықтық құрамына осы түзуі де кіреді. Сондықтан ол – тұйық жартылай жазықтық болады.

Берілген теңсіздік екі тұйық жартылай жазықтықтың қайсысын анықтайтынын білу үшін теңсіздікке шекаралық түзуде жатпайтын қайсыбір нүктенің координаталарын салу жеткілікті. Көп жағдайларда координат жүйесінің бас нүктесін қойған ыңғайлы.

Егер алынған нүкте теңсіздікті қанағаттандырса, онда сол нүкте жақтан жартылай жазықтық іздегеніміз болады. Егер қанағаттандырмаса, керісінше болады. Тура солай берілген есептің барлық шектеулері бойынша тұйық жартылай жазықтықтарды сызамыз. Берілген есептің мүмкін шешу саласы геометриялық түрде жекеленген шектеулермен анықталатынын жартылай жазықтықтардың қиылысуы болады.

Сызықтық бағдарламалау есебінің мүмкін шешу саласы бос емес дейік. Координаталары мақсатты функцияны ең үлкен мәніне жеткізетін ғана мүмкін саланың нүктелері оптималды болады.

$p=(p_1,p_2)$ нормал векторын мақсатты функцияның сәйкес коэффициенттері бойынша тұрғызамыз. Ол нормал векторға мүмкін шешу саласында перпендикуляр жүргіземіз. Мақсатты функция максимумға ұмытылатын болса, онда перпендикулярға параллель деңгей түзулері вектор бағытымен жүргізіледі. Оның мүмкін шешу саласымен соңғы қиылысы оптималды нүктені беретінін көреміз. Егер мақсатты функция минимумға ұмытылатын болса, онда деңгей түзуін p нормал вектор бағытына қарсы жүргіземіз.

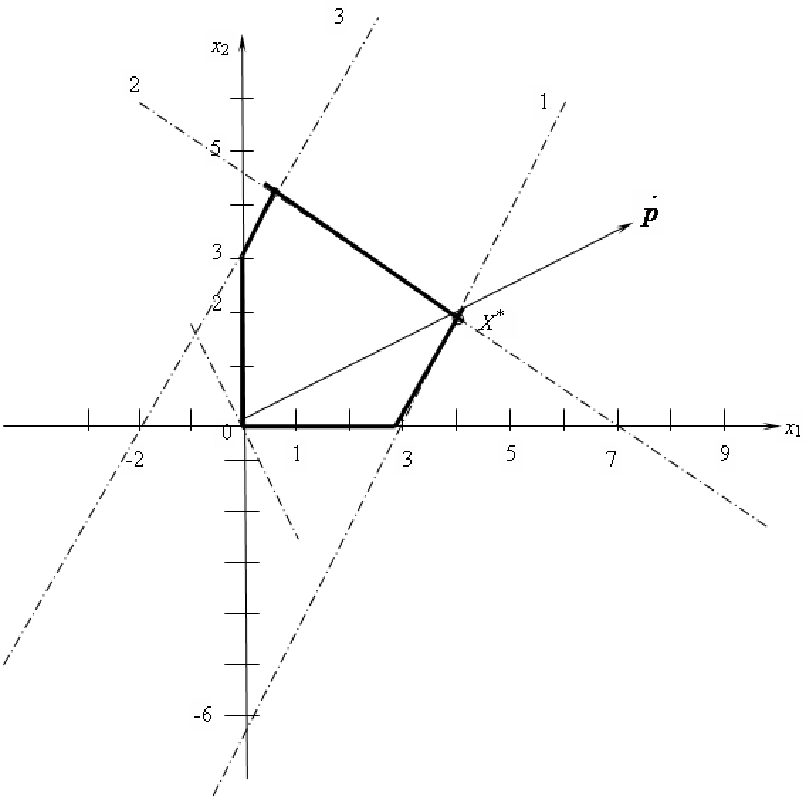
10- *мысал*

$$z=2x_1+x_2\to\max$$

$$\begin{cases}2x_1-x_2\le 6\\2x_1+3x_2\le 14\\-3x_1+2x_2\le 6\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Шешімі



3.1- сурет

Теңсіздіктер жүйесінің мүмкін шешулер жиынын және $\overline{p} = (2, 1)$ нормал векторын тұрғызайық (3.1-сурет). $\vec{p}$ векторына перпендикуляр координаталар басынан өтетін түзу деңгей түзуі болып табылады, ол $z = 0$ мәніне сәйкес келеді. Бұл түзуді мүмкін шешулер жиынымен ортақ нүктелері болғанға дейін $\vec{p}$ вектор бағытының бойымен өз-өзіне параллельді жылжыта отырып, шеткі мүмкін жағдайда деңгей түзуі $X^* = (4,\ 2)$ нүктесі арқылы өтетінін табамыз. Деңгей түзуінің бұл жағдайына $z = z_{max}$ сәйкес келеді. X^* нүкте координатасының нақты мәнін шекаралық түзулердің теңдеулер жүйесін шешу арқылы алуға болады.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 14 \end{aligned}\right\}.$$

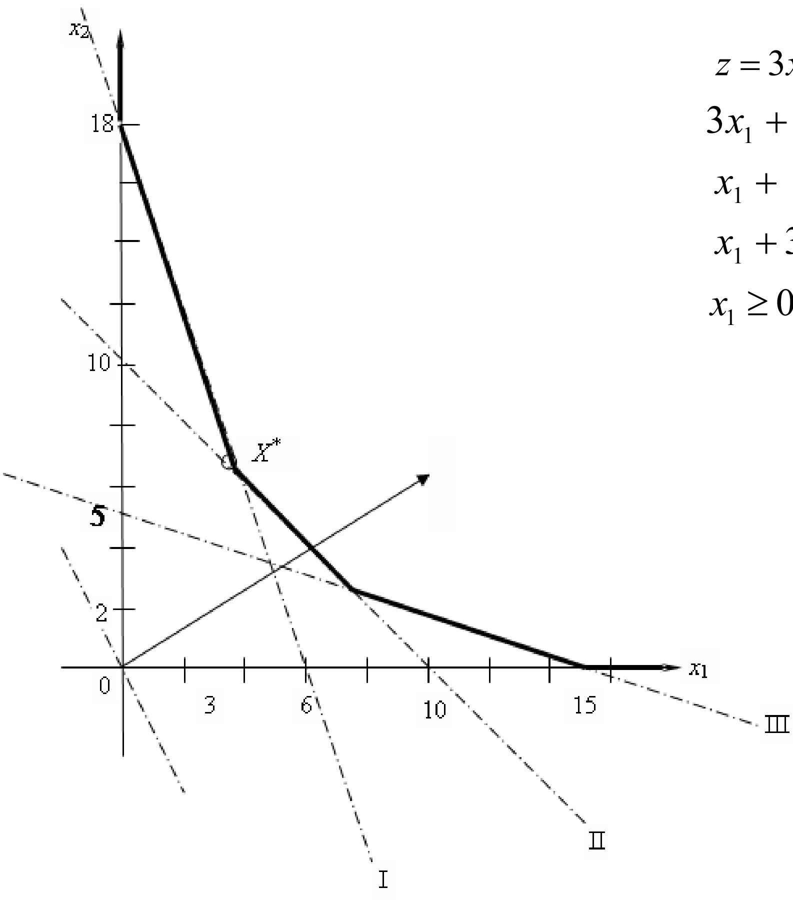
Нәтижесінде $X^* = (4,\ 2)$ аламыз. $x_1^* = 4$ және $x_2^* = 2$ мәндерін z функциясына қойып, $z_{max} = 10$ табамыз.

11- мысал

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 18 \\ x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 15 \end{aligned}\right\},$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$



3.2- сурет

Теңсіздіктер жүйесінің мүмкін шешулер саласын және $\vec{p} = (3,2)$ тұрғызайық (3.2- сурет). $\vec{p}$ векторына перпендикуляр координаталар басынан өтетін түзу деңгей түзуі болып табылады, ол $z = 0$ мәніне сәйкес келеді. Бұл түзуді өз-өзіне параллельді және $\vec{p}$ векторына қарама-қарсы бағытта жылжыта отырып, шеткі мүмкін жағдайда деңгей түзуі $X^* = (4, 6)$ нүктесі арқылы өтетінін табамыз. Деңгей түзуінің бұл жағдайына $z = z_{min}$ сәйкес келеді. X^* нүктесі координаталарының нақты мәнін шекаралық түзулердің теңдеулер жүйесін шешу арқылы алуға болады.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 18 \\ x_1 + x_2 &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

Нәтижесінде $X^* = (4, 6)$ аламыз. $x_1^* = 4$ және $x_2^* = 6$ мәндерін z функциясына қойып, $z_{min} = 24$ табамыз.

3-тапсырма. Келесі сызықтық бағдарламалау есептерін графикалық әдіспен шығару керек:

1) $z = x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 &\le 12 \\ 5x_1 + 4x_2 &\le 44 \\ 4x_1 - 5x_2 &\le 20 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

2) $z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 36 \\ 2x_1 - 3x_2 &\le 12 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

3) $z = x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ -x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 &\le 6 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

4) $z = 4x_1 + x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &\le 44 \\ 4x_1 - 3x_2 &\le 12 \\ -5x_1 + 4x_2 &\le 20 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

5) $z = x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ x_1 - 2x_2 &\le 4 \\ -x_1 + x_2 &\le 2 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

6) $z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$
$$,\ \left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 2 \\ -3x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 36 \end{aligned}\right\}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

7) $z = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_1 + x_2 &\le 9 \\ 3x_1 - x_2 &\le 15 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$;

8) $z = 3x_1 + x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 2 \\ 2x_1 + x_2 &\le 10 \\ -2x_1 + x_2 &\le 4 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

9) $z = x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 24 \\ 3x_1 - 4x_2 &\le 12 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

10) $z = x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 18 \\ 3x_1 - 5x_2 &\le 15 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

11) $z = 3x_1 + 5x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 27 \\ 3x_1 - 4x_2 &\le 12 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

12) $z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\ge -2 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 21 \\ 3x_1 - 5x_2 &\le 15 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

13) $z = 3x_1 + x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\le 6 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 24 \\ 4x_1 - 3x_2 &\ge -12 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

14) $z = 3x_1 + x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ -5x_1 + 3x_2 &\le 15 \\ x_1 - x_2 &\le 1 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

15) $z = 5x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\le 9 \\ 4x_1 - 3x_2 &\ge -12 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 27 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

16) $z = x_1 + x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &\le 12 \\ -x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 &\ge 16 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

17) $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\ge -2 \\ 5x_1 + 3x_2 &\le 15 \\ x_2 &\le 2{,}5 \\ x_1 - 2x_2 &\le 2 \\ 2x_1 - x_2 &\ge -2 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

18) $z = 4x_1 + 3x_2 \to \min$
$$\left.\begin{aligned} 10x_1 + 3x_2 &\ge 48 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 24 \\ 2x_1 + 5x_2 &\ge 30 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

19) $z = 5x_1 + 3x_2 \to \min$
$$\left.\begin{aligned} 11x_1 + 3x_2 &\ge 51 \\ x_1 + x_2 &\ge 9 \\ 5x_1 + 14x_2 &\ge 70 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

20) $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\ge 8 \\ x_1 + x_2 &\ge 6 \\ x_1 + 3x_2 &\ge 9 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

21) $z = 2x_1 + x_2 \to \min$
$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &\ge 18 \\ 3x_1 + 2x_2 &\ge 14 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 8 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

22) $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$
$$\left.\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &\ge 22 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 10 \\ 3x_1 + 12x_2 &\ge 36 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

23) $z = 4x_1 + 3x_2 \to \min$
$$\left.\begin{aligned} 8x_1 + 3x_2 &\ge 36 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 18 \\ x_1 + 3x_2 &\ge 12 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

24) $z = 3x_1 + 5x_2 \to \min$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 7 \\ x_1 + 3x_2 &\ge 13 \\ 3x_1 + x_2 &\ge 9 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

25) $z = -2x_1 + x_2 \to \min$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

26) $z = 4x_1 + 3x_2 \to \min$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + x_2 \ge 14 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 21 \\ 5x_1 + 13x_2 \ge 65 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

27) $z = 3x_1 + 5x_2 \to \min$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 10x_2 \ge 45 \\ x_1 + x_2 \ge 8 \\ 3x_1 + x_2 \ge 12 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

28) $z = 3x_1 + 4x_2 \to \min$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 \ge 24 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 18 \\ 3x_1 + 10x_2 \ge 48 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

29) $z = 3x_1 + 4x_2 \to \min$

$$\left.\begin{array}{r} 5x_1 + 2x_2 \ge 30 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 24 \\ 3x_1 + 10x_2 \ge 48 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

30) $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 4x_1 + x_2 \le 8 \\ 4x_1 - x_2 \le 8 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

31) $z = 2x_1 + 4x_2 \to \min;$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \ge 11 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 3x_2 \le 0 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

32) $z = x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

33) $z = -2x_1 + x_2 \to \min;$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 \ge 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

34) $z = x_1 + 2x_2 \to \min;$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

35) $z = x_1 + x_2 \to \max;$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

36) $z = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ -x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 2x_1 - x_2 \le 10 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

37) $z = -x_1 + x_2 \to \max;$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 \le 2 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ 5x_1 - 2x_2 \le 10 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

38) $z = 2x_1 + x_2 \to \min;$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 56 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 4 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

39) $z = 2x_1 - 3x_2 \to \max;$

$$\left.\begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - 4x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 5 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

40) $z = x_1 - 2x_2 \to \max;$
$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_1 - 4x_2 &\le 2 \\ x_1 - x_2 &\le 5 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

41) $z = 2x_1 + x_2 \to \min;$
$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 &\ge 12 \\ x_1 - 4x_2 &\le 4 \\ 6x_1 + 5x_2 &\le 30 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

42) $z = x_1 \to \max;$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 12 \\ 3x_1 - 8x_2 &\le 24 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

43) $z = 0{,}25x_1 + x_2 \to \max;$
$$\left.\begin{aligned} 0{,}5x_1 + x_2 &\le 1{,}75 \\ x_1 + 0{,}3x_2 &\le 1{,}5 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

44) $z = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\ge 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 36 \\ x_2 &\le 13 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

45) $z = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 &\le 1 \\ x_1 - x_2 &\ge -1 \\ 2x_1 + x_2 &\ge 1 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

46) $z = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ -5x_1 + 3x_2 &\le 15 \\ 4x_1 + 6x_2 &\ge 24 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

47) $z = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &\le 12 \\ -x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 &\ge 16 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

48) $z = x_1 - 4x_2 \to \min;$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\ge 1 \\ x_1 - x_2 &\ge -2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 - x_2 &\le 3 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

49) $z = 2x_1 - x_2 \to \min$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_1 - 2x_2 &\le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 16 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

50) $z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 18 \\ -x_1 + 3x_2 &\le 10 \\ 2x_1 - x_2 &\le 10 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

51) $z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\ge 10 \\ 4x_1 - 3x_2 &\le 12 \\ 7x_1 + 4x_2 &\le 28 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

52) $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$
$$\left.\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &\ge 22 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 10 \\ 3x_1 + 12x_2 &\ge 36 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

53) $z = 3x_1 - 4x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 6x_2 &\le 36 \\ 4x_1 + 8x_2 &\le 32 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

54) $z = x_1 - 3x_2 \to \max$
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\le 3 \\ -5x_1 - 4x_2 &\le -9 \\ 2x_1 + x_2 &\le -5 \end{aligned}\right\},$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

55) $z = -3x_1 + 12x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 \le 16 \\ x_1 - x_2 \ge 2 \\ 3x_1 - 5x_2 \le 8 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

56) $z = x_1 + x_2 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \ge 1 \\ -x_1 + x_2 \ge 2 \\ -x_1 + x_2 \ge -3 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

57) $z = -3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 + 4x_2 \le 16 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

58) $z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

59) $z = -3x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 \ge 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

60) $z = 0{,}5x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ 0{,}5x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_2 \ge 1 \end{array}\right\},$$

1. Шешуші баған ретінде кестенің оң коэффициенті бар бағанын таңдаймыз.

2. Шешуші жолды таңдау:

Оң мағыналы бос мүшелердің шешуші бағанның коэффициенттеріне оң қатынастарын есептейміз. Арасынан ең кішісін таңдаймыз. Сөйтіп, шешуші элементті табамыз. Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

4-қадам. Тіректі шешімді табу.

Тіректі шешімнің табылып тұрғанын немесе табу керектігін бос мүшелер таңбалары бойынша тексереміз. Егер барлық бос мүшелер оң мағыналы болса, онда (4.1) – (4.3) есебінің тіректі шешімі бар деп есептейміз және 5– қадамға көшеміз.

Егер бос мүшелер арасында теріс мағыналы мүшелер болса, онда тіректі шешімді табатын шешуші элементті таңдаудың келесі ережелерін қолданамыз:

1. Теріс мағыналы бос мүшесі бар жолды қарастырамыз. Егер осы жол коэффициенттерінің арасында теріс мағыналы коэффициенттер болмаса, онда (4.1) – (4.3) есебінің мүмкін шешу саласы бос болады.

2. Осы жол коэффициенттерінің арасында теріс мағыналы коэффициенттер бар болса, арасынан біреуін таңдаймыз, сол коэффициенті бар баған шешуші баған болады.

3. Шешуші жолды таңдау: бос мүшелердің шешуші баған коэффициенттеріне оң мағыналы қатынастарын есептейміз де, арасынан ең кішісін таңдаймыз. Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

5-қадам. Оптималды шешімді табу.

Оптималды шешімнің табылып тұрғанын немесе табу керектігін z-ші жол коэффициенттерінің таңбалары бойынша тексереміз. Егер z-ші жолдың барлық коэффициенттері оң мағыналы болса, онда (4.1) – (4.3) есебінің оптималды шешімі табылады.

Егер z жолдың коэффициенттерінің арасында теріс мағыналы коэффициенттер болса, онда оптималды шешімді табатын шешуші элементті таңдаудың келесі ережелерін қолданамыз:

1. Теріс мағыналы коэффициенті бар баған шешуші баған ретінде қарастырылады (егер z-жолда теріс мағыналы коэффициенттер көп болса, онда арасынан абсолюттік шамада ең үлкенін аламыз).

2. Осы бағанның барлық оң мағыналы коэффициенттерін қарастырамыз. Сәйкес бос мүшелерді оларға бөлеміз де, арасынан ең кішісін таңдаймыз. Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

12- мысал

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 \geq -5 \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \leq 4 \\ x_1 + \ \ x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 .$$

Берілген математикалық модельді стандартты түрге келтіреміз.

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + 5 \geq 0 \\ 6x_1 - 7x_2 + 9x_3 + 4 \geq 0 \\ -x_1 - \ \ x_2 - 4x_3 + 10 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 .$$

Шешімі.

1-қадам. Симплекс-кесте стандартты түрге келтірілген математикалық модельмен толтырылады.

4.1-кесте

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	–1	–1	1	5
y_2	–6	7	–9	4
0	$\boxed{1}$	1	4	10
z	–2	–3	–5	0

2-қадам. Еркін айнымалыларды шығарып тастау. Барлық айнымалылар еркін емес болғандықтан үшінші қадамға көшеміз.

3-қадам. Нөлінші жолдарды шығарып тастау. Нөлінші жолда оң мағыналы коэффициенттер бірнеше, арасынан біреуін таңдаймыз. Мысалы бірінші баған, оны шешуші ретінде аламыз.

Шешуші жолды таңдау: $\min\left\{\frac{10}{1}\right\} = 10$.

Түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамынан соң келесі кестені аламыз

4.2 -кесте

	0	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	1	0	5	15
y_2	6	13	15	64
x_1	1	1	4	10
z	2	–1	3	20

,

4-қадам. Тіректі шешімді табу.

Барлық бос мүшелер оң мағыналы болғандықтан тіректі шешім бар. Есептің тіректі шешімі:

$x_2 = x_3 = 0 \quad x_1 = 10 \quad y_1 = 15 \quad y_2 = 64 \quad z_Ò = 20$

4.3-кесте

	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	0	5	15
y_2	13	15	64
x_1	1	4	10
z	–1	3	20

,

5-қадам. Оптималды шешімді табу. z-жолдың теріс коэффициент тұрған бірінші бағанды шешуші ретінде аламыз.

Шешуші жолды таңдау $\min\left\{\frac{56}{13}, \frac{10}{1}\right\} = \frac{56}{13}$

4.4-кесте

	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	0	5	15
y_2	$\boxed{13}$	15	64
x_1	1	4	10
z	–1	3	20

,

Түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамынан соң келесі кестені аламыз

4.5-кесте

	$-y_2$	$-x_3$	1
y_1	0	65	195
x_2	1	15	64
x_1	–1	37	66
z	1	54	324

/13 ,

4.6-кесте

	$-y_2$	$-x_3$	1
y_1	0	5	15
x_2	1/13	15/13	64/13
x_1	–1/13	37/13	66/13
z	1/13	54/13	324/13

,

z-жолда теріс коэффициент болмағандықтан оптималды шешім табылды: $Z^* = \frac{324}{13}, \quad X^* = \left(\frac{66}{13}, \frac{64}{13}, 0\right)$

13- мысал

$$z = -2x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Берілген математикалық модельді стандартты түрге келтіреміз.

$$z' = 2x_1 - x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 12 \ge 0 \\ x_1 - 2x_2 + 8 \ge 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Шешімі.

1. Симплекс-кестені толтырайық

4.7-кесте

	$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	3	–2	12
y_2	–1	2	8
y_3	–2	–3	–6
Z'	–2	1	0

2. Еркін айнымалыларды шығарып тастау. Барлық айнымалылар еркін емес болғандықтан үшінші қадамға көшеміз.

3. Нөлінші жолдарды шығарып тастау. Нөлінші жол болмағандықтан төртінші қадамға көшеміз.

4. Тіректі шешімді табу.

4.8-кесте

	$-x_1$	$-x_2$	1	
y_1	3	–2	12	
y_2	–1	2	8	
y_3	$\boxed{-2}$	–3	–6	←
Z'	–2	1	0	
	↑			

Теріс мағыналы бос мүше тұрған үшінші жолдағы коэффициенттер арасынан теріс мағыналы коэффициенттер тұрған баған шешуші болады. Мысалы, бірінші баған. Шешуші жолды таңдау:

$$\min\left\{\frac{12}{3};\frac{-6}{-2}\right\}=\frac{-6}{-2}$$

Түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамынан соң келесі кестені аламыз:

4.9-кесте

	$-y_3$	$-x_2$	1	
y_1	–3	13	–6	
y_2	1	–7	–22	/(–2)
x_1	1	–3	–6	
Z'	2	–8	–12	

4.10-кесте

	$-y_3$	$-x_2$	1
y_1	3/2	–13/2	3
y_2	–1/2	7/2	11
x_1	–1/2	3/2	3
Z'	–1	4	6

Кестедегі барлық бос мүшелер оң болғандықтан, тіректі шешім табылды.

$x_1 = 3, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 11, \quad y_3 = 0 \qquad z_{\grave{O}} = 6.$

5. Оптималды шешімді табу. Z-жолдың бірінші коэффициенті теріс болғандықтан шешуші ретінде аламыз. Шешуші жолды таңдау: $\min\left\{\frac{3}{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{3}{\frac{3}{2}}$

4.11-кесте

	$-y_3$	$-x_2$	1	
y_1	$\boxed{3/2}$	–13/2	3	←
y_2	–1/2	7/2	11	
x_1	–1/2	3/2	3	
Z'	–1	4	6	
	↑			

Түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамынан соң келесі кестені аламыз:

4.12-кесте

	$-y_1$	$-x_2$	1	
y_3	1	–13/2	3	
y_2	1/2	2	18	$/\frac{3}{2}$
x_1	1/2	–1	6	
Z'	1	–1/2	12	

4.13-кесте

	$-y_1$	$-x_2$	1	
y_3	2/3	–13/3	2	
y_2	1/3	4/3	12	←
x_1	1/3	–2/3	4	
Z'	2/3	–1/3	8	
		↑		

Z-жолда теріс коэффициент болғандықтан оптималды шешімді табуды жалғастырамыз. Екінші бағанды шешуші ретінде аламыз. Шешуші жолды таңдау:

$$\min\left\{\frac{12}{\frac{4}{3}}\right\} = \frac{12}{\frac{4}{3}}$$

4.14-кесте

	$-y_1$	$-x_2$	1	
y_3	2/3	–13/3	2	
y_2	1/3	$\boxed{4/3}$	12	←
x_1	1/3	–2/3	4	
Z'	2/3	–1/3	8	
		↑		

Түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамынан соң келесі кестені аламыз

4.15-кесте

	$-y_1$	$-y_2$	1	
y_3		13/3	164/3	
x_2	1/3	1	12	$/\frac{4}{3}$
x_1		2/3	40/3	
Z'	1	1/3	44/3	

4.16-кесте

	$-y_1$	$-y_2$	1
y_3			82
x_2			9
x_1			10
Z'	3/4	1/4	11

Z - жолда теріс коэффициент болмағандықтан оптималды шешім табылды:

$$X^* = (10;\,9) \qquad Z'_{\max} = 11$$

$$Z^*_{\min} = -11$$

4 - тапсырма. Келесі сызықтық бағдарламалау есептерін тіке симплекс әдісімен шығару керек:

1)
$$z=\frac{1}{2}x_1+x_2 \to \max$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1+\ \ x_2 &\le 9 \\ 3x_1-2x_2 &\le 12 \\ -x_1+2x_2 &\le 8 \\ 2x_1+3x_2 &\ge 6 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0;$$

2)
$$z=4x_1+6x_2 \to \min$$
$$\left.\begin{aligned} -2x_1+3x_2 &= 3 \\ 4x_1+5x_2 &\ge 10 \\ 4x_1+8x_2 &\ge 5 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0;$$

3)
$$z=10x_1+x_2 \to \max$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1+11x_2 &\le 33 \\ x_1+x_2 &= 7 \\ 4x_1-5x_2 &\ge 5 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0;$$

4)
$$z=x_1-4x_2+5x_3 \to \max$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3 &= 4 \\ x_1-x_2-x_3 &\le 2 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0;$$

5)
$$z=x_1+x_2 \to \max$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3 &= 16 \\ x_1-x_2 &\le 2 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0;$$

6)
$$z=-3x_1-4x_2 \to \max$$
$$\left.\begin{aligned} 6x_1+6x_2+x_3 &= 36 \\ 4x_1+8x_2+x_4 &= 32 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,$$
$$x_3\ge 0,\ x_4\ge 0$$

7)
$$z=x_1+5x_2+3x_3 \to \max$$
$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &= 3 \\ 2x_1-\ \ x_2 \qquad &= 4 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0;$$

8)
$$z=4x_1-8x_2+3x_3 \to \max$$
$$\left.\begin{aligned} x_1+\ \ x_2+x_3 &= 7 \\ 2x_1-5x_2+x_3 &\ge 10 \end{aligned}\right\},$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0;$$

9) $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 10 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

10) $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 10 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

11) $z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 10 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

12) $z = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

13) $z = -2x_1 - x_2 + x_3 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 12 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 18 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

14) $z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 16 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

15) $z = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 18 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

16) $z = x_1 + 4x_2 - 10x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 = 54 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

17) $z = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \le 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \ge 15 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 \le 17 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

18) $z = 2x_1 - x_2 - x_4 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 \ge 18 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \ge 36 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right);$

19) $z=2x_1+4x_2+4x_3-3x_4 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 4 \\ x_1+4x_2+x_4 &= 8 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,4}\right);$

20) $z=-x_1+4x_2+2x_4-x_5 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} x_1-5x_2+x_3 &= 5 \\ -x_1+x_2+x_4 &= 4 \\ x_1+x_2+x_5 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,5}\right)$

21) $z=4x_1+3x_2+6x_3+7x_4 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3+x_4 &\le 280 \\ x_1+x_3+x_4 &\le 80 \\ x_1+2x_2+x_3 &\le 250 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,4}\right)$

22) $z=2x_1-x_2+3x_3-2x_4+x_5 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} -x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1-x_2+x_4 &= 1 \\ x_1+x_2+x_5 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,5}\right);$

23) $z=3x_1-6x_2-2x_3+4x_4 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} x_1+7x_2+3x_3+7x_4 &\le 46 \\ 3x_1-x_2+x_3+2x_4 &\le 8 \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4 &\le 10 \end{aligned}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,4}\right);$

24) $z=-2x_1+3x_2-6x_3-x_4 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-2x_3+x_4 &= 24 \\ x_1+2x_2+4x_3 &\le 22 \\ x_1-x_2+2x_3 &\ge 10 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,4}\right);$

25) $z=x_1+2x_2-x_3+x_4 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+x_4 &= 4 \\ x_1+x_2+x_3 &= 8 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,4}\right);$

26) $z=2x_1+x_2-3x_3+5x_4 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} x_1+7x_2+3x_3+7x_4 &\le 46 \\ 3x_1-x_2+x_3+2x_4 &\le 8 \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4 &\le 10 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,4}\right);$

27) $z = -5x_1 + x_2 - x_3 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 &= 7 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right)$

28) $z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right)$;

29) $z = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 8 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right)$

30) $z = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\le 20 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\ge 10 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 24 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right)$;

33) $z = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &\le 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &\ge 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\le 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 15 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right)$

34) $z = -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &\le 12 \\ x_1 + x_4 &\le 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 &\le 20 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 &\le 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &\le 24 \end{aligned}\right\}$$

$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right)$.

35) $z = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 &= 12 \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 &= 12 \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 &= 25 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,6}\right)$

36) $z = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 28 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 &= 30 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 &= 32 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,6}\right)$

4. ТІКЕ СИМПЛЕКС ӘДІСІ

Сызықтық бағдарламалау есептерінің математикалық моделі келесі түрде берілсін:

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + ... + p_nx_n \to \max \quad (4.1)$$

$$a_{i_1}x_1 - a_{i_2}x_2 - ...a_{i_n}x_n + a_i \geq 0, i = \overline{1,m} \quad (4.2)$$

$$x_i \geq 0, j = \overline{1,n} \quad (4.3)$$

Тіке симплекс әдісінде түрлендірілген жордан шығарулары қолданылады.

a_{rs} - ші шешуші элементі бар түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамы алғашқы кестені жаңа кестеге келесі бес ереже бойынша аударады:

1. Шешуші элемент бірлікке ауыстырылады.
2. Шешуші жолдың қалған элементтері сол күйінде қалады.
3. Шешуші бағанның қалған элементтері таңбасын ауыстырады.
4. Жаңа элементтер келесі өрнек бойынша табылады (төртбұрыш ережесі):

$$a'_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}$$

5. Жаңа кестенің барлық элементтері шешуші элементке бөлінеді.

