ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық университеті

Б.Қ. Айтжанов

АҚПАРАТ ТЕОРИЯСЫ

Оқу құралы

Университеттің Ғылыми-әдістемелік кеңесі
оқу құралы ретінде ұсынған

Алматы 2012

ЖОК 659(075.8)

А32 Айтжанов Б.Қ. Ақпарат теориясы: Оқу құралы. – Алматы: ҚазҰТУ, 2012. – 169 б.

Кесте – 7. Библиографиялық тізім – 30 атау.

ISBN 978-601-228-353-2

Оқу құралында ақпарат теориясының негізгі қалыптары мен анықтамалары берілген. Детерминирленген және кездейсоқ сигналдардың математикалық модельдері, дискретизациялау мен сигналдарды кванттаудың қағидалары қарастырылған. Негізгі назар – ақпараттың сандық өлшеуінің әртүрлі аспектілері мен ақпараттар, байланыс каналдарының ақпарат көзіне, әсері және кедергіге қарсы кодтауға бөлінген. Материалдар мысалдармен, жаттығулармен нақтыланған.

Оқу құралы «Есептеу техникасы және бағдарламалық қамсыздандыру» мен ақпараттық және системотехника мамандығы студенттеріне арналған.

ЖОК 659(075.8)

Пікір жазғандар:

Ташев А.А., М. Тынышбаев атындағы ҚазККА Есептеу техникасы және ақпараттық жүйелер кафедрасының профессоры, техн. ғыл. докт-ры, профессор;

Абдикаликов К.А., Жұбанов атындағы Ақтөбе Мемлекеттік университетінің проректоры, техн. ғыл. докт-ры, профессор;

Джуруntаев Ж.З., ҚазҰТУ-нің есептеу техникасы кафедрасының профессоры, техн. ғыл. докт-ры, профессор.

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің 2012 жылғы жоспары бойынша басылды.

ISBN 978-601-228-353-2

КІРІСПЕ

Ақпарат алмасуын оңтайлы ұйымдастыру, адамдардың тәжірбиелік қызметіне үлкен маңызы бар. Жаңа заманға сай, қоғамның қалыпты жұмыс істеуіне қажетті ақпарат көлемі, шамамен өнеркәсіптік потенциалдың даму дәрежесіне пропорционалды түрде өсуде. Ақпаратпен қамтамасыз ету сұрақтарымен айналысып жүрген мамандардың (қызметкерлердің), өнеркәсіпте жұмыс жасап жүрген жұмысшылардың үлесіне қарағанда ұлғая түсуде. Сондықтан, ақпараттық процестердің теориялық және тәжірбиелік негіздерін игеретін ғылымдар құрамына жататын ақпараттық теория (АТ), бұл жағдайда өте актуальды болып саналады.

Ақпаратты қабылдау, тапсыру, өңдеу, сақтау және қолдануға байланысты ақпарат теориясының негізін жеке ғылыми пән ретінде XX ғасырдың 40-шы жылдары америкалық ғалым К. Шеннон қалаған. К. Шеннон ұсынған теория – *энтропия* – анықталмағандығының сандық өлшемінің беріктігі түсінігі мен онымен байланысты – *ақпарат саны* – түсінігіне негізделген. Ақпараттар теориясы қалыптасуының басқа бір факторы ретінде ақпаратты тасымалдаушы – *сигнал* – екендігін түсіну және оның табиғатта кездейсоқтығы. Энтропия және ақпарат мөлшері ұғымдарының негізінде ақпараттар теориясында сигналдардың және ақпараттық жүйелердің маңызды сипаттамалары енгізілді.

Оқу құралы, автордың Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университетінің «Ақпараттық технологиялар» кафедрасында екінші курс студенттерімен жұмыс кезінде қолданылатын дәрістері мен тәжірбиелік жұмыстарына керекті мағлұматтарға негізделіп жазылған.

Курс бағдарламасында (силлабусында) мына негізгі тақырыптар қарастырылған: ақпараттар теориясының фундаментальдық жағдайы, ақпараттың сандық өлшемі, математикалық модельдер, детерминді және кездейсоқ сигналдардың көріністі пішіндері, ақпаратты уақыт бойынша дискреттеу және деңгей бойынша кванттау, ақпаратты тасымалдау жүйесі мен каналдарының негізгі сипаттамалары.

Бірінші бөлімде – ақпарат теориясының жалпы түсініктері мен анықтамалары берілген. Ақпараттың классификациясы, түрлері және айналу кезеңдері келтірілген.

Екінші бөлімде – ақпарат мөлшерін өлшеу теориясы келтірілген. Сонымен қатар, ақпарат мөлшерін өлшеудің құрылымдық, статистикалық және семантикалық өлшемдері мен олардың арасындағы байланыс сұрақтары мұқият қарастырылған.

Үшінші бөлім – детерминделген және кездейсоқ сигналдардың аналитикалық сипаттамасына арналған. Уақыттық және жиіліктік түрде көрсету пішіндері мен олардың негізгі сипаттамалары қарастырылған.

Төртінші бөлімде – сигналдарды дискреттеу мен кванттау қамтылған. Мұнда В.А. Котельников теоремасының дәлелдеуі келтіріліп, дискреттеудің аналитикалық әдістері көрсетілген. Ақпаратты деңгей бойынша кванттаудың негізгі сипаттамалары мен кванттаудың оңтайлы деңгейін таңдау сұрақтары қамтылған.

Бесінші бөлімде – ақпаратты тасымалдау жүйелерінің негізгі түсініктері мен анықтамалары келтірілген. Мұнда сигналдарды модуляциялау әдістері қарастырылып, модуляцияланған сигналдарға салыстырмалы талдау жасалған. Байланыс каналы мен сигналдың физикалық қасиеттерін талдау сұрақтары берілген.

Оқу құралының барлық материалдары мысал есептермен нақты қамтылған. Мұндағы материалдардың кейбір тараулары мен бөлімдерін студенттер өз беттерінше оқып-үйренулеріне болады.

Оқу құралының материалдары «Ақпараттық жүйелерді жобалау», «Компьютерлік желілер» пәндерін оқығанда өте қажет. Сонымен қатар, мамандарға, ғылыми және қолданбалы зерттеулер жүргізгенде пайдалануға болады.

І. АҚПАРАТ ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗГІ ТҮСІНІКТЕРІ МЕН МІНДЕТТЕРІ

1.1. Ақпарат теориясы және оның мамандық пәндеріндегі орны

Байланыс, телемеханика және есептеу техникасы құралдарын пайдаланбай, автоматтық басқаруды кеңінен ендіру мүмкін емес. Техникада, өндірістік процестерде және халық шаруашылығы саласында автоматтық басқару процесінде, басқару жүйесінің жеке түйіндерінің арасында, адам мен техника және жеке адамдар арасында ақпарат алмасу қарқынды жүреді.

Кешендік автоматизация және электронды-есептеуіш машинасының толық жетілуі, тасымалдау көлемі мен жылдамдығын күрт өсіреді және бір мезгілде оның дұрыстығына жоғарғы талаптар қойылады [2, 3].

Қазіргі заманға сай, техникалық жүйелердің сан алуан түрлерінің ішінен ақпаратты тасымалдауға, түрлендіруге және сақтауға арналған *ақпараттық жүйелер* деп аталатын ерекше топты бөліп көрсетуге болады (байланыс, локациялық, навигациялық, теледидарлық жүйелер, электронды-есептеу және ақпаратты – өлшеу техникалары, автоматтандырылған басқару, бақылау жүйелері, т. с. с.).

Ақпараттық жүйелердің жұмысының негізі – энергияның тасымалдау және өзгерту процестері болып саналады. Олар энергетикалық құрылғылар мен жүйелерден (қозғалтқыштар, электрлік генераторлар, электртасымалдау жолы) өзгешеленеді.

Ақпаратты тасымалдау, жинақтау немесе ақпараттың бұрмалану мүмкіндігі мен шығындарды ескере отырып, максимальды ақпарат мөлшерін бір уақыт бірлігіне түрлендіруі – ақпараттық жүйелердің жұмыс сапасының негізгі көрсеткіші болып саналады. Басқа сол секілді энергетикалық орнатқыштар жұмысының пайдалы коэффициенті емес [7, 9].

Ақпараттық жүйелерде энергетикалық қалыптар екінші рөл атқарады, ал энергияның өзі – транспорттық құралдар ретінде қолданатын сигналдың сипаттамасы болып саналады.

Ақпараттық жүйелер – объектіні басқаруға қажетті ақпаратты жинақтау, сақтау, жаңарту, тапсыру, өңдеу және тасымалдаудың жүйесі.

Ақпарттық жүйенің есептері [2, 8, 9]:

1. Жүйенің ішінде және сыртында болып жатқан құбылыстар туралы ақпаратпен қамтамасыз ету.
2. Шешім ережелері туралы ақпаратпен қамтамасыз ету.
3. Объектінің ортасы туралы, т.б. мәліметтерді тіркеу, талдау және бағалау.
4. Басқарылатын процестердің жүрісін бақылау, басқарылатын жүйенің негізгі жағдайы туралы мәліметтер жинау, талдау және бағалау.
5. Мәліметтердің кірісі мен өңделуін қамтамасыз ету.
6. Шешім қабылдауға өңделген мәліметтерден, қажетті көлемде ақпараттар алу.
7. Шешім қабылдайтын административтік және мотивациялы ақпаратпен қамтамасыз ету.
8. Қабылданған шешімдердің орындалуын бақылау.

Ақпараттық жүйелердің дамуына сәйкес, ғылыми пәндердің дифференциациясы жүріп отырды. Ақпараттық жүйелердің жеке түрлерінің теориясы және синтезі сұрақтарымен айналысатын автоматтық басқару теориясы, автоматтық бақылау теориясы, радиобайланыс және желілі байланыс, телемеханика, бағдарламалау, т.б. пайда болды және олар даму үстінде. Бұл жүйелердің теориялары мен тәжірбиелерінің ілгері дамуы – «кибернетика» атты жалпы теориялық пәнге біріктіріліп, олардың құрылыс теориясында, жалпы негіздерді ұйымдастырды.

Кибернетика – машиналарда, тірі организмдерде және олардың жиынтығында ақпаратты қабылдау, сақтау, өңдеу және қолдану әдістері туралы ғылым. Ол тірі организмдер секілді машиналарда жіберу процесі, ақпаратты өзгерту және қолдану негізінде мақсаты әрекеттерді орындайтын жалпы заңдар мен қағидаларды бекітеді. Егер жалпы кибернетиканың негізгі мақсаты – түрлі табиғаттағы ақпараттық процестер мен олардың алгоритмделуін талдаумен негізделсе, онда техникалық кибернетика – осы алгоритмдерді жүзеге асыратын ақпараттық құрылғылардың синтезімен айналысады.

Техникалық кибернетика өзіне үш бағытты біріктірген [13, 17]:

– ақпарат алу, өзгерту, жиналу және тасымалдау процестерін игеретін ақпарат теориясы;

– ақпараттарды берілген алгоримдерге сай синтездеу әдістерімен айналысатын логикалық және есептеу машиналарының теориясы;

– мақсатты әрекеттерді орындау үшін, ақпараттардың қолдану әдістерін игеретін автоматты басқару теориясы.

Ақпарат теориясының пайда болуы мен дамуы XX ғасырдың бірінші жартысындағы байланыс техникасының тез дамуымен байланысты. Байланыс жүйелерінің негізгі сипаттамалары мен хабар тасымалдау сапасының сандық бағасының ғылыми дәлелдемелерінің әрекеттері қолданылатын жұмыстар пайда бола бастады.

1928 жылы американдық ғалым Р. Хартли ақпарат санын бағалауға «Хартли өлшемі» деп аталатын логарифмдік өлшемді ұсынды. В.А. Котельников «Эфирдің өткізгіштік қасиеті туралы» атты атақты жұмысында алғаш рет шектеулі спектрлі дискретті көрініс туралы теореманың және байланыс каналдарының өткізгіштік қасиеті бойынша бағалаудың бірқатар тәжірибелік кепілдемелер қисынын келтірді.

Ақпараттық теорияның дамуының кезекті үлкен қадамы – В.А. Котельниковтың потенциалды кедергіге төзімді (1946 ж.) және К. Шеннонның ақпарат теориясы (1948 ж.) сияқты негізгі еңбектеріне байланысты.

Ақпарат теориясының кейінгі дамуы А.А. Харкевич, В.И. Сифоров, А.Н. Железнов, Р.М. Фано сияқты көптеген ғалымдардың еңбектерімен байланысты. Ақпараттар теориясына – А.Н. Колмогоров, Н. Винер, А.Я. Хинчин сияқты математиктер де айтарлықтай үлес қосты.

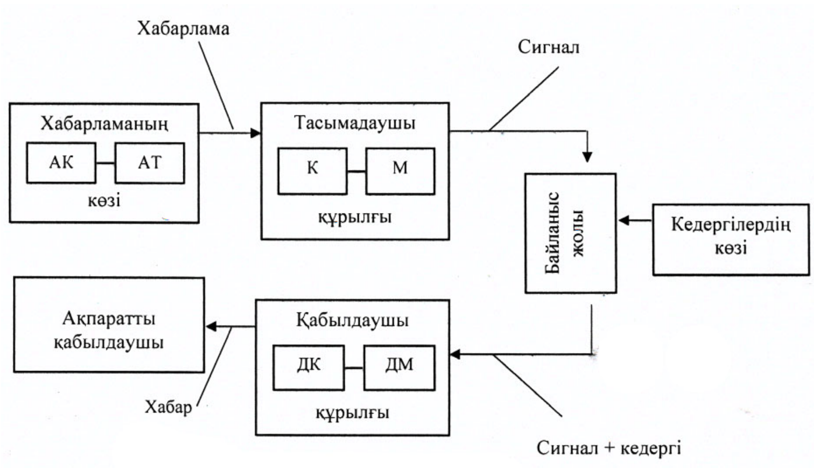
Қазіргі уақытта математикалық аппараты ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика болып саналатын ақпарат теориясы қатаң, әрі әмбебап ғылым саласына айналды.

1.2. Ақпарат теориясының негізгі түсініктері мен анықтамалары

Өндірістік процестер мен тірі табиғаттың процестері – ақпарат алу, тасымалдау, түрлендіру, жинау және сақтаумен байланысты. Ақпараттың әртүрлі анықтамалары бар. Әдетте, ақпарат – сыртқы ортамен қатынасы нәтижесінде, оның қасиеттерінің өзгерту нәтижесі мен оған бейімделу процесінде алынған жаңа мәліметтер [9].

Ақпарат – бұл сақтау, тасымалдау және түрлену объектісі болып саналатын мәліметтер. Ақпарат – ең бірінші, қолданылатын мәліметтер.

Ақпараттық жүйелердің негізгі түсініктері мен анықтамаларын ақпаратты тасымалдау жүйесінің мысалында қарастырамыз (1.1-сурет).



1.1-сурет. Ақпарат тасымалдау жүйесі

Ақпарат тасымалдау жүйесі ақпараттық жүйелер ретінде мына блоктардан тұрады: ақпаратты жіберуші, байланыс жолы, қабылдаушы [8,10,18].

Ақпарат – жүйеге хабарлама түрінде түседі. Хабарлама – белгілі бір пішінде көрсетілген және кейінгі түрлендіруге жарамды ақпарат. Яғни, хабарлама – ақпаратты көрсету пішіні (телеграммалар мәтіні, шешеннің сөзі, аспап көрсеткіші).

Хабарламаны сәйкес мекенжайға тасымалдау үшін алдын ала сигналды түрлендіру қажет.

Сигнал – хабарламаны физикалық тасымалдаушы. Тасымалдаушы құрылғыдан қабылдаушы құрылғыға ақпаратты тасымалдау жүзеге асатын физикалық орта – *байланыс желі* деп аталады.

Сигналдардың түрлері – *электрлік, электромагниттік, жарықтық, механикалық, ультрадыбыстық сигналдар*. Хабарламаны тасымалдау үшін, байланыс жолында тиімді қолданылатын оны тарата алатын тасымалдаушыны қолдану қажет (*өткізгіштік жол* – жиіліктің тұрақты және айнымалы токтары, т.б.).

Байланыс жолы арқылы өтуге ыңғайлы хабарламаның сигналға түрленуі, байланыстың тасымалдаушы құралы арқылы жүзеге асады.

Хабарлама – ақпаратты уағыздайтын таңбалар немесе алғашқы сигналдардың жиынтығы. Хабарламаның ақпарат көзі – ақпарат көзі (АК) мен алғашқы түрлендірудің (АТ) жиынтығы.

Кодтау процесі бойынша хабарлама сигналға түрлендіріледі. Кең мағынада кодтау дегеніміз – хабарламаның берілген канал бойынша тасымалдауға ыңғайлы сигналға түрленуі, ал тар мағынада – дискретті хабарламалардың символдардың белгілі бір үйлесімділік түріндегі сигналдармен көрсетілуі. Белгілі байланыс жолы бойынша тасымалдауға қолайлы хабарламаларды сигналдарға түрлендіру орындалады (немесе сақтау жүйелерінде оны жадыға сақтау үшін).

Тасымалдау кезінде тасымалдайтын ақпаратқа сай, өзгертіп отыратын таңдалған тасымалдаушының бірнеше параметріне әсер етіледі. Мұндай процесті – *модуляция* деп атаса, модуляцияланған параметрлерді – *ақпараттық* деп атайды.

Тасымалдау кезінде сигналдарға кедергілер әсер етеді. Кедергілер кернеудің кез келген кедергі жасайтын сыртқы әсерлері болып саналады (атмосферлық және өнеркәсіптік кедергілер; сыртқы көздердің әсері), сонымен қоса, аппараттың өзіндегі (аппараттық кедергілер) әсерінен, тасымалданып тұрған сигналдан қабылданатын сигналдың кездейсоқ өшірілуін (үзілуін) тудыратын сигналдардың бұрмалануы. Кедергілердің әсерін байланыс жолының сипатын эквивалентті өзгеруіне сай есте сақтауға тырысады.

Қабылдағышта кері операциялар – *демодуляция* және *декодтау* орындалады яғни, ол қабылданған сигнал бойынша тасымалданатын хабарламаны қайта қалпына келтіру.

1.3. Ақпараттың түрлері және айналу кезеңдері

Хабарламаларды уақыт бойынша – *үздіксіз* және *дискретті* деп бөледі [11,14]. Уақыт бойынша үздіксіз хабарламалар уақыттың үздіксіз функциясымен бейнеленсе, ал дискретті – уақыттың дискретті функциясымен бейнеленеді (белгілі бір уақытта түседі). Шынайы уақытта хабарламалар кездейсоқ, онда үздіксіз хабарламалар уақыттың кездейсоқ функциясымен, ал дискретті хабарламалар – кездейсоқ оқиғалар тізбегімен сипатталады.

Хабарлама, жиынтығы бойынша – *үздіксіз* және *дискретті* болып бөлінеді. Жиынтығы бойынша үздіксіз хабарламаны бейнелейтін функция кейбір интервалда жинақталған мәндерімен сипатталады. *Дискреттелген* хабарлама – шектеулі сандық жиынтығы немесе кейбір функциялардың дискреттік мәнімен сипатталады.

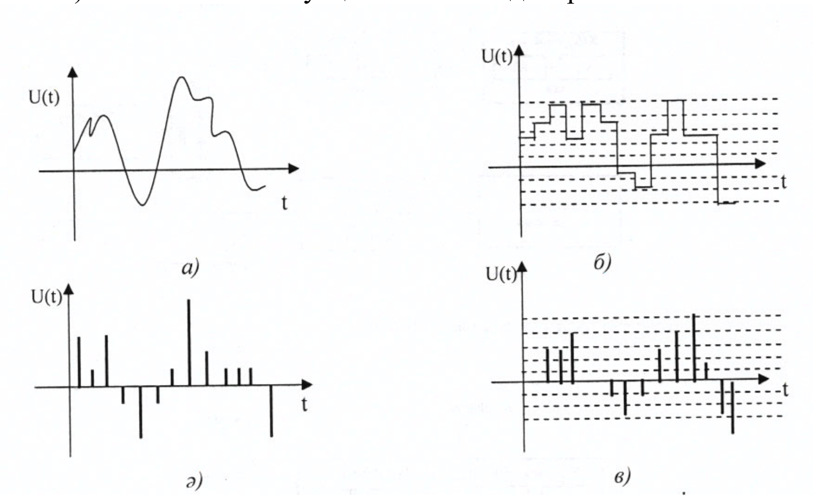
Жиынтығы және уақыт бойынша дискреттеу бір-бірімен байланысты емес. Сондықтан, хабарламалардың мынандай түрлері болуы ықтимал (1.2-сурет):

а) жиынтығы және уақыт бойынша үздіксіз;

ә) жиынтығы бойынша үздіксіз, уақыт бойынша дискретті;

б) жиынтығы бойынша дискретті және уақыт бойынша үздіксіз;

в) жиынтығы және уақыт бойынша дискретті.



1.2-сурет. Хабарламалардың түрлері

Ақпарат мынадай түрлерге топтастырылады:

1. Білім аумағы бойынша (биологиялық, техникалық, экономикалық, т. б.).

2. Қабылдаудың физикалық табиғаты бойынша (көрермендік, есту, дәмдік).

3. Құрылымдық – метрикалық қасиеті бойынша.

Ең соңғы жіктеу техникалық қосымшада көп қолданылады. Мұнда негізгі назар аудартатыны параметрлік ақпарат болып саналады.

Параметрлік ақпарат – қандай да бір параметрлер мәндерінің сандық бағасының жинағы, сандық бағаларды зерттегенде, талдағанда және бақылағандағы нәтижелері.

Топологиялық ақпарат – геометриялық образдары, жердің карталары, көлемді объектердің әртүрлі тегіс бейнелері.

Ақпараттың түрлерін 1.1-кесте бойынша ақпараттар жиынтығының мөлшерімен бөлуге болады. Ақпараттың мөлшеріне қарай: нүктенің қуаттылығына сәйкес келетін нөлдік ретті ақпарат; бірінші ретті ақпарат – сызық қуаттылығы, екінші ретті ақпарат – беттік қуаттылығы, үшінші ретті ақпарат – көлемнің қуаттылығы, ..., n – ретті ақпарат – n – ретті кеңістіктің қуаттылығы.

Сонымен, ақпарат құрылымын ақпараттың бір түрінен, басқасына өткен кезінде өзгертуге болады (1.1-кесте). Ақпараттың барлық түрлері геометриялық образдарымен интерпретацияланады, ол тәжірибе өте қолайлы.

Параметрлік ақпарат – ғылым мен техникада өлшеген нәтижелерді өрнектеуге өте жиі пайдаланылады.

Топологиялық ақпарат – образдар арқылы ситуациялары (жағдайлары) танығанда ыңғайлы.

Абстрактік ақпарат – жоғарғы деңгейде зерттегенде ақпаратты жинақтау, символдау кезеңде қолданылады.

1.1-кесте

Ақпарат құралымы

Ақпарат түрлері	Белгілеуі	Ақпаратты ұсыну түрлері		
		Топологиялы	Абстрактты	Лингвистикалық
оқиға	$Ф^0$	нүкте	пікір	таңба
шама	$Ф^1$	сызық	түсінік	әріп
функция	$Ф^2$	бет	бейне	сөз
кешен	$Ф^3$	көлемі	жүйе	сөйлем
....	....	....	....	....
қріс	$Ф^n$	кеңістік	универсум	қор

Ақпарат айналу кезеңдері. Ақпараттық жүйелерде ақпарат айналуының мына кезеңдері бар (1.3-сурет):

1) ақпаратты сезіну;

2) ақпаратты дайындау;

3) ақпаратты тасымалдау және сақтау;

4) ақпаратты өңдеу;

5) ақпаратты көрсету.

1. Сезіну кезеңінде қандай да бір объект туралы ақпараттың белгілі мақсатқа бағытталған шығарулары мен талдауы жүзеге асырылады. Нәтижесінде объектінің бейнесі құрылып, оны тану мен бағалау өткізіледі.

2. Ақпаратты дайындау кезеңінде нормалдау, аналогты – цифрлық түрлендіру, шифрлеу өткізіледі. Кейде ақпаратты дайындау кезеңі – қабылдау кезеңінде қосалқы ретінде қарастырылады. Қабылдау және дайындау нәтижесінде тасымалдауға және өңдеуге ыңғайлы пішіндегі сигнал пайда болады.

1.3-сурет. Ақпараттың айналу кезеңдері

3. Тасымалдау және сақтау кезеңінде ақпарат бір жерден екінші жерге кеңістік немесе уақыт бойынша бір уақыт мезетінен, екіншісіне тасылады. Бұл кезеңдерде пайда болатын теориялық сұрақтар бір-бірлеріне жақын, сақтау кезеңі дербес кезең ретінде қарастырылмаса, ал ақпаратты тасымалдау кең талқыланады. Қашықтыққа тасымалдағанда физикалық жағынан табиғаты әртүрлі каналдар қолданылады, кең таралғандары – электрлік және электромагниттік, келешекте – оптикалық. Ақпаратты сақтау үшін негізінен жартылай өткізгіш пен магнитті тасымалдаушылар қолданылады.

4. Ақпаратты өңдеу кезеңінде оның жүйе үшін маңыздылығы – жалпы және маңызды өзара байланыстары шығарылады. Өңдеу кезеңінде ақпараттың түрленуі, ақпараттық техникалар және құралдар немесе адамның көмегімен орындалады. Егер өңдеу процесі формальданатын болса, онда ол техникалық құралдар көмегімен орындалады (ЭЕМ, микропроцессорлар). Егер формальданбайтын және творчестволық қатынасты талап етсе, ақпаратты өңдеу – адамның көмегі арқылы жүзеге асады. Басқару жүйелерінде басқару әсерлерін таңдау есептері, өңдеудің мақсаты болып саналады (шешім қабылдау кезеңі).

5. Ақпаратты көрсету кезеңі – адамның қатысы бар кезеңмен байланысты кезеңдерден бұрын тұруы қажет. Көрсету кезеңінің мақсаты – адамға, оның сезім мүшелеріне әсер ете алатын құрылғылар көмегімен, оған керекті ақпаратты ұсыну.

6. Әсер ету кезеңінде ақпарат, жүйеде қажетті өзгерістерді жүзеге асыру үшін қолданылады. Әсер – сигналдар, объектінің өзінде өзгерістер енгізе отырып, жөнге келтіру мен басқаруды жүзеге асырады.

Бақылау сұрақтары.

1. Ақпараттық жүйелердің негізгі мақсаттарын анықтаңыз.
2. Ақпараттық жүйелерді құрушылардың негізгі анықтамалары мен түсініктемелерін беріңдер.
3. Ақпарат түсініктерінің маңызды айырмашылықтарын түсіндіріңдер.
4. Сигнал мен хабарламаға анықтама беріңдер.
5. Байланыс жолымен каналда қандай айырмашылықтар бар?
6. Детерминделген хабарламаларды топтастырыңдар.
7. Ақпаратты тасымалдаушы жүйесінің негізгі блоктарының функцияларын келтіріңдер.
8. Ақпараттың негізгі түрлерін атаңыздар.
9. Ақпараттың негізгі айналу кезеңдерін анықтаңыз.
10. Ақпарат теориясының негізгі түсініктерін, анықтамаларын түсіндіріңіз.

2. АҚПАРАТТЫ ӨЛШЕУ

Ақпарат теориясының маңызды сұрағы [2, 3, 6] ақпараттың саны мен сапасын өлшеу мөлшерін орнату болып саналады.

Ақпаратты өлшеу мөлшері ақпарат теориясында үш негізгі бағытта жүргізіледі:

1. *Құрылымдық теория* – массивтердің дискреттік құрылымын қарастырып, ақпараттық элементтердің (кванттар) қарапайым есептеуі бойынша, өлшеу немесе ақпараттар массивтерінің қарапайым кодтауды болжайтын комбинаторлық әдістер.

2. *Статистикалық теория* – энтропия түсінігімен хабарламаның анықталмағандығын, олардың болуының ықтималдығын, демек сол немесе басқа хабарламалардың ақпараттылығы.

3. *Семантикалық теория* – ақпараттың қажеттілігін, пайдалылығын немесе маңыздылығын, мақсаттылығын ескереді.

2.1. Ақпараттың құрылымдық мөлшері

Құрылымдық теория – ақпараттың геометриялық, комбинаторлық және аддитивті өлшеміне (Хартли өлшемі) бөлінеді.

2.1.1. Геометриялық өлшем

Геометриялық әдіс арқылы ақпараттың санын анықтау – сызықтың ұзындығын өлшеу, ауданын немесе дискретті бірлік – кванттар түріндегі берілген ақпараттық кешенінің геометриялық моделінің көлеміне сәйкес келеді. Ақпараттық элементтер ішінде нақты ақпараттық кешеннің дискретті модельдерінде, ақпараттың бөлінбейтін бөлігі – кванттары, сонымен қатар сандық жүйеде – алфавит элементтері бар.

Геометриялық әдіс арқылы потенциалдық, яғни құрылымдық габариттер түріндегі ақпарат мөлшерінің максимальды мүмкіндігі анықталады. Ол толығымен ақпараттық жүйенің зерттелетін бөлігінің, ақпараттық сыйымдылығын көрсетеді. Ақпараттық сыйымдылық, барлық өлшемдер [2,9] бойынша дискреттік мәндерінің қосындысымен есептеледі.

Айталық, ақпарат XTN толық кешенімен бейнеленсін. Егер дискреттік санақтар X, T және N осі арқылы жүзеге асырылса, сәйкесінше Δx, Δt, Δn интервалында, онда үздіксіз координаттар мына мөлшерлі түрдегі элементтерге (кванттар) ыдырайды:

$$m_x = \frac{X}{\Delta x};\; m_T = \frac{T}{\Delta T};\; m_N = \frac{N}{\Delta N}. \tag{2.1}$$

Онда геометриялық әдіспен анықталған ақпараттың мөлшері XTN толық кешенінде мына кванттарға тең:

$$M = m_X \cdot m_T \cdot m_N. \tag{2.2}$$

2.1.2. Комбинаторлық өлшем

Комбинаторлық өлшемге әртүрлі комбинациялар көмегімен ақпаратты тасымалдаудың мүмкіндігін бағалауы қажет болған жағдайда, мақсатқа лайықты келу керек. Бұл ақпаратты кодтаудың бір формасы [4, 5].

Комбинаторлық өлшемде ақпарат саны, элементтердің комбинациясының саны сияқты есептеледі. Яғни, әртүрлі потенциалды құрылымды ақпараттық кешендердің комбинациясын бағалауға ұсынылады.

Комбинаторикада элементтердің әртүрлі құрылғаны қарастырылады. ℓ бойынша (h) элементтерінен тұратын терулер элементтердің құрамымен өзгешеленеді. Олардың мүмкін саны мынаған тең:

$$Q = \binom{l}{h} = \frac{h!}{l!(h \quad l)} = \frac{h(h-1)\cdots(h-l+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots l}. \tag{2.3}$$

Қайталатын терулерде дәл солай, элементтердің құрамымен өзгешеленеді, бірақ кейбір элементтер ℓ ретке дейін қайталануы мүмкін. ℓ бойынша (h) элементтерден қайталанған терулердің саны

$$Q=\left(\frac{l}{h}\right)_{\kappa a \check{u} m}=\frac{(h+l-1)!}{l!(h-1)!}=\left(\frac{l}{h+l-1}\right). \qquad (2.4)$$

(h) элементтердің орын ауыстырулары реттерімен өзгешеленеді. (h) элементтердің орын ауыстыру мүмкін болатын саны

$$Q=1\cdot 2\cdot 3 \ldots h=h!. \qquad (2.5)$$

Элементтерімен қайталанатын орын ауыстыру элементтердің біріншісі α рет, келесі – β рет, соңғысы – γ рет қайталанса, оның мүмкін болатын саны

$$Q_{\text{қайт}}==\frac{(\alpha+\beta+\ldots\gamma)!}{\alpha!\beta!\ldots\gamma!}. \qquad (2.6)$$

ℓ бойынша (h) элементтерден орналастыруы, элементтердің құрамы және олардың қатарымен де өзгешеленеді. ℓ бойынша (h) элементтерден орналастыру мүмкін саны

$$Q=\left(\frac{l}{h}\right)=h(h-1)(h-2)\ldots(h-l+1)=\frac{h}{(h-l)!}. \qquad (2.7)$$

ℓ бойынша (h) элементтерден қайталанған орналастырудың мүмкін саны

$$Q=\left(\frac{l}{h}\right)_{\kappa a \check{u} m}=h^{l}. \qquad (2.8)$$

Комбинаторлық өлшемді қолдану кезінде ақпараттың мүмкін саны Q байланыстыруларымен сәйкес келеді. Яғни, ақпараттың саны Q-ді комбинаторлық өлшемде анықтау, кванттарды (геометриялық өлшем) қарапайым емес есептеуде, ал мүмкін немесе нақты бар болатын комбинациялардың санын анықтауда, яғни құрылымдық әртүрлілікті бағалауда қорытылады.

2.1-мысал. Әртүрлі байланыстағы он элементтер үшін ақпарат санын есептеу керек [1,19] .

1. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 және 9 бойынша 10 элементке сәйкес келетін жағдайда, келесі ақпарат санының өлшемі болатын терулер саны:

$$Q=\frac{10!}{0!(10-0)!}+\frac{10!}{1!(10-1)!}+...+\frac{10!}{9!(10-9)!}+\frac{10!}{10!(10-10)!}=1024 \text{ жасалуы.}$$

2. Бұл 10 элементтердің орын ауыстырылуы келесі өрнекпен анықталады:

$$Q = h! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800 \text{ жасалуы.}$$

3. 10 әртүрлі позиция бойынша 10 элементтің әртүрлі орналасуы, ақпарат санының тағы бірнеше есе көбеюіне әкеледі.

$$Q = h^{\ell} = 10^{10} \text{ жасалуы.}$$

2.1.3. Аддитивтік Хартли өлшемі

Ақпарат теориясында сандар мен кодтардың комбинаторикасы маңызды рөл атқарады. *(l)* санның ұзындығы мен (h) тереңдігі түсінігін енгізейік.

Санның (h) тереңдігі, қабылданған алфавитте болатын әртүрлі элементтердің саны болып аталады. Санның тереңдігі [14,15] кодтау және санау жүйесінің негізіне сәйкес келеді.

Санның *(l)* ұзындығы сан ұяшығының мөлшері деп, алфавитте керекті өлшем санын ұсынуға қажетті, әрі жеткілікті қайталану санын айтады. Санның ұзындығы кодтау мен санаудың әртүрлі жүйесін хабарлайды.

(l) ұяшық – алфавитінің бір жиынтығы *(l)* ұзындықты бір толық санды сақтайтын және бейнелей алатын бір сандық топты құрайды. N санының кейбір мөлшері сандық өрісті ұсынады. Сандық топтың көмегімен ұсынуға болатын санның мөлшері *(l)* ұзындығы, (h) тереңдікте төмендегі формуламен анықталады:

$$Q = h^{\ell}. \tag{2.9}$$

Соңғы формуладағы санның мөлшері Q көрсеткіш, заң бойынша *(l)* ұзындығына тәуелді. Мына түрде Q саны – ақпараттық сыйымдылықты бағалау үшін ыңғайлы өлшем болмайды. Сондықтан Хартли екілік бірлікте – битте (бит) ақпарат санын есептеуге мүмкіндік беретін аддитивті екілік логорифмдік өлшемді енгізген. Ол үшін санның Q өзі емес, оның екілік логарифмі алынады:

$$I = \log_2 Q = \log_2 h^1 = \ell \log_2 h \text{ (бит)}. \tag{2.10}$$

Мұндағы I – Хартли бойынша ақпарат саны.

Егер разрядтардың саны (санның *(l)* ұзындығы) бірге тең болса, онда екілік санау жүйесі (тереңдігі h=2) түрінде болады және екілік логарифм орындалады десек, ал ақпараттың потенциалдық саны 1 битке тең ($\log_2 2=1$).

1-қосымшада 1-ден 128-ге дейін сандардың екілік логарифмдері берілген. Бұл, қабылданған жүйедегі өлшемнің бірлігі болып саналады. Ол болатын немесе болмайтын бір қарапайым оқиғаға сәйкес келеді. Аддитивті өлшем (l) санына салыстырмалы I пропорционалдылығын есептеу мүмкіндігін қамтамасыз етуімен қолайлы.

2.2. Ақпараттың статистикалық өлшемдері

2.2.1. Ықтималдық және ақпарат

Ықтималдық түсінікте ақпарат кездейсоқ оқиғалардың нәтижесі, кездейсоқ мөлшерлер мен функциялардың орындаулары туралы хабарлама түрінде қарастырылады. Ал ақпарат саны осы оқиғалардың, мөлшерлердің, функциялардың априорлық ықтималдылығына байланысты қойылады.

Айталық, хабарламаның ақпарат көзі әр уақыт кезеңінде кездейсоқ тәсілмен көптеген мүмкіндіктің соңынан біреуін қабылдай алады. Әр ақпарат көзінің қалыпына X шартты таңба түрінде қойылады. Ақпарат көзінің мүмкін болатын N жағдайына сәйкес келетін x_1, x_2 , …, x_i , ..., x_N таңбалардың жиынтығын – *алфавит* деп атайды, ал алфавиттің көлемі N жағдайдың саны. Мұндай ақпарат көзінен хабарламаларды формальдау x_i жағдайдының кейбір таңдауларына және сәйкес келетін таңбаны беруге апарады. Сонымен қатар, қарапайым дискретті хабарлама ретінде дискретті ақпарат көзінен берілетін x_i символын түсінеміз. Ақпарат көзінің жеке жағдайы басқаларына қарағанда онымен жиі таңдала алады. Сондықтан жалпы жағдайда, X ақпарат көзі оқиғаларының ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең жағдайлардың жиынтығымен анықталады. Осы жиынтық – *ансамбль*:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_i) & \dots & p(x_n) \end{pmatrix};$$

$$\sum_{i=1}^{N} p(x_i) = 1.$$

Символдарды таңдау, бір-біріне тәуелсіз жүргізіледі. Қарапайым мысал ретінде $x=\{x_1=0,\ x_2=1\}$ алфавиті мен ықтималдығы $0 \le p_1 \le 1$ и $p_2 = 1-p_1$ бар жадысыз екілік ақпарат көзіне келтіруге болады.

Соңғы тәжірибеміз, жиі болатын оқиғалар мен олардың ықтималдылықтары бізге аз ақпарат беретінін көрсетеді. Мысалы, «Ит адамды қауып алды» хабарламасы дағдылы дерек болып есептеледі де, өзіне ешқандай назар аудартпады, осы кезде «адам итті қауып алды» хабарламасын үлкен шрифтпен барлық газеттерде басып шығарды. Осыдан мынадай қорытынды шығаруға болады: жиі, күтілген оқиғалар аз ақпарат әкеледі және керісінше, сирек, яғни тосын оқиғалар – жоғары ақпараттық мазмұнда. Демек, ақпарат пен ықтималдық арасында кері пропорционалды байланыс бар. Осыдан, келесі үш аксиома негізінде көлемі өлшенетін ақпарат санын енгіземіз:

1. Аксиома. Жеке $x_i \in X$ оқиғаның ықтималдығымен p_i ақпаратының мәні оң

$$I(p_i) \geq 0.$$

2. Аксиома. *Үйлесімді* ықтималдықты тәуелсіз екі (x_i, x_j) оқиғаның ортақ ақпараты *үйлесімді*

$$p(x_i, x_j) = p_{ij} = p_i \cdot p_j \tag{2.11}$$

ол ақпараттардың қосындысы:

$$I(p_{ij}) = I(p_i) + I(p_j) \tag{2.12}$$

3. Аксиома. *Ақпарат* – оқиғаның ықтималдығынан үздіксіз функция болып саналады. 1 және 2-аксиомалар, бірнеше оқиғаның ақпараты бірге жоғала алмайды деп тұжырымдайды. 2-аксиома оқиғалардың ортақ ақпарат түсінігін шығарады. 3-аксиомадан, оқиғалардың ықтималдықтарының шамалы өзгеруі, оның ақпаратының да кішкене өзгеруіне әкеледі. 2-аксиома, екі тәуелсіз оқиғаның ақпаратын анықтайды. (2.11)-ден оқиғаның ақпараты, оның ықтималдығының логарифмдік функциясы сияқты анықталады. Демек, ақпаратты келесі түрде анықтауға болады:

p ықтималдығымен болатын оқиғаның ақпараты:

$$I(p) = -\log(p) \qquad (2.13)$$

Логарифмlog $(p(x_i))$ негізін таңдау, ақпарат санының бірлігін анықтайды. Егер негізі 2-ге тең болса, онда ақпарат бірлігі – *бит,* егер *e* – *нат*, ал логарифм негізінде 10 – *дит* деп аталады. Бір логарифмдік жүйеден басқасына өту, ақпаратты өлшеу бірлігінің қарапайым өзгеруіне тең. Бұл өткел мына формула арқылы жүзеге асырылады:

$$\log_b k = \log_b a \cdot \log_a k;$$
$$1\text{ нат} = \log_2 e\ \text{ бит} = 1{,}443\text{ бит};$$
$$1\text{ дит} = \log_2 10\text{ бит} = 3{,}32\text{ бит}.$$

Биттің мөлшерлігі «иә» немесе «жоқ» деген екі жауабы бар шешім қабылдау процесі сипаттамасы кезінде, екілік жүйенің келесі бөлімдерінде көрсетілетін екілік санау жүйесі бойынша ақпаратты техникада қолданылады. Ақпарат анық емес өсу шегімен, сол сияқты өседі және мүмкін емес оқиға үшін шексіздікке ұмтылады. Сонымен, ақпарат алдында келтірілген барлық тұжырымдарға сәйкес келеді және 1–3 аксиомаларды қанағаттандырады. Ақпарат теориясы тұрғысынан қарағанда, ақпаратты анықтауды, кейбір оқиғалардың бейнеленуі ретінде қарастыруға болады.

Ақпарат көзін өзіне меншікті орташа *X* ансамблінің бір символы болатын, яғни жеке оқиғаларда математикалық күтімі көмегімен ақпараттың санын сипаттағаны жайлы. Егер $p_i = p(x_i)$ болса,

$$H(N) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log\ p_i. \qquad (2.14)$$

Бұл өзіне меншікті орташа ақпарат саны және энтропия деп те аталған. Клод Шеннон (2.14) өлшемді 1948 жылы жарық көрген фундаментальды «Математические основы теории связи» жұмысында ұсынды. К.Шеннон энтропияны Ақпарат көзінің анықталмағандығы деп анықтады.

Энтропияны Ақпарат көзінің жағдайына байланысты анықталмағандықты, толық жою кезінде алынатын ақпарат мөлшерінің саны ретінде қарастыруға болады.

Ақпарат көзі жағдайларының тең ықтималды кезінде Шеннон формуласы мына түрде болады:

$$H(N) = \log N.$$

Энтропия сөзі (грек тілінен «энтропе» – «қарату») білім салаларында таралған. Ал Больцман, физикалық жүйенің энтропиясын келесі түрде анықтаған:

$$H = -\frac{1}{M_n}\sum_{i=1}^{N} m_i \ln\frac{m_i}{M_n},$$

мұндағы M_n – берілген кеңістіктегі молекулалардың саны, m_i – $v_i + \Delta v$ жылдамдықты молекулардың саны.

Ал, $v_i + \Delta v$ жылдамдықты молекулардың ықтималдығы $\frac{m_i}{M_n}$ болса, онда (2.14) формуласы былай жазылады:

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i \cdot$$

2.2.2. Ансабль энтропиясының қасиеттері

Ақпарат көзінің энтропиясын бағалау үшін мысал қарастырайық. Айталық, Ақпарат көзінің ақпараты эксперимент нәтижесі бойынша a, b, c, d (2.1-кесте) кездейсоқ оқиғалар болсын. Экспериментті қайталағанда нәтижесінде мына тізбек шығады $\{o, b, a, d, a, a, c, d, b, a, a, b, ...\}\cdot$

2.1-кесте

Жадысыз дискретті ақпарат көз $X = \{a, b, c, d\}$ алфавит символдарының p_i ықтималдығы және $I(p_i)$ ақпараты

Символ	a	b	c	d
p_i	1/2	1/4	1/8	1/8
$I(p_i)$	1 бит	2 бит	3 бит	3 бит

Әр оқиғаның орнына нақты ақпаратты қойсақ, типтік стохастикалық процестің функциясы шығады.

Мұндай процестің эргодикалығы (мінез-құлық тұрақтылығы) уақытта деп болжайық. Осындай эргодикалықты біз, мысалы тиынды немесе ойын кубигін лақтырғанда болжаймыз. Ақпарат көзінің орташа мәні санақтың N саны өскенде:

$$\bar{I} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} I(n)$$

математикалық күтіміне ұмтылады:

$$E(I) = \sum_{i=1}^{4} - p_i \log_2(p_i) \quad \text{бит} \cdot \qquad (2.15)$$

Сонымен, (2.15) қатарының математикалық күтіміне жинақталуын ескере отырып, ақпарат көзінің тәжірибелік өлшеміне келеміз. Қарастырылған мысалда математикалық E(I) күтімінің мағынасы 1,75 бит.

Осылай тұжырымдарды келтіре отырып, К.Шеннон энтропияны үш аксиома арқылы анықтады.

Энтропияның аксиоматикалық анықтамасы.

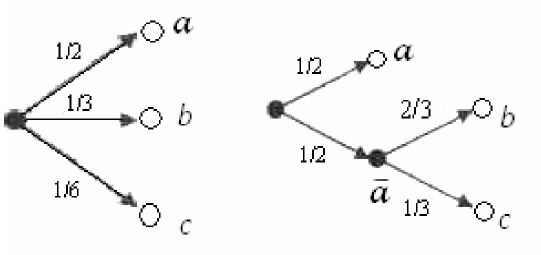
1. Энтропия $H\{X\} = f(p_1,p_2,\ldots,p_N)$ $p_1,p_2,\ldots,p_N$ ықтималдық-тарының үздіксіз функциясы.

2. Ақпарат көзі оқиғаларының ықтималдықтары бірқалыпты $p_i = \frac{1}{N}$ болғанда, оқиғалардың санының N өсуімен энтропия ұлғаяды.

3. Оқиғаны таңдау процедурасын бірнеше этапқа ыдыратуы энтропияны өзгертпейді (таңдау процедурасын тізбектелген екілік шешімге келтіруге болады).

2.3-мысал. Таңдау процедурасының ыдырауы.

Берілген мысал 3-аксиоманы түсіндіреді. Үш *a, b* және *c* оқиғалардың ықтималдықтары $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ және $\frac{1}{6}$. Мына үшеуінің біреуін таңдау үшін біз екі тәуелсіз сұрақ қоя аламыз (2.2-сурет).

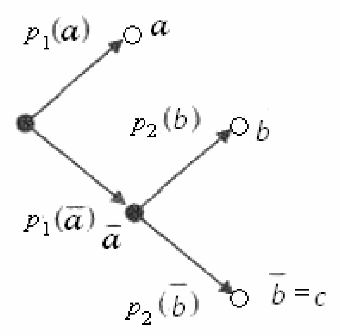


2.2-сурет. Символдарды таңдау процесінің ыдырауы

Мына сұрақтарға тек қана екі жауап болады: немесе «иә» немесе «жоқ». (3) аксиомаға сәйкес энтропияға келесі талаптар қойылады:

$$H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right) = H_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}H_2\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right).$$

Сонымен қатар, екінші сұрақ $\frac{1}{2}$ ықтималдығына қойылады. Біз жалпы түрде (2.3-сурет) энтропия (2.15) анықтамасы (3)-аксиоманың талабын қанағаттандыратынын көрсетеміз.



2.3-сурет. Шешім қабылдау процедурасының ыдырауы

Тармақталған энтропия келесі теңдеу бойынша саналады:

$$\frac{H(X)}{\text{бит}} = -p_1(a)\log_2(p_1(a)) - p_1(\bar{a})\log_2(p_1(\bar{a})) +$$
$$+ p_1(\bar{a})\left[- p_2(b)\log_2(p_2(b)) - p_2(\bar{b})\log_2(p_2(\bar{b}))\right].$$

Мұнда ықтималдық былай анықталады:

$$p_1(\bar{a}) = p(b) + p(c)\,; \tag{2.16}$$

$$p_2(b) + p_2(\bar{b}) = 1\ ; \tag{2.17}$$

$$\frac{p_2(b)}{p_2(\bar{b})} = \frac{p(b)}{p(c)}. \tag{2.18}$$

Ескерту. Соңғы теңдік, кездейсоқ оқиғалары бар эксперименттің қойылымымен расталады. Айталық, *a* оқиғасы 300 рет орындалды делік, *b* оқиғасы – 200, ал *c* оқиғасы 100 рет. Берілген мысалда әрбір оқиғаның жиілігі, оның ықтималдығына тең. Егер біз *a* оқиғасын алып тастасақ, онда *b* және *c* оқиғаларының 300-дей таңдауы қалады. Бұл оқиғалардың таңдауларының жиілігі екі еселенеді, бірақ олардың қатынастары өзгермейді.