Тіке симплекс әдісінің алгоритмі 5 қадамнан тұрады.

1-қадам. Симплекс кестені толтыру.

2-қадам. Еркін айнымалыларды шығарып тастау.

Еркін (бос) айнымалы деп белгілеріне (таңбаларына) шек қойылмаған тәуелсіз айнымалыны айтады.

Барлық айнымалылар еркін болсын дейік. Онда түрлендірілген жордан шығаруларын n рет қолданып, әрбір x_j үшін сәйкесті өрнекті жазып, кестеден шығарып тастаймыз.

3-қадам. Нөлінші жолды шығарып тастау.

Шешуші элементті таңдаудың ережелері:

37) $z = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$

38) $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}5x_1 - 2{,}375x_2 + 4x_3 + 1{,}5x_4 + 0{,}75x_5 + x_6 \ge 12 \\ 2{,}5x_1 - 0{,}125x_2 + 2x_3 + \quad 2{,}25x_5 + 3x_6 \ge 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + \quad 4x_4 - 2x_5 + 8x_6 \ge 32 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$

39) $z = 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 - 2x_6 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 \le 36 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 24 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + \quad 3x_5 - x_6 \ge 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \ge 12 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$

40) $z = 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 + 5x_6 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 48 \\ -3x_1 + 4x_3 + 4x_5 + 3x_6 \le 36 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 4x_6 \ge 20 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \ge 30 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$

5. СЫЗЫҚТЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУДЫҢ ҚОС МАҒЫНАЛЫЛЫҚ ТЕОРИЯСЫ

5.1 Қос мағыналы есептер

Тіке есеп	*Қос мағыналы есеп*
$z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n \to \max$	$\omega = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_m u_m \to \min$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le a_i,\ i = \overline{1,k}$	$u_i \ge 0, i = \overline{1,k}$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = a_i,\ i = \overline{(k+1),m}$	$u_i \le 0, i = (k\overline{+1}),m$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,l}$	$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + ... + a_{mj}u_n \ge p_j, i = \overline{1,l}$
$x_j \le 0,\ j = \overline{(l+1),n}$	$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + ... + a_{mj}u_n = p_j, i = (l\overline{+1}),n$

Қос мағыналы есеп тіке есептен төменде келтірілген ережелер бойынша табылады:

1) Тіке есептің шектеу жүйелерінің бос мүшелері қос мағыналы есептің мақсатты функциясының коэффициенттері болып саналады. Ал тіке есептің мақсатты функциясының коэффициенттері қос мағыналы есептің шектеулер жүйесінің бос мүшелері болып саналады.

2) Тіке есептің әрбір шектеу–теңсіздігіне қос мағыналы есептің қайшы белгімен алынған еркін емес айнымалылары сәйкес келеді.

3) Тіке есептің әрбір шектеу–теңдіктеріне қос мағыналы есептің еркін айнымалылары сәйкес келеді.

4) Тіке есептің әрбір еркін емес айнымалысына қос мағыналы есептің шектеу–теңсіздіктері сәйкес келеді (теңсіздік өз белгісі бойынша).

5) Тіке есептің әрбір еркін айнымалысына қос мағыналы есептің шектеу–теңдіктері сәйкес келеді.

6) Тіке есептің мақсатты функциясының максимальдануы қос мағыналы есепте мақсатты функциясын минимальдануымен ауыстырылады.

7) Тіке есептің шектеулер коэффициенттерінің матрицасы қос мағыналы есепте келтірілген (транспонирленген) A^T матрицасымен ауыстырылады.

14- мысал

Тіке есеп	Қос мағыналы есеп
$z = 20x_1 - 5x_2 - 24x_3 - 20x_4 \to \max$	$\omega = 6u_1 + 10u_2 + 6u_3 + 9u_4 \to \min$
$25x_1 - 15x_2 + 14x_3 \leq 6,$	$25u_1 + 6u_2 + 5u_3 - 6u_4 \geq 20,$
$6x_1 - 3x_2 + x_3 - 12x_4 \leq 10,$	$-15u_1 - 3u_2 + 16u_3 + 8u_4 \geq -5,$
$5x_1 + 16x_2 + x_3 - 3x_4 = 6,$	$14u_1 + u_2 + u_3 - u_4 \geq 24,$
$-6x_1 + 8x_2 - x_3 - 16x_4 = 9,$	$-12u_2 - 3u_3 - 16u_4 \geq -20,$
$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$	$u_i \geq 0, i = \overline{1,4}$

5.2. Қос мағыналы симплекс әдісі

Сызықтық бағдарламалау есептерінің математикалық моделі келесі түрде берілсін:

$$Z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + ... + p_n x_n \to \max \tag{5.1}$$

$$a_{i_1} x_1 - a_{i_2} x_2 - ... a_{i_n} x_n + a_i \geq 0, i = \overline{1, m} \tag{5.2}$$

$$x_i \geq 0, j = \overline{1, n} \tag{5.3}$$

Симплекс әдістерінің есептеу схемасының негізін түрлендірілген жордан шығарулары құрайды.

a_{rs} - ші шешуші элементі бар түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамы алғашқы кестені жаңа кестеге келесі бес ереже бойынша аударады:

1. Шешуші элемент бірлікке ауыстырылады.
2. Шешуші жолдың қалған элементтері сол күйінде қалады.
3. Шешуші бағанның қалған элементтері таңбасын ауыстырады.
4. Жаңа элементтер келесі өрнек бойынша табылады (төртбұрыш ережесі).

$$a_{ij}^{/} = a_{ij} a_{rs} - a_{is} a_{rj}$$

5. Жаңа кестенің барлық элементтері шешуші элементіне бөлінеді.

Қос мағыналы симплекс әдісінің алгоритмі:

1-қадам. Симплекс кестені толтыру.

2-қадам. Еркін айнымалыларды шығарып тастау.

Мысалы, барлық айнымалылар еркін болсын, онда түрлендірілген жордан шығаруларын n-рет қолданып, барлық x_j үшін сәйкес өрнегін жазып, оларды кестеден шығарып тастаймыз.

3-қадам. Нөлдік жолдарды шығарып тастау.

Шешуші элементті таңдаудың ережелері:

1. Шешуші баған ретінде кестенің оң коэффициенті бар бағанын таңдаймыз.

2. Шешуші жолды таңдау: оң мағыналы бос мүшелердің шешуші бағанның коэффициенттеріне қатынасы есептеледі. Сөйтіп шешуші элемент табылады. Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

4-қадам. Оптималды шешімді табу.

Шешуші элементті табу ережелері:

1. Егер z-ші жолдың коэффициенттері оң мағыналы болса, онда есептің оптималды шешімі бар.

2. Егер z-ші жолдың коэффициенттерінің арасында теріс мағыналы коэффициенттер ($q_s < 0$) болса, онда s-ші баған коэффициенттерінің арасында оң мағыналы коэффициент таңдалынады. Сол коэффициенті бар жол шешуші жол болып саналады.

3. z-ші жол коэффициенттерінің шешуші жолдың коэффициенттеріне теріс мағыналы қатынастары есептелінеді де, арасынан ең үлкені алынады (абсолюттік шамада ең кішісі). Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

5-қадам. Тіректі және оптималды шешімді табу.

Шешуші элементті табу ережелері:

1. Егер бос мүшелер оң болса, онда есептің тіректі және оптималды шешімі табылады.

2. Егер бос мүшелер арасында теріс мағыналы мүшелер болса, онда теріс мүшесі бар жол шешуші жол болып саналады. Шешуші жол коэффициенттерінің арасында теріс коэффициенттер таңдалады. Оларға z-ші жолдың сәйкес коэффициенттері бөлініп, арасынан ең үлкені таңдалады (абсолюттік шамада ең кішісі). Түрлендірілген жордан шығаруларын бір рет қолданамыз.

15- мысал

$$z = 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 \to \max \qquad\qquad z = 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 1 \\ x_1 - x_3 \leq 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x_2 + 2x_3 - 10 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 - 1 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 1 \geq 0 \\ -x_1 + x_3 + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \qquad\qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Шешімі.

1. Симплекс-кестені толтырайық

5.1-кесте

		v_1	v_2	v_3	ω
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
u_1	y_1	0	–1	–2	–10
u_2	y_2	1	–1	0	–1
u_3	y_3	–1	–1	4	1
u_4	y_4	1	0	–1	1
1	z	–4	5	4	0

2. Еркін айнымалыларды шығарып тастау. Барлық айнымалылар еркін емес болғандықтан үшінші қадамға көшеміз.

3. Нөлінші жолдарды шығарып тастау. Нөлінші жол болмағандықтан төртінші қадамға көшеміз.

4. Оптималды шешімді табу. z-жолдың теріс коэффициентінің арасында оң мағыналы коэффициент тұрған екінші жолды шешуші ретінде аламыз. Шешуші бағанды таңдау:

$$\max\left\{\frac{-4}{1}; \frac{5}{-1}\right\} = -\frac{4}{1}$$

5.2-кесте

		v_1	v_2	v_3	ω	
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1	
u_1	y_1	0	–1	–2	–10	
u_2	y_2	$\boxed{1}$	–1	0	–1	←
u_3	y_3	–1	–1	4	1	.
u_4	y_4	1	0	–1	1	
1	z	–4	5	4	0	

Түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамынан соң келесі кестені аламыз:

5.3-кесте

		u_2	v_2	v_3	ω	
		$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	1	
u_1	y_1	0	$\boxed{-1}$	–2	–10	←
v_1	x_1	1	–1	0	–1	
u_3	y_3	1	–2	4	0	
u_4	y_4	–1	1	–1	2	
1	z	4	1	4	–4	
			↑			

5**.** Тіректі шешімді табу.

Бос мүшелер арасынан теріс коэффициенті бар бірінші жолды шешуші ретінде аламыз. Шешуші бағанды таңдау:

$\max\left\{\frac{1}{-1};\frac{4}{-2}\right\}=-\frac{1}{1}$. Түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамынан соң келесі кестені аламыз:

5.4-кете

		u_2	u_1	v_3	ω	
		$-y_2$	$-y_1$	$-x_3$	1	
v_2	x_2	0	1	–2	–10	
v_1	x_1	–1	1	–2	–9	/(–1)
u_3	y_3	–1	2	–8	–20	
u_4	y_4	1	–1	3	8	
1	z	–4	–1	–2	14	
		u_2	u_1	v_3	ω	

Бос мүшелердің арасында теріс мағыналы коэффициент болғандықтан тіректі шешімді табуды жалғастырамыз:

5.5-кесте

		$-y_2$	$-y_1$	$-x_3$	1	
v_2	x_2	0	–1	2	10	
v_1	x_1	1	–1	2	9	
u_3	y_3	1	–2	8	20	
u_4	y_4	–1	1	$\boxed{-3}$	–8	←
1	z	4	1	2	–14	
				↑		

$$\max\left\{\frac{4}{-1};\frac{2}{-3}\right\}=-\frac{2}{3}$$

Түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамынан соң келесі кестені аламыз:

5.6-кесте

		u_2	u_1	u_4	ω	
		$-y_2$	$-y_1$	$-y_4$	1	
v_2	x_2	2	1	–2	–14	
v_1	x_1	–1	1	–2	–11	/(–3)
u_3	y_3	5	–2	–8	4	
v_3	x_3	–1	1	1	–8	
1	z	–10	–5	–2	58	

Бос мүшелер арасынан теріс коэффициент болғандықтан тіректі шешімді табуды жалғастырамыз:

$$\max\left\{\frac{\frac{10}{3}}{-\frac{5}{3}}\right\}=\max\{-2\}$$

5.7-кесте

		u_2	u_1	u_4	ω	
		$-y_2$	$-y_1$	$-y_4$	1	
v_2	x_2	–2/3	–1/3	2/3	14/3	
v_1	x_1	1/3	–1/3	2/3	11/3	
u_3	y_3	$\boxed{-5/3}$	2/3	8/3	–4/3	←
v_3	x_3	1/3	–1/3	–1/3	8/3	
1	z	10/3	5/3	2/3	–58/3	
		↑				

Түрлендірілген жордан шығаруларының бір қадамынан соң келесі кестені аламыз:

5.8-кесте

		u_3	u_1	u_4	ω
		$-y_3$	$-y_1$	$-y_4$	1
v_2	x_2	2/3			–26/3
v_1	x_1	–1/3			–17/3
u_2	y_2	1	2/3	8/3	–4/3
v_3	x_3	–1/3			–4
1	z	–10/3	–45/9	–10	110/3

$\Big/ \left(-\frac{5}{3}\right)$

5.9-кесте

		u_3	u_1	u_4	ω
		$-y_3$	– y_1	$-y_4$	1
v_2	x_2				26/5
v_1	x_1				17/5
u_2	y_2				4/5
v_3	x_3				12/5
1	z	2	9	6	–22

,

$$U^* = (9, 0, 2, 6)$$

$$X^* = \left(\frac{17}{5}, \frac{26}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$$\max Z = \min \omega$$

$$Z^* = -22, \quad \omega^* = -22$$

5-тапсырма. Келесі сызықтық бағдарламалау есептерін қос мағыналы симплекс әдісімен шығару керек:

1) $z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ 3x_1 - x_2 &\le 6 \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

2) $z = 2x_1 + x_2 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\ge 1 \\ -x_1 + 3x_2 &\ge 5 \end{aligned}\right\} x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

3) $z = 2x_1 + x_2 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ x_1 + x_2 &\ge 5 \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 > 0$ немесе $x_2 < 0$

4) $z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_1 + x_2 &\le 9 \\ 3x_1 - x_2 &\le 15 \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

5) $z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_1 - 4x_2 &\le 2 \\ x_1 - x_2 &\le 5 \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

6) $z = 2x_1 + x_2 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 &\le 12 \\ x_1 - 4x_2 &\le 4 \\ 6x_1 + 5x_2 &\ge 30 \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 > 0$ немесе $x_2 < 0$

7) $z = x_1 + x_2 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 1 \\ -x_1 + x_2 &\ge 2 \\ -x_1 + x_2 &\ge -3 \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

8) $z = 4x_1 - 4x_2 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 8 &\ge 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 10 &\ge 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 12 &\ge 0 \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

9) $z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \qquad\ \le 3 \\ 2x_1 + \ x_2 \le 10 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

10) $z = x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 \qquad \ge 10 \\ -2x_1 + \ x_2 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 \ge 12 \\ x_2 \ge 2 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

11) $z = -2x_2 - 4x_3 + 2x_5 \to \max$

$$\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 10x_5 + x_6 = \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 + \ 2x_5 \qquad = \\ \qquad 2x_2 + \ x_3 + x_4 - \ 8x_5 - x_6 = \end{array}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$

12) $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \qquad\qquad = 10 \\ x_1 \qquad + \ x_3 + x_4 \qquad = 7 \\ -3x_1 \qquad - 2x_3 \qquad + x_5 = 4 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right)$

13) $z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 + \ x_3 \ge 5 \\ x_1 + \ x_2 + 2x_3 \ge 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - \ x_3 \ge 2 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

14) $z = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 - \ x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

15) $z = 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$

16) $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - \ x_2 - 2x_3 + \ x_4 \ge 6 \\ -x_1 \qquad + \ x_3 \qquad \le 2 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \le 8 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$

17) $z = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$

18) $z = x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_4 = 12 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$

19) $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 -$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right)$

20) $z = x_1 - 2x_2 + 5x_3 + \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 20 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \geq 19 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$

21) $z = 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 18 \\ 4x_1 - 5x_3 \leq 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 14 \end{array}\right\}$$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0$

22) $z = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16 \\ 6x_1 + 5x_2 - 8x_3 \leq 12 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$

23) $z = -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 12 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$

24) $z = -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 8 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 7 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$

25) $z = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 17 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$

26) $z = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$

27) $z = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4$

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{array}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$

28) $z = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0$

29) $z = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12 \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24 \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 15 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0$

30) $z = x_1 + 3x_2 - 5x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \le 30 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \le 32 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

31) $z = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28 \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24 \end{array}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$

32) $z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right)$

33) $z = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18 \\ -2x_2 + 3x_2 + x_4 \ge 24 \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \ge 12 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right)$

34) $z = 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \ge 12 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_6 = 30 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \ge 16 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right)$

35) $z = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 18 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 24 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 30 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$

36) $z = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18 \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$

37) $z = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$

38) $z = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} 1,5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 18 \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \ge 24 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$

39) $z = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to m$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 27 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \ge 24 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$

40) $z = x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$

41) $z = -x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9x_4 - 8x_5 + 3$

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \ge \end{array}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$

42) $z = 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$

43) $z = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 2x_5 + x_6 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ 3x_1 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 = 7 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 5 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$

44) $z = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 2x_5 + x_6 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ 3x_1 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 = 7 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 5 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right)$

45) $z = 2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_5 = -10 \end{array}\right\}$$

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right)$

6. ТРАНСПОРТ ЕСЕБІ. ПОТЕНЦИАЛДАР ӘДІСІ

Транспорт есебі келесідей тұжырымдалады:

Берілген m пункте $a_1, a_2, ..., a_m$ бірлік шамасында біртекті өнім жіберіледі. Бұл өнімді сәйкесінше $b_1, b_2,..., b_n$ шамада қабылданатын берілген n пунктке жеткізу қажет. Бірлік өнімді жіберетін $i-$ші пунктен қабылданатын $j-$ші пунктке тасымалдау құны $c_{ij}-$ ге тең, ал тасымалданатын өнім бірлігінің сәйкес шамасы x_{ij} $(i=1,...,m;\ j=1,...,n)$ болсын делік. Есептің шартын төмендегі кесте арқылы сипаттайық:

6.1-кесте

a_i \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

$\|x_{ij}\|$ матрицасын тасымалдау жоспары, ал $\|c_{ij}\|$ матрицасын транспорттық шығын матрицасы деп атаймыз. Олай болса, транспорт есебі деп тасымалдау құны ең аз болатын жүктерді жіберу пункттерінен қабылдау пункттеріне тасымалдауды айтамыз.

Транспорт есебінің негізгі мақсаты мүмкін жоспарлар ішінен ең оптималдысын табу, яғни жалпы тасымалдау құнын минимальдау.

Тіке есебі

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (6.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \qquad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n} \qquad (6.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, j \qquad (6.4)$$

Қос мағыналы есебі

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max \qquad (6.5)$$

$$u_i, i = \overline{1,m} \qquad (6.6)$$

$$v_j, j = \overline{1,n} \qquad (6.7)$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \forall i, j \qquad (6.8)$$

Тіке есепті қарастырайық, мұнда мақсатты функция (6.1) транспорт шығындарының минимальдауын көрсетеді. (6.2) - шектеулер жабдықтаушы заводтың (жіберу пункттерінің) өндіріс қуаттарының шектілігін ескертеді. (6.3)-шектеулер тұтынушылардың (қабылдау пункттерінің) сұраныстарын толық қамтамасыз етуін көрсетеді.

1) Егер $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, онда (6.1)-(6.4) есеп жабық транспорт есебі деп саналады. Басқа жағдайларда ашық транспорт есебі болады.

Ашық транспорт есебін жабық транспорт есебіне келтіруге болады: ол үшін жалған пункттер енгізу керек. Жалған пункттерінің тасымалдау құны нөлге тең.

2) Егер $\sum_i a_i \leq \sum_j b_j$, онда келесі жалған пункт енгізіледі:

$$a_{m+1} = \sum_j b_j - \sum_i a_i, \quad c_{m+1,j} = 0, j = \overline{1,n}.$$

3) Егер $\sum_i a_i \geq \sum_j b_j$, онда келесі жалған пункт енгізіледі:

$$b_{n+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j,$$

$$c_{i,n+1} = 0, i = \overline{1,m}.$$

Транспорт есебін потенциалдар әдісімен, венгр әдісімен шығаруға болады. Потенциалдар әдісі жабық транспорт есебіне қолданылады. Потенциалдар әдісін қолдану үшін тіке транспорт есебіне қос мағыналы есепті (6.5)-(6.8) құру керек.

Потенциалдар әдісінің алгоритмі:

I. Алғашқы қадам:

1. Басты жоспарды құру.

2. Жоспары бар торлар үшін: $v_j - u_i = c_{ij}$ жүйесін жасау.

3. Жоспары жоқ торлардың потенциалдығын зерттеу: $v_j - u_i \le c_{ij}$.

II. Жалпы қадам:

1. Жоспарды одан да жақсарту.

2. Жүйені түзету.

3. Түзетілген жүйенің потенциалдығын зерттеу.

Алғашқы жоспар не солтүстік-батыс бұрыш әдісімен, не минимальды элемент әдісімен құрылады.

Жоспары бар торларға $v_j - u_i = c_{ij}$ жүйесі жасалады.

Жоспары жоқ торларға келесі теңсіздіктер жүйесі құрылады: $v_j - u_i \le c_{ij}$.

Егер бұл шарттар орындалмаса, онда $\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ сандары табылады. Табылған барлық α_{ij} ішінен ең үлкені $\alpha_{i0\,j0} = max\{\alpha_{ij}\}$ болып алынады. (i_0,j_0) тұратын тордан бастап, жоспары бар торларда сағат тіліне қарсы бағыт бойынша цикл құрылады. Сонымен бірге (i_0,j_0)– тордан бастап, цикл бұрылатын жерде алма-кезек (+,-) белгілері қойылады. (-)-та тұрған барлық x_{ij} ішінен ең кішісі алынады: Ол $\beta = \min\left\{x^{-}{}_{ij}\right\}$–жоспарды жақсарту коэффициенті.

Жаңа жоспар келесідей құрылады:

$$x_{ij}^{1} = \begin{cases} x_{ij}^{+} + \beta\,, & \text{егер цикл бұрылған жерде плюс тұрса,} \\ x_{ij}^{-} - \beta\,, & \text{егер цикл бұрылған жерде минус тұрса,} \\ x_{ij}\,, & \text{цикл жүрмеген торларға.} \end{cases}$$

Содан соң жоспары бар торларға жаңа теңдеулер жүйесі құрылады: $v_j - u_i = c_{ij}$.

Жоспары жоқ торлардың потенциалдығы зерттеледі:

$$v_j - u_i \le c_{ij}.$$

6.1. Солтүстік-батыс бұрыш әдісі

Солтүстік-батыс бұрыш әдісімен құрылатын алғашқы жоспардың әрбір қадамында солтүстік-батыс бұрышта орналасқан тор қарастырылады және тасымалдау құны ескерілмейді.

Жоспарды құру алгоритмі бірнеше қадамдардан тұрады, олардың әрқайсында x_{ij} жоспар матрицасының жолы немесе бағаны толтырылып отырады. Ең алдымен $(1,1)$ торы таңдалады, яғни $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$ жоспары, келесі торлар да ең солтүстік батыс бұрыштағы торлар таңдалып отырады. Осыған байланысты әдіс солтүстік-батыс бұрыш әдісі деп аталады.

1-қадам. $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$ жоспары таңдалады.

2-қадам. Егер $a_i < b_j$ болса, онда $x_{ij} = a_i$, ал жолдың қалған торлары 0-мен толтырылады. $i-$ші жол одан әрі қарастырылмайды, ал $b_j^{/} = b_j - a_i$.

3-қадам. Егер $a_1 < b_1$ болса, онда $x_{11} = a_1$, ал жолдың қалған торлары 0-мен толтырылады, яғни $x_{1j} = 0 \quad (j = 2, 3, ..., n)$. Бірінші жол одан әрі қарастырылмайды, ал $b_1^{/} = b_1 - a_1$.

4-қадам. Келесі қарастырылатын жоспар x_{21} болады. Егер $a_2 \ge b_1$ болса, онда 5-қадамға көшеміз. Егер $a_2 < b_1$ болса, онда $x_{21} = a_2$, ал жолдың қалған торлары 0-мен толтырылады, яғни $x_{2j} = 0 \quad (j = 2, 3, ..., n)$, екінші жол одан әрі қарастырылмайды, ал $b_1^{//} = b_1^{/} - a_2$. Осы ережені қолдана отырып, қалған торларды толтырамыз.

5-қадам. Егер $a_i \ge b_j$ болса, онда $x_{ij} = b_j$ болады және $j-$ші бағанның қалған торлары 0-мен толтырылады және $j-$ші баған одан әрі қарастырылмайды, ал $a_i^{/} = a_i - b_j$.

6-қадам. Егер $a_1 \geq b_1$ болса, онда $x_{11} = b_1$ болады және бірінші бағанның қалған торлары 0-мен толтырылады, яғни $x_{i1} = 0$ $(i = 2, 3,..., m)$ және бірінші баған одан әрі қарастырылмайды, ал $a_1^/ = a_1 - b_1$. Келесі қарастырылатын тор x_{12} болады. Егер $a_1 < b_2$ болса, онда 2-қадамға көшеміз. Егер $a_1 \geq b_2$ болса, онда $x_{12} = b_2$ болады және екінші бағанның қалған торлары 0-мен толтырылады, яғни $x_{i2} = 0$ $(i = 2, 3,..., m)$ және екінші баған одан әрі қарастырылмайды, ал $a_1^{//} = a_1^/ - b_1$.

Алгоритм өнімді қабылдау пункттеріне толығымен үлестіргенге дейін жалғасады, яғни $m + n - 1$ тордан құралады.

6.2. Минимальды элемент әдісі

Минимальды элемент әдісінде $\|c_{ij}\|$ транспорттық шығын матрицасы ескеріледі. Жоспарды құру алгоритмі бірнеше қадамдардан тұрады, олардың әрқайсында x_{ij} жоспар матрицасының жолы немесе бағаны толтырылып отырады.

1-қадам. C_{ij} матрицасынан ең кіші элементін анықтаймыз. Айталық, $\tilde{n}_{21}$ min – ды болсын, онда $x_{ij} = \min(a_2, b_1)$.

2-қадам. Егер $a_2 < b_1$ болса, онда $x_{21} = a_2$, ал жолдың қалған торлары 0-мен толтырылады, яғни $x_{1j} = 0$ $(j = 1, 3, 4,..., n)$. Екінші жол одан әрі қарастырылмайды, ал $b_1^/ = b_1 - a_2$. Содан соң C_{ij} матрицасының арасынан тасымалдау құны ең кіші келесі торды қарастырамыз. Егер $a_i < b_j$ болса, онда 2-қадамды қайталаймыз, егер де $a_i \geq b_j$ болса, онда 3-қадамға көшеміз.

3-қадам. C_{ij} матрицасынан келесі ең кіші тасымалдау құны $x_{34} = \min(a_3, b_4)$ торы болсын делік, онда $x_{34} = b_4$ болады және төртінші бағанның қалған толтырылмаған, бос торларын нөлмен толтырып, төртінші баған одан әрі қарастырылмайды, ал $a_3^/ = a_3 - b_4$. Келесі тасымалдау құны кіші торды таңдаймыз. Егер

$a_i < b_j$ болса, онда екінші қадамға көшеміз, егер $a_i \geq b_j$ болса, онда үшінші қадамды қайталаймыз.

Алгоритм $m+n-1$ торға дейін толтырылады.

16 - мысал

$a_1 = 180, a_2 = 90, a_3 = 170; b_1 = 45, b_2 = 45, b_3 = 100, b_4 = 160;$

$$c = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\sum_{i=1}^{3} a_i > \sum_{j=1}^{4} b_j$, $\sum_{i=1}^{3} 440 > \sum_{j=1}^{4} 350$ болғандықтан есеп ашық транспорт есебі болып табылады. Ашық транспорт есебін жабық транспорт есебіне келтіру қажет. Ол үшін b_5 жалған пункт енгізіледі.

Шешімі. Келесі кесте құрылады

6.2 – кесте

	b_j				
a_i	45	45	100	160	90
180	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$
90	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$
170	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$

І. Алғашқы қадам

1. Басты жоспарды құру. Алғашқы жоспар келесі екі әдіспен құрылады:

а) минимальды элемент әдісі;

ә) солтүстік-батыс бұрыш әдісі.

а) Минимальды элемент әдісі

6.3-кесте

	b_j				
a_i	~~45~~ 0	~~45~~ 0	~~100~~ 55	~~160~~ ~~70~~ 0	~~90~~ 0
~~180~~ ~~90~~ 0	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 90	$\boxed{0}$ 90
~~90~~ ~~45~~ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{1}$ 45	$\boxed{4}$ 45	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{0}$ 0
~~170~~ ~~100~~ 55	$\boxed{3}$ 45	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$ 55	$\boxed{2}$ 70	$\boxed{0}$ 0

Минимальды элемент әдісінде тасымалдау құны ескеріледі. Кесте торлары тасымалдау құнының ең кіші мәнінен бастап толтырылады. Біздің жағдайда тасымалдау құны ең кіші торлар 1, 2 және 3 - жолдардың 5 - бағаны болып табылады. Олардың ішінен біреуі таңдалады. Мысалы, 1 жол 5 - баған.

$x_{15} = \min\{a_1, b_5\} = \min\{180{,}90\} = 90, \quad x_{25} = x_{35} = 0,$

$a_1' = a_1 - b_5 = 180 - 90 = 90$

Қалған торлар осы ережемен толтырылады

$\min\{c_{i,j}\} = c_{22}$

$x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{90{,}45\} = 45, \quad x_{12} = x_{32} = 0, \quad a_2' = a_2 - b_2 = 90 - 45 = 45$

$\min\{c_{i,j}\} = c_{14}$

$x_{14} = \min\{a_1, b_4\} = \min\{90{,}160\} = 90, \quad x_{11} = x_{13} = 0, \quad b_4' = b_4 - a_1 = 70$

$\min\{c_{i,j}\} = c_{34}$

$x_{34} = \min\{a_3, b_4\} = \min\{170{,}70\} = 70, \quad x_{24} = 0, \quad a_3' = a_3 - b_4 = 100$

$\min\{c_{i,j}\} = c_{31}$

$x_{31} = \min\{a_3, b_1\} = \min\{100{,}45\} = 45, \quad x_{21} = 0, \quad a_3' = a_3 - b_1 = 55$

$\min\{c_{i,j}\} = c_{31}$

$x_{23} = \min\{a_2, b_3\} = \min\{45{,}100\} = 45, \quad b_3' = b_3 - a_2 = 55$

Соңғы қалған тор келесідей толтырылады:

$x_{33} = \min\{a_3, b_3\} = \min\{55, 55\} = 55.$

$Z_{мин.элем} = 2*90 + 1*45 + 4*45 + 3*45 + 6*55 + 2*70 = 1010$

ә) Солтүстік-батыс бұрыш әдісі

6.4 - кесте

	b_j				
a_i	~~45~~ 0	~~45~~ 0	~~100~~ ~~10~~ 0	~~160~~ ~~80~~ 0	90
~~180~~ ~~135~~ ~~90~~ 0	$\boxed{6}$ 45	$\boxed{7}$ 45	$\boxed{3}$ 90	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{0}$ 0
~~90~~ ~~80~~ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{3}$ 80	$\boxed{0}$ 0
~~170~~ 90	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{0}$ 90

Бұл әдіс солтүстік-батыс бұрышында орналасқан (1, 1) торының элементін анықтаудан басталады.