(2.16) – (2.18)-дан алғанда екінші қадамдағы ықтималдықты былай сипаттауға болады:

$$p_2(b) = \frac{p(b)}{p(b)+p(c)} = \frac{p(b)}{p(\bar{a})},$$

$$p_2(\bar{b}) = \frac{p(c)}{p(b)+p(c)} = \frac{p(c)}{p(\bar{a})}\cdot$$

Табылған өрнекті энтропияның формуласына қойсақ,

$$\frac{H(X)}{бит} = -p_1(a)\log_2(p_1(a)) - p_1(\bar{a})\log_2(p_1(\bar{a})) +$$
$$+ p_1(\bar{a})\left[-\frac{p(b)}{p_1(\bar{a})}\log_2\left(\frac{p(b)}{p_1(\bar{a})}\right) - \frac{p(c)}{p_1(\bar{a})}\log_2\left(\frac{p(c)}{p_1(\bar{a})}\right)\right],$$

қысқартудан кейін оқиғаны таңдау процесі ыдыраусыз энтропияға сәйкес келеді:

$$\frac{H(X)}{бит} = -p_1(a)\log_2(p_1(a)) - p(b)\log_2(p(b)) - p(c)\log_2(p(c))\cdot$$

Қарастырылған мысалда, көбейтіні қосындыға аударушы логарифмдік функцияның қасиеті қолданылған. Егерде 3-аксиома әділ болса, (2.16) анықтамасы жалғыз болып есептеледі. Сонымен қатар, оқиғаны таңдау процесінде қарастырылған ыдырату «иә» немесе «жоқ» бинарлық шешімінің тізбегіне келтірілген болуы мүмкін екендігін байқаймыз. Ақпарат көзінің анықталмағандығы, максимальды энтропиясының сәйкес келуі. Келесі теореманы формалдайық:

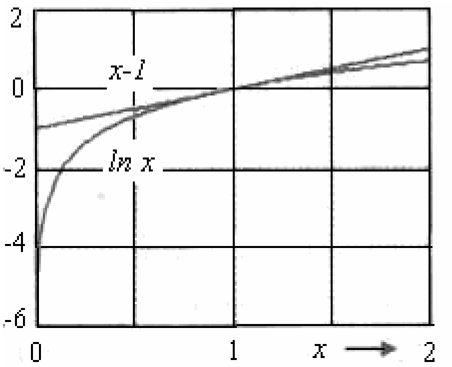
Теорема. Дискретті қарапайым жадысыз ақпарат көзінің энтропиясы максимальды болса, онда барлық оқиғалардың ықтималдықтары бірқалыпты. Бұл жағдайда энтропия оқиғалар санының логарифміне тең болады:

$$H_0 = \log_2 N \text{ бит}.$$

Ескерту. Теореманың келесі дәлелдеуі, ақпарат теориясында типтік болып саналады. Сондай дәлелдеулерде бұрынғы белгілі бағалар мен шекті өткелдер қолданылады, бірақ тәжірибеде пайдаланылмаған.

Дәлелдеу. Дәлелдеу үшін p_i және q_i сәйкесінше ықтималдықты N оқиғасынан құралатын P және Q жадысыз екі дискреттік ақпарат көзін қарастыралық. Ары қарай логарифмдік функцияның жоғарғы бағанын қолданамыз (2.4-сурет).

$$\ln x \le x - 1.$$



2.4-сурет. Логарифмдік функцияның жоғарғы бағаны

Осы бағаны қолдана отырып, келесі қатынасқа келеміз:

$$\underbrace{\ln q_i - \ln p_i}_{I(p_i)\ \text{нат}} = \ln \frac{q_i}{p_i} \le \frac{q_i}{p_i} - 1 \cdot$$

Теңсіздіктің екі бөлігін де p_i-ға көбейтіп, барлық оқиғаларды $1 \le i \le N$ бойынша қосамыз:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i [\ln q_i - \ln p_i] \le \sum_{i=1}^{N} p_i \left[\frac{q_i}{p_i} - 1 \right] \cdot$$

Қысқарта келе мынаған келеміз:

$$\frac{H(P)}{нат} + \sum_{i=1}^{N} p_i \ln q_i \le \underbrace{\sum_{i=1}^{N} q_i}_{1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i}_{1} = 0$$

демек,

$$\frac{H(P)}{нат} = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln q_i \cdot$$

Ақпарат көзі Q тек қана ықтималдықтары бірқалыпты оқиғалардан құрылсын.

Сонда:

$$\frac{H(P)}{нат} \le -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln\left[\frac{1}{N}\right] = \ln N \underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i}_{1} = \ln N \cdot$$

Осылайша, дәлелдеу процесінде ақпарат P көзіне ешқандай шектеу қойылмағандықтан, онда берілген теңсіздік N оқиғадан тұратын кез келген дискретті жадысыз ақпарат көзінде де орындалады

$$H(X) < \log_2 N \quad бит \cdot$$

Барлық оқиғалардың ықтималдықтары бірқалыпты болғанда, энтропияның мағынасы максимумға жетеді.

2.4-мысал. Әрбіреуі төрт жағдайдың біреуінде болу мүмкін 6 элементтен құралған жүйенің энтропиясының максимумын анықтау керек.

Шешімі.

$$H_{max} = \log_2 N = \log_2 m^n = \log_2 4^6 = 6 \cdot 2 = 12 \; бит.$$

Тәжірибелер санының дәл еместігін азайтуды есептеу үшін энтропия түсінігін қолданатын мысал келтірейік.

2.5-мысал. Сыртқы бейнесінен бірдей 27 тиын бар, олардың ішінде біреуі жалған болсын дейік. Сыртқы бейнесі бірдей 27 тиындардың ішінен жеңілірек бір жалған тиынды табу үшін, тең тиындарды таразыға салып қажетті өлшеу жасау керек. Өлшеулердің минимальды санын анықтау керек.

Шешімі.

Формула (2.14) бойынша V ансамблінің жалпы анықталмағандығы, өлшеудің біреуі 3 элементтен құралған V^1 ансамблінің анықталмағандығын анықтай алады. №1 тиын таразының сол жақ табағында, №2 тиын таразының оң жақ табағында, ал үшінші тиын алып қойылған деп болжайық. Онда тәжірибе нәтижесінде үш мүмкін шығысы бар (таразының сол жақ табағы жеңілірек; таразының оң жақ табағы жеңілірек; таразылар тепе-теңдікте тұрады; сәйкесінше: бірінші жағдайда жалған тиын 1; екінші жағдайда жалған тиын 2; үшінші жағдайда жалған тиын 3) Бір тәжірибемен алынған анықсыздық

$$H(V^1) = \log_2 3 \text{ бит.}$$

Осылайша,

$$H(V) = 3\log 3 = 3\,H(V^1),$$

онда жалған тиынды анықтауға үш рет өлшеген жеткілікті.

Энтропия – ансамбльдің бір жағдайын таңдауының орташа анықталмағандығын сипаттайды. Оны анықтағанда тек қана жағдайлардың ықтималдықтары қолданылады, олардың негізгі жақтарын толығымен елемейді. Сондықтан энтропия, анықталмағандықпен байланысты кез келген есепті шешу құралы бола алмайды. Мысалы, бұл өлшемді дәрілердің іс-әрекетінің анықсыздығын бағалағанда, оқиғалардың 90% жағдайы аурулардың толық жазылып кетуі және оқиғалардың қалған 10 %, көңіл-күйінің жақсаруы, сондай оқиғалардың 90%-ның жағдайы өлім, ал аурулардың 10 % жағдайларының нашарлауына алып келетін дәрілер сияқты болып шығады.

2.6-мысал. Екі дискретті кездейсоқ шамалардың X және Y ансамбльдері берілген

$$X = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.9 & 0.3 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{vmatrix},$$

$$Y = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 & 8 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{vmatrix}.$$

Дискретті кездейсоқ шамалардың X және Y ансамбльдерінің энтропияларын табу керек.

Шешімі.

$$H(X) = H(Y) = \log_2 4 = 2 \cdot$$

Энтропия анықсыздық сияқты адамның психологиялық реакцияларын зерттеу кезінде алынатын, сонымен қатар реакция таңдауымен экспериментік мәліметтермен келіседі. Тізбектеп ретсіз кезектесетін тең ықтималды тітіркендіргіштерінің (мысалы, жанатын лампочка) қатесіз реакция уақытының саны, энтропия сияқты санының артуымен өседі. Бұл уақыт бір тітіркендіргіштің таңдауының анықсыздығын (белгісіздігін) сипаттайды.

Тең ықтималды тітіркендіргіштерді, тең ықтималды еместермен ауыстыру кезінде орташа реакция уақыты энтропия қанша кішірейсе, сонша төмендеуге әкеледі.

Жадысыз дискретті екілік ақпарат көздерінің мәні ерекше, себебі көптеген жағдайларда олардың көмегімен мәліметтерді тасымалдау процесін сипаттауға болады.

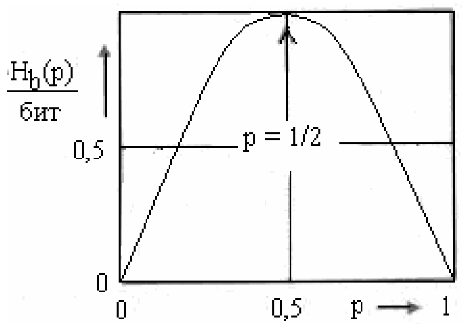
Айталық, жадысыз екілік ақпарат көзі алфавит $X = \{0,1\}$ арқылы берілген «0» символаның ықтималдығы $p_0 = p$ және «1» – $p_1 = 1 - p_0$.

Символдар тәуелсіз жүйеде таңдалады. Осы энтропияны Шеннон функциясы деп атайды, ол тек қана p ықтималдығына тәуелді.

Екілік Ақпарат көздің энтропиясы (Шеннон функциясы)

$$\frac{H_b(p)}{\text{бит}} = -p \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) \cdot$$

Шеннон функциясының сипаттамасы 2.5-суретте көрсетілген.



2.5-сурет. Екілік Ақпарат көзінің энтропиясы

Екілік Ақпарат көзінің энтропиясы барлық жерде оң, $p = \frac{1}{2}$ бойынша симметриялы және «0» и «1» символдарының ықтималдығы бірдей болғанда мағынасы максимум болады. 1 битке тең максимальды энтропия екілік шешімге сәйкес, яғни символ мәні туралы сұраққа жауап: немесе «иә» немесе «жоқ».

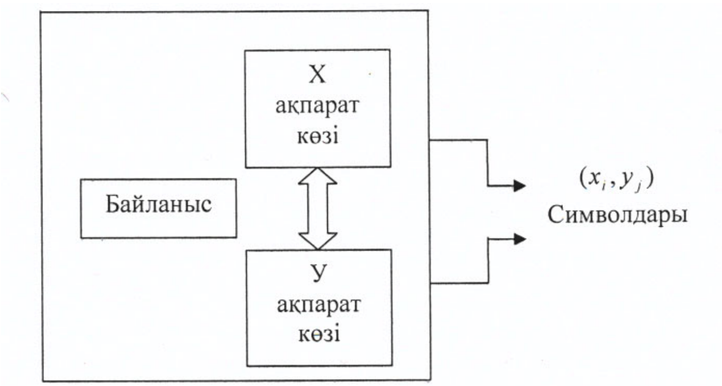
Екілік оқиғаның p және q ықтималдықтарының H энтропиясы 2-қосымшада көрсетілген.

2.2.3. Шартты энтропия және біріктірудің энтропиясы. Байланысқан ақпарат көздерінің энтропиясы

Біз осыған дейін тұжырымдарымызда тізбектелген оқиғалар, тәуелсіздік жорамалдарынан шыққан едік. Бірақ, тек қана неміс орфографиялық сөздігін ашсақ, біз жақын тұрған әріптердің арасынан тәуелділікті тез байқаймыз, мысалы: «qu», «ch», «ck», «tz» және «sch». Немісше мәтінді оқи отырып, біз сирек ерекшелер артынан «q» – дан кейін «u» тұрғанын көреміз. Шарасыз оқиға сияқты «u» жағдайында іс жүзінде өзінде ешқандай ақпарат болмайды. Сондықтан, осындай ақпарат көздері түрінде оны анықтау кезінде біз оқиғалар арасындағы байланысты ескеруіміз керек.

2.2.3.1. Өзара және шартты ақпарат

Ақпарат теориясының аксиоматикалық желісін құруда жұп оқиғалар ақпараты түсінігі қолданылады. Бұл тұжырымдарды енді талдайық. X және Y екі дискретті ақпарат көздерін қарастырайық. Олардың оқиғаларын (x_i, y_j) жұп оқиғаларға біріктірейік. Біз байланысқан ақпарат көздерін қарапайым моделін аламыз (2.6-сурет).



2.6-сурет. Екі байланысқан ақпарат көздерінің моделі

Егер екі ақпарат көзі де қалай болсын бір-бірімен байланысы болса, онда бір Ақпарат көзінің оқиғасы, екіншісінің оқиғасы туралы кейбір жорамалдар жасай алады. Ақпарат теориясы терминдерінде бұл – екінші Ақпарат көзінің анықталмағандығын төмендетеді, яғни ақпарат көздері өзара ақпараттармен айырбастасады.

Шартты $p(x/y)$ ықтималдықты енгізейік, ол y оқиғасы болғанда x оқиғасының ықтималдығы. Екі x_i және y_j оқиғасының және ортақ $p(x_i, y_j)$ ықтималдықтарын априорлы және шартты ықтималдықтары арқылы өрнектесек,

$$p(x_i, y_j) = p(x_i/y_j)p(y_j) = p(y_j/x_i)p(x_i).$$

Логарифмдік функцияны қолдана отырып (x_i) және (y_j) (x_i, y_j) оқиғаларының ақпараттарын табамыз:

$$\underbrace{\log_2 p(x_i, y_j)}_{-I(x_i;y_j)\ \text{бит}} = \log_2 p(x_i/y_j) + \underbrace{\log_2 p(y_j)}_{-I(y_j)\ \text{бит}} = \log_2 p(y_j/x_i) + \underbrace{\log_2 p(x_i)}_{-I(x_i)\ \text{бит}}$$

яғни:

$$I(x_i; y_j) = I(y_j) - \log_2 (x_i/y_j)\ \text{бит} = I(x_i) - \log_2 p(x_i/y_j)\ \text{бит}. \quad (2.19)$$

(2.19) формуланың бірінші бөліміне $I(x_i)$ және соған сәйкес екінші бөліміне $I(y_j)$ қоса азайта отырып, төменгі формулаға келеміз:

$$I(x_i; y_j) = I(x_i) + I(y_j) - \log_2 \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}\ \text{бит} =$$

$$= I(x_i) + I(y_j) - \log_2 \frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}. \quad (2.20)$$

Сонымен, жұп (x_i, y_j) оқиғасының ақпараты анықталады: ол осы оқиғалардың ақпаратының қосындысынан алып тасталған кейбір теріс емес анықталмағандықты төмендететін шама. Оның өзі, ақпарат болып саналатындықтан, оны жұп оқиғаның өзара ақпараты деп атаймыз.

Жұп оқиғаның ортақ ақпараты былай анықталады:

$$I(x_i, y_j) = \log_2 \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} =$$

$$= \log_2 \frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)} = \log_2 \left(\frac{\text{апостеорлы ықтималдық}}{\text{априорлы ықтималдық}} \right) \quad (2.21)$$

Ортақ $I(x_i, y_j)$ ақпараттың мағынасы арқашан оң.

Ақпараттың мәнін өзара жақсы түсіну үшін екі шекті жағдайды қарастырайық.

1. Ақпарат көздері тәуелсіз. Онда жұп тәуелсіз оқиғалардың ықтималдығы

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j),$$

яғни ақпарат көздері ақпаратпен ауыспайды

$$I(x_i, y_j) = 0 \cdot$$

2. Ақпарат көздері бір-бірімен тығыз байланысты, яғни бір ақпарат көзінің оқиғасы екіншісінің оқиғасына әсер етеді

$$p(y_j / x_i) = p(x_i / y_j) = 1 \cdot$$

Бұл жағдайда ақпарат көздері өз ақпараттарын толық ауыстырады

$$I(x_i, y_j) = I(x_i) = I(y_j) \cdot$$

Формула (2.20)-дан жұп оқиғаның $I(x_i) + I(y_j)$ ақпараты қос тәуелсіз оқиғалардың ақпараттары X және Y ақпарат көздері арасында шартталған байланысымен алдын ала айтылған өзара $I(x_i, y_j)$ ақпаратының айырмашылығы дәл интерпреттеуге болады.

$$I(x_i; y_j) = I(x_i) + I(y_j) - I(x_i, y_j) \cdot$$

Шартталған ақпарат ұғымын енгізу үшін қайтадан (2.20) формуласын қарастырамыз.