$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{180, 45\} = 45$, $x_{21} = x_{31} = 0$,

$a_1' = a_1 - b_1 = 135$.

Келесі солтүстік-батыс бұрышта орналасқан элемент x_{12} болып табылады. Элемент таңдалғаннан кейін, минимальды элемент әдісі сияқты есептеліп отырады.

$$Z_{солт.батыс} = 6*45 + 7*45 + 3*90 + 4*10 + 3*80 + 2*80 = 1295$$

Келесі бастапқы жоспар алынады:

6.5 - кесте

	b_j				
a_i	45	45	100	160	90
180	$\boxed{6}$ 45	$\boxed{7}$ 45	$\boxed{3}$ 90	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$
90	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{3}$ 80	$\boxed{0}$
170	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{0}$ 90

2. Жоспары бар торлар үшін $v_j - u_i = c_{ij}$ *жүйесін құру (6.6 - кесте).*

$v_1 - u_1 = 6$ $\quad u_1 = 0, \quad v_1 = 6$

$v_2 - u_1 = 7$ $\quad v_2 = 7$

$v_3 - u_1 = 3$ $\quad v_3 = 3$

$v_3 - u_2 = 4$ $\quad u_2 = v_3 - 4 = -1$

$v_4 - u_2 = 3$ $\quad v_4 = 2$

$v_4 - u_3 = 2$ $\quad u_3 = v_4 - 2 = 0$

$v_5 - u_3 = 0$ $\quad v_5 = u_3 = 0$

Табылған мәндерді ескерсек, кесте келесі түрде болады:

6.6 – кесте

	v_j				
u_i	6	7	3	2	025
0	$\boxed{6}$ 45	$\boxed{7}$ – 45	$\boxed{3}$ + 90	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$
–1	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$ +	$\boxed{4}$ –10	$\boxed{3}$ 80	$\boxed{0}$
0	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{0}$ 90

3. Жоспары жоқ торлардың потенциалдығын зерттеу $v_j - u_i \le c_{ij}$ *(6.6 - кесте).*

Егер бұл шарт орындалмаса, онда $\alpha_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ сандары табылады.

$v_4 - u_1 \le 2$

$v_5 - u_1 \le 0$

$v_1 - u_2 \le 5 \quad \alpha_{21} = 7 - 5 = 2$

$v_2 - u_2 \le 1 \quad \alpha_{22} = 8 - 1 = 7$

$v_5 - u_2 \le 0 \quad \alpha_{25} = 1 - 0 = 1$

$v_1 - u_3 \le 3 \quad \alpha_{31} = 6 - 3 = 3$

$v_2 - u_3 \le 2 \quad \alpha_{32} = 7 - 2 = 5$

$v_3 - u_3 \le 6$

Табылған барлық α_{ij} ішінен ең үлкені анықталады:

$\alpha_{i_0 j_0} = \max(\alpha_{ij}) = \max(2, 7, 1, 3, 5), \quad \alpha_{22} = 7.$

II. Жалпы қадам

1. Жоспарды одан да жақсарту.

(i_2, j_2) тұратын тордан бастап, жоспары бар торларда сағат тіліне қарсы бағыт бойынша цикл құрылады және (i_2, j_2) тордан бастап, цикл бұрылатын жерде алма-кезек (+,-) белгілері қойылады.

2. Жүйені түзету.

(-)-та тұрған барлық x_{ij} ішінен ең кішісі алынады. Ол $\beta = \min\{10; 45\} = 10$. (-)-та тұрған барлық x_{ij} -дан β азайтамыз, яғни $x_{ij}^1 = x_{ij}^- - \beta$ ал (+)-та тұрған барлық x_{ij}-ға β қосамыз, яғни $x_{ij}^1 = x_{ij}^+ + \beta$. Келесі жаңа жоспарды аламыз:

6.7 – кесте

	v_j				
u_i	6	7	3	9	7
0	$\boxed{6}$ 45	$\boxed{7}$ –35	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{2}$ +	$\boxed{0}$
6	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$ +10	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ –80	$\boxed{0}$
7	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{0}$ 90

Жоспары бар торлар үшін келесі потенциалдар жүйесін аламыз (6.7 - кесте)

$$
\begin{array}{ll}
v_1 - u_1 = 6 & u_1 = 0, v_1 = 6 \\
v_2 - u_1 = 7 & v_2 = 7 \\
v_3 - u_1 = 3 & v_3 = 3 \\
v_2 - u_2 = 1 & u_2 = v_2 - 1 = 6 \\
v_4 - u_2 = 3 & v_4 = 3 + u_2 = 9 \\
v_4 - u_3 = 2 & u_3 = v_4 - 2 = 7 \\
v_5 - u_3 = 0 & v_5 = u_3 = 7
\end{array}
$$

3. Түзетілген жүйенің потенциалдығын зерттеу (6.7 - кесте).

$$
\begin{array}{ll}
v_4 - u_1 \le 2 & \alpha_{14} = 7 \\
v_5 - u_1 \le 0 & \alpha_{15} = 7 \\
v_1 - u_2 \le 5 & \\
v_3 - u_2 \le 4 & \\
v_5 - u_2 \le 0 & \alpha_{25} = 1 \\
v_1 - u_3 \le 3 & \\
v_2 - u_3 \le 2 & \\
v_3 - u_3 \le 6 &
\end{array}
$$

$$\alpha_{i_0 j_0} = \max(\alpha_{ij}) = \max\ (7, 7, 1), \quad \alpha_{14} = 7.$$

$\beta = \min\{35; 80\} = 35$

Келесі жақсартылған жоспарды аламыз

6.8-кесте

	v_j				
u_i	6	0	3	2	0
0	$\boxed{6}$ – 45	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{2}$ +35	$\boxed{0}$
–1	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$ 45	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 45	$\boxed{0}$
0	$\boxed{3}$ +	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ –80	$\boxed{0}$ 90

Келесі потенциалдар жүйесін аламыз (6.8 - кесте):

$v_1 - u_1 = 6 \qquad u_1 = 0, v_1 = 6$

$v_3 - u_1 = 3 \qquad v_3 = 3$

$v_4 - u_1 = 2 \qquad v_4 = 2$

$v_2 - u_2 = 1 \qquad v_2 = 0$

$v_4 - u_2 = 3 \qquad u_2 = v_4 - 3 = -1$

$v_4 - u_3 = 2 \qquad u_3 = v_4 - 2 = 0$

$v_5 - u_3 = 0 \qquad v_5 = u_3 = 0$

Потенциалдығын зерттейміз (6.8 - кесте):

$v_2 - u_1 \le 7$

$v_5 - u_1 \le 0$

$v_1 - u_2 \le 5 \qquad \alpha_{21} = 2$

$v_3 - u_2 \le 4$

$v_5 - u_2 \le 0 \qquad \alpha_{25} = 1$

$v_1 - u_3 \le 3 \qquad \alpha_{31} = 3$

$v_2 - u_3 \le 2$

$v_3 - u_3 \le 6$

$\alpha_{i_0 j_0} = \max(\alpha_{ij}) = \max(2,\ 1, 3,), \quad \alpha_{31} = 3.$

$\beta_{\min} = \{45; 80\} = 45$.

Келесі жақсартылған жоспарды аламыз:

6.9 - кесте

	v_j				
u_i	3	0	3	2	0
0	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{0}$
–1	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$ 45	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 45–	$\boxed{0}$ +
0	$\boxed{3}$ 45	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ +35	$\boxed{0}$ –90

Келесі потенциалдар жүйесін аламыз (6.9-кесте):

$v_3 - u_1 = 3 \qquad u_1 = 0, v_3 = 3$

$v_4 - u_1 = 2 \qquad v_4 = 2$

$v_2 - u_2 = 1 \qquad v_2 = 1 + u_2 = 0$

$v_4 - u_2 = 3 \qquad u_2 = v_4 - 3 = -1$

$v_1 - u_3 = 3 \qquad v_1 = 3$

$v_4 - u_3 = 2 \qquad u_3 = v_4 - 2 = 0$

$v_5 - u_3 = 0 \qquad v_5 = u_3 = 0$

Потенциалдығын зерттейміз (6.9-кесте):

$v_1 - u_1 \le 6$

$v_2 - u_1 \le 7$

$v_5 - u_1 \le 0$

$v_1 - u_2 \le 5$

$v_3 - u_2 \le 4$

$v_5 - u_2 \le 0 \qquad \alpha_{25} = 1$

$v_2 - u_3 \le 2$

$v_3 - u_3 \le 6$

$\alpha_{i_0 j_0} = \max(\alpha_{ij}) = \max(1), \quad \alpha_{25} = 1.$

$\beta_{\min} = \{45; 90\} = 45$

Келесі жақсартылған жоспарды аламыз:

6.10 - кесте

	v_j				
u_i	3	1	3	2	0
0	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{0}$
0	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$ 45	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$ 45
0	$\boxed{3}$ 45	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{0}$ 45

Келесі потенциалдар жүйесін аламыз (6.10 - кесте):

$$v_3 - u_1 = 3 \qquad u_1 = 0, v_3 = 3$$
$$v_4 - u_1 = 2 \qquad v_4 = 2$$
$$v_2 - u_2 = 1 \qquad v_2 = 1 + u_2 = 1$$
$$v_5 - u_2 = 0 \qquad u_2 = v_5 = 0$$
$$v_1 - u_3 = 3 \qquad v_1 = 3$$
$$v_4 - u_3 = 2 \qquad u_3 = v_4 - 2 = 0$$
$$v_5 - u_3 = 0 \qquad v_5 = 0$$

Потенциалдығын зерттейміз (6.10 - кесте):

$$v_1 - u_1 \le 6$$
$$v_2 - u_1 \le 7$$
$$v_5 - u_1 \le 0$$
$$v_1 - u_2 \le 5$$
$$v_3 - u_2 \le 4$$
$$v_4 - u_2 \le 3$$
$$v_2 - u_3 \le 2$$
$$v_3 - u_3 \le 6$$

Алынған жүйе оптималды болғандықтан оптималды жоспар алынды және оптималды шешім:

$$Z^* = 300 + 160 + 45 + 135 + 160 = 800$$
$$x_{13}^* = 100, \quad x_{14}^* = 80$$
$$x_{22}^* = 45,$$
$$x_{31}^* = 45, \quad x_{34}^* = 80.$$

6 – тапсырма.

6.1-тапсырма. Потенциалдар әдісін қолданып, келесі жабық транспорт есептерін шешу керек:

1) $a_1 = 30, a_2 = 60, a_3 = 10;$
$b_1 = 15, b_2 = 40, b_3 = 25, b_4 = 20;$
$$c = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 9 \\ 8 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

2) $a_1 = 100, a_2 = 150, a_3 = 80;$
$b_1 = 80, b_2 = 140, b_3 = 110;$
$$c = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix};$$

3) $a_1 = 4, a_2 = 6, a_3 = 10;$
$b_1 = 3, b_2 = 5, b_3 = 12;$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

4) $a_1 = 12, a_2 = 14, a_3 = 4;$
$b_1 = 9, b_2 = 10, b_3 = 11;$
$$c = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix};$$

5) $a_1 = 7, a_2 = 12, a_3 = 11;$
$b_1 = 10, b_2 = 10, b_3 = 10;$
$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix};$

6) $a_1 = 15, a_2 = 25, a_3 = 5;$
$b_1 = 5, b_2 = 15, b_3 = 15, b_4 = 10;$
$c = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 11 \\ 12 & 7 & 9 & 20 \\ 0 & 14 & 16 & 18 \end{pmatrix};$

7) $a_1 = 70, a_2 = 90, a_3 = 50;$
$b_1 = 30, b_2 = 95, b_3 = 25, b_4 = 60;$
$c = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix};$

8) $a_1 = 25, a_2 = 55, a_3 = 22;$
$b_1 = 45, b_2 = 15, b_3 = 22, b_4 = 20;$
$c = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 10 \\ 6 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix};$

9) $a_1 = 11, a_2 = 11, a_3 = 8;$
$b_1 = 5, b_2 = 9, b_3 = 9, b_4 = 7;$
$c = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix};$

10) $a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 8;$
$b_1 = 2, b_2 = 2, b_3 = 2, b_4 = 10;$
$c = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$

11) $a_1 = 50, a_2 = 70, a_3 = 40;$
$b_1 = 30, b_2 = 60, b_3 = 45, b_4 = 25;$
$c = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 6 & 2 \\ 8 & 2 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

12) $a_1 = 115, a_2 = 70, a_3 = 68;$
$b_1 = 95, b_2 = 38, b_3 = 50, b_4 = 70;$
$c = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 8 & 5 \\ 7 & 9 & 6 & 1 \end{pmatrix};$

13) $a_1 = 25, a_2 = 20, a_3 = 35;$
$b_1 = 30, b_2 = 20, b_3 = 12, b_4 = 18;$
$c = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix};$

14) $a_1 = 60, a_2 = 70, a_3 = 20;$
$b_1 = 40, b_2 = 30, b_3 = 30, b_4 = 50;$
$c = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix};$

15) $a_1 = 40, a_2 = 60;$
$b_1 = 20, b_2 = 70, b_3 = 10;$
$c = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix};$

16) $a_1 = 40, a_2 = 70;$
$b_1 = 30, b_2 = 60, b_3 = 20;$
$c = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix};$

17 $a_1 = 30, a_2 = 40, a_3 = 20;$
$b_1 = 20, b_2 = 25, b_3 = 35, b_4 = 10;$
$$c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix};$$

18) $a_1 = 60, a_2 = 65, a_3 = 70;$
$b_1 = 40, b_2 = 60, b_3 = 70, b_4 = 25;$
$$c = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix};$$

19) $a_1 = 25, a_2 = 55, a_3 = 20;$
$b_1 = 45, b_2 = 15, b_3 = 20, b_4 = 20;$
$$c = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 10 \\ 6 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix};$$

20) $a_1 = 110, a_2 = 190, a_3 = 90;$
$b_1 = 80, b_2 = 60, b_3 = 170, b_4 = 80;$
$$c = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

21) $a_1 = 10, a_2 = 11, a_3 = 8;$
$b_1 = 5, b_2 = 8, b_3 = 9, b_4 = 7;$
$$c = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

22) $a_1 = 40, a_2 = 25, a_3 = 35;$
$b_1 = 15, b_2 = 40, b_3 = 30, b_4 = 15;$
$$c = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \end{pmatrix};$$

23) $a_1 = 50, a_2 = 40, a_3 = 20;$
$b_1 = 30, b_2 = 25; b_3 = 35, b_4 = 20;$
$$c = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix};$$

24) $a_1 = 30, a_2 = 40, a_3 = 20;$
$b_1 = 20, b_2 = 30, b_3 = 30, b_4 = 10;$
$$c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix};$$

25) $a_1 = 50, a_2 = 40, a_3 = 60;$
$b_1 = 36, b_2 = 42; b_3 = 31, b_4 = 41;$
$$c = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix};$$

26) $a_1 = 40, a_2 = 35, a_3 = 45;$
$b_1 = 32, b_2 = 34, b_3 = 25, b_4 = 29;$
$$c = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 7 & 10 \\ 4 & 2 & 9 & 9 \end{pmatrix};$$

27) $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 3; a_4 = 4;$
$b_1 = 5, b_2 = 2; b_3 = 2, b_4 = 1;$
$$c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

28) $a_1 = 150, a_2 = 170, a_3 = 110;$
$b_1 = 110, b_2 = 120; b_3 = 80,$
$b_4 = 50; b_5 = 70;$
$$c = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 11 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$$

29) $a_1 = 40, a_2 = 50, a_3 = 60;$
$b_1 = 35, b_2 = 40; b_3 = 40, b_4 = 35;$
$$c = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

30) $a_1 = 35, a_2 = 25, a_3 = 40;$
$b_1 = 15, b_2 = 30, b_3 = 25, b_4 = 30;$
$$c = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 & 3 \\ 5 & 2 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2-тапсырма. Потенциалдар әдісін қолданып, келесі ашық транспорт есептерін шешу керек:

1) $a_1 = 80, a_2 = 140, a_3 = 70;$
$b_1 = 80, b_2 = 50; b_3 = 50, b_4 = 70;$
$$c = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix};$$

2) $a_1 = 120, a_2 = 280, a_3 = 160;$
$b_1 = 130, b_2 = 220; b_3 = 60, b_4 = 70;$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

3) $a_1 = 160, a_2 = 140, a_3 = 60;$
$b_1 = 80, b_2 = 80; b_3 = 60, b_4 = 80;$
$$c = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

4) $a_1 = 175, a_2 = 125, a_3 = 140;$
$b_1 = 180, b_2 = 110; b_3 = 60, b_4 = 40;$
$$c = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix};$$

5) $a_1 = 25, a_2 = 55, a_3 = 30;$
$b_1 = 45, b_2 = 15; b_3 = 20, b_4 = 20;$
$$c = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 10 \\ 6 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix};$$

6) $a_1 = 30, a_2 = 40, a_3 = 20;$
$b_1 = 20, b_2 = 25; b_3 = 35, b_4 = 40;$
$$c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix};$$

7) $a_1 = 40, a_2 = 35, a_3 = 45;$
$b_1 = 35, b_2 = 35; b_3 = 25, b_4 = 30;$
$$c = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 7 & 10 \\ 4 & 2 & 9 & 9 \end{pmatrix};$$

8) $a_1 = 45, a_2 = 25, a_3 = 40;$
$b_1 = 15, b_2 = 30; b_3 = 25, b_4 = 30;$
$$c = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 & 3 \\ 5 & 2 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9) $a_1 = 25, a_2 = 70, a_3 = 40;$
$b_1 = 25, b_2 = 50; b_3 = 50;$
$$c = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

10) $a_1 = 40, a_2 = 45, a_3 = 70;$
$b_1 = 48, b_2 = 30; b_3 = 29; b_4 = 40;$
$$c = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

11) $a_1 = 60$, $a_2 = 70$, $a_3 = 40$;
$b_1 = 20$, $b_2 = 30$; $b_3 = 30$, $b_4 = 50$;
$$c = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

12) $a_1 = 115$, $a_2 = 95$, $a_3 = 68$;
$b_1 = 70$, $b_2 = 38$; $b_3 = 50$, $b_4 = 70$;
$$c = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 8 & 5 \\ 7 & 9 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

13) $a_1 = 250$, $a_2 = 160$, $a_3 = 140$;
$a_4 = 220$; $b_1 = 150$, $b_2 = 180$;
$b_3 = 120$, $b_4 = 180$;
$$c = \begin{pmatrix} 18 & 2 & 3 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 12 \\ 7 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

14) $a_1 = 36$, $a_2 = 40$, $a_3 = 60$;
$b_1 = 50$, $b_2 = 42$; $b_3 = 31$,
$b_4 = 41$;
$$c = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix};$$

15) $a_1 = 220$, $a_2 = 175$, $a_3 = 130$;
$b_1 = 70$, $b_2 = 115$; $b_3 = 40$,
$b_4 = 30$, $b_5=60$;
$$c = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 9 & 7 & 3 \\ 9 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

16) $a_1 = 280$, $a_2 = 175$, $a_3 = 125$;
$a_4 = 90$; $b_1 = 130$, $b_2 = 180$;
$b_3 = 310$, $b_4 = 130$;
$$c = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

17) $a_1 = 190$, $a_2 = 140$, $a_3 = 170$;
$b_1 = 120$, $b_2 = 50$; $b_3 = 160$,
$b_4 = 110$;
$$c = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

18) $a_1 = 150$, $a_2 = 350$, $a_3 = 20$;
$b_1 = 110$, $b_2 = 90$; $b_3 = 120$,
$b_4 = 80$, $b_5=180$;
$$c = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix};$$

19) $a_1 = 30$, $a_2 = 30$, $a_3 = 10$;
$b_1 = 30$, $b_2 = 50$; $b_3 = 10$, $b_4 = 20$;
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix};$$

20) $a_1 = 80$, $a_2 = 190$, $a_3 = 90$;
$b_1 = 110$, $b_2 = 60$; $b_3 = 170$, $b_4 = 80$;
$$c = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

21) $a_1 = 240$, $a_2 = 270$, $a_3 = 130$;
$b_1 = 120$, $b_2 = 80$; $b_3 = 200$,
$b_4 = 160$;

$$c = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 9 \\ 5 & 1 & 8 & 12 \\ 11 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

22) $a_1 = 85$, $a_2 = 150$, $a_3 = 50$;
$b_1 = 75$, $b_2 = 80$; $b_3 = 60$,
$b_4 = 100$;

$$c = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix};$$

23) $a_1 = 120$, $a_2 = 220$, $a_3 = 100$;
$b_1 = 180$, $b_2 = 80$; $b_3 = 160$,
$b_4 = 90$,b_5=50;

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix};$$

24) $a_1 = 30$, $a_2 = 40$, $a_3 = 20$;
$b_1 = 50$, $b_2 = 25$; $b_3 = 35$,
b_4 =20;

$$c = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix};$$

25) $a_1 = 50$, $a_2 = 30$, $a_3 = 30$;
$b_1 = 30$, $b_2 = 10$; $b_3 = 10$, $b_4 = 20$;

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix};$$

26) $a_1 = 80$, $a_2 = 190$, $a_3 = 90$;
$b_1 = 110$, $b_2 = 60$; $b_3 = 170$, $b_4 = 80$;

$$c = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

27) $a_1 = 200$, $a_2 = 240$, $a_3 = 130$;
$b_1 = 120$, $b_2 = 80$; $b_3 = 270$,
$b_4 = 160$;

$$c = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 9 \\ 5 & 1 & 8 & 12 \\ 11 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

28) $a_1 = 60$, $a_2 = 150$, $a_3 = 50$;
$b_1 = 75$, $b_2 = 80$; $b_3 = 100$,
$b_4 = 85$;

$$c = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix};$$

29) $a_1 = 30$, $a_2 = 30$, $a_3 = 10$;
$b_1 = 50$, $b_2 = 30$; $b_3 = 10$, $b_4 = 20$;

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix};$$

30) $a_1 = 70$, $a_2 = 30$, $a_3 = 40$;
$b_1 = 90$, $b_2 = 30$; $b_3 = 20$, $b_4 = 40$

$$c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

7. БҮТІНСАНДЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ ЕСЕПТЕРІ

7.1. Дискретті бағдарламалау есептері

Бүтінсандық бағдарламалау есебінің математикалық моделі:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{7.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \\ &x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \end{aligned}\right\}, \tag{7.2}$$

$$x_j \text{ -бүтін, } j = \overline{1,n}\ . \tag{7.3}$$

Дискретті бағдарламалау есептерін келесі әдістермен шығаруға болады:

1. Гоморидің кесіп түсіру әдісі;
2. Ленд-Дойг әдісі.

7.2. Гоморидің кесіп түсіру әдісі

Гоморидің кесіп түсіру әдісінің алгоритмі:

1. Алғашқы қадам.

(7.1)-(7.2) есепті тіке симплекс әдісімен шығарамыз. Кестеден еркін айнымалыларды, нөлдік жолдарды шығарғаннан кейін, тіректі және оптималды шешім тапқаннан кейін, келесі кестеге келеміз:

7.1-кесте

	$-y_1$	…	$-y_s$	…	$-x_n$	1
x_1	b_{11}	…	b_{1s}	…	b_{1n}	b_1
$\vdots$	…	…	…	…	…	…
x_s	b_{s1}	…	b_{ss}	…	b_{sn}	b_s
$\vdots$	…	…	…	…	…	…
y_m	b_{m1}	…	b_{ms}	…	b_{mn}	b_m
z	q_1	…	q_s	…	q_n	Q

$b_1,...,b_m \geq 0, \quad q_1,...,q_n \geq 0$

Егер x_j мәндері бүтін болса, онда (7.1)-(7.3) есептің шешімі табылды:

$x_1^* = b_1,$

::

$x_S^* = b_S,$

$z^* = q.$

Егер x_j мәндері бүтін болмаса, онда жалпы қадамға көшеміз

2. Жалпы қадам.

1-кестені келесідей көшірейік:

7.2-кесте

	$-\xi_1$	...	$-\xi_s$	...	$-\xi_n$	1
η_1	b_{11}	...	b_{1s}	...	b_{1n}	b_1
η_s	b_{s1}	...	b_{ss}	...	b_{sn}	b_s
...	...	...	...	....	...	...
η_m	b_{m1}	...	b_{ms}	...	b_{mn}	b_m
Z	q_1	...	q_m	...	q_n	Q

2 – кестеге келесі қосымша шектеуді енгіземіз:

$$S_i = \sum_{j=1}^{n}(-\beta_{ij})(-S_j) - \beta_i \geq 0, \tag{7.4}$$

мұндағы

$\beta_{ij} = b_{ij} - [b_{ij}],$

$\beta_i = b_i - [b_i]$

$[\cdot]$ - санның бүтін бөлігі.

7.3-кесте

	$-\xi_1$	...	$-\xi_s$	...	$-\xi_n$	1
η_1	b_{11}	...	b_{1s}	...	b_{1n}	b_1
η_s	b_{s1}	...	b_{ss}	...	b_{sn}	b_s
...	...	...	...	...	...	...
η_m	b_{m1}	...	b_{ms}	...	b_{mn}	b_m
	$-\beta_{i1}$	...	$-\beta_{is}$	...	$-\beta_{in}$	$-\beta_i$
Z	q_1	...	q_m	...	q_n	Q

Есептеуді қос мағыналы симплекс әдісімен жалғастырамыз.

17 - мысал

$$z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 36 \\ x_2 \leq 13 \end{cases}$$
$x_j \geq 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

$$z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6 \geq 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 36 \geq 0 \\ -x_2 + 13 \geq 0 \end{cases}$$
$x_j \geq 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

1. Алғашқы қадам.

Есепті тіке симплекс әдісімен шығарамыз. Симплекс-кестені толтырып, тіректі шешімді табамыз:

7.4-кесте

	$-x_1$	$-x_2$	1	
y_1	$\boxed{-1}$	–3	–6	←
y_2	3	2	36	
y_3	0	1	13	
z	–3	–3	0	
	↑			

7.5-кесте

	$-y_1$	$-x_2$	1	
x_1	1	–3	–6	
y_2	–3	7	–18	/ (–1)
y_3	0	–1	–13	
z	3	–6	–18	

7.6-кесте

	$-y_1$	$-x_2$	1	
x_1	–1	3	6	
y_2	$\boxed{3}$	–7	18	←
y_3	0	1	13	
z	–3	6	18	
	↑			

7.7-кесте

	$-y_2$	$-x_2$	1	
x_1	1	2	36	
y_1	1	–7	18	/ 3
y_3	0	3	39	
z	3	–3	108	

7.8-кесте

	$-y_2$	$-x_2$	1
x_1	1/3	2/3	12
y_1	1/3	–7/3	6
y_3	0	1	13
z	1	–1	36

$x_1 = 12,$

$x_2 = 0,$

$y_1 = 6,$

$y_2 = 0,$

$y_3 = 13$

$z_{\grave{O}} = 36.$

Оптималды шешімді табайық:

7.9-кесте

	$-y_2$	$-x_2$	1	
x_1	1/3	2/3	12	
y_1	1/3	–7/3	6	
y_3	0	$\boxed{1}$	13	←
z	1	–1	36	
		↑		

7.10-кесте

	$-y_2$	$-y_3$	1
x_1	1/3	–2/3	10/3
y_1	1/3	7/3	109/3
x_2	0	1	13
z	1	1	49

Оптималды шешім табылды:

$x_1^* = \frac{10}{3}, \quad x_2^* = 13, \quad Z^* = 49.$

x_1 мәні бүтін болмағандықтан, жалпы қадамға көшеміз.

2. Жалпы қадам.

Бүтін шешімді табу мақсатында қосымша шектеуді енгіземіз $s_1 = \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 - \frac{1}{3} \geq 0$. Келесі кестені аламыз:

7.11-кесте

	$-y_2$	$-y_3$	1
x_1	1/3	–2/3	10/3
y_1	1/3	7/3	109/3
x_2	0	1	13
s_1	–1/3	–1/3	–1/3
z	1	1	49

Есептің шешуін қос мағыналы симплекс әдісімен жалғастырамыз.

7.12-кесте

	$-y_2$	$-y_3$	1	
x_1	1/3	–2/3	10/3	
y_1	1/3	7/3	109/3	
x_2	0	1	13	
s_1	$\boxed{-1/3}$	–1/3	–1/3	←
z	1	1	49	
	↑			

7.13-кесте

	$-s_1$	$-y_3$	1	
x_1	–1/3	1/3	–1	
y_1	–1/3	–2/3	–12	
x_2	0	–1/3	–13/3	/(–1/3)
y_2	1	–1/3	–1/3	
z	–1	0	–16	

7.14-кесте

	$-s_1$	$-y_3$	1
x_1	1	–1	3
y_1	1	2	36
x_2	0	1	13
y_2	–3	1	1
z	3	0	48

Есептің бүтін оптималды шешімі:

$$X^* = (3; 13)$$

$$Z^* = 48$$

7.3. Ленд-Дойг әдісі

Ленд-Дойг әдісінің алгоритмі:

1. Алдымен (7.1)-(7.2) есепке тіке симплекс әдісін қолданып, оптималды шешімді табамыз.

2. Егер x_j-лер бүтін болса, онда (7.1) - (7.3) есептің шешімі табылды деп есептейміз. Қарсы жағдайда келесі қадамға көшеміз.