Шартталған ақпарат (апостериорлы анықталмағандық):

$$I(x_i / y_j) = -\log_2 p(x_i / y_j) \text{ бит } \cdot$$

Бұл формула (2.19)-дан шығады:

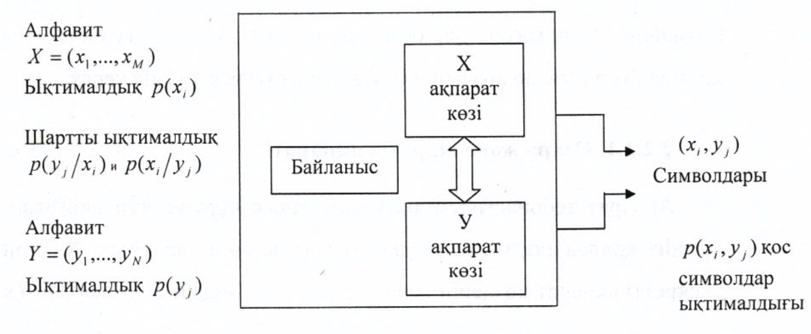
$$I(x_i;y_j) = I(y_j) + I(x_i/y_j) = I(x_i) + I(y_j/x_i),$$

яғни жұп оқиғаның ақпаратын y_j оқиғасының ақпарат қосындысы сияқты және x_i оқиғасы ақпаратын y_j оқиғасы әлден белгілі немесе керісінше шартында, x_i оқиғасы ақпарат қосындысы сияқты және y_j оқиғасының ақпараты, x_i оқиғасы бұрыннан белгілі болған шартында анықтауға болады.

2.2.3.2. Біріккен және шартты энтропия

Алдыңғы бөлімде жеке оқиғаларды қарастырылған соң ақпарат көздерінің орташа бағалауына қарастыруға болады.

Екі X және Y жадысыз дискреттік байналысқан ақпарат көздерінің бастапқы жағдайы 2.7-суретте көрсетілген.



2.7-сурет. Екі байланысқан дискретті ақпарат көздері

Екі X және Y дискретті жадысыз ақпарат көздерінің біріккен энропиясы:

$$\frac{H(X,Y)}{\text{бит}} = -\sum_X \sum_Y p(x,y)\log_2 p(x,y). \qquad (2.22)$$

Ескерту. Мұнда бірлескен оқиғалардың барлық жұптары қарастырылады, яғни

$$\sum_{X}\sum_{Y} p(x, y) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} p(x_i, y_j) = 1 \cdot$$

Шартты энтропияны табу үшін барлық жұп оқиғалардың шартты ақпараттарын орташаландырамыз.

Екі дискретті X және Y жадысыз ақпарат көздерінің шартты энтропиясы:

$$\frac{H(Y/X)}{\text{бит}} = -\sum_{X}\sum_{Y} p(x, y)\log_2 p(y/x),$$

$$\frac{H(X/Y)}{\text{бит}} = -\sum_{X}\sum_{Y} p(x, y)\log_2 p(x/y) \cdot$$

Формулада (2.22) $\log_2 p(x, y)$-ні орнына және $\log_2(p(x/y)p(y))$-ге, $\log_2(p(y/x)p(x))$-ге ауыстыра отырып, мынандай теңдеуге келеміз:

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X/Y) = H(X) + H(Y/X) \cdot$$

Сонымен, біріккен энтропия бір ақпарат көзінің энтропиясы мен басқа ақпарат көзінің кейбір бөлігі энтропиясының қосындысы деп ұсынуға болады. Тәуелсіз ақпарат көздері үшін екінші ақпарат көзінің энтропиясы, қосындысына толығымен кіреді, себебі $H(X/Y) = H(X)$ және $H(Y/X) = H(Y) \cdot$

Сондықтан, жалпы жағдайда, бұл әрқашан орынды:

$$H(X, Y) \le H(Y) + H(X) .$$

2.7-мысал. Байланысқан ақпарат көздері.

Жоғарыда көрсетілген формулалар мен анықтамаларды түсіндіретін сандық мысалды қарастырайық. Бұл үшін тәжірибеде есептеу әдісі қолданылатын есеп таңдалды.

Айталық, (x_i, y_j) үйлесімді жұп оқиғалардың 100000 таңдауы бар. Дискретті ақпарат көздері *X* және *Y* және әрбір ақпарат көздердің алфавиті төрт оқиғадан тұрады. (x_i, y_j) жұбы 10000 рет кездеседі. Сонда (x_i, y_j) жұбының ықтималдық бағасы 10000/100000=0,1-ге тең. Қалған жұп оқиғалардың бағасы солай, олардың салыстырмалы жиіліктің есептеулерімен алынған және ол 2.2-кестеде келтірілген. Алынған бағаларды жұп оқиғаның ықтималдықтарына жақын деп есептеп, ары қарай сол ықтималдықтарды қарастырамыз. Оқиғаларының x_i, y_j ықтималдықтары бағандар мен жолдарды қосындылау арқылы алынды. Бақылау қосындысы $\sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{j=1}^{4} y_j = 1$ ең төменгі бұрышта келтірілген.

2.2-кесте

Жұп символдардың үйлесімді $p(x_i, y_j)$ ықтималдықтың бағасы және жеке $p(x_i)$, $p(y_j)$ символдарының ықтималдықтары

	y_1	y_2	y_3	y_4	$p(x_i)$
x_1	0,10	0,05	0,05	0	0,20
x_2	0,05	0,15	0,15	0	0,35
X_3	0	0,10	0,1	0,1	0,30
X_4	0	0,05	0,05	0,05	0,15
$p(y_j)$	0,15	0,35	0,35	0,15	1

Сонымен, барлық ықтималдықтар белгілі болды. Энтропияны есептеу үшін керекті ықтималдықтарды анықтайық:

1. X және Y ақпарат көздерінің энтропиясы;
2. Ақпарат көздерінің үйлесімді энтропиясы;

3. Екі шартталған энтропия.
Бақылау үшін мынандай энтропияны есептейік:
1. $P(y_j/x_i)$ шартты ықтималдықтар;
2. $H(Y/X)$ шартты энтропияны анықтайық.

Шешімі.

1) $$\frac{H(Y)}{\text{бит}} = \sum_{j=1}^{4} -p(y_j)\log_2 p(y_j) =$$
$$= -2[0{,}15 \cdot \log_2(0{,}15) + 0{,}35 \cdot \log_2(0{,}35)] = 1{,}85\ ;$$
$$\frac{H(X)}{\text{бит}} = \sum_{i=1}^{4} -p(x_i)\log_2 p(x_i) = -[0{,}2 \cdot \log_2(0{,}2) + 0{,}35 \cdot \log_2(0{,}35) +$$
$$+ 0{,}3 \cdot \log_2(0{,}3) + 0{,}15 \cdot \log_2(0{,}15)] = 1{,}92\ ;$$
2) $$\frac{H(X,Y)}{\text{бит}} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} -p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i, y_j) = -[0{,}1 \cdot \log_2(0{,}1) +$$
$$+ 2 \cdot 0{,}05 \cdot \log_2(0{,}05) + 0{,}05 \cdot \log_2(0{,}05) + 2 \cdot 0{,}15 \cdot \log_2(0{,}15) +$$
$$+0{,}3 \cdot \log_2(0{,}1) + 3 \cdot 0{,}05 \cdot \log_2(0{,}05)] = 4{,}69.$$

3. (2.16) -дан шартты энтропиялар:

$$H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y) = 4{,}69 - 1{,}85 = 2{,}84 \text{ бит}.$$
$$H(Y/X) = H(X,Y) - H(X) = 4{,}69 - 1{,}92 = 2{,}77 \text{ бит}.$$

Шартты ықтималдықтар 2.2-кестесі арқылы шығарылып, 2.3-кестеде келтірілген. Біз осылай, стохастикалық матрица түрінде таптық. Мұнда әр жол үшін шартты ықтималдықтардың қосындысы 1-ге тең.

$$\frac{H(Y/X)}{\text{бит}} = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(x_i, y_j)\log_2 p(y_j/x_i) = 1{,}5496 \cdot$$

Алдынғы бөлімдерде келтірілген барлық тұжырымдар математикалық түрінде 2.4-кестеде келтірілген.

Айтқанымыздай, ақпарат теориясының негізгі идеясы, ақпарат көздері ақпаратының анықталмағандығы болады. Бұл анықталмағандық, осы ақпарат көзінің алфавитінен құрылған тосын оқиғалардың эксперментері арқылы саналады. Мұндай тәсіл 2.3-кестенің үш бағаны мәнін түсіндіреді.

2.3-кесте

Шартты $P(y_j/x_i)$ ықтималдықтар

	y_1	y_2	y_3	y_4	$\sum_{j=1}^{4} p(y_j/x_i)$
x_1	1/2	1/4	1/4	0	1
x_2	1/7	3/7	3/7	0	1
x_3	0	1/3	1/3	1/3	1
x_4	0	1/3	1/3	1/3	1

Ақпарат кездейсоқ оқиғадан шыққандықтан, бірінші бағанада оқиғаның ықтималдық түсінігі мен жұп оқиғалардың үйлесімді ықтималдығы енгізілген. Жұп оқиғалар үшін шартты ықтималдық түсінігі енгізіледі. Екінші бағанада оқиға мен жұп оқиға ақпаратының, сонымен қатар шартты және өзара ақпараттар анықтамасы беріледі. Үшінші бағанада ақпарат көзінің анықталмағандық өлшемі ретінде энтропия түсінігі енгізіледі.

Ақпарат көзінің энтропиясы, екі ақпарат көзінің үйлесімді және шартты энтропиясы, оқиғаның сәйкес ақпаратының математикалық үміті ретінде беріледі. Шартты ықтималдық – бұл басқа оқиғаның орындалуы іске асырылған шартындағы бір оқиғаның ықтималдығы, сондықтан да шартты ақпарат пен шартты энтропия түсінігі шартты ықтималдықтан шығарылады.

2.4-кесте

Жадысыз дискретті X және Y ақпарат көздері

	Ақпарат	Энтропия
Жеке символдың ықтималдығы $p(x)$ (априорлы ықтималдығы)	Жеке символдың ақпараты $I(x)=-\log_2 p(x)$ бит	Энтропия $H(X)=-\sum_X p(x)\log_2 p(x)$ бит $H(Y)=-\sum_Y p(y)\log_2 p(y)$ бит
Екі символдың $p(x,y)$ үйлесімді ықтималдығы	Жұп символдың ақпараты $I(x,y)=-\log_2 p(x,y)$ бит	$H(X,Y)=-\sum_X\sum_Y p(x,y)\log_2 p(x,y)$ бит
Шартты ықтималдылық (апостериорлы ықтималдық) $p(x/y)=\frac{p(x,\ y)}{p(y)}$ $p(y/x)=\frac{p(x,\ y)}{p(x)}$	Шартты ақпарат $I(x/y)=-\log_2 p(x/y)$ бит $I(y/x)=-\log_2 p(y/x)$ бит	$H(X/Y)=-\sum_X\sum_Y p(x,y)\log_2 p(x/y)$ бит $H(Y/X)=-\sum_X\sum_Y p(x,y)\log_2 p(y/x)$ бит
	Өзара ақпарат $I(x,y)=\log_2\left(\frac{\text{апостеорлы ықтималдық}}{\text{априорлы ықтималдық}}\right)$ *бит* $=\log_2\frac{p(x/y)}{p(x)}$ *бит* $=\frac{p(x/y)}{p(x)}$ *бит*	

2.2.4. Дифференциалдық энтропия

Тәжірибеде ақпарат, ақпарат көзінің мүмкін болатын көптеген қалпының континуумын құрайды, яғни ақпарат көздері – үздіксіз.

Үздіксіз ақпарат көзінің энтропиясын былай анықтайық: үздіксіз кездейсоқ U шама ықтималдығының тығыздығын $p(u)$ үлестірімен сипатталатын, оның өзгеру диапазонын шектеулі *n* санынан тұратын кіші интервалды – Δu енді бөлеміз. $(u_i, u_i+\Delta u)$ интервалында тиісті кез келген u мәні орындалғанда, мәні u_i дискретті кездейсоқ U шама орындалды деп есептеуге болады. Интервал Δu-дың мәні кішкентай болғандықтан, $(u_i, u_i+\Delta u)$ интервалында u мәнінің орындалу ықтималдығы $p(u_i \le u \le u_i+\Delta u)$

$$p(u_i \le u \le u_i+\Delta u)=\int_u^{u+\Delta u} p(u)du \approx p(u_i)\Delta u \cdot$$

Онда U дискретті кездейсоқ шаманың энтропиясын мына түрде жазуға болады:

$$H(\widetilde{U}) = -\sum_{i=1}^{n} p(u_i)\Delta u \log[p(u_i)\Delta u]$$

немесе

$$H(\widetilde{U}) = -\sum_{i=1}^{n} p(u_i)\Delta u \log p(u_i) - \sum_{i=1}^{n} p(u_i)\Delta u \log \Delta u \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(u_i)\Delta u = 1,$$

Сонда:

$$H(\widetilde{U}) = -\sum_{i=1}^{n} p(u_i)\Delta u \log p(u_i) - \log \Delta u \cdot$$

Интервал Δu-дың мағынасы азайған кезінде $p(u_i \le u \le u_i + \Delta u)$ нөлге тең $p(u_i)$ ықтималдығына, ал U дискретті шаманың қасиеті – U үздіксіз кездейсоқ шаманың қасиетіне жақындайды. Үздіксіз ақпарат көздің H(U) энтропиясы $\Delta u \to 0$

$$\lim_{\Delta u \to 0} H(\widetilde{U}) = \lim_{\Delta u \to 0}\left\{-\sum_{i=1}^{n} p(u_i)\Delta u \log p(u_i)\right\} - \lim_{\Delta u \to 0} \log \Delta u \quad (2.23)$$

немесе

$$H(U) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(u)\log p(u)du - \lim_{\Delta u \to 0} \log \Delta u \cdot \quad (2.24)$$

Бұл шама $\Delta u \to 0$ ол да шексіздікке ұмтылады, таңдаудың анықталмағандығы болатын шексіз үлкен жағдайларынан (мәндерінен) шексіз, бұл үлкен интуитивті түсінігіне толық сәйкес келеді.

Оң бөлігіндегі (2.24) қатынастың бірінші мүшесінің мәні шектеулі, ол тек қана үздіксіз кездейсоқ U шаманың үлестірім заңына тәуелді және кванттау Δu қадамынан тәуелсіз. Оның құрылымы дәл дискретті ақпарат көзінің энтропиясы сияқты.

Осы (2.24) қатынастың екінші мүшесі керісінше, тек қана U кездейсоқ шаманың кванттау қадамына тәуелді, сондықтан H(U) мағынасы шексіздікке ұмтылады.

Үздіксіз ақпарат көзінің ақпараттық қасиеттерінің шекті сипаттамасын табу үшін үздіксіз ақпарат көзінің анықталмағандығы ретінде (2.24) қатынасының бірінші мүшесін қабылдайды.

Ол дифференциалдық энтропия немесе ақпараттың үздіксіз ақпарат көзінің дифференциалдық энтропиясы (кездейсоқ U шаманың үздіксіз үлестірімі):

$$h(U) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(u)\log p(u)du \cdot$$

Оны тағы біркелкі үлестірімімен бірге, тең диапозанда өзгеретін U' кездейсоқ шаманың орташа таңдау анықталмағандығымен салыстырғанда, үлестірімі еркін заңды U кездейсоқ шаманың орташа таңдаудың анықталмағандығы дәл түсіндіруге болады.

Дифференциалдық энтропияның негізгі қасиеттері:

а) егер U кездейсоқ шаманың мүмкін болатын мәндері аймағының жалғыз ғана $[\alpha, \beta]$ шегі болса, онда дифференциалдық энтропияның мәні максимальды болса, осы аймақтағы шаманың ықтималдықтарының үлестірімі біркелкі болады.

ә) егер U үздіксіз кездейсоқ шаманың мүмкін болатын мәндерінің аймағына шектеу болмай, бірақ оның дисперсиясы шектеулі екені белгілі болғандықтан, максимальды дифференциалдық энтропияға нормальды үлестірімді U шамасы болады.

2.8-мысал. Гаусс ақпарат көзінің дифференциалдық энтропиясы. Гаусс ақпарат көзінің дифференциалдық энтропиясы:

$$\frac{H(X)}{\text{нат}} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \log_2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \right] dx =$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})\log_2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]dx\cdot$$

Квадрат жақшадағы өрнек екі интегралға ыдырауы мүмкін. Сонымен, біз соңында мынандай өрнекке келеміз:

$$\frac{H(X)}{\text{нат}}=\ln\sqrt{2\pi\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x^2\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})dx=$$

$$+\frac{1}{2}\ln[2\pi\sigma^2]+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln[2\pi\sigma^2 e]\cdot$$

2.9-мысал. Оң үздіксіз *x* шама экспоненциальды заң бойынша үлестірімді

$$w(x)=\frac{1}{m_x}\exp(-\frac{x}{m_x}),$$

оның орташа мағынасы $m_x=3$. Осы шаманың дифференциалдық энтропиясын есептеу.