3. Келесі екі есепті құрастырамыз:

1-есеп

$$z=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max \qquad (7.5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j,\ j=\overline{1,n} \qquad (7.6)$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}$$

$$x_j \le [x_j] \qquad (7.7)$$

2-есеп

$$z=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max \qquad (7.8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j,\ j=\overline{1,n} \qquad (7.9)$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}$$

$$x_j \ge [x_j]+1. \qquad (7.10)$$

Екі есептің оптималды шешімдерін бөлек-бөлек іздейміз. Егер 1 немесе 2 - есептің шешімі болмаса, онда $z=-\infty$ деп қоямыз.

4. Барлық шешімдердің ішінен ең үлкен z-тің мәні бар шешімді таңдаймыз да, есепті шешуді жалғастырамыз.

18- мысал

$$z=6x_1+4x_2 \to \min \qquad z'=-6x_1-4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \ge 3 \\ x_1-x_2 \ge 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1+x_2-3 \ge 0 \\ x_1-x_2-1 \ge 0 \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j=1,2)$ $\qquad$ $x_j \ge 0$ – бүтін, $(j=1,2)$

Есепті тіке симплекс әдісімен шығарамыз.

Симплекс-кестені толтырып, тіректі шешімді табамыз:

7.15-кесте

	$-x_1$	$-x_2$	1	
y_1	–2	–1	–3	←
y_2	$\boxed{-1}$	1	–1	
z'	6	4	0	
	↑			

7.16-кесте

	$-y_2$	$-x_2$	1	
y_1	2	3	1	
x_1	1	1	–1	/(–1)
z'	–6	–10	6	

7.17-кесте

	$-y_2$	$-x_2$	1	
y_1	$\boxed{-2}$	–3	–1	←
x_1	–1	–1	1	
z'	6	10	–6	
	↑			

7.18-кесте

	$-y_1$	$-x_2$	1	
y_2	1	–3	–1	
x_1	1	–1	–3	/ (–2)
z'	–6	–2	18	

7.19-кесте

	$-y_1$	$-x_2$	1
y_2	–1/2	3/2	1/2
x_1	–1/2	1/2	3/2
z'	3	1	–9

$x_1^* = \dfrac{3}{2}, \quad x_2^* = 0, \quad Z^*_{\max} = -9$

$Z^*_{\min} = 9.$

x_1 мәні бүтін болмағандықтан, келесі екі есепті құрастырамыз:

1 – есеп

$z' = -6x_1 - 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 \le 1 \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

2 – есеп

$z' = -6x_1 - 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 2 \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

1- есепті шығарайық:

7.20-кесте

	$-x_1$	$-x_2$	1	
y_1	–2	–1	–3	←
y_2	$\boxed{-1}$	1	–1	
y_3	1	0	1	
z'	6	4	0	
	↑			

7.21-кесте

	$-y_2$	$-x_2$	1	
y_1	2	3	1	
x_1	1	1	–1	/ (–1)
y_3	–1	–1	0	
z'	–6	–10	6	

7.22-кесте

	$-y_2$	$-x_2$	1	
y_1	–2	–3	–1	
x_1	–1	–1	1	
y_3	$\boxed{1}$	1	0	←
z'	6	10	–6	
	↑			

7.23-кесте

	$-y_3$	$-x_2$	1	
y_1	2	–1	–1	
x_1	1	0	1	
y_2	1	$\boxed{1}$	0	←
z'	–6	4	–6	
		↑		

7.24-кесте

	$-y_3$	$-y_2$	1
y_1	3	1	–1
x_1	1	0	1
x_2	1	1	0
z'	–10	–4	–6

Тіректі шешім табылмағандықтан 1- есептің шешімі жоқ, яғни $Z^* = -\infty$.

2 - есепті шығарайық:

7.25-кесте

	$-x_1$	$-x_2$	1	
y_1	–2	–1	–3	
y_2	$\boxed{-1}$	1	–1	←
y_3	–1	0	–2	
z'	6	4	0	
	↑			

7.26-кесте

	$-y_2$	$-x_2$	1	
y_1	2	3	1	
x_1	1	1	–1	/ (–1)
y_3	1	1	1	
z'	–6	–10	6	

7.27-кесте

	$-y_2$	$-x_2$	1	
y_1	–2	$\boxed{-3}$	–1	←
x_1	–1	–1	1	
y_3	–1	–1	–1	
z'	6	10	–6	
		↑		

7.28-кесте

	$-y_2$	$-y_1$	1	
x_2	–2	1	–1	
x_1	1	1	–4	/(–3)
y_3	1	1	2	
z'	2	–10	28	

7.29-кесте

	$-y_2$	$-y_1$	1	
x_2	$\boxed{2/3}$	–1/3	1/3	←
x_1	–1/3	–1/3	4/3	
y_3	–1/3	–1/3	–2/3	
z'	–2/3	10/3	–28/3	
	↑			

7.30-кесте

	$-x_2$	$-y_1$	1	
y_2	1	–1/3	1/3	
x_1	1/3	–1/3	1	/2/3
y_3	1/3	–1/3	–1/3	
z'	2/3	2	–6	

7.31-кесте

	$-x_2$	$-y_1$	1	
y_2	3/2	–1/2	1/2	
x_1	1/2	–1/2	3/2	
y_3	1/2	$\boxed{-1/2}$	–1/2	←
z'	1	3	–9	
		↑		

7.32-кесте

	$-x_2$	$-y_3$	1	
y_2	–1/2	1/2	–1/2	
x_1	0	1/2	–1	/(–1/2)
y_1	1/2	1	–1/2	
z'	–2	– 3	6	

7.33-кесте

	$-x_2$	$-y_3$	1
y_2	1	–1	1
x_1	0	–1	2
y_1	–1	–2	1
z'	4	– 3	–12

2-есептің шешімі:

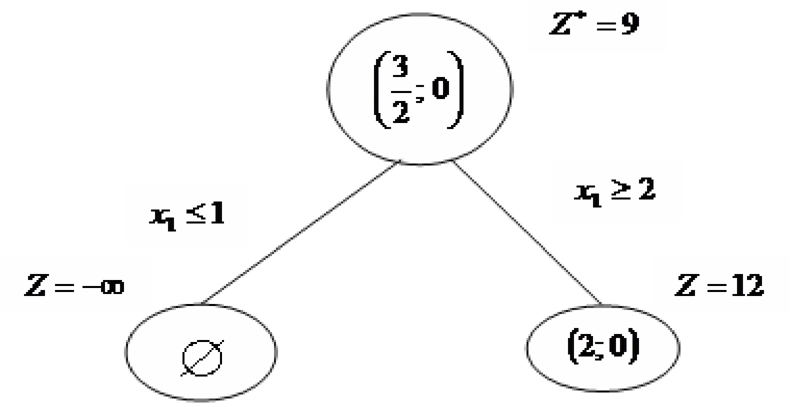
$x_1^* = 2$

$x_2^* = 0$

$Z_{\max}^* = -12$

$Z_{\min}^* = 12$

Алынған есептің нәтижелері 7.1 - суретте келтірілген бұтақта бейнеленген.



7.1 – сурет

Есептің шешімі $x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad Z^* = 12$.

7-тапсырма. Келесі дискретті бағдарламалау есептерін Гомори және Ленд-Дойг әдістерімен шығару керек:

1) $z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_2 \le 2 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

2) $z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ x_2 \le 13 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

3) $z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \end{array}\right\},$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ – бүтін

4) $z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_2 \le 2{,}8 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

5) $z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 + 3x_2 \le 7 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

6) $z = 110x_1 + 90x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 4x_2 \le 10 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 8 \\ x_2 \le 5 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

7) $z = x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 \le 17 \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

8) $z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 - 5x_2 \le 9 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

9) $z = x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 \le 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

10) $z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 6x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 10 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

11) $z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 9x_2 \le 36 \\ x_1 + \ \ x_2 \le 7 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

12) $z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 + 2x_2 \le 16 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

13) $z = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 4x_1 + \ \ x_2 \ge 10 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1,2)$

14) $z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\le 14 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 12 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1{,}2)$

15) $z = 5x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ 5x_1 - 2x_2 &\le 1 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1{,}2)$

16) $z = 6x_1 + 4x_2 \to \min$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\ge 3 \\ x_1 - x_2 &\ge 1 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1{,}2)$

17) $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ x_1 + 4x_2 &\le 10 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1{,}2)$

18) $z = 8x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 11 \\ 4x_1 + x_2 &\le 8 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1{,}2)$;

19) $z = 6x_1 + x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} -2{,}9x_1 + 6x_2 &\le 17{,}4 \\ 3x_1 - x_2 &\le 1 \end{aligned}\right\},$$

$x_1 \ge 0 -$ бүтін; $x_2 \ge 0$

20) $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\ge 0 \\ 0{,}5x_1 - x_2 &\le 0 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \end{aligned}\right\},$$

$x_j \ge 0$ – бүтін, $(j = 1{,}2)$;

21) $z = x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le \frac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 &\le 4 \end{aligned}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 -$ бүтін

22) $z = x_1 - x_2 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\ge 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 14 \end{aligned}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 -$ бүтін

23) $z = x_1 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 0 \\ x_1 - x_2 &\ge -1 \\ x_1 + x_2 &\le 2 \end{aligned}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 -$ бүтін

24) $z = x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 + x_2 \le 1{,}5 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 − бүтін

25) $z = 10x_1 + x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 1 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 \le 1 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 − бүтін

26) $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ x_1 - x_2 \le 3 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 − бүтін

27) $z = 2x_1 - 8x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 16 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 40 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 − бүтін

28) $z = -x_1 - x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 \ge 0{,}75 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 − бүтін

29) $z = 2x_1 - x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 + x_2 \le 3{,}2 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 − бүтін

30) $z = 10x_1 + x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 \ge 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 − бүтін

31) $z = -x_2 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 0 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 − бүтін

32) $z = -3x_1 - x_2 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le 2{,}25, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 3{,}5 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 -$ бүтін

33) $z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 -$ бүтін

34) $z = x_1 + x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 \le \dfrac{1}{2} \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 -$ бүтін

35) $z = 3x_1 + x_2 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} -4x_1 + x_2 \le 29 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 -$ бүтін

36) $z = 5x_1 + 7x_2 \to \min$

$$\left.\begin{array}{l} -3x_1 + 14x_2 \le 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26 \\ x_1 + 4x_2 \ge 25 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2 \ge 0$, $x_1, x_2 -$ бүтін

37) $z = 2{,}5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} 4{,}5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 14 \\ 2x_1 + 6{,}3x_2 + x_3 \le 11 \end{array}\right\},$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0, x_1, x_3 -$ бүтін;

38) $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 -$ бүтін

39) $z = x_1 - x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = 1 \\ x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 = 3 \end{array}\right\},$$

$x_j \ge 0 -$ бүтін; $\left(j = \overline{1,4}\right)$

40) $$z = x_1 \to \max$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24 \end{array}\right\},$$
$x_j \geq 0 -$ бүтін; $\left(j = \overline{1,4}\right)$

41) $$z = 60x_1 + 70x_2 + 120{,}4x_3 + 130x_4 \to \max$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\ x_1 + 1{,}85x_2 + x_3 + x_4 \leq 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10 \\ 4x_1 + 6{,}9x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100 \\ 6{,}3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 100 \end{array}\right\}$$
$x_1, x_2, x_3, x_4, \geq 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4 -$ бүтін

42) $$z = x_4 - x_5 \to \max$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{array}\right\},$$
$x_j \geq 0 -$ бүтін; $\left(j = \overline{1,5}\right)$

43) $$z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4 \end{array}\right\},$$
$x_j \geq 0$ – бүтін; $\left(j = \overline{1,5}\right)$.

44) $$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3 \end{array}\right\}$$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 -$ бүтін

45) $$z = 7x_1 + x_2 \to \max$$
$$\left.\begin{array}{l} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 110 \\ 11x_1 - 3x_2 - x_4 = 24 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_5 = 15 \end{array}\right\}$$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 -$ бүтін

8. КОММИВОЯЖЕР ТУРАЛЫ ЕСЕП БЕЛГІЛЕУ ЕСЕБІНІҢ БІР ТҮРІ

Коммивояжер n пунктке (немесе қалаға) минимальды жолмен бір-бір реттен ғана кіріп, алғашқы (басқы) қалаға оралу керек. Қала арасында жол құны $C = \|c_{ij}\|$ матрицасымен берілген.

Коммивояжер туралы есептің математикалық моделі:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер i-қаладан кейін j-қалаға барса} \\ 0, & \text{қарсы жағдайда.} \end{cases}$$

Негізгі түсініктер

Цикл (t) деп реттелген қалалар жиынтығын (маршрутты) айтады, егер ол әрбір қаладан бір-бір реттен ғана өтсе

$$t = \left[(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\right]$$

Сонда коммивояжердің жалпы жол шығыны t цикліне:

$$z(t) = \sum_{(i,j)} C_{ij}$$

Циклде матрицаның әрбір жолы және әрбір бағанының бір элементі ғана болады:

Егер i-ші жолдың әрбір элементінен немесе j-бағанның әрбір элементінен минимальдысын алсақ, онда келтірілген матрицаны табамыз.

Келтіру процесінде табылған минимальды элементтердің қосындысы – ол келтірілген константы болады ($h^{(k)}$), k – келтіру процесінің нөмірі.

8.1. Литтл алгоритмі

1 - қадам. k=1.

2 - қадам. Келтірілген матрицаны табу.

$$C'_{ij} = \min_j C_{ij}$$

$$C^*_{ij} = C_{ij} - C^*_{ij}$$

$$C''_{ij} = \min_i C^*_{ij}$$

$$C^{**}_{ij} = C^*_{ij} - C''_{ij}$$

Ол үшін әрбір жолдың оң жағына ең кіші (минимальды) элементті (коэффициентті) жазып, жолдың әрбір элементінен алып тастаймыз. Содан соң матрицаның төмен жағына әрбір бағанның минимальды элементін жазып, бағанның әрбір элементінен алып тастаймыз.

3 - қадам. Келтірілген константаны табу. $h^{(k)}$ (минимальды элементтердің қосындысы), ол X жиынының төменгі шекарасы болады (мақсатты функцияның) $\omega(x) = h^{(k)}$.

4 - қадам. Тарауға (Y жиыны) үміткерлер жұбын таңдау.

5 - қадам. Үміткерлер үшін бағаларын анықтау:

$$\theta(i,j) = \min_{i' \neq i} C_{i'j} + \min_{j' \neq j} C_{ij'}$$

6 - қадам. Барлық бағалардың ішінен ең үлкенін таңдаймыз:

$$\theta(k,l) = \max \theta(i,j)$$

7 - қадам. $\overline{Y}$ жиыны үшін бағасын есептеу:

$$\omega(\overline{Y}) = \omega(x) + \theta(k,l)$$

8-қадам. Әрбір пункттен (қаладан) бір реттен ғана шығатын болғандықтан k–жолды матрицадан сызып тастаймыз. Әрбір қалаға (пунктке) бір-бір реттен ғана кіргендіктен, l-бағанды да матрицадан сызып тастаймыз (шығарып тастаймыз). Пункттердің (қалалардың) барлығын аралау үшін (l,k) жұбына ∞ қоямыз.

9 - қадам. Тексеру: алынған матрицаның шамасы 2х2 болса, екі жұп тарауға таңдалады. Қарсы жағдайда 10-қадамға көшу.

10 - қадам. Келтіру рәсімі жасалады, $h^{(k+1)}$ есептелінеді, Y жиынының бағасын анықтаймыз $\omega(Y) = \omega(x) + h^{(k+1)}$, $k = k+1$, 4-қадамға көшу.

19- мысал

Коммивояжер 5 пунктке (немесе қалаға) минимальды жолмен бір-бір реттен ғана кіріп, алғашқы (басқа) қалаға оралуы қажет. Пункттер (немесе қалалар) арасындағы жол құны келесі матрицамен берілген:

8.1-кесте

	1	2	3	4	5	6
1	×	2	6	5	3	7
2	1	×	4	5	4	2
3	3	7	×	6	7	3
4	5	3	7	×	4	2
5	2	7	4	3	×	5
6	4	3	6	1	7	×

Шешімі.

1-қадам. $k = 1$.

2-қадам. Келтірілген матрицаны табамыз.

8.2-кесте

	1	2	3	4	5	6	
1	×	2	6	5	3	7	2
2	1	×	4	5	4	2	1
3	3	7	×	6	7	3	3
4	5	3	7	×	4	2	2
5	2	7	4	3	×	5	2
6	4	3	6	1	7	×	1

$\Rightarrow$

8.3-кесте

	1	2	3	4	5	6
1	×	0	4	3	1	5
2	0	×	3	4	3	1
3	0	4	×	3	4	0
4	3	1	5	×	2	0
5	0	5	2	1	×	3
6	3	2	5	0	6	×
	0	0	2	0	1	0

$h^{(1)} = 14$

8.4-кесте

	1	2	3	4	5	6
1	×	0	2	3	0	5
2	0	×	1	4	2	1
3	0	4	×	3	3	0
4	3	1	3	×	1	0
5	0	5	0	1	×	3
6	3	2	3	0	5	×

3-қадам. Келтірілген константаны табамыз. $\omega(x) = h^{(1)} = 14$.

4-қадам. Тарауға үміткерлер жұбын таңдау.

5-қадам. Үміткерлер үшін бағаларын анықтау:

$$\theta(i,j) = \min_{i' \neq i} C_{i'j} + \min_{j' \neq j} C_{ij'}$$

$c_{12} = 0 \quad \theta(1,2) = 1$

$c_{15} = 0 \quad \theta(1,5) = 0$

$c_{21} = 0 \quad \theta(2,1) = 1$

$c_{31} = 0 \quad \theta(3,1) = 0$

$c_{36} = 0 \quad \theta(3,6) = 0$

$c_{46} = 0 \quad \theta(4,6) = 1$

$c_{51} = 0 \quad \theta(5,1) = 0$

$c_{53} = 0 \quad \theta(5,3) = 1$

$c_{64} = 0 \quad \theta(6,4) = 3$

6 - қадам. Барлық бағалардың ішінен ең үлкенін таңдаймыз: $\theta(6,4) = 3$.

7 - қадам. $\overline{Y}$ жиыны үшін бағасын есептеу:

$\omega(\overline{Y}) = \omega(x) + \theta(k,l) = 14 + 3 = 17$.

8-қадам. Әрбір пункттен (қаладан) бір реттен ғана шығатын болғандықтан 6–жолды матрицадан сызып тастаймыз. Әрбір қалаға (пунктке) бір-бір реттен ғана кіргендіктен, 4-бағанды да матрицадан сызып тастаймыз (шығарып тастаймыз). Пункттердің (қалалардың) барлығын аралау үшін (4,6) жұбына ∞ қоямыз.

8.5-кесте

	1	2	3	5	6	
1	×	0	2	0	5	0
2	0	×	1	2	1	0
3	0	4	×	3	0	0
4	3	1	3	1	×	1
5	0	5	0	×	3	0

$\Rightarrow$

8.6-кесте

	1	2	3	5	6
1	×	0	2	0	5
2	0	×	1	2	1
3	0	4	×	3	0
4	2	0	2	0	×
5	0	5	0	×	3
	0	0	0	0	0

$h^{(2)} = 1$

$c_{12} = 0 \quad \theta(1,2) = 0$

$c_{15} = 0 \quad \theta(1,5) = 0$

$c_{21} = 0 \quad \theta(2,1) = 1$

$c_{31} = 0 \quad \theta(3,1) = 0$

$c_{36} = 0 \quad \theta(3,6) = 0$

$c_{42} = 0 \quad \theta(4,2) = 0$

$c_{45} = 0 \quad \theta(4,5) = 0$

$c_{51} = 0 \quad \theta(5,1) = 0$

$c_{53} = 0 \quad \theta(5,3) = 1$

9 - қадам. Тексеру: алынған матрицаның шамасы 2x2 болса, екі жұп тарауға таңдалады. Қарсы жағдайда 10-қадамға көшу.

10 - қадам. Келтіру рәсімі жасалады, $h^{(k+1)}$ есептелінеді, Y жиынының бағасын анықтаймыз $\omega(Y) = \omega(x) + h^{(2)} = 14 + 1 = 15$, $k = k + 1$, 4-қадамға көшу.

8.7-кесте

	1	2	5	6	
1	×	0	0	5	0
2	0	×	2	1	0
3	0	4	3	0	0
4	2	0	0	×	0

8.8-кесте

	1	2	5	6
1	×	0	0	5
2	0	×	2	1
3	0	4	3	0
4	2	0	0	×
	0	0	0	0

$h^{(3)} = 0$

$c_{12} = 0 \quad \theta(1,2) = 0$

$c_{15} = 0 \quad \theta(1,5) = 0$

$c_{21} = 0 \quad \theta(2,1) = 1$

$c_{31} = 0 \quad \theta(3,1) = 0$

$c_{36} = 0 \quad \theta(3,6) = 1$

$c_{42} = 0 \quad \theta(4,2) = 0$

$c_{45} = 0 \quad \theta(4,5) = 0$

8.9-кесте

	1	2	5	
1	×	0	0	0
2	0	×	2	0
4	2	0	0	0

8.10-кесте

	1	2	5
1	×	0	0
2	0	×	2
4	2	0	0
	0	0	0

$$\omega(x) = h^{(4)} = 0$$

$$c_{12} = 0 \quad \theta(1,2) = 0$$
$$c_{15} = 0 \quad \theta(1,5) = 0$$
$$c_{21} = 0 \quad \theta(2,1) = 4$$
$$c_{42} = 0 \quad \theta(4,2) = 0$$
$$c_{45} = 0 \quad \theta(4,5) = 0$$

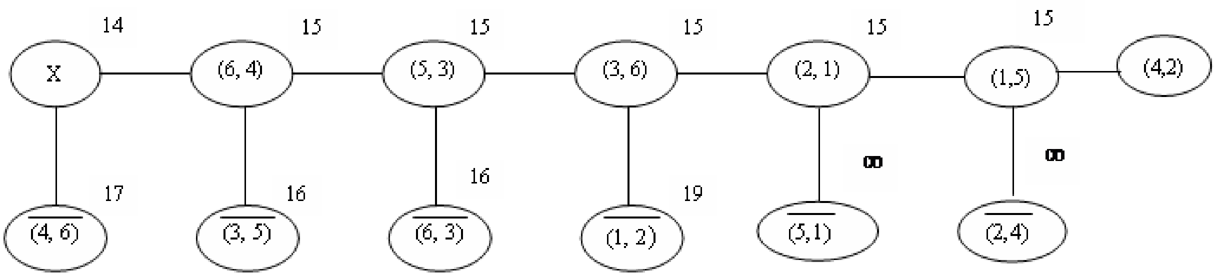
8.11-кесте

	2	5	
1	×	0	0
4	0	0	0

$$h^{(5)} = 0$$

$$6 \to 4 \to 2 \to 1 \to 5 \to 3 \to 6$$
$$Z^* = 15$$

Шешімі 8.1- суреттегі бұтақта келтірілген



8.1- сурет

8-тапсырма. Келесі есептерді Литтл алгоритмін қолданып шығарыңыз:

1)

	1	2	3	4	5	6
1	×	39	45	2	51	33
2	30	×	20	33	40	35
3	54	16	×	55	22	56
4	19	36	25	×	18	43
5	29	8	8	12	×	25
6	16	47	31	14	8	×

2)

	1	2	3	4	5	6
1	×	6	56	35	48	29
2	34	×	46	46	55	26
3	29	31	×	32	13	42
4	26	34	12	×	17	7
5	38	35	40	13	×	47
6	60	25	59	36	31	×

3)

	1	2	3	4	5	6
1	×	4	39	22	10	47
2	58	×	56	18	4	35
3	34	29	×	17	57	18
4	52	4	22	×	15	37
5	41	44	25	11	×	32
6	11	6	19	2	58	×

4)

	1	2	3	4	5	6
1	×	15	43	38	10	45
2	44	×	18	6	49	40
3	41	42	×	19	1	48
4	33	44	20	×	20	21
5	40	17	16	26	×	15
6	3	4	37	54	36	×

5)

	1	2	3	4	5	6
1	×	58	56	13	21	54
2	21	×	58	43	56	14
3	4	46	×	38	7	22
4	44	56	42	×	6	60
5	3	34	36	11	×	17
6	59	47	40	60	13	×

6)

	1	2	3	4	5	6
1	×	36	51	24	11	46
2	28	×	17	46	10	20
3	7	41	×	58	2	35
4	25	60	45	×	55	59
5	48	20	33	26	×	38
6	50	27	19	14	52	×

7)

		1	2	3	4	5
1	×	16	15	32	53	55
2	27	×	34	50	2	31
3	33	39	×	42	36	39
4	45	22	59	×	28	26
5	55	49	14	18	×	12
6	28	14	8	48	35	×

8)

	1	2	3	4	5	6
1	×	33	41	46	11	21
2	10	×	26	28	39	43
3	1	57	×	20	60	28
4	50	25	35	×	42	7
5	43	44	51	19	×	34
6	55	22	30	50	53	×

9)

	1	2	3	4	5	6
1	×	13	55	19	16	19
2	58	×	23	54	48	45
3	25	53	×	38	59	24
4	17	11	16	×	60	53
5	1	38	18	36	×	1
6	19	11	32	44	3	×

10)

	1	2	3	4	5	6
1	×	30	57	34	24	44
2	14	×	9	14	30	17
3	32	21	×	53	21	23
4	25	39	28	×	48	21
5	42	5	29	56	×	55
6	16	17	37	5	30	×

11)

	1	2	3	4	5	6
1	×	11	14	22	17	30
2	20	×	10	54	31	4
3	5	18	×	29	20	40
4	31	3	23	×	42	33
5	34	13	33	5	×	32
6	39	44	28	42	2	×

12)

	1	2	3	4	5	6
1	×	10	26	44	21	17
2	14	×	23	22	54	58
3	33	4	×	5	49	57
4	42	55	29	×	14	35
5	20	53	38	40	×	33
6	52	17	45	41	50	×

13)

	1	2	3	4	5	6
1	×	40	34	50	10	44
2	18	×	3	38	52	10
3	23	12	×	47	42	5
4	54	29	56	×	9	2
5	17	31	23	8	×	4
6	28	53	58	15	41	×

14)

	1	2	3	4	5	6
1	×	37	7	46	57	20
2	26	×	34	10	42	16
3	42	1	×	26	21	13
4	30	20	60	×	50	10
5	43	47	28	38	×	36
6	16	17	53	36	2	×

15)

	1	2	3	4	5	6
1	×	44	6	49	28	53
2	40	×	4	30	42	51
3	3	47	×	55	20	24
4	1	26	30	×	33	47
5	18	24	13	33	×	46
6	56	25	11	22	40	×

16)

	1	2	3	4	5	6
1	×	19	40	30	15	9
2	56	×	14	57	12	8
3	42	4	×	28	33	24
4	1	12	5	×	21	16
6	21	16	38	52	×	59
7	51	1	17	22	29	×

17)

	1	2	3	4	5	6
1	×	28	29	2	2	58
2	48	×	41	13	51	23
3	56	53	×	59	46	57
4	5	31	48	×	53	20
5	26	54	42	48	×	27
6	43	22	15	30	9	×

18)

	1	2	3	4	5	6
1	×	52	8	50	4	16
2	38	×	39	51	13	44
3	55	51	×	1	27	27
4	18	39	5	×	28	21
5	4	3	44	17	×	29
6	57	28	52	21	53	×

19)

	1	2	3	4	5	6
1	×	12	41	57	45	17
2	49	×	48	42	40	53
3	22	5	×	23	51	2
4	23	8	19	×	46	26
5	49	44	3	22	×	21
6	22	56	54	16	54	×

20)

	1	2	3	4	5	6
1	×	16	2	11	10	11
2	3	×	29	29	5	37
3	43	25	×	31	35	36
4	50	40	9	×	4	2
5	46	39	15	14	×	59
6	52	37	45	27	60	×

21)

	1	2	3	4	5	6
1	×	21	17	21	41	10
2	51	×	25	35	16	32
3	5	16	×	38	21	50
4	37	12	28	×	2	2
5	22	54	49	31	×	9
6	43	51	7	19	30	×

22)

	1	2	3	4	5	6
1	×	10	7	36	40	36
2	34	×	58	48	33	53
3	47	30	×	59	10	15
4	31	12	15	×	22	11
5	9	16	3	13	×	9
6	36	4	14	20	48	×

23)

	1	2	3	4	5	6
1	×	1	7	3	14	2
2	3	×	6	9	1	24
3	6	14	×	3	7	3
4	2	3	5	×	9	4
5	15	7	11	2	×	4
6	20	5	13	4	13	×

24)

	1	2	3	4	5	6
1	×	7	10	13	4	2
2	11	×	5	6	18	10
3	13	4	×	8	6	2
4	7	5	10	×	15	12
5	11	13	4	3	×	8
6	7	6	4	10	14	×

25)

	1	2	3	4	5	6	7
1	×	6	12	6	4	8	1
2	6	×	10	5	4	3	3
3	8	7	×	11	3	11	8
4	5	4	11	×	5	8	6
5	5	2	7	8	×	4	7
6	6	3	11	5	4	×	2
7	2	3	9	7	4	3	×

26)

	1	2	3	4	5	6
1	×	2	6	5	3	7
2	1	×	4	5	4	2
3	3	7	×	6	7	3
4	5	3	7	×	4	2
5	2	7	4	3	×	5
6	4	3	6	1	7	×

27)

	1	2	3	4	5	6	7
1	×	5	9	6	3	5	9
2	8	×	8	8	5	9	2
3	6	9	×	1	6	7	3
4	7	11	4	×	4	2	9
5	4	6	3	2	×	2	8
6	5	2	2	8	4	×	3
7	8	1	3	16	5	3	×

28)

	1	2	3	4	5	6
1	×	6	4	8	7	14
2	6	×	7	11	7	10
3	4	7	×	4	3	10
4	8	11	4	×	5	11
5	7	7	3	5	×	7
6	14	10	10	11	7	×

29)

	1	2	3	4	5	6	7
1	×	12	22	28	32	40	46
2	12	×	10	40	20	28	34
3	22	10	×	50	10	18	24
4	28	27	17	×	27	35	41
5	32	20	10	60	×	8	14
6	46	34	24	74	14	×	6
7	52	40	30	80	20	6	×

30)

	1	2	3	4	5
1	×	14	9	16	7
2	20	×	9	19	14
3	18	15	×	12	12
4	23	10	13	×	17
5	7	6	6	6	×

9. ДИНАМИКАЛЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ

9.1. Динамикалық басқаруды әр кезең бойынша құру принциптері

Динамикалық бағдарламалау – көп қадамды процесті әр кезең бойынша жоспарлау, оның үстіне бүкіл процестің дамуын еске ала отырып, әр кезеңде тек бір ғана қадамды оптималды күйге келтіру (оптималдау).

Шешім қабылдауы болашақ кезден тәуелсіз соңғы k қадамда ең үлкен әсер бере алатын басқару таңдалады. Осы қадам жоспарланған соң оған ақырғы қадам алдындағы (к-1) қадамын, оның үстіне (к-2) қадамын және тағы сол сияқты қосады. Соңғы қорытынды бойынша S_0 алғашқы күйді табады:

1) k қадамын жоспарлау үшін, (к-1) қадамда жүйенің қалпын білу қажет.

Егер (к-1) қадамда жүйенің қалпы белгілі болмаса, онда берілген процестің сипаттамаларын басшылыққа ала отырып, жүйенің мүмкін болар қалыптары туралы әртүрлі болжам жасалады:

$$S_n = F(S_{(n-1)}, U_n) \qquad (9.1)$$

Жүйенің қалпы n- қадамының ($n = \overline{1, k-1}$) соңында тек оның алдындағы қалыпқа S(n-l) және берілген қадамдағы U_n басқаруға тәуелді.

Жүйенің мұндай қасиеті "кейінгі әсердің жоқтығы" деп аталады, ал (9.1) - қалып теңдеуі деп аталады.

2) Соңғы k-қадамда әрбір болжамға $S_{(k-1)}$ оптималды басқару таңдалады:

$$Z_k^*(U_k^*(S_{(k-1)})) = \underset{U_k \in D_k}{extr} f_k(U_k, S_{(k-1)}) \qquad (9.2)$$

мұндағы, $f_k(U_k, S_{(k-1)})$ -қадамдағы тиімділік көрсеткіші;

D_k - дәлдік шектегі басқарулар саласы.

Мұндай оптималды басқару шартты оптималды басқару деп аталады.

3) (n-1)- қадамда дәл осылай істейміз, тек шартты оптималды басқаруды n - шартты оптималды басқаруды ескере отырып, таңдаймыз:

$$Z_n^*(U_n^*(S_{(n-1)})) = \underset{U_n \in D_n}{extr}\left\{f_{nk}(U_n, S_{(n-1)}) + Z^*{}_{(n+1)}(U_{(n+1)}(S_n))\right\} \qquad (9.3)$$

(9.3)-динамикалық бағдарламаның негізгі функционалды теңдеуі немесе Беллман теңдеуі деп аталады.

(9.3)-теңдеуі берілген n-қадамнан k-ші қадамға дейінгі тиімділіктер қосындысын сипаттайды.

4) Соңында алғашқы күйге келеміз $S_0 \in \breve{S}_0$. Бірінші қадам үшін мүмкін болар күй - қалып туралы болжамдар жасамаймыз, өйткені ол жағдай белгілі S_0- қалыптан S_k -қалпына өтіп бүкіл процесс үшін іздеген оптималды басқаруды табамыз.

9.2. Динамикалық бағдарламаның есептеу схемасы

Бірінші кезең.

1° 9.3 - теңдеуді шешуді тізбек бойынша 9.2- теңдеуді шешуден бастап жүргізеді— бұл шартты оптималдау кезеңі.

2° Экстремум шарттарына сәйкес k жеке есептердің соңғы шешулерінің қорытындылары бойынша функциялардың екі тізбегін анықтайды:

$Z_n^*(U_n^*(S_{(n-1)}))$ және $U_n^*(S_{(n-1)})$.

Бұл функциялар дискретті есептерде кесте түрінде, ал үздіксіз есептерде аналитикалық түрде алынады.

Екінші кезең.

3° 1-кезеңді орындаған соң (шартты оптималдау кезеңін) 2-кезеңге көшеміз (шартсыз оптималдау кезеңі):

а) Егер S_0 берілсе, онда

$$Z^* = Z_1^*(U_1^*(S_0)) \qquad (9.4)$$

табамыз, содан соң іздеген шартсыз оптималды басқаруды тізбек бойынша табамыз:

$$S_0 \to U_1^* \to S_1 \to U_2^* \to \ldots \to U_n^* \qquad (9.5)$$

ә) Егер S_0 белгісіз болса, онда S_0 келесі есептің нәтижесіндей:

$$S_0^* : Z^* = \underset{s_0 \in s_0}{\overset{\cup}{extr}} \left\{ Z_1^*(U_1^*(S_0)) \right\} \qquad (9.6)$$

осыдан (9.5) бойынша оптималды басқаруды табамыз.

9.3. Динамикалық бағдарлама моделін құру ережесі

1°. Қадамдарға бөлудің тәсілдерін таңдайды;

2°. Қалып параметрлерін енгізеді $S_n = (S_{n1}, \ldots, S_{np})$ және басқару айнымалыларды енгізеді $U_n = (U_{n1}, \ldots, U_{nr})$;

3°. Қалып теңдеуін (9.1) құрастырып жазады;

4°. n-қадамда тиімділік көрсеткішін енгізеді және мақсатты функциясының тиімділіік көрсеткішін қосады:

$$Z = \sum_{n=1}^{k} f_n(U_n, S_{(n-1)}); \qquad (9.7)$$

5°. Қарастыруға extr шарттарын $Z_n^*(U_n^*(S_{(n-1)}))$ n- қадамынан процестің ақырына дейінгі тиімділік көрсеткіштерін және осы қадамда шартты оптималды басқаруды $U_n^*(S_{(n-1)})$ енгізеді;

6°. Әрбір қадам үшін есеп шектеулерінен n-қадамдағы дәлдік шектегі басқару жиынын D_n анықтайды;

7°. Беллманның (9.2) және (9.3) функционалды теңдеулерін жазу.

20- мысал

Дискретті есеп

Төрт мекемеге бөлінетін қаржы мөлшері 100 мың теңгеге тең. Бұл қаржыны 20 мың теңгеге есе болатындай етіп бөлу керек. Келесі кестеде әрбір мекемеден түсетін түсім функциясы берілген:

$f(x)$ / x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
20	9	11	16	13
40	18	19	32	27
60	24	30	40	44
80	38	44	57	69
100	50	59	70	73

$x_1, x_2, x_3, x_4 -$ әрбір мекемеге бөлінетін қаржы.

$\xi_1 = \xi_0 - x_4$

$\xi_2 = \xi_1 - x_3$

$\xi_3 = \xi_2 - x_2$

1- қадам. Барлық қаржы бірінші мекемеге бөлінеді.

$x_1^*(0) = 0, \quad x_1^*(20) = 0, \quad x_1^*(40) = 0, \quad x_1^*(60) = 0, \quad x_1^*(80) = 0, \quad x_1^*(100) = 0.$

2- қадам. Барлық қаржы екі мекемеге бөлінеді.

1) $Z = 0, \quad D_{1,2} = 0, \quad x_2^*(0) = 0.$

2) $Z = 20, \quad D_{1,2}(20) = \max[f_2(20) + D_1(0); f_2(0) + D_1(20)] = \max[11; 9], \quad x_2^*(20) = 20.$

3) $Z = 40, \quad D_{1,2}(40) = \max[f_2(0) + D_1(40); f_2(20) + D_1(20); f_2(40) + D_1(0)] =$

$= \max[18; 20; 19] = 20, \quad x_2^*(40) = 20.$

4) $Z = 60, \quad D_{1,2}(60) = max[f_2(0) + D_1(60); f_2(20) + D_1(40); f_2(40) + D_1(20);$

$f_2(60) + D_1(0)] = max[24; 37; 28; 30] = 37, \quad x_2^*(60) = 20.$

5) $Z = 80, \quad D_{1,2}(80) = max[f_2(0) + D_1(80); f_2(40) + D_1(40);$

$f_2(60) + D_1(20); f_2(20) + D_1(40); f_2(80) + D_1(0)] = max[24; 37;$

$28; 30] = 37, \quad x_2^*(80) = 80.$

6) $Z = 100, \quad D_{1,2}(100) = max[f_2(0) + D_1(100); f_2(20) + D_1(80);$

$f_2(40) + D_1(60); f_2(60) + D_1(40); f_2(80) + D_1(20);$

$f_2(100) + D_1(0)] = max[50; 49; 43; 48; 53; 59] = 59, \quad x_2^*(100) = 100.$

3- қадам. Барлық қаржы үш мекемеге бөлінеді.

1) $Z = 0, \quad D_{1,2,3} = 0, \quad x_3^*(0) = 0.$

2) $Z = 20, \quad D_{1,2,3}(20) = max[f_3(0) + D_{1,2}(20);$

$f_3(20) + D_{1,2}(0)] = max[11; 16] = 16, \quad x_2^*(20) = 20.$

3) $Z = 40, \quad D_{1,2,3}(40) = max[f_3(0) + D_{1,2}(40); f_3(20) + D_{1,2}(20);$

$f_3(40) + D_{1,2}(0)] = max[20; 27; 32] = 32, \quad x_3^*(40) = 40.$

4) $Z = 60, \quad D_{1,2,3}(60) = max[f_3(0) + D_{1,2}(60); f_3(20) + D_{1,2}(40);$

$f_3(40) + D_{1,2}(20); f_3(60) + D_{1,2}(0)] = max[37; 36; 43; 40] = 43,$

$x_3^*(60) = 40.$

5) $Z = 80, \quad D_{1,2,3}(80) = max[f_3(0) + D_{1,2}(80); f_3(20) + D_{1,2}(60);$

$f_3(40) + D_{1,2}(40); f_3(60) + D_{1,2}(20); f_3(80) + D_{1,2}(0)] = max[44; 53;$

$52; 51; 57] = 57, \quad x_3^*(80) = 80.$

6) $Z = 100, \quad D_{1,2,3}(100) = max[f_3(0) + D_{1,2}(100); f_3(20) + D_{1,2}(80);$

$f_3(40) + D_{1,2}(60); f_3(60) + D_{1,2}(40); f_3(80) + D_{1,2}(20);$

$f_3(100) + D_{1,2}(0)] = max[59; 60; 69; 60; 68; 70] = 70, x_3^*(100) = 100.$

4- қадам. Барлық қаржы төрт мекемеге бөлінеді.

$Z = 100, \quad D_{1,2,3,4}(100) = max[f_4(0) + D_{1,2,3}(100); f_4(20) + D_{1,2,3}(80);$

$f_4(40) + D_{1,2,3}(60); f_4(60) + D_{1,2,3}(40); f_4(80) + D_{1,2,3}(20);$

$f_4(100) + D_{1,2,3}(0)] = max[70; 70; 70; 76; 85; 73] = 85, \ x_4^*(100) = 80.$

$\xi_0 = 100$

$x_4^*(100) = 80, \quad \xi_1 = \xi_0 - x_4 = 100 - 80 = 20.$

$x_3^*(20) = 20, \quad \xi_2 = \xi_1 - x_3 = 20 - 20 = 0.$

$x_2^*(0) = 0, \quad \xi_3 = \xi_2 - x_2 = 0.$

$x_1^*(0) = 0.$

Жауабы:

$X^* = \{0; 0; 20; 80\},$

$Z^* = 85.$

Үздіксіз есеп

21-мысал

Екі өндірісті дамыту үшін төрт жылғы қаржы $z_0 = \xi_0 = 10$ мың теңге бөлінген. Бір жылғы қаржы мөлшері 1 - өндірістен кіріс $f_1(x) = x^2$ алуға мүмкіндік береді және келесі мөлшерге дейін азаяды $\varphi_1(x) = 0{,}6x$. Оған сәйкес 2-өндірістен: $f_2(y) = 2y^2$, $\varphi_2(y) = 0{,}3y$. Жылдың соңында қалған қаржы қайта бөлінеді (өндіріске енгізіледі). Жаңа қаржы өндіріске түспейді. Қаржы жыл сайын толық бөлінеді.

Толық кіріс максимальды болатындай етіп қаржыларды бөлу керек.

Есептің шешімі:

Төрт жылды 4 кезеңге бөлеміз (әр жылға сәйкес бір кезең).

$k = 4, \quad \mathrm{n} = 4, 3, 2, 1$

Тәуелсіз айнымалыларды енгіземіз (есепте бір айнымалы болған дұрыс):

$x_k - \mathrm{k}$ - жылы 1-өндіріске бөлінген қаржы.

Қаржы жыл сайын толық бөлінгендіктен 2-өндіріске келесідей болады:

$y_k = \xi_{k-1} - x_k$

Осы жағдайда есеп бір өлшемді болады.

n – қадамның тиімділік көрсеткіші:

$$f_1(x_k) + f_2(\xi_{k-1} - x_k) = x_k^2 + 2(\xi_{k-1} - x_k)^2 = 3x_k^2 + 2\xi_{k-1}^2 - 4\xi_{k-1}x_k$$

n – жылдан қалған қалдықтар:

$$\varphi_1(x_k) + \varphi_2(\xi_{k-1} - x_k) = 0{,}6x_k + 0{,}3(\xi_{k-1} - x_k) = 0{,}3x_k + 0{,}3\xi_{k-1}$$

Соңғы жылдың оптималды басқаруы:

$$z_4^*(\xi_3) = \max_{0 \le x_4 \le \xi_3} \left\{3x_4^2 + 2\xi_3^2 - 4x_4\xi_3\right\}$$

Негізгі функционалды теңдеу:

$$z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0 \le x_k \le \xi_{k-1}} \left\{3x_k^2 + 2\xi_{k-1}^2 - 4x_k\xi_{k-1} + z_{k+1}^*(0{,}3x_k + 0{,}3\xi_{k-1})\right\}, \quad \mathrm{k} = 3, 2, 1.$$

Есептеулер:

Бірінші қадам. Шартты оптималдау кезеңі:

1) $Z_4^*(\xi_3) = \max\limits_{0 \le x_4 \le \xi_3} \left\{3x_4^2 + 2\xi_3^2 - 4x_4\xi_3\right\} = \max\limits_{0 \le x_4 \le \xi_3} \left\{2\xi_3^2;\ \xi_3^2\right\} = 2\xi_3^2$,

$x_4^*(\xi_3) = 0$.

2) $Z_3^*(\xi_2) = \max\limits_{0 \le x_3 \le \xi_2} \left\{3x_3^2 + 2\xi_2^2 - 4x_3\xi_2 + 2(0{,}3x_3 + 0{,}3\xi_2)^2\right\} =$

$$= \max_{0 \le x_3 \le \xi_2} \left\{3x_3^2 + 2\xi_2^2 - 4x_3\xi_2 + 2(0{,}09x_3^2 + 0{,}18x_3\xi_2 + 0{,}09\xi_2^2)\right\} =$$

$$= \max_{0 \le x_3 \le \xi_2} \left\{3x_3^2 + 2\xi_2^2 - 4x_3\xi_2 + 0{,}18x_3^2 + 0{,}36x_3\xi_2 + 0{,}18\xi_2^2)\right\} =$$

$$= \max_{0 \le x_3 \le \xi_2} \left\{3{,}18x_3^2 + 2{,}18\xi_2^2 - 3{,}64x_3\xi_2\right\} = \max_{0 \le x_3 \le \xi_2} \left\{2{,}18\xi_2^2;\quad 1{,}72\xi_2^2\right\} = 2{,}18\xi_2^2,$$

$x_3^*(\xi_2) = 0$.

3) $Z_2^*(\xi_1) = \max\limits_{0 \le x_2 \le \xi_1} \left\{3x_2^2 + 2\xi_1^2 - 4x_2\xi_1 + 2{,}18(0{,}3x_2 + 0{,}3\xi_1)^2\right\} =$

$$\max_{0 \le x_2 \le \xi_1} \left\{3x_2^2 + 2\xi_1^2 - 4x_2\xi_1 + 2{,}18(0{,}09x_2^2 + 0{,}18x_2\xi_1 + 0{,}09\xi_1^2)\right\} =$$

$$= \max_{0 \le x_2 \le \xi_1} \left\{3x_2^2 + 2\xi_1^2 - 4x_2\xi_1 + 0{,}1962x_2^2 + 0{,}3924x_2\xi_1 + 0{,}1962\xi_1^2\right\} =$$

$$= \max_{0 \le x_2 \le \xi_1} \left\{3{,}1962x_2^2 + 2{,}1962\xi_1^2 - 3{,}6076x_2\xi_1\right\} = \max_{0 \le x_2 \le \xi_1} \left\{2{,}1962\xi_1^2; 1{,}7848\xi_1^2\right\} = 2{,}1962\xi_1^2,$$

$x_2^*(\xi_1) = 0$.

4) $Z_1^*(\xi_0) = \max\limits_{0 \le x_1 \le \xi_0} \left\{3x_1^2 + 2\xi_0^2 - 4x_1\xi_0 + 2{,}1962(0{,}3x_1 + 0{,}3\xi_0)^2\right\} =$

$= \max\limits_{0 \le x_1 \le \xi_0} \left\{3x_1^2 + 2\xi_0^2 - 4x_1\xi_0 + 2{,}1962(0{,}09x_1^2 + 0{,}18x_1\xi_0 + 0{,}09\xi_0^2)\right\} =$

$= \max\limits_{0 \le x_1 \le \xi_0} \left\{3x_1^2 + 2\xi_0^2 - 4x_1\xi_0 + 0{,}1977x_1^2 + 0{,}3953x_1\xi_0 + 0{,}1977\xi_0^2\right\} =$

$= \max\limits_{0 \le x_1 \le \xi_0} \left\{3{,}1977x_1^2 + 2{,}1977\xi_0^2 - 3{,}6047x_1\xi_0\right\} = \max\limits_{0 \le x_1 \le \xi_0} \left\{2{,}1977\xi_0^2;\quad 1{,}7907\xi_0^2\right\} = 2{,}1977\xi_0^2$,

$x_1^*(\xi_0) = 0$.

Екінші қадам. Шартсыз оптималдау кезеңі:

$\xi_0 = 10, \quad z_{\max} = 2{,}1977\xi_0^2 = 219{,}77.$

$x_1^* = 0.$

$\xi_1 = 0{,}3x_1 + 0{,}3\xi_0 = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 10 = 3,$

$z_2^* = 2{,}1962\xi_1^2 = 2{,}1962 \cdot 9 = 19{,}7658$,

$x_2^* = 0.$

$\xi_2 = 0{,}3x_2 + 0{,}3\xi_1 = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 3 = 0{,}9,$

$z_3^* = 2{,}18\xi_2^2 = 2{,}18 \cdot 0{,}9^2 = 1{,}7658$,

$x_3^* = 0.$

$\xi_3 = 0{,}3x_3 + 0{,}3\xi_2 = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}27,$

$z_4^* = 2\xi_3^2 = 2 \cdot 0{,}27 = 0{,}54$,

$x_4^* = 0$.

Үздіксіз есептің жауабын кесте арқылы келтіруге болады:

Өндіріс	Жылдар			
	1	2	3	4
I	0	0	0	0
II	10	3	0,9	0,27

9 - тапсырма. Келесі есептерді динамикалық бағдарламалау әдісімен шығару керек:

1)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
20	9	11	16	13
40	18	19	32	27
60	24	30	40	44
80	38	44	57	69
100	50	59	70	73

2)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
40	9	11	13	12
80	17	34	28	35
120	29	46	37	40
160	38	53	49	54
200	47	75	61	73

3)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
10	7	9	17	16
20	29	19	27	30
30	37	28	37	42
40	41	37	48	65
50	59	46	66	81

4)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
30	9	12	11	14
60	20	25	20	23
90	35	34	32	40
120	44	46	48	50
150	57	57	61	58

5)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
15	9	8	12	7
30	18	19	25	15
45	29	30	51	52
60	41	47	58	59
75	60	58	69	60

6)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
35	11	13	12	10
70	21	20	22	27
105	40	42	34	33
140	54	45	55	57
175	62	61	60	69

7)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
25	12	16	9	15
50	26	21	17	25
75	40	36	35	51
100	60	49	51	62
125	72	63	65	76

8)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
45	14	12	13	7
90	24	30	25	33
135	37	42	45	46
180	45	58	62	60
225	58	71	70	68

9)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
50	16	10	15	17
100	28	29	27	23
150	36	42	46	38
200	49	50	58	53
250	60	74	65	67

10)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
60	12	14	11	16
120	28	26	24	21
180	39	40	43	36
240	47	51	51	49
300	69	68	68	72

11)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
55	9	11	16	13
110	17	34	28	35
165	37	28	37	42
220	44	46	48	50
275	60	58	69	60

12)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
20	9	11	13	12
40	29	19	27	30
60	37	28	37	42
80	44	46	48	50
100	60	58	69	60

13)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
10	7	9	17	16
20	20	25	20	23
30	29	30	51	52
40	38	44	57	69
50	47	75	61	73

14)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
40	9	12	11	14
80	18	19	25	15
120	29	46	37	40
160	44	46	48	50
200	60	58	69	60

15)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
30	9	8	12	7
60	18	19	32	27
90	29	30	51	52
120	41	37	58	65
150	57	57	61	78

16)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
50	11	13	12	10
100	26	21	17	25
150	37	42	45	46
200	47	51	51	49
250	62	61	60	69

17)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
60	12	16	9	15
120	24	30	25	33
180	36	42	46	38
240	60	49	51	62
300	72	63	65	76

18)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
80	14	12	13	7
160	28	29	27	23
240	39	40	43	36
320	54	45	55	57
400	72	63	65	76

19)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
70	16	10	15	17
140	28	26	24	21
210	40	42	34	33
280	50	49	51	62
350	58	71	70	68

20)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
90	12	14	11	16
180	21	20	22	27
270	40	36	35	51
360	45	58	62	60
450	60	74	65	67

21)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
100	9	11	16	13
200	29	19	27	30
300	39	30	51	52
400	60	49	56	62
500	68	74	65	67

22)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
35	9	11	13	12
70	20	25	20	23
105	40	42	34	33
140	45	58	62	60
175	69	68	68	72

10-тапсырма. Келесі есептерді динамикалық бағдарламалау әдісімен шығару керек:

Вариант	$f_1(x)$	$f_2(y)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(y)$	ξ_0	N
1.	$1-e^{-x}$	$1-e^{-2y}$	$0{,}75x$	$0{,}3y$	2	5
2.	$0{,}5x$	$0{,}7y$	$0{,}5x$	$0{,}6y$	10	5
3.	$0{,}6(x-1)^2$	$0{,}5y^2$	$0{,}9x$	$0{,}1y$	30	5
4.	$1-e^{-2x}$	$1-e^{-3y}$	$0{,}7x$	$0{,}2y$	4	5
5.	x^2	$2y^2$	$0{,}6x$	$0{,}3y$	10	4
6.	$3x^2$	$2y^2$	$0{,}45x$	$0{,}8y$	20	4
7.	x^2	$3y^2$	$0{,}5x$	$0{,}2y$	30	4
8.	$4x^2$	$2y^2$	$0{,}3x$	$0{,}7y$	10	4
9.	$2x^2$	$4y^2$	$0{,}7x$	$0{,}5y$	30	4
10.	$2x^2$	$3y^2$	$0{,}8x$	$0{,}4y$	20	4

10. ТОРАПТЫҚ СЫЗЫҚТЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ

Торап түйіндер және қабырғалар жиынынан тұрады. Егер қабырғаның белгілі бағыты болса, онда ол бағытталған қабырға деп аталады, қарсы жағдайда бағытталмаған болады. Торапқа келесі белгілеулер енгізіледі:

N_i – түйіндер үшін

A_{ij} – N_i түйінінен N_j түйініне апаратын қабырға үшін.

Торап байланысқан деп аталады, егер X тораптың түйіндер жиынының қосалқы $\bar{X}$ жиынға бөлген жағдайда A_{ij} немесе A_{ji} қабырғасы табылса:

$A_{ij}, A_{ji}: N_i \in X$,

$N_j \in \bar{X}$

Тізбек деп түйіндер мен қабырғалар кезектілігін айтады. Тұйық тізбекті цикл деп атайды. Алдыңғы қабырғаның соңы келесі қабырғаның басымен қосылған қабырғалар тізбегін жол деп атайды. Жол бойынша газ, транспорт, сұйықтық жіберіледі.

Торапта екі арнайы түйінді ажыратады:

N_s – алғашқы түйін;

N_t – соңғы түйін.

Ағын x_{ij} деп, әрбір қабырғаға сәйкес келетін және келесі шарттарды қанағаттандыратын оң мағыналы сандар жиынтығын айтады:

$$\sum_i X_{ij} - \sum_k X_{jk} = \begin{cases} -\upsilon, j = S \\ 0, j \neq S, t \\ \upsilon, j \neq t \end{cases} \qquad (10.1)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq dij \qquad (10.2)$$

мұндағы $x_{ij} - A_{ij}$ қабырғасы бойынша ағын;

υ – ағын шамасы;

d_{ij} – доғаның өткізгіштік қабілеттілігі.

(10.1)-шектеу әрбір түйінге (арнайы түйіндерден басқа) кіретін ағын шамасы шығатын шамасына тең екенін білдіреді.

(10.2)-шектеу қабырға бойынша ағын өзінің өткізе алатын қабілеттілігімен шектелетінін көрсетеді.

Тораптық бағдарламалау әдістері келесі есептерді шығаруға арналған:

1) ең қысқа жол есебі;
2) максимальды ағын есебі;
3) белгілеу есебі;
4) сұраныс пен ұсыныс есебі;
5) ресурстарды үлестіру туралы есеп.

Мысалы, максимальды ағын есебінің математикалық моделі келесі түрде жазылады:

$$\max \upsilon = \sum_j X_{sj} \tag{10.3}$$

$$\sum_i X_{ij} - \sum_k X_{jk} = \begin{cases} -\upsilon, j = S \\ 0, j \neq S, t \\ \upsilon, j = t \end{cases}$$

$$0 \le x_{ij} \le dij$$

A_{ij} қабырғаның жиынтығын кесік (тілік) $(X, \bar{X})$ деп атайды, егер $N_i \in X$, $N_j \in \bar{X}$ болса, немесе керісінше. Кесіктің өткізе алатын қабілеттілігі: $d(X, \bar{X}) = \sum_{(i,j)} d_{ij}$. Мұндағы қосынды барлық қабырғалар бойынша алынады. Алғашқы түйінді соңғы түйінмен қосатын минимальды өткізу қабілеттілігі бар кесікті минимальды кесік деп атайды.

10.1. Форд-Фалкерсон әдісі

1-теорема. Егер $C = \|C_{i,j}\|$ матрицасы бар есеп үшін оптималды шешім болса, онда ол шешім түрлендірілген матрицасы бар, мұндағы

$C^1 = \|C^1{}_{ij}\|, C^1{}_{ij} = C_{ij} \pm \delta \ \forall \ (i, j),$ есептің де оптималды шешімі болады.

2-теорема.Түрлендірілген есептің шешімі оптималды болу үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті:

1) $C_{ij} > 0, \quad X_{ij} = 0$

2) $C_{ij} < 0, \quad X_{ij} = d_{ij}$

3) $C_{ij} = 0, \; 0 \le X_{ij} \le d_{ij}$

Форд-Фалкерсон әдісінің алгоритмі:

1^0 Торапқа алғашқы және соңғы түйіндер енгізіп, келесі мәндерді табамыз:

$$a_s = \sum_{j \in s} a_{ij}, \qquad b_t = \sum_{j \in T} b_j$$

2^0 Барлық қабырғалар бойынша алғашқы ағын 0-ге тең:

$$X_{ij} = 0 \qquad \forall (i, j)$$

3^0 Алғашқы түйінді белгілеу: $S = \left[-, a_s \right]$

4^0 Алғашқы түйінмен байланысқан түйіндер үшін белгілеулер жүргізу: j-түйін келесі жағдайда ғана белгіленеді:

1) $C_{ij} \le 0, \quad x_{ij} \le d_{ij}$

2) $C_{ij} \ge 0, \quad X_{ij} > 0$

Егер i-түйін келесідей белгіленген болса:

$i = \left[R^{\pm}, \varepsilon_i \right]$, онда j-ші түйіннің белгісі:

1) $j = \left[i^{+}, \varepsilon_j = \min\left(\varepsilon_i, d_{ij} - x_{ij} \right) \right]$ (1- жағдайда)

2) $j = \left[i^{-}, \varepsilon_j = \min\left(\varepsilon_i, x_{ij} \right) \right]$ (2- жағдайда)

Белгілеу бағытталған қабырғаның тура бағыты бойынша жүргізілсе, онда “+” қойылады, қарсы бағыты бойынша – “-”

4^0- қадам соңғы түйін белгіленгенше орындалады. Соңғы t түйіні белгіленді ме? “Иә” болса, 5^0- қадамға, “Жоқ” болса, 6^0- қадамға көшу.

5^0 Егер соңғы түйін белгіленген болса (басқаша айтқанда, s түйіннен t түйінге дейін жол табылса), онда жоспарды келесідей өзгертеміз:

$$X_{ij}^{1} = \begin{cases} X_{ij} + \varepsilon_t & \text{егер (i,j) тура бағытты қабырға болса,} \\ X_{ij} - \varepsilon_t & \text{егер (i,j) кері бағытты қабырға болса,} \\ X_{ij} & \text{қалған жағдайларда} \end{cases}$$

a_s -ті өзгертеміз:

$a^1{}_s = a_s - \varepsilon_t$ және 3- қадамға көшеміз.