Шешімі.

Үздіксіз кездейсоқ *x* шаманың дифференциалдық энтропиясы былай анықталады:

$$H(x)=M[-\log w(x)].$$

Есептің шарты бойынша шаманың үлестірімінің заңы

$$w(x)=\frac{1}{m_x}\exp(-\frac{x}{m_x})\cdot$$

Сонымен дифференциалдық энтропия

$$H(x)=M[-\log\frac{1}{m_x}\exp(-\frac{x}{m_x})]=\log m_x+\frac{1}{m_x}\cdot M(x)\log e=$$

$$= \log m_x + \frac{m_x}{m_x} \log e = \log (e \cdot m_x) \cdot$$

Енді шаманың орта мағынасын $m_x = 3$ қойып,

$$H(x) = \log(2{,}71 \cdot 3) \approx 3 \text{ бит.}$$

Көп қолданылатын үш үлестірімдердің сандық мысалдары 2.5-кестеде келтірілген.

2.5-кесте

Дифференциалдық энтропиялардың мысалы

Үлестірімі	Ықтималдылық үлестірімінің тығыздық функциясы	Дифференциалдық энтропия
Біркелкі	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \text{для} \quad \lvert x \rvert \le \sqrt{3} \\ 0 = \text{const} \end{cases}$	$\frac{\ln(2\sqrt{3}\sigma)}{\ln 2} = 1{,}79$
Лаплас	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \exp(-\sqrt{2}\frac{\lvert x \rvert}{\sigma})$	$\frac{\ln(2\sqrt{3}\sigma b)}{\ln 2} = 1{,}94$
Гаусс	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$	$\frac{\ln(2\pi n^2 b)}{2\ln 2} = 2{,}04$

2.10-мысал. Телефония.

Жоғарыда келтірілген нәтижелердің тәжірибелік пайдасын цифрлық телефон желісінде, ақпаратты тасымалдау жылдамдығы (битпен өлшенеді) жетістіктерін бағалағанда айқын көрсетіледі. Қазіргі цифрлық сөйлеу – тасымалдауышының стандартты әдісі (логарифмдік PCM) бойынша, жиіліктігі 8 кГц бір санақты кодтауға 8 бит шығын қажет. Сонымен, сөйлеу тасымалдауышының жылдамдығы 64 кбит/сек.

Егер [– 1,1] интервалындағы ықтималдықтың үлестірімі біркелкі болса, тәжірибелі жолмен дисперсияның мағынасы σ^2 = 1/3. Сонымен қатар, бір санаққа келетін дифференциалдық энтропия:

$$\frac{H'(X)}{\text{áèò}} = \frac{\ln(2\sqrt{3}\sigma)}{\ln 2}\bigg|_{\sigma^2=\frac{1}{3}} = 1\,.$$

Санақтар 8 кГц жиілікпен жүргізілгендіктен, сөйлеуге 8 кбит/сек тасымалдауыш жылдамдығы қажет. Энтропияны бағалауда біз көрші санақтардың (ақпарат көзінің жадысы) өзара байланысына назар аудармадық. Сондықтан сөйлеу, ақпарат көзінің нақты дифференциалдық энтропиясы одан аз болады. Белгілі, сөйлеу кодтауының қазіргі заманғы алгоритмі, сөйлеу сигналын тасымалдауыш 8 кбит/сек жылдамдықпен өткізеді, ол сапасы PCM стандартының сапасынан кем емес.

2.2.5. Эпсилон – энтропия

Айталық:

1. Ақпарат ақпарат көзінің жеке күйлері U кездейсоқ шаманың тәуелсіз жүзеге асырғаны. U кездейсоқ шаманың жүзеге асыру ансамблі, ықтималдық үлестірімінің тығыздығымен сипатталады.
2. Егер олардың айырмашылық өлшемі берілген қайтадан орындалуы дәлдігінен аспаса, онда U кездейсоқ шаманың мәндері туралы басқа Z кездейсоқ шаманың мәндері бойынша анықтауға болады.
3. Дәлдікке талап мынандай критерийді қолданумен беріледі

$$\widetilde{V}(ZU) = \iint p(u)p_u(z)(z-u)^2\,du\,dz \le \varepsilon^2\,, \qquad (2.25)$$

мұндағы $p_u(z)$ – шартты тығыздықтың үлестірімі – *u*, нақты сигналы *z* сияқты орындалатынын көрсететін сенерлік функциясы; ε – берілген дәлдіктің мәні.

Сонымен, $p(u)$ тығыздығы анықталса, онда (2.23) шартың орындалуы үшін, шартты $p_u(z)$ тығыздығының үлестірімін өзгерту керек.

Егер Z кездейсоқ шама U кездейсоқ шамасын кейбір ε дәлдікпен орындаса, U-ге қатысты сияқты орындалатын Z шамасының ақпарат саны шектеулі, ол былай анықталады:

$$I(ZU) = \iint p(u)p_u(z)\log\frac{p_u(z)}{p(z)}$$

мұндағы $p(z) = p(u)p_u(z)du$ – орындайтын Z шамасының тығыздығы.

Берілген орындалу дұрыстығын, алынатын ақпараттың минимальды санымен қамтамасыз ету керек. Сондықтан, көптеген функциялар арасынан (2.25) шартын қанағаттандыратын ең аз I (ZU) қамтамасыз ететін функцияны таңдаған жөн.

Ақпараттың минимальды саны бір кездейсоқ Z шамаға басқа U-ге қатысты берілген талап, дәл орындалу U шамасы бойынша қанағаттандырылатын ε (эпсилон) – U шаманың энтропиясы деп аталады:

$$H_\varepsilon(U) = \min_{(p_u(z))} I(ZU),$$

$$V(ZU) \le \varepsilon^2 \cdot$$

Бұл шаманың үлкен тәжірибелік маңыздылығы былай шартталған: ε (эпсилон) энтропия екілік цифрдың минимальды саны, оны берілген дәлдікпен хабарламаны орындау үшін тасымалдау керек.

2.11-мысал. Су айдындағы су деңгейі U(t) уақыт бойынша өзгерегенде, жарты жылдан кейін алынған санақтармен толық анықталады. Жеке санақтар тәуелсіз және үлестірімі біржақты экспоненциалды 4 метрге тең орташа мағнасымен. Судың қорын есепке алғанда мүмкін болатын қателердің мәні тек қана оң болады

$$V = U - Z$$

сонымен қатар, қателіктің орташа мәні 0,25 метрден аспауы керек. U(t) функциясының ε – энтропиясын табу керек.

Шешімі.

Бұл есеп ақпараттың минимальды орташа санын есептеу болып саналады. Оны жылына берілген дәлдікпен, басқа функцияның көмегімен U(t) функциясын орындау үшін тасымалдау керек. Жылына судың деңгейі екі рет өлшенетіндіктен, санақтар тәуелсіз. Сондықтан, бір санақтың ε – энтропиясын есептеуге болады және ε – энтропиясының аддитивті қасиетін қолдана отырып, табылған нәтижені екі еселеу керек.

Функиялар U және Z арасындағы орташа өзара мына ақпаратқа тең:

$$I(U, Z) = H(U) - H(U/Z) \cdot$$

Экспоненциальды үлестірімген оң U кездейсоқ шаманың салыстырмалы энтропиясы

$$H(U) = \log_2 (em_u) = \log_2 (4e) \text{ бит.}$$

Есеп шартындағы X және Z арасындағы қашықтығы, оларың айырмашылығының математикалық күтімі түрінде берілген. Сондықтан орташа шартты энтропиясының $H(U/Z)$ мәні – максимальды. Егер V және Z тәуелсіз болғанда:

$$H(U/Z) \le H(V) \cdot$$

Әрі қарай W(V) үлестірімдер класында V оң кездейсоқ шамасы есептің берілген шарттына қанағаттандыратын

$$M(V) = \int_0^{\infty} V\, W(V)\, dV \le 0{,}25$$

және нормалдау шартына

$$\int_0^{\infty} W(V)\, dV = 1,$$

қанағаттандыратын көп энтропия беретін үлестірімді табу керек.

V кездейсоқ шама да мұндай шектеулерде біржақты экспоненциальды үлестірімге қанағаттыру керек

$$W(V) = \frac{1}{0{,}25} \exp\left(-\frac{V}{0{,}25}\right) \cdot V > 0,$$

сонда:

$$H(U/Z)_{max} = H(V)_{max} = \log_2(0{,}25e) \text{ бит.}$$

Бір санақтың ε – энтропиясы мынаған тең болады:

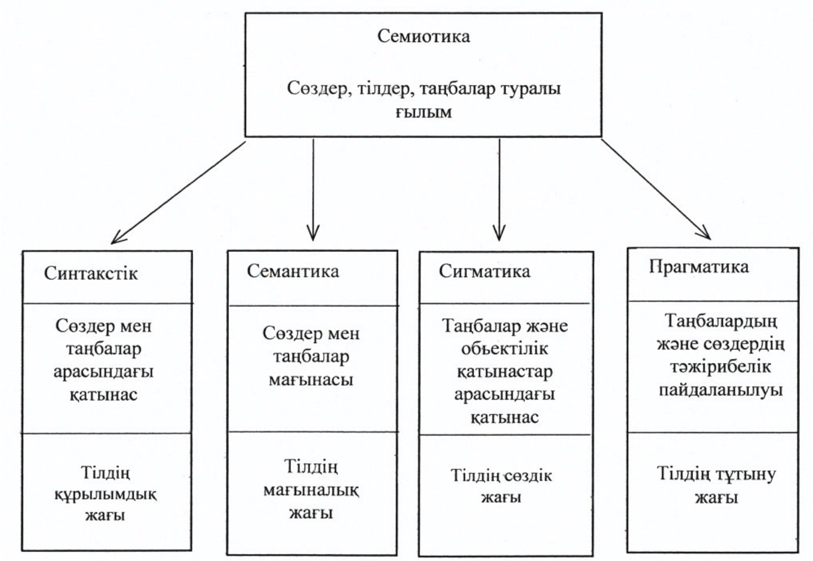
$$H_a^{\rho}(U) = I\,(U,Z)_{min} = \log_2(4e) - \log_2(0{,}25e) = 4 \text{ бит/санақ.}$$

Соңында U(t) кездейсоқ функциясының ε – энтропиясын есептесек,

$$H_a^{\rho}\left[U(t)\right] = 8\,\frac{\text{бит}}{\text{жыл}}.$$

2.3. Ақпараттың семантикалық өлшемі

Семантика – негізінде ақпараттың мазмұны, мағынасы жатыр. *Семантика* – жалпы семиотика ғылымының бір бөлігі болып саналады. Семиотикада ақпараттың – синтакстік, прагматикалық аспектісі ажыратылады (2.8-сурет).



2.8-сурет. Ақпаратты өлшеудің семантикалық өлшемінің құрылымы

Семантиканың [2,9] негізгі түсініктері: таңба, сөз, тіл.

Таңба – хабарлама элементінің шартты бейнесі болып саналады.

Сөз – мағыналық (заттық) мәнісі бар таңбалардың жиынтығы.

Тіл – сөздік және оны қолдану ережесі.

Ақпараттың құрылымдық және статистикалық өлшемдері, синтакстік аспектке жатады.

Синтакстік аспект ақпарат элементтерінің шартты белгілеулерін қарастыратын сигнал және кодтар теориясымен бейнеленеді. Синтакстік бағалар ақпарат өлшеміне тікелей қатынасы жоқ болғандықтан, оларды қарастырмауға болады.

Ары қарай, ақпарат теориясының семантикалық және прагматикалық аспектісіне жауап беретін бағалаларды қарастырамыз. Прагматикалық бағалалар инженерлік қолдануда семантикалық бағалармен қосылады. Себебі, мағынасы жоқ мәліметтер пайдасыз, ал пайдасыз мәліметтер – мағынасыз.

Бірақ логикалық қортындылау нәтижеллерінің оңтайлылығын, шындыққы жақындату деңгейі, мағынаның кейбір формальдауын талап етеді.

Мағынаны формальдау жолының бірі – ақпараттың семантикалық теориясы болып саналады.

Карнап және Бар – Хиллел [3] логикалық сөйлемдерді (ұсыныстарды) мағынасын өлшеу үшін, шындық және жалғандық функциясын қолдануды ұсынған.

Обьекті дискретті бейнелеу негізінде атомаралық (бөлінбейтін) сөйлем жатыр. Ол ықтималдық теориядағы қарапайым оқиғаға ұқсас және хабарламаның бөлінбейтін квантына сәйкес. Мұндай жолмен алынған бағалау, ақпараттың маңыздылығы деп аталады.

2.3.1. Ақпараттың маңыздылығы

Маңыздылықтың өлшемі – cont деп белгіленеді (content деген ағылшын сөзінен шыққан – маңыздылық).

Оқиғаның i маңыздылығы m(i) – оны терістеу маңыздылық өлшем функциясы арқылы өрнектеліп, былай анықталады:

$$\mathrm{cont}(i) = m(\sim i) = 1 - m(i), \qquad (2.26)$$

мұнда i – қарастырылатын оқиға, m – өлшем функциясы, ~ – терістеу белгісі

Ақпараттың маңыздылығын бағалау үшін математикалық логика қолданылады. Онда шындық m(i) және жалғандықтың m(~i) функциялары ықтималдық теориядағы оқиғаның p(i) және теріс оқиғаның q(i) ықтималдық функияларымен формальдық сәйкестіктері бар

$$m(i)+ m(\sim i)=1; \;\; p(i)+ q(i)=1.$$

Ықтималдық сияқты, ақпарат маңыздылығының өзгеруі де шектеулі

$$0 \le m(i) \le 1 \ .$$

Ақпаратының I санының логикалық бағасы:

$$\mathrm{Inf} = \log_2 \left(\frac{1}{1 - \mathrm{cont}(i)}\right) = \log_2 \frac{1}{m(i)} = -\log_2 m(\sim i) \cdot \qquad (2.27)$$

2.3.2. Ақпараттың мақсаттылығы

Егер ақпаратты, басқару жүйесінде қолданса, онда оның пайдалылығын мақсатқа жету эффектімен бағалаған дұрыс. Осыған байланысты А.А.Харкевич ақпараттың мақсаттылық өлшемін ұсынды. Ол қосымша ақпаратты алу кезіндегі мақсатқа жету, ықтималдықтың өзгеруі арқылы анықталады [9].

Жалпы түрде ақпараттың мақсаттылығы, өлшемі, аналитикалық түрінде мына қатынас арқылы өрнектеледі

$$I_{мак} = \log_2 p_1 - \log_2 p_0 = \log_2 \frac{p_1}{p_0} , \qquad (2.28)$$

мұндағы p_0 және p_1 – бастапқы (ақпаратты қабылдағанша) және соңғы (ақпаратты қабылдағаннан кейін) мақсатқа жету ықтималдығы.

Мына жағдайлар болуы мүмкін:

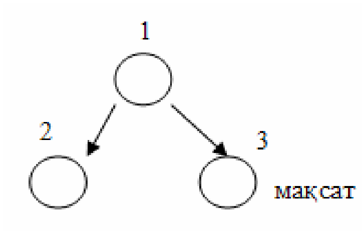
1. Қабылданған ақпарат бос болуы мүмкін, яғни мақсатқа жету ықтималдығы өзгерген жоқ, бұл жағдайда оның өлшемі нөлге тең.

2. Қабылданған ақпарат мақсатқа жету ықтималдығын кішірейтеді, сонда ол ақпарат санының теріс мәнімен өлшенетін жалған ақпарат болады.

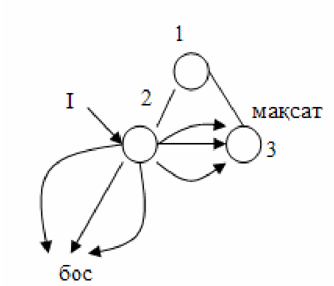
3. Қабылданған ақпарат мақсатқа жету ықтималдығын үлкейтеді де, ақпарат санының оң мөлшерімен өлшенеді.

2.12-мысал. Жүйенің негізгі жағдайы 2.9-суретте көрсетілген, ол 1 шыңына сәйкес келеді, одан екі жол болуы мүмкін: 1–2 және 1–3. Айталық 3 нүктесі – мақсатты, ал 2 нүктесі мақсаттан тыс кейбір аралық жолды ұсынады. Егер мақсатқа жету жолдары белгісіз болса, онда мақсатқа жету ықтималдығы 1 – 2 және 1 – 3 жолдарымен бірдей, ал олай болса, тәжірибе схемасы екі негізде болады, онда шартты былай жазуға болады:

$$p = p(1-2) = p(1-3) = \frac{1}{2}.$$



2.9-сурет. Негізгі жүйе



2.10-сурет. Жүйенің аралық жағдайы

1. Айталық, 2 нүктесіне жеттік және бұл нүктеде төмендегі сипаттағы ақпарат қабылданды 2.10-сурет.