6^0 Егер соңғы t түйінді белгілей алмасақ, онда екі жиынды енгізіп, қабырғалар бағасын өзгертеміз.

$$A_1\left\{(i,j)/\, i \in x, j \in \bar{x}, C_{ij} \geq 0\right\}$$

$$A_2\left\{(j,i)/\, i \in x, j \in \bar{x}, C_{ij} < 0\right\}$$

$$\delta_1 = \min_{A_1} C_{ij}, \delta_2 = \min_{A_2}\left|C_{ij}\right|, \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

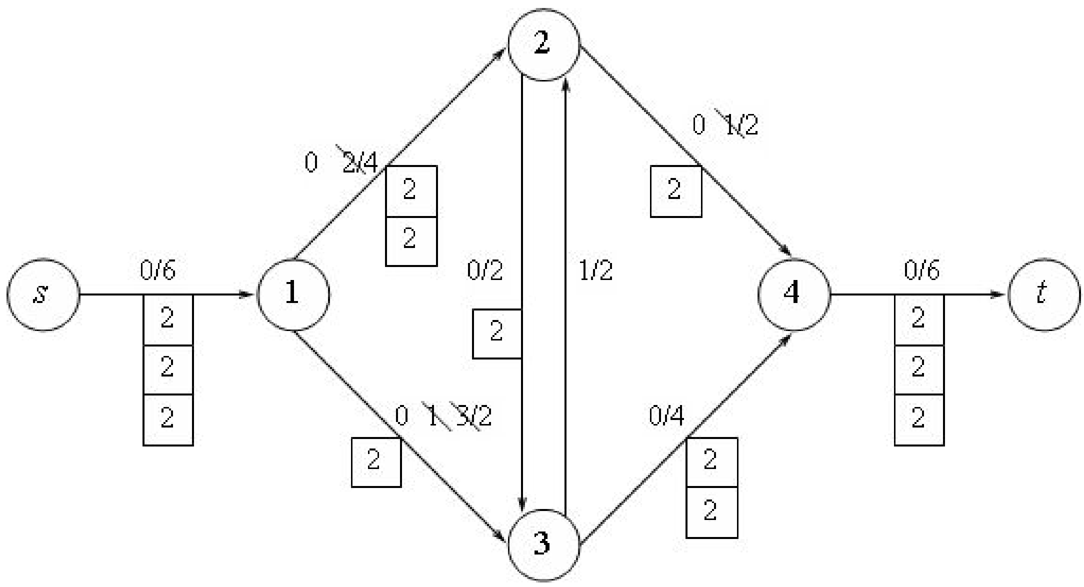
$$C^1{}_{ij} = \begin{cases} C_{ij} - \delta, \text{егер } i \in X, j \in \bar{X} \\ C_{ij} + \delta, \text{егер } i \in \bar{X}, j \in X \\ C_{ij}, \text{баска кабыргалар ушін} \end{cases}$$

3^0 -қадамға көшу

(X – белгісі бар түйіндер жиыны, $\bar{X}$ – белгіленбеген түйіндер жиыны).

7^0-Есептеулер минимальды кесік табылған кезде тоқтатылады ($a_s = 0$ немесе A_1, A_2 – бос болған кезде).

22- мысал



Шешімі.

1 итерация.

1 қадам. $a_s = 6$.

2 қадам. $x_{ij} = 0$.

3 қадам. Алғашқы түйінді белгілейміз $s = [–, a_s] = [–, 6]$.

4 қадам. t түйініне жету үшін s түйінімен байланысқан түйіндер үшін белгілеулер жүргіземіз, яғни

$1 = [s^+, \varepsilon_1 = \min(\varepsilon_s, d_{s1} - x_{s1}) = \min(6, 6) = 6]$.

6 қадам. Жиындарды енгіземіз:

$A_1 = \{(i, j) \mid i \in X,\ j \in \overline{X},\ c_{ij} \geq 0\} = \{(1, 2),\ (1, 3)\}$, $\delta_1 = \min(2, 3) = 2$,

$A_2 = \{(i, j) \mid i \in \overline{X},\ j \in X,\ c_{ij} < 0\} = \{\varnothing\}$, $\delta_2 = \infty$, $\delta = 2$.

4 қадам. $2 = [1^+, \varepsilon_2 = \min(\varepsilon_1, 4) = \min(6, 4) = 4]$.

$3 = [2^+, \varepsilon_3 = \min(\varepsilon_2, 2) = \min(2, 2) = 2]$.

$4 = [3^+, \varepsilon_4 = \min(\varepsilon_3, 4) = \min(2, 4) = 2]$.

$t = [4^+, \varepsilon_t = \min(\varepsilon_4, 6) = \min(2, 6) = 2]$.

Жол: $s \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to t$, груз 2, (2, 3) – қаныққан қабырға.

2 итерация.

1 қадам. $a'_s = 6 – 2 = 4$.

3 қадам. $s = [–, 4]$.

4 қадам. $1 = [s^+, \varepsilon_1 = \min(4, 4) = 4]$, $2 = [1^+, \varepsilon_2 = \min(4, 2) = 2]$.

6 қадам. Жиындарды енгіземіз:

$A_1 = \{(1, 3), (2, 4)\}$, $\delta_1 = \min(1, 1) = 1$,

$A_2 = \{\varnothing\}$, $\delta_2 = \infty$, $\delta = 1$.

4 қадам. $3 = [1^+, \varepsilon_3 = \min(4, 2) = 2]$.

$4 = [3^+, \varepsilon_4 = \min(2, 4) = 2]$.

$t = [4^+, \varepsilon_t = \min(2, 4) = 2]$.

Жол: $s \to 1 \to 3 \to 4 \to t$, ағын екіге тең , (1, 3), (3, 4) – қаныққан қабырға.

3 итерация.

1 қадам. $a'_s = 4 – 2 = 2$.

3 қадам. $s = [–, 2]$.

4 қадам. $1 = [s^+, \varepsilon_1 = \min(2, 2) = 2]$, $2 = [1^+, \varepsilon_2 = \min(2, 2) = 2]$.

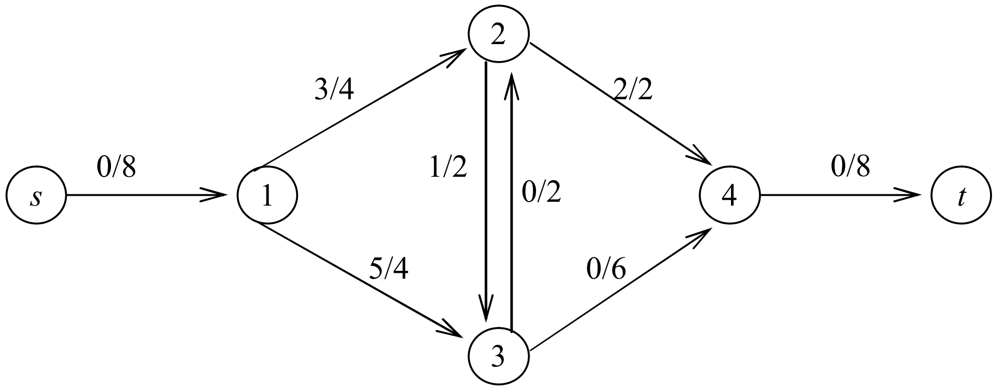
$4 = [2^+, \varepsilon_4 = \min(2, 2) = 2]$, $t = [4^+, \varepsilon_t = \min(2, 2) = 2]$.

Жол: $s \to 1 \to 2 \to 4 \to t$, ағын екіге тең.

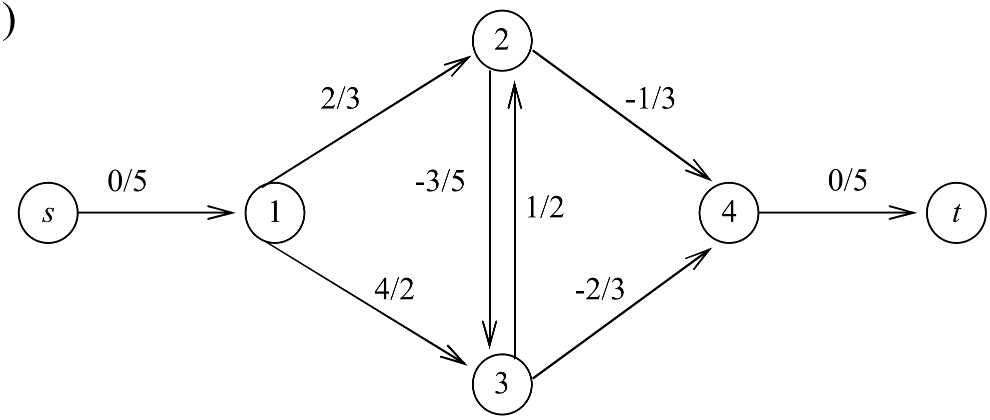
$a'_s = 0$.

11- тапсырма. Келесі есептерді Форда-Фалкерсон алгоритмін қолданып шығару керек

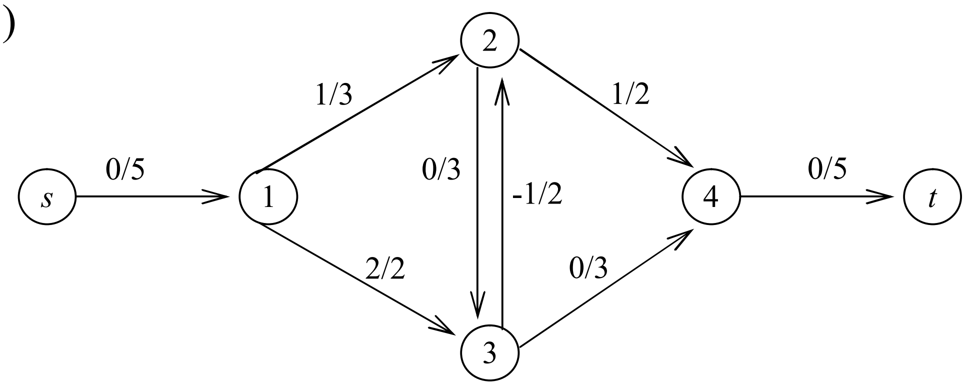
1)



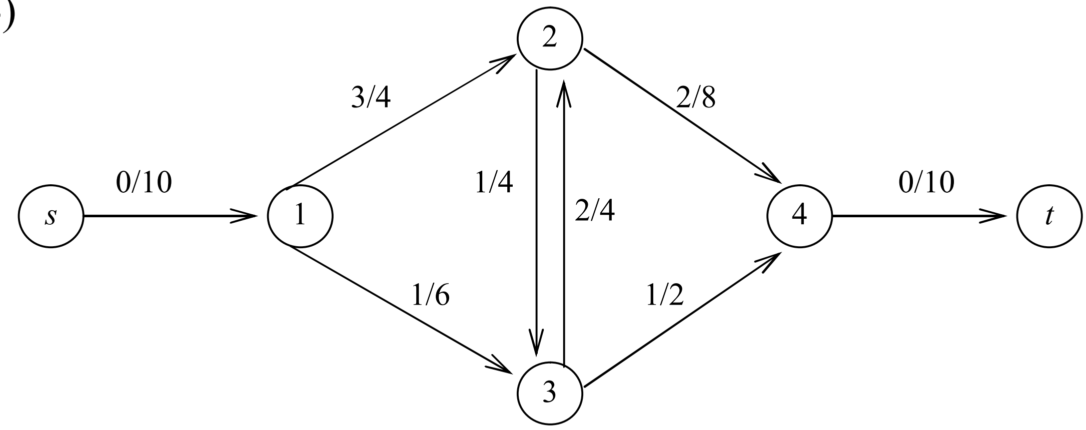
2)



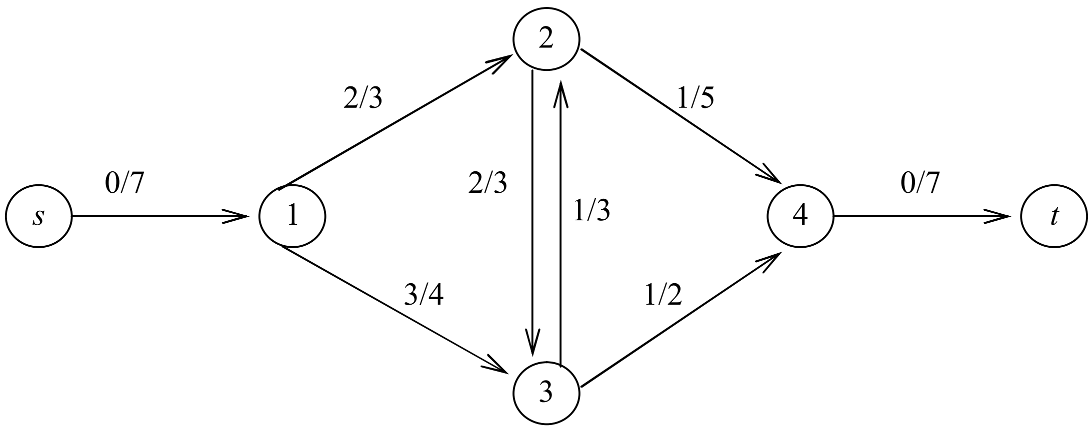
3)



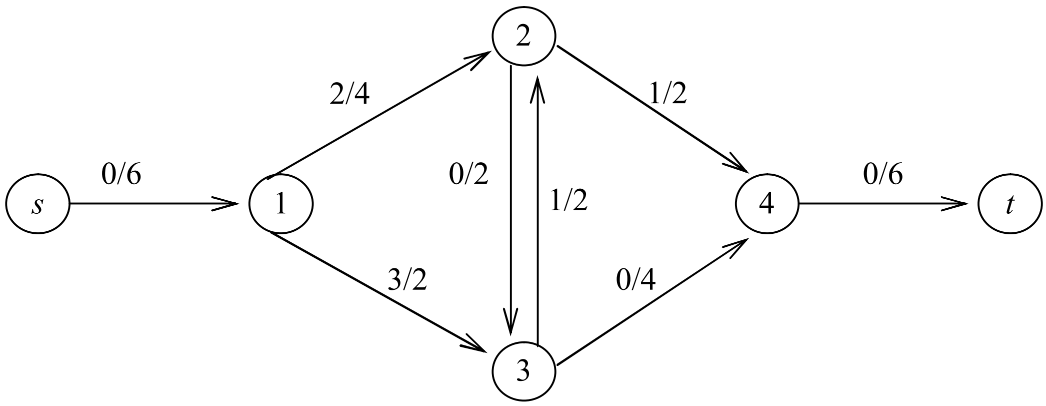
4)


2
3/4
2/8
0/10
1/4
2/4
0/10
s
1
4
t
1/6
1/2
3

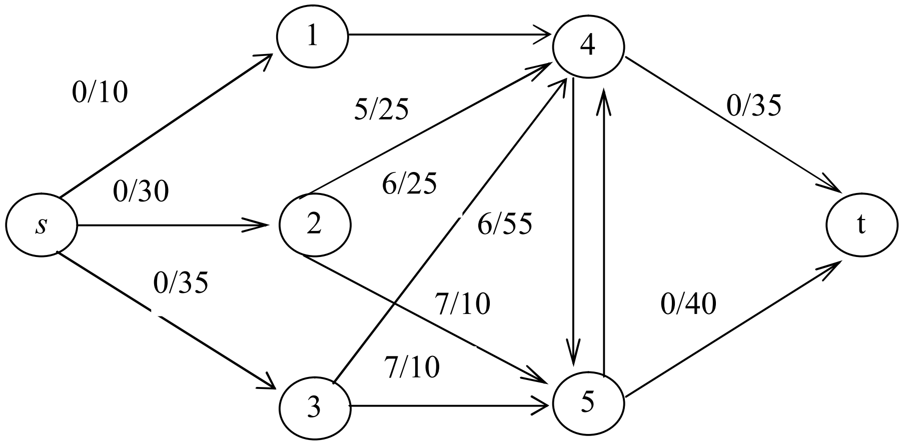
5)


2
2/3
1/5
0/7
2/3
1/3
0/7
s
1
4
t
3/4
1/2
3

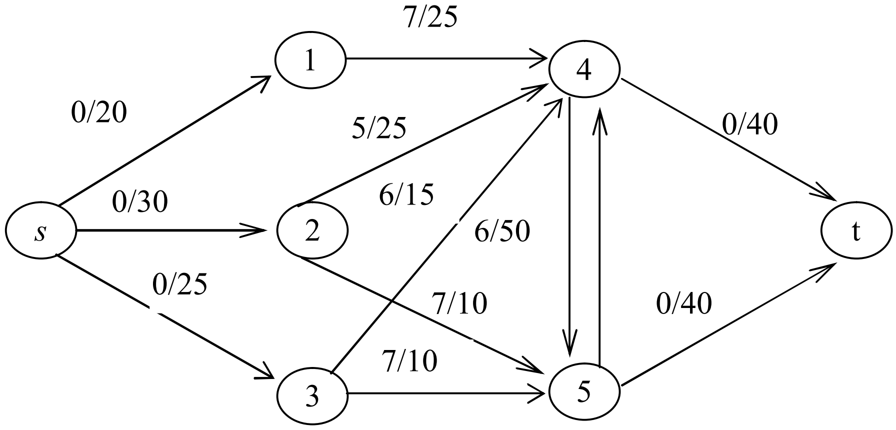
6)


2
2/4
1/2
0/6
0/2
1/2
0/6
s
1
4
t
3/2
0/4
3

7)


6/10
1
4
0/10
5/25
0/35
0/30
6/25
s
2
6/55
t
0/35
7/10
0/40
7/10
3
5

8)


7/25
1
4
0/20
5/25
0/40
0/30
6/15
s
2
6/50
t
0/25
7/10
0/40
7/10
3
5

11. БЕЙСЫЗЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАУ

Бейсызықты бағдарламалаудың жалпы есебі деп теңдеу және (немесе) теңсіздіктер түрінде берілген шектеулер кезіндегі мақсатты функцияның экстремумын табуды айтамыз. Бейсызықты бағдарламалау есебінде мақсатты функция бейсызықты, ал шектеулер сызықты немесе бейсызықты болуы мүмкін.

Жалпы түрде бейсызықты бағдарламалау есебі келесідей:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \to \min \ (\max), \tag{11.1}$$

келесі шарттарда

$x \in S$,

$$S = \left\{x \middle| g_j\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le 0,\ i = \overline{1,l},\ \ h_j\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0,\ x_i \ge 0,\ j = \overline{1,k}\ ,\ i = \overline{1,n}\right\}, \tag{11.2}$$

мұндағы $f(x), g_j(x)$ және $h_j(x)$ – кейбір n айнымалы белгілі функциялар, $x_1, x_2, ..., x_n$ шамалары – n өлшемді $\bar{X}$ вектор-бағанның құрамалары.

Егер $f(x), g_j(x)$ және $h_j(x)$ – сызықты функциялар болса, онда (11.1)-(11.2) есептер сызықты бағдарламалау есебі болып табылады.

(11.2)-қатынас шектеулер жүйесін құрады және айнымалылардың теріс еместік шарттарынан тұрады. Айнымалылардың теріс еместік шарттары берілген болуы мүмкін.

Негізгі түсініктеме мен анықтамалар

Бейсызықты бағдарламалау есебінің функциялары локалді және глобалді экстремумдары болады.

$x^* \in X$ нүктесі $f(x)$ функциясының глобалді минимум нүктесі деп аталады, егер кез келген $x \in X$ үшін $f(x) \ge f(x^*)$ орындалса.

$x^* \in X$ нүктесі $f(x)$ функциясының локалді минимум нүктесі деп аталады, егер x^* нүктесінің ε- аймағында орындалатын кез келген $x \in X$ үшін $f(x) \ge f(x^*)$ орындалса.

Шешу әдістерінің көпшілігі дөңес бағдарламалау есептерін шешу үшін қолданылады. Жиын дөңес деп аталады, егер оның құрамында екі нүктеден басқа оларды қосатын кесінді болса.

Бейсызықты бағдарламалау есептерінің ішінде келесілер кездеседі:

– дөңес бағдарламалау;
– квадраттық бағдарламалау;
– бүтінсандық бағдарламалау;
– стохастикалық бағдарламалау;
– динамикалық бағдарламалау және т.б.

Дөңес бағдарламалау есептері – бұл дөңес тұйық жиында берілген дөңес функцияның минимумы (немесе ойыстың максимумы) анықталатын есептер.

Квадраттық бағдарламалау есептері – бұл мақсатты функциясы квадратты, ал шектеулері сызықты болатын есептер.

Бүтінсандық бағдарламалау есептері – бұл белгісіз параметрлері тек бүтінсандық мәндерді ғана қабылдай алатын есептер.

Стохастикалық бағдарламалау есептері – бұл мақсатты функциясы не шектеулер функциясы ықтималдық теория заңдарына бағынатын кездейсоқ шамалардан тұратын не мақсаттық функция коэффициенттері белгісіз болатын есептер.

Динамикалық бағдарламалау есептері – бұл шектеулерінде уақыт параметрлері болатын және дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын, шешімдерін табу процесі көп этаптан тұратын есептер.

11.1. Бейсызықты бағдарламалау әдістерінің сыныпталуы

Бейсызықты бағдарламалау есептерін шешу үшін көптеген әдістер қолданылады. Оларды әртүрлі белгілері бойынша сыныптауға болады:

1) Мақсатты функциядағы локалді критерий саны бойынша:

– бір критерийлі;
– көп критерийлі.

Егер әдіс қандайда бір локалді экстремумды анықтауға бағытталған болса, онда мұндай әдіс локалді әдіске жатады. Оны локалді іздеу әдісі деп атайды. Егер де нәтижесі глобалді экстремум болса, онда әдіс глобалді іздеу әдісі деп аталады. Жалпы жағдай үшін глобалді іздеу әдісі есептеу жағынан тиімсіздеу болғандықтан локалді экстремумды іздеу әдістері қолданылады.

2) $\bar{X}$ векторының параметрлер саны бойынша:

– бір параметрлі немесе бірөлшемді (n=1);

– көп параметрлі немесе көпөлшемді (n>1).

Бірөлшемді оптималдау әдістерінде басқару параметрі біреу және $\bar{X}$ векторының өлшемі екіден аз емес болады.

3) Шектеулер бойынша:

– шартсыз оптималдау;

– шартты оптималдау.

Нақты есептер үшін шектеулердің болуы сипатты, алайда шартсыз оптималдау әдісі де қызығушылық туындатады.

4) Экстремумды іздеу алгоритміне қолданылатын ақпараттың типі бойынша:

– тіке іздеу әдістері, яғни мақсатты функцияның экстремумын іздеу кезінде тек оның (өзінің) мәндері қолданылады;

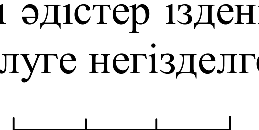
– бірінші ретті градиенттік әдістер, мұнда функцияның экстремумын іздеу кезінде оның бірінші туындысы қолданылады.

Екінші ретті градиенттік әдістер, мұнда функцияның экстремумын іздеу кезінде оның бірінші туындысымен қатар екінші туындысы да қолданылады.

11.2. Бірөлшемді ізденіс әдістері

Фиббоначи саны

Барлық бірөлшемді әдістер ізденіс аралығын екі кіші кесімге белгілі пропорцияда бөлуге негізделген.



$\frac{1}{F_1} = \frac{F_1}{F_2}$ $F_1 = \sqrt{F_2}$ F_2 – ден квадраттық түбір

$F_1 = 0{,}62$, $F_2 = 0{,}38$

Алтын қиық әдісі

Берілген есептің математикалық моделі:

$f(x) \to min$

$a \le x \le в$, Δ;

Алтын қиық есебінің алгоритмі:

1^0 k=0 $x_2^{(k)} = в$, $x_1^{(k)} = a$, $\Delta^{(k)} = x_2^{(k)} - x_1^{(k)}$

2^0 $\Delta^{(k)} \le \Delta$? “Иә”- есептің оптималды шешімі табылды, “Жоқ”- 3^0 қадамға көшу.

3^0[a,b] аралығында екі нүкте табу: $y_1^{(k)} = x_1^{(k)} + \Delta^{(k)} F_2$

$y_2^{(k)} = x_1^{(k)} + \Delta^{(k)} F_1$

4^0 Егер $f(y_1^{(k)}) \le f(y_2^{(k)})$, онда $\Delta^{(k+1)} = y_2^{(k)} - x_1^{(k)}, x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)}$,

$x_2^{(k+1)} = y_2^{(k)}$, *k=k+1,* 2^0-і қадамға көшу

қарсы жағдайда

$\Delta^{(k+1)} = x_2^{(k)} - y_1^{(k)}, x_1^{(k+1)} = y_1^{(k)}$, $x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)}$, *k=k+1,* 2^0 қадамға көшу.

23-мысал

$f(x) = (x-3)^2 + 1 \to \min, \quad 1 \le x \le 4, \quad \Delta = 0{,}5.$

x_1	x_2	Δ	y_1	y_2	$f(y_1)$	$f(y_2)$
1	4	3	2,14	2,86	1,7396	1,096
2,14	4	1,86	2,8468	3,2832	1,02347	1,0802
2,14	3,2832	1,1432	2,5744	2,8487	1,1811	1,0328
2,5744	3,2832	0,7088	3,8437	3,0137	1,0244	1,0002
3,843	2,2832	0,4395	3,01	3,116	1,0001	1,01347

Есептің жауабы: $x^* = 3, \qquad f^* = 1.$

11.3. Көпөлшемді ізденіс әдістері

11.3.1. Циклдық әрбір координата бойынша құлдилау әдісі

Циклдық әрбір координата бойынша құлдилау әдісі туындыны қолданбайтын көпөлшемді шартсыз оптималдау әдісіне жатады. Көпөлшемділік деп функцияның минимумын іздеу үшін әдістің бірден көп айнымалыларды қолданатынын айтамыз. Әдіс қозғалыстың минимумға бағытын анықтау үшін туындыны қолданбайды, әйтсе де қозғалыстың қадамын анықтау үшін дербес туындылауды қолданады. Бұл әдіс релаксациялық болып табылады, яғни қозғалыс барлық айнымалы үшін бірден болмайды, қалған айнымалылардың мәндері тұрақты болып қалған кезде тек кезекпен әрбір айнымалы бойынша.

Циклдық әрбір координата бойынша құлдилау әдісінің алгоритмі келесі түрде болады:

1) n айнымалы $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ мақсатты функция үшін бастапқы вектор беріледі

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}.$$

2) Бірлік вектор енгізіледі $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, оның элементтерінің саны n-ға тең.

3) $f(x_1^{(0)} + \lambda_1 e_1,\ x_2^{(0)},\ ...,\ x_n^{(0)}) \to \min\limits_{\lambda_1}$ есебі шығарылады, ағымды нүкте ретінде $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$ алынады.

4) Бірлік вектор енгізіледі $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, оның элементтерінің саны n-ға тең.

5) $f(x_1^{(1)}, x_2^{(0)} + \lambda_2 e_2, ..., x_n^{(0)}) \to \min\limits_{\lambda_2}$ есебі шығарылады, ағымды нүкте ретінде $x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$ алынады.

6) Қозғалыс кезек бойынша қалған барлық айнымалылар бойынша орындалады, n-ші айнымалымен аяқталады.

7) Барлық λ нөлге тең болғанға дейін процесс басынан қайтадан қайталанып отырады. Бұл шарт орындалғанда X ағымды векторы оптималды болады.

11.3.2. Барынша тез құлдилау әдісі

Есептің берілгені: $f(x) \to \min, X^0$.

Әдістің алгоритмі:

1. Бастапқы шешімді анықтау, X^0.

2. Градиентті анықтау: $\nabla f = \partial f(x) / \partial x^{(k)}$;

Эвклид нормасын табу:

$\|\nabla f\| = \sqrt{(\partial f(x) / \partial {x_1}^{(k)})^2 + (\partial f(x) / \partial {x_2}^{(k)})^2 + ...}$

3. Егер $\|\nabla f\|=0$ болса, онда оптималды нүкте табылды, $x^{(k)}$ - оптималды нүкте, басқа жағдайда 4-қадамға көшу.

4. $x^{(k)}$-нүктесінен бағытты анықтау: $S^{(k)} = -\nabla f / \|\nabla f\|$.

5. Бір қадам орындау $\lambda^{(k)} : f(x^{(k)} + \lambda^{(k)} S^{(k)}) \to \min \lambda^{(k)}$.

6. Жаңа нүктені анықтау: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} S^{(k)}$. 2-қадамға көшу.

Бұл әдісте λ тұрақты немесе айнымалы шама болуы мүмкін.

24- мысал

$$f(x) = 20x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$$
$$X^{(0)} = (2, 3).$$

Шешімі

Итерация нөмірі	x_1	x_2	$\frac{\partial f}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f}{\partial x_2}$	$\lVert \nabla f(\bullet) \rVert$	s_1	s_2	λ
0	2	3	16	10	18,87	–0,85	–0,53	–9,45
1	10,03	8,01	–0,06	–0,02	0,06	1	0,33	–0,03
2	10	8	0	0	0	0	0	0

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 20 - 2x_1. \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 16 - 2x_2.$$

$$\lVert \nabla f(\bullet) \rVert = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}. \quad \vec{S} = -\frac{\nabla f(x)}{\lVert \nabla f(x) \rVert}.$$

$$20\left(x_1^{(\nu)} + \lambda^{(\nu)} s_1^{(\nu)}\right) + 16\left(x_2^{(\nu)} + \lambda^{(\nu)} s_2^{(\nu)}\right) - \left(x_1^{(\nu)} + \lambda^{(\nu)} s_1^{(\nu)}\right)^2 - \left(x_2^{(\nu)} + \lambda^{(\nu)} s_2^{(\nu)}\right)^2 \to \min_{\lambda^{(\nu)}}.$$

$$20 s_1^{(\nu)} + 16 s_2^{(\nu)} - 2 s_1^{(\nu)}\left(x_1^{(\nu)} + \lambda^{(\nu)} s_1^{(\nu)}\right) - 2 s_2^{(\nu)}\left(x_2^{(\nu)} + \lambda^{(\nu)} s_2^{(\nu)}\right) = 0$$

$$20 s_1^{(\nu)} + 16 s_2^{(\nu)} - 2 s_1^{(\nu)} x_1^{(\nu)} - 2\lambda^{(\nu)}\left(s_1^{(\nu)}\right)^2 - 2 s_2^{(\nu)} x_2^{(\nu)} - 2\lambda^{(\nu)}\left(s_2^{(\nu)}\right)^2 = 0.$$

$$10 s_1^{(\nu)} + 8 s_2^{(\nu)} - s_1^{(\nu)} x_1^{(\nu)} - s_2^{(\nu)} x_2^{(\nu)} = \lambda^{(\nu)}\left(s_1^{(\nu)}\right)^2 - \lambda^{(\nu)}\left(s_2^{(\nu)}\right)^2$$

$$\lambda^{(\nu)} = \frac{10 s_1^{(\nu)} + 8 s_2^{(\nu)} - s_1^{(\nu)} x_1^{(\nu)} - s_2^{(\nu)} x_2^{(\nu)}}{\left(s_1^{(\nu)}\right)^2 + \left(s_2^{(\nu)}\right)^2}.$$

$$x^{(\nu)} = x^{(\nu-1)} + \lambda^{(\nu)} S^{(\nu)}.$$

0– итерация

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 20 - 2x_1 = 16$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 16 - 2x_2 = 10$$

$$\lVert \nabla f(\bullet) \rVert = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2} = \sqrt{16^2 + 10^2} = 18{,}87$$

$$\vec{S}_1 = -\frac{\nabla f(x_1)}{\lVert \nabla f(x) \rVert} = -\frac{16}{18{,}87} = -0{,}85$$

$$\vec{S}_2 = -\frac{\nabla f(x_2)}{\|\nabla f(x)\|} = -\frac{10}{18{,}87} = -0{,}53$$

$$\lambda_1^{(\nu)} = \frac{10s_1^{(\nu)} + 8s_2^{(\nu)} - s_1^{(\nu)}x_1^{(\nu)} - s_2^{(\nu)}x_2^{(\nu)}}{\left(s_1^{(\nu)}\right)^2 + \left(s_2^{(\nu)}\right)^2} = \frac{-8{,}5 - 4{,}24 + 1{,}7 + 1{,}59}{0{,}72 + 0{,}28} = -9{,}45$$

1– итерация

$$x_1^{(\nu)} = x_1^{(\nu-1)} + \lambda^{(\nu)} S_1^{(\nu)} = 2 + (-9{,}45) * (-0{,}85) = 10{,}03$$

$$x_2^{(\nu)} = x_2^{(\nu-1)} + \lambda^{(\nu)} S_2^{(\nu)} = 3 + (-9{,}45) * (-0{,}53) = 8{,}01$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 20 - 2x_1 = -0{,}06$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 16 - 2x_2 = -0{,}02$$

$$\|\nabla f(\bullet)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2} = \sqrt{(-0{,}06)^2 + (-0{,}02)^2} = 0{,}06$$

$$\vec{S}_1 = -\frac{\nabla f(x_1)}{\|\nabla f(x)\|} = -\frac{-0{,}06}{0{,}06} = 1$$

$$\vec{S}_2 = -\frac{\nabla f(x_2)}{\|\nabla f(x)\|} = -\frac{-0{,}02}{0{,}06} = 0{,}33$$

$$\lambda_1^{(\nu)} = \frac{10s_1^{(\nu)} + 8s_2^{(\nu)} - s_1^{(\nu)}x_1^{(\nu)} - s_2^{(\nu)}x_2^{(\nu)}}{\left(s_1^{(\nu)}\right)^2 + \left(s_2^{(\nu)}\right)^2} = \frac{10 + 2{,}64 - 10{,}03 - 2{,}64}{1 + 0{,}11} = \frac{-0{,}03}{1{,}11} = -0{,}03$$

2– итерация

$$x_1^{(\nu)} = x_1^{(\nu-1)} + \lambda^{(\nu)} S_1^{(\nu)} = 10{,}03 + (-0{,}03) * 1 = 10$$

$$x_2^{(\nu)} = x_2^{(\nu-1)} + \lambda^{(\nu)} S_2^{(\nu)} = 8{,}01 + (-0{,}03) * 0{,}33 = 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 20 - 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 16 - 2x_2 = 0$$

$$\|\nabla f(\bullet)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2} = 0$$

$$\vec{S}_1 = -\frac{\nabla f(x_1)}{\|\nabla f(x)\|} = 0$$

$$\vec{S}_2 = -\frac{\nabla f(x_2)}{\|\nabla f(x)\|} = 0$$

$$\lambda_1^{(\nu)} = \frac{10s_1^{(\nu)} + 8s_2^{(\nu)} - s_1^{(\nu)}x_1^{(\nu)} - s_2^{(\nu)}x_2^{(\nu)}}{\left(s_1^{(\nu)}\right)^2 + \left(s_2^{(\nu)}\right)^2} = 0.$$

Жауабы: $X^* = (10; 8)$

11.3.3. Ньютон–Рабсон әдісі

$$f(x) \to \min, \quad \vec{x}^{(0)}$$

$f(x)$ функция–дифференциалдық деп есептеп, Тейлор қатарына $\vec{x}^{(k)}$ нүктесінде жіктейік:

$$f(x) = f(\vec{x}^{(k)}) + \nabla f(\vec{x}^{(k)})(\vec{x} - \vec{x}^{(k)}) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}^{(k)})H(\vec{x})(\vec{x} - \vec{x}^{(k)})$$

Бағыт бойынша туындыны табайық $\left[(\vec{x} - \vec{x}^{(k)}) \quad \textit{бойынша}\right]$:

$$\nabla f(\vec{x}^{(k)}) + H(\vec{x})(\vec{x} - \vec{x}^{(k)}) = 0$$

осыдан

$$\vec{x} - \vec{x}^{(k)} = -H^{-1}(\vec{x})\nabla f(\vec{x}^{(k)})$$

сонда

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - H^{-1}(\vec{x})\nabla f(\vec{x}^{(k)})$$

Егер берілген функция квадраттық болса, онда оптималды шешім табу үшін бір қадам орындау жеткілікті.

11.3.4. Франк-Вульф әдісі

Есептің берілгені:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n_1}\sum_{i=1}^{n_2} d_{ij} x_i x_j \to \max \qquad (11.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n_1} \qquad (11.4)$$

Франк-Вульф әдісінің алгоритмі:

1. Бастапқы шешімді x^0 симплекс әдісімен анықтау.
2. Бағытты есептеу: $S^{(k)} = x^{(*)} - x^{(k)}$, $x^{(*)}$ – келесі есептің шешімі:

$$\sum_{j=1}^{n_1} df / dx_j^{(k)} (x_j - x_j^{(k)}) \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \qquad (11.5)$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n_1}.$$

3. Қадамды анықтау (λ):

$f(x^{(k)} + \lambda * S^{(k)}) \max$

$\lambda^{(k)} = \min[\lambda^*, 1].$

4. Жаңа нүктелерді анықтау:

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} S^{(k)}.$

5. Егер $f(x^{k+1}) > f(x^{(k)})$ болса, 2-жолға көшеміз, қарсы жағдайда x^{k+1}-оптималды нүкте болады.

25-мысал

$$f(x) = 2x_1 - 0{,}2x_1^2 + 3x_2 - 0{,}2x_2^2 \to \max$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 13$$

$$2x_1 + x_2 \le 10$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Шешімі. $f^{'}(x) = 2 - 0{,}4x_1 + 3 - 0{,}4x_2 = -0{,}4x_1 - 0{,}4x_2 + 5 \to \max$

1- қадам. Алғашқы шешімді тіке симплекс-әдісімен шығарамыз:

		$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	=	2	3	13
y_2	=	2	1	10
z	=	0,4	0,4	5

$X^{(0)} = (0, 0)$.

2- қадам. Бағытын анықтаймыз: $\vec{S}^{(0)} = X^* - X^{(0)}$. X^* келесі сызықты бағдарламалау есебінен анықталады:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_j - x_j^k\right) = 0 \\ \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1,2} \\ x_j \ge 0, \; j = \overline{1,2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 - 0{,}4x_1 \,|_{x_1=0} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3 - 0{,}4x_2 \,|_{x_2=0} = 3$$

$$2\left(x_1 - x_1^{(0)}\right) + 3\left(x_2 - x_2^{(0)}\right) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 13$$

$$2x_1 + \; x_2 \le 10$$

		$-x_1$	$-x_2$	1
y_1	=	2	$\boxed{3}$	13
y_2	=	2	1	10
z	=	-2	-3	0

		$-x_1$	$-y_1$	1
x_2	=	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
y_2	=	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{17}{3}$
z	=	0	1	13

$$X^* = \left(0, \; \frac{13}{3}\right). \; \vec{S}^{(0)} = \left(0, \; \frac{13}{3}\right).$$

3- қадам. Қадамды анықтау:

$$f\left(2\left(x_1^{(k)} + \lambda^* s_1^{(k)}\right) - 0{,}2\left(x_1^{(k)} + \lambda^* s_1^{(k)}\right)^2 + \left(x_2^{(k)} + \lambda^* s_2^{(k)}\right) - 0{,}2\left(x_2^{(k)} + \lambda^* s_2^{(k)}\right)^2\right) \to \min_{\lambda^*}$$

$$2s_1^{(k)} - 0{,}4\left(x_1^{(k)} + \lambda^* s_1^{(k)}\right) + 3s_2^{(k)} - 0{,}4\left(x_2^{(k)} + \lambda^* s_2^{(k)}\right) = 0$$

$$\lambda^{(k)} = \frac{2s_1^{(k)} + 3s_2^{(k)} - 0{,}4 s_1^{(k)} x_1^{(k)} - 0{,}4 s_2^{(k)} x_2^{(k)}}{0{,}4\left(s_1^{(k)}\right)^2 + 0{,}4\left(s_2^{(k)}\right)^2}.$$

$$\lambda^* = \frac{13}{0,4*\frac{169}{9}} = \frac{45}{26}. \qquad \lambda^{(0)} = \min\left(1,\ \frac{45}{26}\right) = 1.$$

4- қадам. Жаңа нүктенің мәнін анықтаймыз:

$$X^{(k)} = X^{(k-1)} + \lambda^{(k)}\vec{S}^{(k)}$$

$$X^{(1)} = (0,\ 0) + 1*\left(0,\ \frac{13}{3}\right) = \left(0,\ \frac{13}{3}\right)$$

5- қадам. Функцияның мәнін жаңа нүктеде анықтаймыз:

$$f\left(X^{(0)}\right) = 0$$

$$f\left(X^{(1)}\right) = 3*\frac{13}{3} - 0,2*\frac{169}{9} = 9,25.$$

Итерация нөмірі	x_1	x_2	$f(x)$	$\frac{\partial f}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f}{\partial x_2}$	x_1^*	x_2^*	s_1	s_2	λ^*	λ
0	0	0	0	2	3	0	4,33	0	4,33	1,73	1
1	0	4,33	9,25	2	1,27	4,25	1,5	4,25	–2,83	0,47	0,47
2	2	3	10,4	1,2	1,8	0	4,33	–2	1,33	0	0
3	2	3	10,4								

Жауабы: $X^* = (2, 3),\ z_{\max} = 10,4$.

11.3.5. Зойтендейктің мүмкін бағыттар әдісі

Берілген әдіс жалпы түрдегі бейсызықтық бағдарламалау есептеріне қолданылады:

$$z = f(x) \to \min$$

$$\varphi_i(x) \le 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

f (x) және φ_i (x) функцияларын $x^{(k)}$ нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жіктейміз:

$$f(x) = f\left(x^{(k)}\right) + \nabla^{\mathrm{T}} f\left(x^{(k)}\right)\left(x - x^{(k)}\right) \to \min, \tag{11.6}$$

$$\varphi_i(x) = \varphi_i\left(x^{(k)}\right) + \nabla^{\mathrm{T}}\varphi_i\left(x^{(k)}\right)\left(x - x^{(k)}\right) \le 0, \ \ i = \overline{1,m}. \tag{11.7}$$

$x^{(k)}$ нүктесінен $x^{(k+1)}$ нүктесіне ауысуы $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} s^{(k)}$ қатынасымен беріледі. (11.6)-(11.7) есептерінде x векторының орнына оның ағымдағы мәнін $x^{(k+1)}$ қойып, келесі есепті аламыз:

$$f(x) = f\left(x^{(k)}\right) + \lambda^{(k)} \nabla^{\mathrm{T}} f\left(x^{(k)}\right) s^{(k)} \to \min, \qquad (11.8)$$

$$\varphi_i(x) = \varphi_i\left(x^{(k)}\right) + \lambda^{(k)} \nabla^{\mathrm{T}} \varphi_i\left(x^{(k)}\right) s^{(k)} \le 0, \;\; i = \overline{1,m}. \qquad (11.9)$$

$f\left(x^{(k)}\right)$ және $\varphi_i\left(x^{(k)}\right)$ тұрақты болатындықтан $x^{(k)}$ нүктесінен $x^{(k+1)}$ нүктесіне ауысуының қажетті және жеткілікті шарттары келесі түрде болады:

$$\lambda^{(k)} \nabla^{\mathrm{T}} f\left(x^{(k)}\right) s^{(k)} < 0, \qquad (11.10)$$

$$\lambda^{(k)} \nabla^{\mathrm{T}} \varphi_i\left(x^{(k)}\right) s^{(k)} \le 0, \;\; i = \overline{1,m}. \qquad (11.11)$$

(11.10)-(11.11) теңсіздіктерін қанағаттандыратын кез келген $s^{(k)}$ векторы мүмкін бағыттағы вектор болып табылады.

Зойтендейктің мүмкін бағыттар әдісінің алгоритмі:

1. Бастапқы шешімді анықтау $x^{(0)}$. Егер сызықты бағдарламалау есебі болса, онда симплекс-әдісімен, егер бейсызықты бағдарламалау есебі болса, онда сәйкестенбеу әдісімен анықтаймыз.

2. Берілген $x^{(k)}$ бойынша (11.10)-(11.11) есебін шығару және $s^{(k)}$-ні табу:

$$\lambda^{(k)} \nabla^{\mathrm{T}} f\left(x^{(k)}\right) s^{(k)} \to \min, \qquad (11.12)$$

$$\lambda^{(k)} \nabla^{\mathrm{T}} \varphi_i\left(x^{(k)}\right) s^{(k)} \le 0, \;\; i = \overline{1,m}. \qquad (11.13)$$

3. Шартты тексеру. Егер $\lambda^{(k)} \nabla^{\mathrm{T}} f\left(x^{(k)}\right) s^{(k)} < 0$ болса, онда 4-ші қадамға көшу, басқа жағдайда $x^* = x^{(k)}$.

4. Алдымен $\lambda^* = \max\left\{\lambda \middle| \varphi_i\left(x^{(k)} + \lambda^* s^{(k)}\right) \le 0, \;\; i = \overline{1,m}\right\}$ есебін шығару, содан кейін $f\left(x^{(k)} + \lambda^* s^{(k)}\right) \to \min\limits_{0 \le \lambda^{(k)} \le \lambda^*}$ шығара отырып, $\lambda^{(k)}$ анықтаймыз.

5. Жаңа нүктенің координаталарын анықтау $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} s^{(k)}$.

2-қадамға көшу.

12-тапсырма. Келесі есептерді барынша тез құлдилау әдісін қолданып, шығару керек:

1) $f(x) = 6x_1 + 32x_2 - x_1^2 - 4x_2^2 \to \max$
$X^{(0)} = (0, 0).$

2) $f(x) = 9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2 \to \min$
$X^{(0)} = (0, 0).$

3) $f(x) = x_1^2 - 4x_1 - x_2^2 + 6x_2 - 5 \to \min$
$X^{(0)} = (6, 4).$

4) $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 12x_2 + 14 \to \min$
$X^{(0)} = (3, 3).$

5) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3x_2 \to \min$
$X^{(0)} = (10, 10).$

6) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \to \min$
$X^{(0)} = (0, 0).$

7) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 \to \min$
$X^{(0)} = (0, 0).$

8) $f(x) = 18x_1 + 16x_2 - 3x_1^2 - x_1x_2 - 5x_2^2 \to \max$
$X^{(0)} = (5, 8)$

9) $f(x) = 2x_1 - x_1^2 - x_2 \to \min$
$X^{(0)} = (1, 2).$

10) $f(x) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$
$X^{(0)} = (8, 9).$

11) $f(x) = 20x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$
$X^{(0)} = (4, 4)$

12) $f(x) = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \to \max$
$X^{(0)} = (6, 6)$

13) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \to \min$
$X^{(0)} = (5, 8)$

14) $f(x) = 4x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to \max$
$X^{(0)} = (2, 3)$

15) $f(x) = (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2 \to \max$
$X^{(0)} = (6, 4)$

16) $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \to \min$
$\vec{x}^{(0)} = (0;0)$

17) $f(x) = x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - 4 \to \min$
$\vec{x}^{(0)} = (0;0)$

18) $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \max$
$X^{(0)} = (7, 4).$

19) $f(x) = 2x_1 - x_1^2 - 4x_2 \to \max$
$X^{(0)} = (1,2)$

20) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 \to \min$
$X^{(0)} = (8,8)$

21) $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - 2)^2 \to \text{mi}$
$\vec{x}^{(0)} = (5;6)$

22) $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 40x_1 - 48x_2 \to \min$
$X^{(0)} = (5,10)$

13-тапсырма. Келесі есептерді Франка-Вулф әдісімен шығару керек:

1) $f(x) = 10 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$
$x_1 + 2x_2 \le 16$
$5x_1 + 2x_2 \le 40$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

2) $f(x) = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2 \to \max$
$4x_1 + 5x_2 \le 80$
$2x_1 + x_2 \le 34$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
$X^0 = (2,3)$

3) $f(x) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 \to \min$
$3x_1 + 2x_2 \le 6$
$x_1 + 2x_2 \le 4$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

4) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + 6x_2 \to \max$
$x_1 \le 6$
$x_2 \le 2$
$x_1 \ge 0$
$x_2 \ge 0.$

5) $f(x) = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$
$2x_1 - x_2 \le 6$
$x_1 + 2x_2 \le 10$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

6) $f(x) = 2x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 - 2 \to \min$
$x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

7) $f(x) = x_1 + 2x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 \to \min$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 15$
$3x_1 + x_2 + x_3 \le 12$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$
$X^0 = (5,4,2)$

8) $f(x) = 18x_1 + 18x_2 - 5x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 \to \max$
$x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

9) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 2 \to \min$

$-3x_1 - 2x_2 + 8 \le 0$

$-2x_1 + 3x_2 - 3 \le 0$

$-x_1 + x_2 \le 0$

$x_1 - 8 \le 0$

10) $f(x) = 36x_1 + 36x_2 - 5x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 \to \max$

$x_1 + 3x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

11) $f(x) = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 \to \min$

$3x_1 + 2x_2 \le 6$

$x_1 + 2x_2 \le 4$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

12) $f(x) = 10x_2 - 6x_1^2 - 19x_2^2 + 16x_1x_2 \to \max$

$3x_1 + x_2 \le 3$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

13) $f(x) = 20x_1 + 18x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$

$x_1 + 3x_2 \le 30$

$x_1 + x_2 \le 15$

$5x_1 + 2x_2 \le 60$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$X^0 = (2, 3)$

14) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 6x_2 + 18 \to \max$

$x_1 + x_2 \le 7$

$-x_1 + 3x_2 \le 9$

$3x_1 - x_2 \le 9$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

15) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \to \max$

$x_1 + 2x_2 \le 4$

$2x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

16) $f(x) = 36x_1 + 36x_2 - 5x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2 \to \max$

$x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

17) $f(x) = 2(x_1 - 1)^2 + 9(x_2 - 3)^2 \to \min$

$x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$X^0 = (5, 4)$

18) $f(x) = 6x_1 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \to \max$

$x_1 + x_2 \le 1/2$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

19) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \to \min$

$-3x_1 + 2x_2 \le 8$

$7x_1 + 10x_2 \ge 84$

$5x_1 + x_2 \le 60$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

20) $f(x) = -4(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 11)^2 \to \max$

$x_1 + 3x_2 \le 30$

$x_1 + x_2 \le 15$

$5x_1 + 2x_2 \le 60$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$X^0 = (3, 5)$

21) $f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \max$

$x_1 + 2x_2 \le 8$

$2x_1 - x_2 \le 12$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

$X^0 = (2;2)$

22) $f(x) = 4x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$

$x_1 + x_2 \le 4$

$x_2 \le 2$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

23) $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 \to \max$

$x_1 + 0{,}5x_2 \ge 1$

$x_1 + 0{,}5x_2 \le 4$

$x_1 + x_2 \le 6$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

24) $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - 2)^2 \to \min$

$x_1 + 4x_2 \le 16$

$3x_1 + x_2 \le 15$

12. ОЙЫНДАР ЖӘНЕ СТАТИСТИКАЛЫҚ ШЕШІМДЕР ТЕОРИЯСЫ

12.1. Ойындар теориясы пәні, негізгі түсініктер

Ойындар теориясы бұл математикалық модельдер теориясы, бірақ оған қатысушылардың мақсаттары әртүрлі, дегенмен олар өз мақсаттарына әртүрлі жолдармен жетеді. Қатысушылардың қарама-қарсы мақсаттарының қақтығысуы жанжалды жағдайға әкеліп соғады. Жанжалды жағдайдың формалды түрге енгізілген моделі ойын деп аталады. Жанжалға қатысушы жақтарды ойыншылар деп атайды. Ойын ережесінде ескерілген іс-әрекеттердің біреуін таңдау және оны жүзеге асыру ойындар теориясында жүріс деп аталады. Жүрістер жеке және кездейсоқ болады. Ойыншының мүмкін болар іс-әрекеттер вариантының біреуін сапалы түрде таңдап, іске асыру жеке жүріс деп аталады (шахмат ойнындағы кез келген жүріс). Бірқатар мүмкіндіктер ішінен біреуін таңдау және оны қайсыбір кездейсоқ таңдау механизмімен жүзеге асыру кездейсоқ жүріс деп аталады (карта үлестіру, тиын лақтыру, т.б.).

Ойын процесінде түзілген жағдайға байланысты ойыншының әрбір жеке жүрісі кезіндегі іс-әрекеттер вариантын анықтайтын ережелер жиынтығы ойыншы стратегиясы деп аталады.

Стратегиялар санына байланысты ойындар шекті және шексіз болып бөлінеді. Ойыншылар санына байланысты ойындар жұп ойындар және жиындалған ойындар болып бөлінеді.

Алдын ала жасалған келісіммен ойыншылар арасында келісімге байланысты ойындар кооперативтік және кооперативтік емес болып бөлінеді.

Ойындар теориясы – кез келген ойыншыға оптималды стратегияны анықтау, былайша айтқанда ойынды көп қайталаған кезде берілген ойыншыға минимальды мүмкін болар орта ұтылыспен немесе максимальды мүмкін болар орта ұтыспен қамтамасыз ететін стратегияны анықтау. Стратегияның бастамасы келесі болжамнан шығады: «қарсылас та біз секілді ақылды және бізге мақсатымызға жетуімізге қарсы бар күшін салады».

Ойынның ең қарапайым түрі “қосындылары нөлге тең”, екі жақ ұтыстарының қосындысы нөлге тең екі адамның ойыны. Ойын екі жүрістен тұрады.

12.2. Ойындар стратегиясы

Ойындар теориясында математикалық модель ретінде ойын матрицасы қарастырылады. А ойыншы өзінің мүмкін болар бір стратегиясын таңдайды, ал В ойыншы B_j стратегиясын таңдайды. A_i B_j стратегияларын білу арқылы төлем матрицасын немесе ойын матрицасын құруға болады.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & .. & B_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

a_{ij} - А ойыншының ұтысы, В ойыншының ұтылысы, егер А ойыншыны A_i стратегиясын, В ойыншыны B_j стратегиясын таңдаса.

26- мысал

$$\begin{array}{c c c c} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} & B_3 & \alpha_i \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ -5 \\ 6 \end{array} & \begin{array}{c} -3 \\ -5 \\ -3 \end{array} \\ \beta_j & \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} & 6 & \begin{array}{c} \alpha = -3 \\ \beta = 3 \end{array} \end{array}$$

А ойыншы A_i стратегиясын таңдады дейік, онда ең нашар сәтте ол a_{ij} -дің минимальдысына тең ұтыс алады. Бұл кезде А ойыншы өзінің минимальды ұтысын максимальдайтын стратегия таңдайды:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

α - ол А ойыншының кепілденген ұтысы немесе ойынның ең төмен бағасы.

A_{i0} стратегиясы – максимин стратегиясы деп аталады.

В ойыншы стратегияны таңдай отырып, келесі принциптен бастайды:

B_j стратегиясын таңдау кезінде оның ұтылысы j-ші бағанның максимальды мәнінен аспайды. В ойыншы өзінің максимальды ұтылысын минимальдайтын стратегия таңдайды:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

β - ойынның жоғарғы бағасы.

B_{j0} стратегиясы - минимакс стратегиясы.

1) Егер $\alpha = \beta$ болса, онда мұндай ойын "ер сияқты" нүктесі бар ойын деп аталады. "Ер сияқты" нүктеге ойыншылардың оптималды, таза стратегиялары сәйкес келеді. Олардың жиынтығы ойынның шешімі болады.

2) $\alpha < \beta$ болған кезде бір стратегия емес, кездейсоқ түрде бірнеше стратегия таңдайды. Өз стратегияларын кездейсоқ түрде таңдау аралас стратегия деп аталады.

$S_A=(p_1, p_2,..., p_m)$ – А ойыншының аралас стратегиясы, мұндағы A_1, A_2, Am стратегиялары $p_1, p_2,..., p_m$ ықтималдығымен қолданылады, ал

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

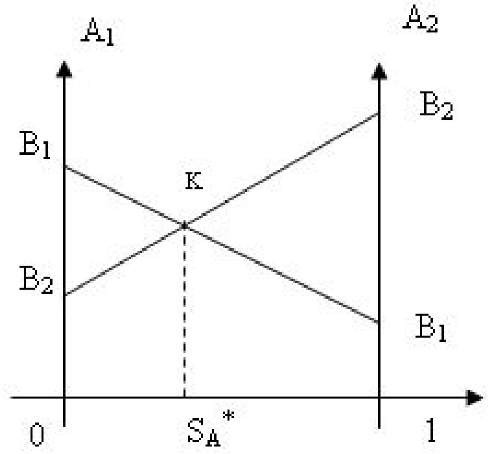
$S_B=(q_1, q_2,..., q_n)$, $\sum_{i=1}^{n} q_j = 1$ - В ойыншы үшін.

А ойыншының ұтысы аралас стратегияны қолданған кезде, ұтыстың математикалық күтуі ретінде анықталады:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = S_A A S_B^T$$

12.3. Графикалық әдіс (2×2 ойыны)

2×2 ойынның шешімін графикалық түрде табуға болады. Абсцисса осінде ұзындығы 1-ге тең кесінді салынады. Кесіндінің сол жақ ұшы A_1 стратегиясына, оң жағы A_2 стратегиясына сәйкес келеді.



Арадағы нүкте S_A^* қайсыбір аралас стратегияға сәйкес келеді. Мұнда $p_1^*=1-S_A^*$, $p_2= S_A^*$. Кесінділердің ұштарында O_x осіне перпендикуляр ретінде сәйкес A_1, A_2 таза стратегияның ұтыстарын түсіреміз.

Егер В ойыншы B_1 стратегиясын қолданса, онда А ойыншының таза стратегиялар A_1 және A_2 пайдаланған кездегі ұтыстары - a_{11}, a_{21}. Осы шамаларды перпендикулярға түсірген соң, алынған нүктелерді B_1, B_1 түзуімен қосамыз.

Дәл солай B_2, B_2 түзуін құруға болады. (В ойыншының B_2 стратегиясына сәйкес).

B_1 кB_2 А ойыншы ұтысының төменгі шекарасы. К нүктесі ойын бағасын анықтайды. Бұл нүктеде максимальды ұтыс шығады.

12.4. 2×n немесе 2×m ойындар

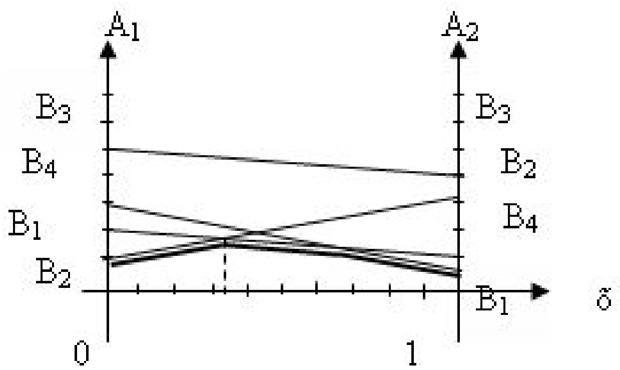
2×n матрицасымен берілген ойын шартын геометриялық түсініктемені пайдалана отырып, шешуге болады.

Кез келген B стратегияларына түзулер сәйкес келеді. Осы түзулерді сала отырып, ұтыстың ең төменгі шекарасын табуға болады. Төменгі шекарада жататын k нүктесі максимальды ойын бағасын және оның шешімін анықтайды (27-мысал):

$$\begin{array}{c|cccc|c} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \\ A_1 & 2 & 1 & 5 & 3 & 1 \\ A_2 & 1 & 3 & 4 & 0.5 & 0.5 \\ & 2 & 3 & 5 & 3 & \end{array}$$

$\alpha = 1$

$\beta = 2$



$p_1^* = 0,68$

$p_2^* = 0,32$

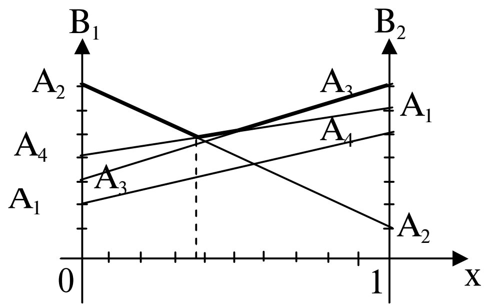
$v = 1,7$

Дәл осылай m×2 матрицалы ойынды шешуге болады. Тек бұл жағдайда ұтылыстың жоғарғы шекарасын құрады және минимум нүктені анықтайды. 28-мысал:

$$\begin{array}{c|cc|c} & B_1 & B_2 & \\ A_1 & 2 & 5 & 2 \\ A_2 & 7 & 1 & 1 \\ A_3 & 3 & 7 & 3 \\ A_4 & 4 & 6 & 4 \\ & 7 & 7 & \end{array}$$

$\alpha = 4$

$\beta = 7$



$q_1^* = 0{,}65$

$q_2^* = 0{,}35$

$v = 4{,}8$

12.5. m×n ойынын сызықты бағдарламалау есептеріне келтіру арқылы шешу

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1\,p_1 \\ A_2\,p_2 \\ \dots \\ A_2\,p_2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Негізгі теоремаға сәйкес ойыншылардың оптималды стратегияларын анықтау есебін қарастырайық:

A	B
$v \to \max$	$v \to \min$
$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + .. + a_{m1}p_m \geq v$	$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + .. + a_{1n}q_m \leq v$
$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + .. + a_{m2}p_m \geq v$	$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + .. + a_{2n}q_m \leq v$
$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + .. + a_{mn}p_m \geq v$	$a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + .. + a_{mn}q_n \leq v$
$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$	$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$

Шектеулердің сол (оң) жағын ν-ға бөлеміз де, жаңа айнымалы енгізіп, есепті қайта жазамыз:

A

$$u_i = \frac{p_i}{v}$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} u_i \to \min$$

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + .. + a_{m1}u_m \geq 1$$

$$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + .. + a_{m2}u_m \geq 1$$

$$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + .. + a_{mn}u_m \geq 1$$

$$u_i \geq 0, i = \overline{1,m}$$

B

$$\xi_j = \frac{q_i}{v}$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \to \max$$

$$\eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + .. + a_{1n}\xi_m \leq 1$$

$$\eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + .. + a_{2n}\xi_m \leq 1$$

$$\eta_m = a_{m1}\xi_1 + a_{m2}\xi_2 + .. + a_{mn}\xi_n \leq 1$$

$$\xi_j \geq 0, j = \overline{1,n}$$

Екі есепті қос мағыналы кестеге еңгізіп, В ойыншының есебіне тіке симплекс әдісін қолданамыз. Екі есептің де шешімін аламыз.