Жүйенің жағдайы былай сипатталады:

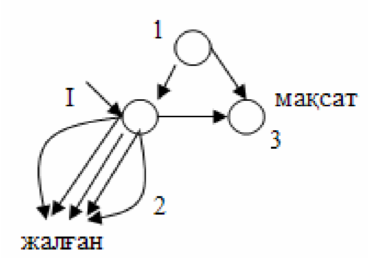
$$I_{\text{каж}} = \log_2 \frac{p(2-3)}{P(1-2)} = \log_2 \frac{\frac{3}{6}}{\frac{3}{6}} = 0.$$

Бұл ақпарат бос.

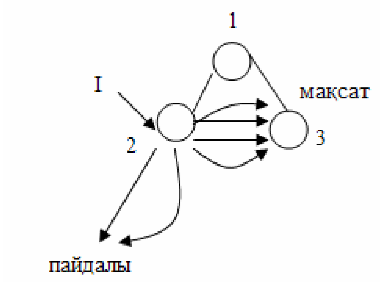
2. 2 нүктесінде жалған ақпарат қабылданды, ол мақсатқа жету ықтималдығын кішірейтті (2.11-сурет).

Бұл жағдайда ақпараттың мақсаттылығы:

$$I_{\text{каж}} = \log_2 \frac{p(2-3)}{P(1-2)} = \log_2 \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = -1{,}58.$$



2.11-сурет. Жалған ақпаратты қабылдау кезіндегі жүйенің жағдайы



2.12-сурет. Қолайлы жағдайдағы жүйенің жағдайы

3. Қолайлы жағдай. 2-шыңына ақпарат келіп түседі, ол мұндағы екі шығыс орнында да жалған болады, бірақ алты шығыстан төртеуі 2-ші мақсатқа жету тұрғысынан қарағанда қолайлы болып саналады (2.12-сурет).

Қолайлы жағдайдағы ақпараттың мақсаттылығы:

$$I_{\text{каж}} = \log_2 \frac{p(2-3)}{P(1-2)} = \log_2 \frac{\frac{4}{6}}{\frac{1}{2}} = 0{,}42$$

2.4. Динамикалық энтропия

Егер, ақпаратты қабылдау мақсаты – жағдайдың (ситуацияның) анықталмағандығын нөлге түсіру болса, онда динамикалық энтропия түсінігін қолданған (бейнелерді анықтау жүрісінде, ауру диагноздары немесе қылмысты зерттеу кезінде) қолайлы.

Ситуацияның энтропиясы (анықталмағандығы) уақыт бойынша өзгереді

$$H = H(t).$$

Көп ситуацияларды $\{a_i\}$ әрекет ететін салдары мен $\{b_j\}$ сылтаулары арасындағы көптеген қатынастар арқылы беріледі.

Салдары байқалғанда, соның арқасында сылтаулар ашылады. Салдар мен сылтаулар арасындағы қатынас $p_{ij}(t)$ ықтималдықтарымен бағаланады. Егер салдар мен сылтаулар арасында байланыс $0 \le p_{ij}(t) \le 1$ байқалмаса және олардың арасында байланыс шамалы болса, онда $p_{ij}(t)=0$ болады.

Уақыт t мезеті кезінде салдардың жалпы санын N(t) – мен, ал жалпы сылтаулар санын – M(t) белгілейік. Сонда салдардың саны i=1,2 , N(t), ал сылтаулар – j=1,2,…, M(t).

Берілген қатынастар жиынтығының энтропиясы:

$$H(t) = -\sum_{i=1}^{N(t)} \sum_{j=1}^{M(t)} p_{ij}(t) \log p_{ij}(t) \cdot \qquad (2.29)$$

Уақыт бойынша бір интервалдан кейін қосымша ақпарат түседі, ол N(t) -дан N(t+1) дейін $\{à_i\}$ салдар санын, M(t)-ден M(t+1) дейін $\{b_j\}$ сылтаулар санын және $p_{ij}(t)$-дан $p_{ij}(t+1)$ дейін, олардың арасындағы қатынастың ықтималдығын өзгерте алады.

Нәтижесінде t+1 мезетінде энтропия

$$H(t+1) = -\sum_{i=1}^{N(t+1)} \sum_{j=1}^{M(t+1)} p_{ij}(t+1) \log p_{ij}(t+1) \cdot \qquad (2.30)$$

Ақпарат өлшемі сапасында мақсаттылығына сәйкес айырмашылықты қабылдаймыз:

$$I = \Delta H = H(t) - H(t+1),$$

ол анықталмағандық жағдайында үлкею немесе кішіреюіне байланысты оң және теріс мөлшерде болуы мүмкін.

Бақылау сұрақтары.

1. Энтропия түсінігін анықтаңыз.
2. Ансамбль энтропиясының негізгі қасиеттерін атап беріңіз.
3. Ақпарат теориясында шартты энтропия түсінігі қайда колданылады?

4. Бір-бірімен байланысты символдардың ортақ ықтималдылығын анықтаңыз.
5. Каналдың матрицасының құрамын және оның қасиетін анықтаңыз.
6. Шартты энтропия үшін өрнек жазып, оның мағынасын түсіндіріңіз.
7. Байланысқан ансамбльдер энтропиясын қалай анықтаймыз?
8. Ақпарат саны және энтропия түсініктері бір-бірімен қалай байланысқан?
9. Артықшылық түсінігін анықтаңыз.
10. Хабарламада k тең ықтималдықсыз символдардан құралған ақпарат санын анықтаңыз.
11. Үйлесімді энтропиясы көмегімен тасымалданған В қабылданған хабарламаның ансамблінде болатын кедергі шарттарында ақпараттың ортақ санын анықтаңыз.
12. Шартты энтропия көмегімен тасымалданған В қабылданған хабарламаның ансамблінде болатын кедергі шарттарында ақпараттың ортақ санын анықтаңыз.
13. Шуылы бар байланыс каналдарымен хабарламаны тасымалдау кезінде ақпараттың жоғалуын қалай анықтауға болады?
14. Семиотикада ақпарат өлшемінің негізгі түрлерін көретіңіз.
15. Семантикалық әдісте ақпаратты өлшеудің мәні неде?
16. Ақпарат маңыздылығы қалай анықталады?
17. Ақпарат мақсаттылығының түсінігі және оның физикалық мағынасы.
18. Дифференциалдық энтропияға анықтама беріп, оның негізгі қасиеттерін қарастырыңыз.
19. Қандай үйлестірімдердің дифференциалдық энтропиясы максимальды?

А) кездейсоқ шаманың өзгеру диапазонына шектеулі?

В) кездейсоқ шаманың дисперсияға шектеулі?

3. СИГНАЛДАРДЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРІ

3.1. Сигнал және оның модельдері

«Сигнал» түсінігі әртүрлі мағынаны қабылдайды. Сигналды кең мағынада ақпаратты материалдық тасымалдаушы ретінде түсінуге болады. Ол анықталған мақсаттар үшін арнайы немесе табиғи түрде жасалған болуы мүмкін. Кітаптарда сигналды тар мағынада түсінетін боламыз. Яғни сигнал – ақпараттың материалды тасымалдаушысы, ол ақпараттық жүйеде хабарламаны тасымалдау үшін арнайы жасалған.

Ақпарат тасымалдауыш ретінде табиғаты әртүрлі тербелістер қолданылады. Тербелістерді – *кездейсоқ* және *детерминделген* деп бөледі.

Детерминделген тербеліс – уақыттың кез келген кезеңінде дәл анықталған.

Кездейсоқ тербеліс алдын ала болжау мүмкін емес мәндері бар параметрлер болуы мүмкін.

Сигнал принципиальды түрде кездейсоқ, ал оның тербеліс пен аналитикалық моделі кездейсоқ процесс болады. Бірақ, детерминделген сигналдардың моделін зерттеу кейбір себептерге байланысты қажет:

1) кездейсоқ процесс детерминделген функцияның жиынтығымен берілуы мүмкін;

2) детерминделген сигналдар ақпараттық техника обьектелерін реттеу, тузеу, өлшеу мақсатында арнайы құрылады.

Сигналдар (ереже бойынша электрлік) бір немесе бірнеше параметрлерге (модуляциялау) белгілі ықпалы бойынша, ақпаратты тасымалдаушы болып саналады [8,10,11]. Осындай параметрлерді ақпараттық немесе кодтық деп атауға болады. Сигналдар өз құрылымы бойынша *үздіксіз* және *дискретті* болып бөлінеді. Үздіксіз сигналдардың мәндерінің жиынтығы үздіксіз, оның мәні максимальды және минимальды шамалармен шектеген диапазонда жатады (үзділіссіз сигналдардың мысалдары: тұрақты ток және кернеу, токтың гармоникалық тербелісі). Бірінші жағдайда, сигналдың ақпараттық параметрі тек қана ток немесе кернеудің шамасы болуы мүмкін, ал екінші жағдайда тербелістің амплитудасы, фазасы немесе жиілігі болуы ықтимал. Үздіксіз сигнал ережесі бойынша үзіліссіз хабарламаны (сөйлеу, музыка, теледидарлық бейне) тасымалдау үшін қолданылады. Үздіксіз хабарлама үзілісссіз электрлік сигналдарға түрленеді. Мысалы, ақпарат хабарлама түріндегі дыбысталу болса, онда микрафон кеңістіктің дыбыстық тербелісін электрлік тербеліске түрлендіреді. Электрлік сигналдар қабылдау орнына тасылады немесе оларды жоғары жиіліктік тербелісті модуляция үшін қолданады.

Анықталған шама диапазонында және уақыт интервалында шекті мәндер жиынтығы қабылдайтын сигналды – *дискретті* деп атайды. Дискретті сигналдар көмегімен дискретті және үзділіссіз хабарламалар тасылады. *Дискретті хабарламалар* – бұл жеке символдардың (әріптердің) шекеулі тізбегі. Тізбектің ұзақтылығы шектелген. Мысалы: телеграмма, лектордың дәрісі, т.б.

Дискретті хабарламалар телеграфта, мәліметтерді тасымалдауда және телеметрияда қолданылады. Дискретті хабарламаларды тасымалдау үшін, яғни оларды сигналға түрлендіру үшін кодтау операциясын орындау қажет.

Дискретті әдістермен үздіксіз хабарламаны тасымалдау үшін үздіксіз сигналдар уақыт бойынша дискреттеу және деңгей бойынша кванттау операцияларының көмегімен, дискретті түрге түрлендіріледі. Содан кейін дискретті әдістермен тасымалданады. Дискретті сигналдар жеке, қарапайым элементтер (тасымалдауыш) немесе сондай элементтердің жиынтығы түрінде ұсынылады. Мұндай элементтер мыналар:

1. Кернеудің бірполярлық импульсі;
2. Синусоидалы өзгеретін кернеу (ұзақтықтығы белгілі ток);
3. Периодты кернеу импульстерінің тізбегі (ұзақтықтықтары белгілі токтар);
4. Тыныс (кернеудің жоқтығы);

Әрбір элементтің (тасымалдауыштың) өз сапалық белгілері (тасымалдауыш белгілері) бар. Бір немесе бірнеше белгілер, хабарламаны тасымалдау үшін қолданылуы мүмкін.

Бірполярлық импульстердің сапалы белгілері импульстердің амплитудасы, жиіліктігі және фазасы, гармоникалық тасымалдаушқа – амплитуда, тербеліс жиіліктігі және фазасы жатады. Импульстердің периодтық тізбектерінің сапалы белгілері – импульстердің амплитудасы, ұзақтықтығы, полярлығы, жиіліктігі және фазасы болып саналады. Тасымалдауышты бөлетін мына әдістер:

1) полярлық бөлу;

2) амплитудалық бөлу: көршілес тасымалдауыштардың амплитудаларының мәндері әртүрлі;

3) фазалық бөлу – синусоидалы тербеліс түрінде тасымалдауыш қолданылады;

4) уақытша бөлуде – тасымалдауыштар бір-бірінен уақытша интервал арқылы ажыратылған;

5) жиіліктік бөлу – көршілес тасымалдауыштар бір-бірінен жиілік арқылы ажыратылған;

6) қарапайым бөлу – тасымалдауыш сигнал бір уақытта әртүрлі байланыс каналдарымен жіберіледі.

Хабарламаның тасымалдауыш сигналы, оның ақпараттық кодтау белгілері болса – белсенді, ал ондай белгі болмай, тасымалдауыштарды бөлуге қолданылса, онда олар *бөлушілер* деп аталады.

Нақты сигналдардың байланыс жүйесі арқылы өтуін зерттеу есептерін жеңілдететін сигналдың басқа ұғымын табу қажет. Осы мақсатта күрделі сигналдар, базисті-элементарлы сигналдардың жиынтығымен көрсетуге болады. Онда күрделі сигнал $u(t)$ базисті $\Psi_k(t)$ функцияның өлшенген қосындысы түрінде көрсетуге болады.

$$u(t) = \sum_k C_k \Psi_k(t) \cdot \tag{3.1}$$

Егер базисті ретінде ортогональды функциялар қолданылса, яғни $[t_a, t_b]$ қимасында $\Psi_0(t), \Psi_1(t), ..., \Psi_n(t)$ барлық $k = j$-дан басқасы $k = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, n}$ үшін төмендегідей болады:

$$\int_{t_a}^{t_b} \Psi_k(t)\Psi_j(t)dt = 0 \cdot \tag{3.2}$$

Бұл функцияның жүйесі ортонормаланған, ал барлық $j=\overline{0,n}$ үшін мына арақатынас әділ

$$\int_{t_a}^{t_b} \Psi_j^2(t)dt = 1 \cdot \qquad (3.3)$$

(3.1) түрдегі ортонормаланған функциясының жиынтығымен $u(t)$ сигналын бейнелеген кезде C_k коэффициенттерін анықтайық. (3.1) теңдіктің оң және сол жақ бөлігін $\Psi_j(t)$-ға көбейтеміз де, $[t_1,t_2]\in[t_a,t_b]$ кездегі $[t_1,t_2]$ интервалында интегралдаймыз.

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t)\cdot\Psi_j(t)dt = \sum_k C_k \cdot \int_{t_1}^{t_2} \Psi_j(t)\cdot\Psi_k(t)dt \cdot \qquad (3.4)$$

(3.2) байланысында $k \neq j$ кездегі (3.4) өрнегінің оң жақ бөлігінде барлық интегралдар нөлге тең. $k = j$ кезде (3.3) сәйкестігінде интеграл бірге тең болады

$$C_k = \int_{t_2}^{t_1} u(t)\Psi_j(t)dt \cdot$$

3.2. Сигналдың уақыт бойынша формасы

Уақыт бойынша $u(t)$ сигналды бейнелу үшін базисті функциялар ретінде бірлік, импульстік функциялар – дельта – функциялар пайдаланылады [12,16].

Дельта – функция келесі формула арқылы анықталады:

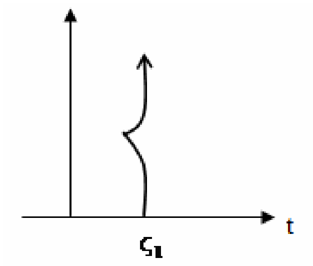
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, \text{егер} & t = \xi_1 \\ 0, \text{егер} & t \neq \xi_1 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\xi_1)dt = 1 \cdot$$

Нақты сигналды дұрыс айқындайтын жалғыз параметр, оның әрекет ету уақыты болып саналады. δ – функциясының көмегімен нақты сигналды былай табуға болады:

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi)\delta(t-\xi)d\xi\cdot \tag{3.5}$$

Дельта – функцияның символдық бейнелеуі, 3.1-суретте көрсетілген.

$\delta(t-\varsigma_1)$



3.1-сурет. Дельта – функция

Осылайша $u(t)$ функциясы шексіз аз ұзақтық импульстерінің бір-біріне тұтасатындардың жиынтығы түрінде бейнеленген. [12,16] сызықтық жүйесінің теориясында (3.5) ыдыратуы үлкен мәнді, сонымен қатар дельта – функция түрінде элементарлы кіріс сигналына жүйенің реакциясын орната отырып, кіріс сигналының сәйкес мәндеріне тең, «ауданды» – дельта–импульстердің жылжытылған шексіз тізбектеріне, реакцияның суперпозициясын анықтау сияқты өз бетімен кіріс сигналына жүйенің реакциясын анықтауға болады.