12.1-кесте

	v_1	v_2	...	v_m	ω
	$-\xi_1$	$-\xi_2$	...	$-\xi_n$	1
u_1 η_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1
u_2 η_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	1
...	....				...
u_n η_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	1
1Z	-1	-1	...	-1	0

29- мысал

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

12.2-кесте

	v_1 $-\xi_1$	v_2 $-\xi_2$	v_3 $-\xi_3$	ω 1
$u_1\ \eta_1$	-2	-1	5	1
$u_2\ \eta_2$	1	-2	3	1
$u_3\ \eta_3$	3	[1]	-4	1
$1Z$	-1	-1	-1	0

12.3-кесте

	v_1 $-\xi_1$	u_3 $-\eta_3$	v_3 $-\xi_3$	ω 1
$u_1\ \eta_1$	1	1	[1]	5
$u_2\ \eta_2$	7	2	-5	3
$v_2\ \xi_2$	3	1	-4	1
$1Z$	2	1	-5	1

12.4-кесте

	v_1 $-\xi_1$	u_3 $-\eta_3$	u_1 $-\eta_1$	ω 1
$v_3\ \xi_3$	1	1	1	5
$u_2\ \eta_2$	12	7	5	13
$v_2\ \xi_2$	7	5	4	9
$1Z$	7	6	5	11

$$\xi^* = (0;9;2)$$
$$u^* = (5;0;6) \qquad p^* = (\frac{5}{11};0;\frac{6}{11})$$
$$z^* = \omega^* = 11$$
$$v^* = \frac{1}{11} \qquad q^* = (0;\frac{9}{11};\frac{2}{11})$$

12.6. Статистикалық шешімдер теориясының негіздері

Көптеген ойын есептерінде белгісіздік (анықталмағандық) сапасыз қарсы әрекеттерге байланысты, операция өткізілетін шарттарды білмеуге байланысты (ауа райы, белгілі бір өнімге сұраныс және т.с.с).

Мұндай ойындар "табиғатты" ойындар деп аталады. Мұнда табиғат ретінде кездейсоқ қимылдайтын қайсыбір өз мақсаты жоқ жұмыс орнын қарастырады.

Табиғаттың мүмкін стратегиялары оның күйі ретінде анықталады. Ойын шарты да матрица түрінде беріледі.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ : & : & : \\ a_{m1} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Егер А ойыншы A_i стратегиясын пайдаланатын болса, онда матрица элементі a_{ij} оның ұтысына тең. Ал табиғат күйін P_j бірқатар ойын шешу жағдайларында тәуекел матрицасы R деп қарастырады, мұнда r_{ij} ұтыстар айырмасы (егер А ойыншы P_j күйін біле отырып, тапқан ұтысымен оның тура сол жағдайда A_i стратегиясын пайдалана отыра тапқан ұтыстарының айырмасы).

$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, мұндағы $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$

Табиғатты ойын шешулерінің бірқатар критерийлерін қарастырайық.

Табиғаттың әртүрлі күйлерінің ықтималдығы белгілі бір жағдайда орналасқанда шешім қабылдау критерийі ретінде ұтыстың максимальды математикалық күтуі болады.

Егер табиғат күйінің ықтималдықтарының орналасулары белгілі болмаса, онда келесі критерийлерді пайдаланады:

1. Вальд maxmin критерийі. Кез келген жағдайда maxmin a_{ij} − нан кем емес ұтысқа кепілдік беретін стратегия таңдалады.

2. Сэвидж тәуекелінің минимальды критерийі. Өте сәтсіз жағдайларда тәуекел шамасы ең аз болатындай стратегия таңдауды ұсынады.

3. Гурвиц критерийі. Стратегия таңдау кезінде келесі қатынастар орын алады:

$$H = \max_i(\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij})$$

мұндағы $0 \le \alpha \le 1$, α -субъективті пайымдаулар негізінде таңдалады.

30- мысал

Төрт түрлі станция салынулары мүмкін. Табиғаттың 4 күйі бар, оларға электрстанциялардың тиімділігі a_{ij} тәуелді.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 8 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 12\\ 8 & 5 & 3 & 10\\ 1 & 4 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

1. Вальд критерийі бойынша

$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \max(2,2,3,1) = 3$

сондықтан $A_3^* - 3$ - электрстанцияны салу керек.

2. Сэвидж критерийі бойынша: $\beta_j = 8 \quad 5 \quad 8 \quad 12$ $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$

$R=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0 & 8\\ 6 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 2\\ 7 & 1 & 6 & 4\end{pmatrix}, \min\ (8,6,5,7) = 5, \to A_3^*$, 3-электрстанцияны салу керек.

3. Гурвиц критерийі бойынша: $\alpha = 0{,}5$

$H = \max(0{,}5*2+0{,}5*8;0{,}5*2+0{,}5*12;0{,}5*3+0{,}5;0{,}5+0{,}5*8) = 7, A_2^*$,

2- электрстанцияны салу керек.

14- тапсырма. Келесі ойын есептерін шешу керек:

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 3) $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}5\end{pmatrix}$ 5) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 6) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

7) A=$\begin{pmatrix}5 & 8 & 2\\ 2 & 5 & 9\end{pmatrix}$. 8) $A=\begin{pmatrix}7 & 9 & 8\\ 10 & 6 & 9\end{pmatrix}$ 9) A=$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix}4 & 7 & 4 & 2\\ 9 & 0 & 7 & 8\end{pmatrix}$. 11) $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 5 & 6\\ 8 & 7 & 2 & 3\end{pmatrix}$. 12) $A=\begin{pmatrix}4 & 7 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

13) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 0.5 \end{pmatrix}.$ 14) $A=\begin{pmatrix} 19 & 15 & 17 & 16 \\ 0 & 20 & 15 & 5 \end{pmatrix}.$ 15) $A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$

16) $A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0.5 & 1 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}.$ 17) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$ 18) $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

19) $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$ 20) $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}.$ 21) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$

22) $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ 23) $A=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$ 24) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$

25) $A=\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$ 26) $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$ 27) $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

28) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$ 29) $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$ 30) $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$

31) $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$ 32) $A=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 0 & 10 & 2 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$ 33) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

34) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

35) $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.8 \\ 0.9 & 0.4 & 0.2 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}.$

36) $A=\begin{pmatrix} 29 & 30 & 32 \\ 180 & 60 & -20 \\ 20 & 70 & 120 \end{pmatrix}.$

37) $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 8 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

38) $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

39) $A=\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

40) $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

41) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$

42) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$

43) $A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

44) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

45) $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Жауаптар

1 - тапсырма

1) X*={4;2;1}
2) X*={1;2;3}
3) X*={1;1;1}
4) X*={1;2;3}
5) X*={-2;1;-1}
6) X*={1; 2; 3}
7) X*={-1;3;2}
8) X*={5;0;17}
9) X*={1;2;3}
10) X*={1;1;1}
11) X*={-3;6;-1}
12) X*={-1;0;1}
13) X*={1;2;3}
14) X*={5/9;22/9;16/9}
15) X*={1;-1;1;-1}
16) X*={1;-2;1;2}
17) X*={0;-3;-16/3;6}
18) X*={1;2;-1;-2}
19) X*={3;1;-1;2}
20) X*={1;-1;2;3}
21) X*={1;2;-1;-2}
22) X*={1;-1;3;4}
23) X*={1;2;3;4}
24) X*={1;-1;2;0}
25) X*={1;1;-1;-1}
26) X*={1;-1;2;0}
27) X*={1;-1;-1;1;0}
28) X*={1;0;0;0;1}
29) X*={-1;-1;1;1}
30) X*={1;-1;2;3}
31) X*={3;5;1;2}
32) X*={10;1/2;1/3;-1}
33) X*={1;2;1;2}
34) X*={1;2;0;1}
35) X*={3;-2;1;-3}
36) X*={1/2;1/3;-1/2;1}
37)X*={-1;-1;-1;-1}
38) X*={0;1;2;-1}
39) X*={3;1;1;2}
40) X*={1;2;3;4}

3- тапсырма

1) z*=28; x*={4;6}
2) z*=32; x*={4;6}
3) z*=10; x*={2;4}
4) z*=28; x*={6;4}
5) z*=14; x*={2;4}
6) z*=32; x*={6;4}
7) z*=30; x*={6;3}
8) z*=14; x*={4;2}
9) z*=15; x*={3;4}
30) z*=8.5; x*={1.5;2}
31) z*=10; x*={3;1}
32) z*=30; x*={6;3}
33) z*=30; x*={6;3}
34) z*=2.67; x*={1.33;0.67}
35) z*=7; x*={6;1}
36) z*=30; x*={6;3}
37) z*=2; x*={6/7; 20/7}
38) z*=0.8; x*={0;0.8}

10) z*=15; x*={3;4}
11) z*=34; x*={3;5}
12) z*=31; x*={3;5}
13) z*=15; x*={4;3}
14) z*=15; x*={4;3}
15) z*=34; x*={5;3}
16) z*=8.4; x*={4.8;3.6}
17) z*=13.5; x*={1.5;2.5}
18) z*=30; x*={3;6}
19) z*=33; x*={3;6}
20) z*=14; x*={2;4}
21) z*=8; x*={2;4}
22) z*=14; x*={2;4}
23) z*=24; x*={3;4}
24) z*=27; x*={4;3}
25) z*=-11; x*={10;9}
26) z*=27; x*={3;5}
27) z*=30; x*={5;3}
28) z*=30; x*={6;3}
29) z*=30; x*={6;3}
39) z*=9; x*={6;1}
40) z*=4; x*={6;1}
41) z*=4; x*={0;4}
42) z*=9.88; x*={9.88;0.71}
43) z*=1.75; x*={0;1.75}
44) z*=49; x*={10/3;13}
45) z*=3.8; x*={0.6;1.6}
46) z*=14; x*={14;0}
47) z*=12; x*={4.8;3.6}
48) z*=-14; x*={2;4}
49) z*=-3; x*={0;3}
50) z*=28; x*={6;2}
51) z*=10,67; x*={2,22; 3,11}
52) z*=14; x*={2;4}
53) z*=18; x*={6;0}
55) z*=19,2; x*={4,8; 2,8}
56) z*=2; x*={0; 2}
57) z*=8; x*={0;4}
58) z*=14; x*={3; 1}

4-тапсырма

1) z*=6; x*={2;5}
2) z*=252/22; x*={15/22; 32/22}
3) z*=22; x*={2;6;33;0;0}
4) z*=20; x*={0;0;4}
5) z*=22; x*={2;6;33;0;0}
6) z*=22; x*={2;6;33;0;0}
7) z*=5; x*={2;0;1}
8) z*=24; x*={3;0;4}
9) z*=102/7; x*={45/7;4/7;0}
10) z*=282/11; x*={6/11;90/11;0;0;254/11;0}
11) z*=53/7; x*={45/7;4/7;0}
15) z*=22; x*={2;6;33;0;0}
16) z*=22; x*={2;6;33;0;0}
17) z*=22; x*={2;6;33;0;0}
20) z*=22; x*={2;6;33;0;0}
22) z*=9; x*={1;0;2;0;1}
23) z*=37; x*={0;19/4;17/4;0}
26) z*=82/11; x*={34/11;14/11;0;0}
27) z*=-20/3; x*={4/3;0;0;1/3;13/3}
31) z*=159; x*={0;0;6;28;3}
33)z*=226/11; x*={10/11;72/11;0;0;0;456/11}
34) z*=39; x*={23;4;0;1;0;0}
37) z*=282/11; x*={6/11; 90/11;0; 0;

12) z*=22; x*={2;6;33;0;0}
13) z*=22; x*={2;6;33;0;0}
14) z*=22; x*={2;6;33;0;0}
254/11; 0}
37) z*=16.8; x*={3.6;0;0;0;0.3}
38) z*=-15; x*={0;0;6;0;1.5;0}
39) z*=-192; x*={0;0;0;48;0;0}

5-тапсырма

1) z*=6; y*={3;3}
2) z*=4; y*={1;2}
3) z*=34/5; y*={9/5;16/5}
4) z*=30; y*={6;3}
5) z*=4; y*={6;1}
6) z*=126/19; y*={15/19;96/19}
7) z*=2; y*={0;2}
8) z*=126/19; y*={15/19;96/19}
9) z*=14; y*={3;1}
10) z*=12; y*={16;2}
11) z*=2.5; y*={4.5;0;0; 12; 1.25;0}
12) z*=4.8; y*={6.2;0;0.8;0;24.2}
13) z*=17; y*={3.5;3.5;1.5}
14) z*=26; y*={0;10;16}
15) z*=8; y*={4;4;0;0}
16) z*=6; y*={6;0;0;0}
17) z*=0; y*={0;0.4;3.2;2.8}
18) z*=4; y*={0;1;0;4}
19) z*=9; y*={1;0;2;0;1}
25) z*=12; y*={5/7;0;6/7}
26) z*=20; y*={4;2}
27) z*=29; y*={12;1}
28) z*=66; y*={719;0;13/9}
29) z*=21; y*={0;0;7/5}
30) z*=226/11; y*={7/11;1/11;0}
31) z*=28; y*={0;1;0}
33) z*=11; y*={0;3;10;0;19}
34) z*=48; y*={4;0;4;0;26}
35) z*=126; y*={0;12;0;6}

6-тапсырма

6.1-тапсырма:

1) $$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 20 \\ 15 & 20 & 25 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 325;$$

2) $$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 0 & 40 & 110 \\ 80 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 800;$$

3) $$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}; z^* = 47;$$

4) $$x^* = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 38;$$

5) $x^* = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}; z^* = 40;$

6) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 315;$

7) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 60 \\ 30 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 605;$

8) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 22 & 0 \\ 23 & 12 & 0 & 20 \\ 22 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 361;$

9) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 89;$

10) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; z^* = 37;$

11) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 45 & 0 \\ 30 & 15 & 0 & 25 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 495;$

12) $x^* = \begin{pmatrix} 65 & 0 & 50 & 0 \\ 30 & 38 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 68 \end{pmatrix}; z^* = 586;$

13) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 30 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 271;$

14) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 50 \\ 40 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 310;$

17 $x^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 25 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 210;$

18) $x^* = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 60 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 265;$

19) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 15 & 15 & 0 & 20 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 325;$

20) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 20 & 0 & 170 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}; z^* = 1280;$

21) $x^* = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 86;$

22) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 10 & 15 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 555;$

23) $x^* = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 190;$

24) $x^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 170;$

25) $x^* = \begin{pmatrix} 19 & 0 & 31 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 14 & 2 & 0 & 41 \end{pmatrix}; z^* = 686;$

26) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 22 & 18 \\ 32 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 11 \end{pmatrix}; z^* = 416;$

27) $x^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; z^* = 18;$

28) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 120 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 20 & 70 \\ 110 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$
$z^* = 1150;$

29) $x^* = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 30 \end{pmatrix}; z^* = 445;$

30) $x^* = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 10 \end{pmatrix}; z^* = 300.$

6.2-тапсырма:

1) $x^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 50 & 50 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 720;$

2) $x^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 60 & 70 \end{pmatrix}; z^* = 790;$

3) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 80 \\ 20 & 80 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 780;$

4) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 110 & 60 & 0 \\ 125 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}; z^* = 1675;$

5) $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 15 & 15 & 0 & 20 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 325;$

6) $x^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 25 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 210;$

7) $$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 22 & 18 \\ 32 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 11 \end{pmatrix}; z^* = 416;$$

8) $$x^* = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 10 \end{pmatrix}; z^* = 300;$$

11) $$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 50 \\ 40 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 310;$$

12) $$x^* = \begin{pmatrix} 65 & 0 & 50 & 0 \\ 30 & 38 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 68 \end{pmatrix}; z^* = 586;$$

13) $$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 120 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 150 \\ 140 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 190 & 0 & 30 \end{pmatrix};$$
$$z^* = 2490;$$

14) $$x^* = \begin{pmatrix} 19 & 0 & 31 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 14 & 2 & 0 & 41 \end{pmatrix}; z^* = 686;$$

15) $$x^* = \begin{pmatrix} 70 & 5 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 175 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 30 & 60 \end{pmatrix};$$
$$z^* = 920;$$

16) $$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 145 & 135 & 0 \\ 0 & 0 & 175 & 0 \\ 90 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 130 \end{pmatrix};$$
$$z^* = 2455;$$

17) $$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix};$$
$$z^* = 1330;$$

18) $$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 120 & 60 & 0 \\ 110 & 90 & 0 & 20 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix};$$
$$z^* = 2240;$$

19) $$x^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 140;$$

20) $$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 20 & 0 & 170 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix};$$

$z^* = 1280;$

21) $$x^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 50 & 30 \\ 0 & 80 & 190 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 130 \end{pmatrix};$$

$z^* = 2550;$

22) $$x^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 60 & 35 \\ 70 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}; z^* = 665;$$

23) $$x^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 880 & 60 & 30 & 50 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$z^* = 1010;$

24) $$x^* = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & 35 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 190;$$

25) $$x^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 140;$$

26) $$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 20 & 0 & 170 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}; z^* = 1280;$$

27) $$x^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 50 & 30 \\ 0 & 80 & 190 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 130 \end{pmatrix};$$

$z^* = 2550;$

28) $$x^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 60 & 35 \\ 70 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}; z^* = 665;$$

29) $$x^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}; z^* = 140;$$

7-тапсырма

1) z*=2; x*={1; 1}
2) z*=48; x*={3; 13}
3) z*=2,5; x*={1,5; 1}
23) z*=1; x*={1; 1}
24) z*=1; x*={0; 1}
25) z*=20; x*={2;0}

4) z*=6; x*={2; 2}
5) z*=5; x*={1; 2}
6) z*=330; x*={3; 0}
7) z*=16; x*={0; 4}
8) z*=6; x*={0; 3}
9) z*=5; x*={1; 1}
10) z*=3; x*={0; 3}
11) z*=10; x*={4; 3}
12) z*=11; x*={6; 5}; x*={7; 4}
13) z*=12; x*={6; 0}
14) z*=12; x*={3; 2}
15) z*=11; x*={1; 2}
16) z*=12; x*={2; 0}
17) z*=11; x*={1; 2}
18) z*=17,6; x*={1; 1,6}
19) z*=2; x*={0; 2}
20) z*=6; x*={2;4}; x*={3; 3}; x*={4; 2}
21) z*=5; x*={1; 1}
22) z*=-1; x*={2;3}
26) z*=11; x*={3;1}
27) z*=12; x*={6; 0}
28) z*=-2; x*={1; 1}
29) z*=3; x*={2; 1}
30) z*=14; x*={1; 4}
31) z*=-1; x*={1; 1}
32) z*=-7; x*={2; 1}
33) z*=14; x*={1;3}
34) z*=4; x*={1;3}; x*={2;2}
35) z*=19; x*={0; 19}
36) z*=52; x*={2; 6}
37) z*=11,33; x*={0; 1,33; 2}
38) z*=35; x*={9; 4; 0; 0; 32}
39) z*=1; x*={1; 0; 0; 2}
40) z*=9; x*={9; 1; 0; 5}
41) z*=1322,4; x*={10; 0; 6; 0}
42) z*=2; x*={7; 2; 0; 0; 3}
43) z*=9; x*={0; 0; 11; 3; 1}
44) z*=7; x*={3; 1; 2; 3; 3}
45) z*=84; x*={12; 0; 2; 108; 9}

8-тапсырма

1. $z(t) = 95$; $1 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2 \to 6 \to 1$
2. z(t)=117; $1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 1$
3. $z(t) = 70$; $1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 3 \to 6 \to 1$
4. $z(t) = 60$; $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5 \to 6 \to 1$
5. $z(t) = 111$; $1 \to 4 \to 5 \to 2 \to 6 \to 3 \to 1$
6. $z(t) = 122$; $1 \to 5 \to 2 \to 3 \to 6 \to 4 \to 1$
7. $z(t) = 103$; $1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 6 \to 3 \to 1$
8. $z(t) = 86$; $1 \to 5 \to 4 \to 6 \to 2 \to 3 \to 1$
9. $z(t) = 81$; $1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 6 \to 5 \to 1$
10. $z(t) = 91$; $1 \to 5 \to 2 \to 3 \to 6 \to 4 \to 1$
11. $z(t) = 50$; $1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 1$
12. $z(t) = 96$; $1 \to 6 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$

13. $z(t)=83;$ $1\to5\to4\to2\to3\to6\to1$
14. $z(t)=73;$ $1\to3\to2\to4\to6\to5\to1$
15. $z(t)=103;$ $1\to5\to2\to3\to6\to4\to1$
16. $z(t)=85;$ $1\to5\to2\to6\to3\to4\to1$
17. $z(t)=115;$ $1\to5\to6\to3\to2\to4\to1$
18. $z(t)=75;$ $1\to3\to4\to6\to2\to5\to1$
19. $z(t)=96;$ $1\to2\to5\to3\to6\to4\to1$
20. $z(t)=85;$ $1\to6\to4\to5\to3\to2\to1$
21. $z(t)=70;$ $1\to4\to2\to5\to6\to3\to1$
22. $z(t)=79;$ $1\to3\to5\to4\to6\to2\to1$
23. $z(t)=20;$ $1\to3\to6\to2\to5\to4\to1$
24. $z(t)=26;$ $1\to5\to4\to2\to3\to6\to1$
25. $z(t)=28;$ $1\to7\to3\to5\to2\to6\to4\to1$
26. $z(t)=26;$ $1\to5\to4\to2\to3\to6\to1$
27. $z(t)=20;$ $1\to5\to4\to6\to2\to7\to3\to1$
28. $z(t)=36;$ $1\to2\to6\to5\to4\to3\to1$
29. $z(t)=121;$ $1\to4\to3\to5\to6\to7\to6\to5\to3\to2\to1$
30. $z(t)=50;$ $1\to5\to4\to3\to2\to1$

9-тапсырма

1) D*=85; X*={0;0;20;80}
2) D*=82; X*={0;80;40;80}
3) D*=82; X*={0;0;10;40}
4) D*=65; X*={0;60;0;90}
5) D*=77; X*={0;0;30;45}
6) D*=70; X*={0;35;0;140}
7) D*=79; X*={25;25;0;75}
8) D*=78; X*={0;0;135;90}
9) D*=79; X*={50;0;150;50}
10) D*=73; X*={0;60;180;60}
11) D*=78; X*={55;110;0;110}
12) D*=72; X*={40;0;20;40}
13) D*=86; X*={0;0;10;40}
14) D*=71; X*={0;120;40;40}
15) D*=84; X*={0;0;60;90}
16) D*=72; X*={100;0;0;150}
17) D*=79; X*={120;80;0;0}
18) D*=76; X*={0;0;0;400}
19) D*=77; X*={0;0;70;280}
20) D*=78; X*={0;0;360;90}

12-тапсырма

1) $X = (3;4)$; $f_{max}=73$;
2) $X = (5;4)$; $f_{min}= -481$;
3) $X = (2;-6)$; $f_{min}=-81$;
4) $X = (1;2)$; $f_{min}=0$;
5) $X = (1;2)$; $f_{max}= -3$;
6) $X = (3;2)$; $f_{min}= -13$;
7) $X = (3;0)$; $f_{min}=-18$;
8) $X = (3;4)$; $f_{max}=73$;
9) $X = (3;4)$; $f_{min}=73$;
10) $X = (5;6)$; $f_{max}=13$;
11) $X = (10;8)$; $f_{max}=164$;
12) $X = (1;\ 0,5)$; $f_{max}=1,75$;
13) $X = (3;2)$; $f_{min}= -13$;
14) $X = (1;2)$; $f_{max}=10$;
15) $X = (2;3)$; $f_{max}=0$;
16) $X = (2,33;\ 2,67)$; $f_{max}= -12,67$;
21) $X = (3;2)$; $f_{max}=0$;
22) $X = (10;\ 8)$; $f_{min}=-392$;

13-тапсырма

1) $X = (4;6)$; $f_{max}=84$;
2) $X = (1;0)$; $f_{max}= 1$;
3) $X = (4;3)$; $f_{min}=1$;
4) $X = (6;2)$; $f_{min}=16$;
6) $X = (10,5;\ 0,5)$; $f_{min}= -0,5$;
8) $X = (0,8;\ 1)$; $f_{max}=11,2$;
10) $X = (1;1)$; $f_{max}=54$;
22) $X = (2;2)$; $f_{max}=20$;
23) $X = (0,8;\ 0,4)$; $f_{max}=-0,8$.

14- тапсырма

	V	X	Y
1)	7/5	{2/5;3/5}	{1/5;4/5}
2)	0	{1/3;2/3}	{1/2;1/2}
3)	7/4	{1/4;3/4}	{5/8;3/8}
4)	0.3	{2/3;1/3}	{1/2;1/2}
5)	2	{1;0}	{1;0}
6)	0	{1;0}	{0;1}
7)	4	{0.65;0.35}	{0.4;0.2}
8)	8	{2/3;1/3}	{1/2;1/2;0}
9)	0	{0.7;0.3}	{0.5;0.5}
10)	4	{0.6;0.4}	{0.3;0.7}
11)	3	{0.5;0.5}	{0.5;0.5}
12)	4/7	{5/14;9/14}	{0;2/7;5/7}
13)	5/3	{2/3;1/3}	{2/3;1/3}

14)	15.2	{0.9;0.1}	{0.9;0.1}
15)	39/7	{4/7;3/7}	{0;0;1/7;6/7}
16)	0.2	{1;0}	{0;1}
17)	7/2	{1/2;1/2}	{0;0;0;3/4;1/4}
18)	4	{0.7;0.3}	{0;0;0;0.2;0.8}
19)	9/2	{1/2;1/2}	{0;0;0;3/4;1/4}
20)	5	{0;0.24;0.76}	{0.4;0.6}
21)	2	{0.2;0;0.8}	{0.75;0.25}
22)	7	{0;1/3;0;2/3}	{2/3;1/3}
23)	4	{1/3;0;0;0;2/3}	{2/3;1/3}
24)	11/3	{2/3;1/3;0;0}	{4/9;5/9}
25)	21/5	{0;4/5;1/5;0;0}	{1/5;4/5}
26)	5	{1/3;0;0;0;2/3}	{2/3;1/3}
27)	44/9	{7/9;0;0;0;2/9}	{1/3;2/3}
28)	7/6	{0;0;0;1/6;5/6}	{5/6;1/6}
29)	27/6	{5/6;1/6;0}	{0:1/2;1/2}
30)	87/17	{8/17;2/17;7/17}	{3/17;1/17;13/17}
34)	9/15	{10/15;4/15;1/15}	{6/15;6/15;3/15}

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. – М.: Советское радио, 1980.

2. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. Т. 1-3. – М.: Мир, 1973.

3. *Таха Х.* Введение в ИСО. В 2-х книгах. – М.: Мир, 2000.

4. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 2000.

5. *Форд Л., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966.

6. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Мир, 1967.

7. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1972.

8. *Калихман И.Л.* Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975.

9. *Балғабаева Л.Ш.* Сызықтық және бейсызықтық бағдарламау. Тәжірибелік сабақтарға арналған әдістемелік нұсқаулар. – Алматы: ҚазҰТУ, 1997.

10. *Балғабаева Л.Ш.* Бүтінсандық бағдарламау. Транспорт есебі. Тәжірибелік сабақтарға арналған әдістемелік нұсқаулар. – Алматы: ҚазҰТУ, 1997.

11. *Балғабаева Л.Ш., Мураталиева Е.П.* Исследование операций. Методические указания к практическим занятиям и выполнению курсовой работы. – Алматы: КазНТУ, 1998.

12. *Балғабаева Л.Ш., Мураталиева Е.П.* Автоматтандырылған басқарудың модельдері мен әдістері. Тәжірибелік сабақтарға және курстық жұмыс орындау үшін арналған әдістемелік нұсқаулар. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003.

13. *Балгабаева Л.Ш., Ким Е.Р.* Сборник задач. Часть 1, 2, 3. Методические указания к практическим занятиям по дисциплинам «Основы исследования операций» и «Теория принятия решений». – Алматы: КазНТУ, 2005.

14. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.

15. *Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С.* Руководство к решению задач по математическому программированию. – Минск: Вышэйшая школа, 1978.

16. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1971.

17. Исследование операций в экономике /Под ред. проф. Крамера Н.Ш. – М.: Юнити, 1999.

18. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Мир, 1969.

19. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974.

20. *Балғабаева Л.Ш.* Басқарудың модельдері мен әдістері пәнінен электронды оқулық. – Алматы: ҚазҰТУ, 2006.

21. *Балғабаева Л.Ш.* Операцияларды зерттеу негіздері. – Алматы: ҚазҰТУ, 2008.

Мазмұны

Ләззат Шайханқызы Балғабаева
Әлия Советжанқызы Шанлаякова

Басқарудың модельдері мен әдістері

Оқу құралы

РБ бастығы *З.А. Ғұбайдулина*
Редакторы *А.И. Бейсебаева*
Компьютерде беттеген *А.Н. Оразалиева*

Басуға 26. 12. 2011 ж. қол қойылды

Таралымы 100 дана. Пішімі 60х84, 1/16 № 1 баспаханалық қағаз.
Көлемі 10,9 есепті баспа-табақ. 9,6 шартты баспа табақ.
Тапсырыс № . Бағасы келісімді.

Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университетінің
басылымы. Ақпараттық- баспа орталығы.
Алматы қаласы, Ладыгин, 32

ISBN 978-601-228-282-5

9 786012 282825