3.3. Сигналдың жиіліктік бойынша формасы

Сигналды жиіліктік формасында бейнелу үшін базистік ретінде келесі функциялар қолданылады:

$$\Psi_j(t)=e^{jk\omega_1 t}. \tag{3.6}$$

Периодты $u(t)$ сигналдың базистік функциялардың C_K коэффициенттері спектр деп аталып, төмендегі формуламен анықталады:

$$\dot{C}_k = \dot{A}_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)e^{-jk\omega_1 t}dt, \qquad (3.7)$$

мұндағы k = 0, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$; T– сигнал периоды, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

Мұны периодтық u(t) сигналды базистік функциялармен (3.6) бейнелеген Фурье [6] қатарына кешендік тұлғада ыдыратуы дейді, оны былай жазады:

$$u(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t}$$

Фурье қатарына ыдыратудың тригонометриялық формасы былай болады:

$$u(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$$

немесе

$$u(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t),$$

мұндағы $A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$– *k*-шы гармоникалық құрастырушы, $A_k, k\omega_1, \varphi_k$ – амплитуда, *k*-шы гармоникалық құрастырушының жиілігі және бастапқы фаза; a_0 – тұрақты құрастырушы және ол период бойынша сигналдың орташа мәнін анықтайды:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)dt; \quad a_k = A_k \cos\varphi_k; \quad b_k = A_k \sin\varphi_k; \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{b_k}{a_k}; \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cos(k\omega_1 t)dt; \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\sin(k\omega_1 t)dt,$$

мұндағы $\dot{A}_k - \omega_k$ гармоникалық құрастыру жиілігінің кешендік амплитудасы, $\omega_k = k \cdot \omega_1$, кешендік амплитуда $\dot{A}_k$ a_k және b_k коэффициенттерімен байланысы:

$$\dot{A}_k = a_k - jb_k \cdot$$

Периодтық сигнал спектрінің ерекшелігі – оның үзіктілігі (дискреттігі). Көрші спектральды сызықтардың ара қашықтығы [11,18] біркелкі және ол негізгі гармониканың жиілігіне тең.

Периодты емес сигналдың өзгеру периоды шексіздікке ұмтылса, оны периодты сигнал ретінде қарастыруға болады. Сигналдың Т периоды өскен сайын, спектрде көршілес жиіліктер арасындағы интервал мен спектрлі құрастырушылардың амплитудалары азаяды. Олар $T \to \infty$ шексіз аз шамалар болады. Осылайша, периодтық сигналдың спектрлік ыдыратуын анықтайтын Фурье қатары периодты емес, сигналдың спектрлік ыдыратуын анықтайтын Фурье интегралына түрленеді:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \exp\{j\omega t\} d\omega, \tag{3.8}$$

мұндағы $S(j\omega) = |S(j\omega)| \exp\{j\varphi(\omega)\}$ – спектралдық тығыздық;

$|S(j\omega)| = S(\omega)$ – сигналдың амплитудты – жиіліктік сипаттамасы;

$\varphi(\omega)$ – сигналдың фазалық жиіліктік сипаттамасы;

Өрнек (3.8) Фурьенің кері түрленедірушісі деп аталады.

Спектралдық тығыздық пен уақыт функциясының байланысы, Фурьенің тіке түрлендірушісі арқылы бейнеледі:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp\{-j\omega t\} dt \cdot$$

Спектралдық тығыздық, периодты емес сигналды бір мағыналы анықтайды және мына шарттардарға қанағаттанады:

1. $\lim\limits_{\omega \to \infty} S(\omega) = 0$.

2. Спектралдық тығыздықтың модулі жиілік бойынша жұп, ал аргументі – тақ функция, яғни

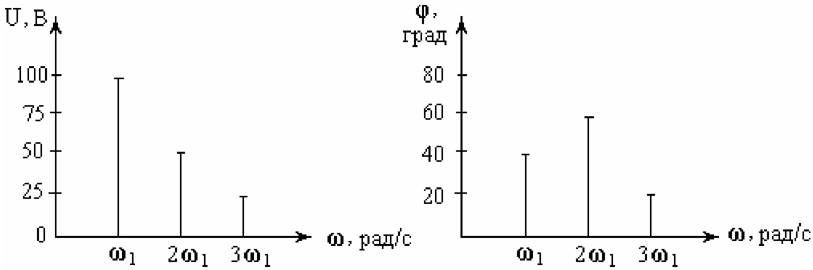
$$S(\omega) = S(-\omega),$$
$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega).$$

Сигналдардың спектрлік көрсетуі. Синусоидалды емес сигналдың пішінін құратын гармоникалық құрамалардың жиынтығы – осы гармоникалық емес сигналдың *спектрі* деп аталады.

Спектрді спектрлік диаграмма арқылы көрсеткенді, нақты сигналдың Фурье қатарының коэффициенттерінің графикалық бейнелеуін айтады. Амплитудалық және фазалық спектрлік диаграммаларды ажыратады. Диаграммада кейбір масштабта горизонтальды осі бойынша жиіліктің гармоникаларын, ал вертикальды осі бойынша – олардың амплитудалары мен алғашқы фазалары ұсынылған. Егер кейбір периодтық синусоидалды емес сигнал қатар түрінде берілсе,

$$u(t) = 100\sin(\omega_1 t + 40^0) + 50\sin(2\omega_1 t + 60^0) + 25\sin(3\omega_1 t + 20^0)$$

оның амплитудалық спектрлік диаграммасы 3.2*а*-суретте, ал жиіліктік – 3.2 *ә*-суретінде бейнелген.



3.2-сурет. Сигналдың спектрлік диаграммасы

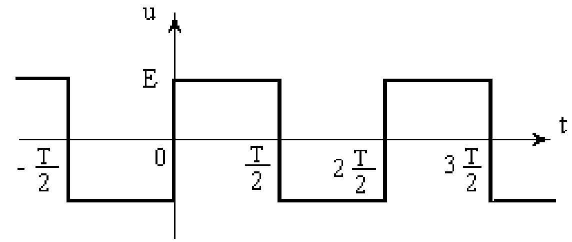
3.1-мысал. Бейнеленген (3.3-сурет) тербелістің гармоникалық құрамдарының кешендік амплитудаларын есептеп, оны Фурье қатарымен жазу керек.

Шешімі.

Бұл сигналдың аналитикалық өрнегі:

$$u(t)=\begin{cases} E \quad \text{егер} \quad 2m\frac{T}{2}<t<(2m+1)\frac{T}{2}, \\ -E \quad \text{егер} \quad -2m\frac{T}{2}<t<-(2m+1)\frac{T}{2} \end{cases}$$

мұндағы m – бүтін сан.



3.3-сурет. Ыдырату сигналдың формасы

Формула (3.7) сәйкестігін және Эйлер формуласын ескере отырып,

$$\cos\alpha=\frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2},$$

сондай ақ $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$, сонда:

$$\dot{A}_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}U(t)e^{-jk\omega_1 t}dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-E)e^{-jk\omega_1 t}+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}Ee^{-jk\omega_1 t}dt=$$

$$=-\frac{2E}{T}\frac{e^{-jk\omega_1 t}}{-jk\omega_1 t}\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{2E}{T}\frac{e^{-jk\omega_1 t}}{-jk\omega_1 t}\Bigg|_{0}^{\frac{T}{2}}=\frac{2E}{jk\pi}(1-\cos k\pi)\cdot$$

Сонымен қатар k = 0, 2, 4, 6 кезінде cos kπ мәні бірге тең болса, онда берілген тербелісте нөлдік құрастырушы және жұп гармоника болмайды.

к=1 кезінде

$$\dot{A}_1 = \frac{2E}{j\pi}(1+1) = \frac{4E}{\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}}, (-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}).$$

к=3,5,… кезінде ұқсас

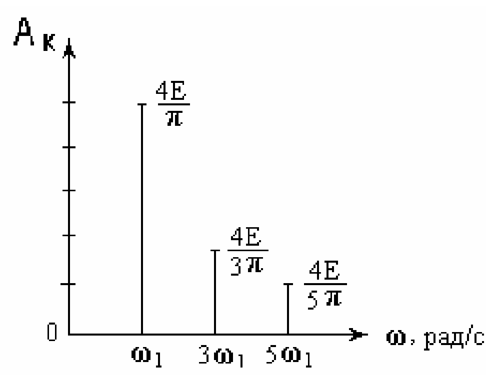
$$\dot{A}_3 = \frac{2E}{j3\pi}(1+1) = \frac{4E}{3\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}}, \dot{A}_5 = \frac{2E}{j5\pi}(1+1) = \frac{4E}{5\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Берілген сигналдың кешендік формасынан тригонометриялыққа ауысқанда:

$$u(t) = \frac{4E}{\pi}\cos(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{4}{3}\frac{E}{\pi}\cos(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{4}{5}\frac{E}{\pi}\cos(5\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) =$$

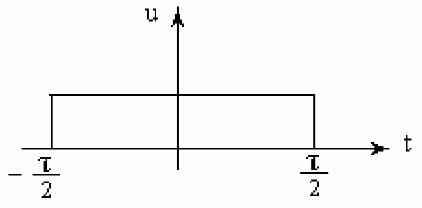
$$= \frac{4E}{\pi}\sin\omega_1 t + \frac{4E}{3\pi}\sin 3\omega_1 t + \frac{4E}{5\pi}\sin 5\omega_1 t.$$

3.4-суретте спектрлік диаграмма берілген.



3.4-сурет Тік төртбұрышты импульстер тізбектерінің спектрлік диаграммасы

3.2-мысал. Жеке тік төртбұрышты импульс берілген (3.5-сурет).



3.5-сурет. Жеке тік төртбұрышты импульс

Жеке тік төртбұрышты импульстің аналитикалың теңдеуі:

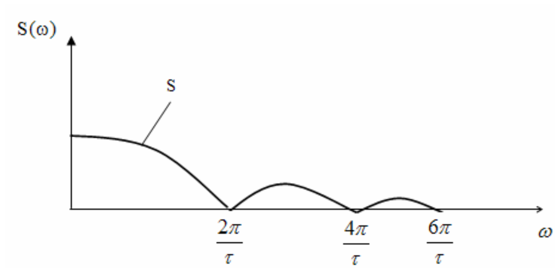
$$u(t)=\begin{cases} E \quad \text{егер} \quad -\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2}, \\ 0 \quad \text{баска жагдайда.} \end{cases}$$

Енді жеке тік төртбұрышты импульстің спектрлік функциясын анықтау керек, ол 3.6-суретте көрсетілген.

$$S(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ee^{-j\omega t}dt=\left.\frac{Ee^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=$$

$$=\frac{Ee^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{-j\omega}-\frac{Ee^{j\omega\frac{\tau}{2}}}{-j\omega}=E\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}=g\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}},$$

мұндағы $g=E\cdot\tau-$ импульстің ауданы.



3.6-сурет. Жеке тік төртбұрышты импульстің спектрлік функциясы

3.4. Сигнал энергиясының спектрде үлестірімделуі

Периодты емес u(t) сигналын қарастырсақ, ол физикалық ұсынысы деп, 1 ом кедергілі резисторде электрлік кернеуді атаймыз.

Онда осы резисторға бөлінген энергия келесі түрде анықталады:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt \cdot \qquad (3.9)$$

Интеграл (3.9) шектеуі болса, u(t) сигналының энергиясын S(ω) спектрлік сипатамасының модулі арқылы табайық. Бұл модульдің квадратын мына түрде жазамыз [8,17]:

$$\left|S(\omega)\right|^2 = S(j\omega)S(-j\omega) \cdot \qquad (3.10)$$

мұнда $S(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{j\omega t}dt$ – u(t) сигналының S(jω) спектрлік сипатамасы, кешенді – түйіндес функциясы.

Онда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|S(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)S(-j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{j\omega t}dtd\omega \cdot$$

Бұл интегралдардың реттілігін өзгертіп және Фурьенің кері түрлендіруін (3.8) пайдалана отырып, келесі қатынасқа келеміз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)[\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega]dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \left|u(t)\right|^2 dt \cdot$$

Ары қарай

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|u(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|S(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left|S(\omega)\right|^2 d\omega \cdot \qquad (3.11)$$

Арақатынас (3.11) Парсеваль теңдігі ретінде әйгілі. Периодты емес сигналдың болған уақытында бөлінген энергияны жиілік интервал бойынша, оның спектрлік сипаттамасының квадрат модулін интегралдап табуға болады.

Спектрдің шексіз аз алаңына сәйкес келетін $\frac{1}{\pi}|S(\omega)|^2 d\omega$ шексіз аз қосылғыштан әрбіреуі ω-дан ω + *dω*-ға дейін жиілік аралығында жиналған спектрлік құраушылар сигналына келетін энергияны бейнелейді.

Жеке тік төртбұрышты импульстің спектрін (3.6-сурет) талдай отырып, оның ұзақтығы 0-ден ∞ дейін көбейген кезде спектрі шексіздіктен (дельта – функция), сигналдың тұрақты мәніне сәйкес келетін координатаның басында бір спектрлік сызыққа дейін қысқарады. Бұл спектрдің ұзақтығын көбейткен кезде, сигнал спектрі енінің қысқару қасиеті және керісінше, бұл кез келген формадағы сигналдарға да орындалады. Бұл экспоненциальды функция деңгейінің көрсеткіші, ішкі интегралдау анықтамаларында туынды түрде t және ω үзілісті болатын тура және кері интегралдау, Фурье түрлендіруінің ерекшелігінен тікелей шығады.

Ұзақтығы $\lambda>1$ кезінде λ рет азаятын $u(\lambda t)$ функциясы мен анықталған ұзақтықтығы $u(t)$ функциясын қарастырайық. $u(t)$ функциясында $S(j\omega)$ спектрлі мінездемесі бар деп есептей отырып, *u(λt)* үшін сәйкес $S_\lambda(j\omega)$ мінездемесін табамыз:

$$S_\lambda(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\lambda t)e^{-j\omega t}dt==\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}u(t')e^{-j\frac{\omega t'}{\lambda}}dt'=\frac{1}{\lambda}S(j\frac{\omega}{\lambda}), \quad (3.12)$$

мұнда $t'=\lambda t$.

Демек, сигналдың *λ* рет қысқартылған спектрі *λ* рет үлкейгенге тең. $S(j\frac{\omega}{\lambda})$ алдында $\frac{1}{\lambda}$ коэффициенті гармоникалық құрастырушының тек қана амплитудасын өзгерткенімен спектрдің еніне әсер етпейді.

Нақты сигналдар уақыт бойынша шектелген және қанша болса да, жоғарғы жиілікті гармоникалық құрастырушыны ұстай алмайды.

Бұл байланыста [6,11] энергиялық критерийді қолдана отырып, T тәжірбиелік ұзақтықты және ω спектрдің тәжірбиелік енін, олардың ішінде сигналдың энергиясының басым бөлігі шоғырланатындай етіп анықтаймыз.

Уақыт бойынша $t_0 = 0$ мезетінде басталатын сигналдардың тәжірбиелік ұзақтықтығы мына арақатынаспен анықталады

$$\int_0^{T_n} |u(t)|^2 dt = \eta \int_0^{\infty} |u(t)|^2 dt, \tag{3.13}$$

мұнда η –1-ге жеткілікті жақын коэффициент (сигналдың қайта жаңғырту түрінде талаптарға байланысты 0,9-ден 0,99-ге дейін).

Парсеваль (3.11) теңдігін ескере отырып, сигнал спектрінің тәжірбиелік ені үшін сәйкес келесі теңдікті жазамыз:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_n} |S(\omega|^2 d\omega = \frac{\eta}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega|^2 d\omega \cdot \tag{3.14}$$

Әрбір импульстің база түсінігі былай анықталады:

$$B = \tau \cdot \Delta f, \tag{3.15}$$

мұндағы τ –импульс ұзақтығы (сек); Δf – импульс спектрінің ені (Гц).

Әрбір импульс базасының мағынасы тұрақты $1.13 \geq B \geq 0.22$\`.

База сигналдың төменділігін көрсетеді, бұл көзқарас бойынша ең тиімді қоңырау импульсі болып саналады. Ол, берілген τ ұзындықта ең аз $\Delta\omega$ жиілік аралығын талап етеді.

Тәжірбиеде $\Delta f \approx \frac{1}{\tau}$ жеткілікті.

Сигналдардың спектрлерінің қасиеттері:

1. Сигналдардың спектрлерінің ені шексіз, оның жиіліктің көбеюі мен өшу тенденциясы бар.

2. Спектрдың формасы, дәрежесі және өшу мінездемесі сигналдың ұзақтығы мен формасына байланысты.

3. Импульстің амплитудасы спектрінің еніне әсер етпейді, ол спектрдің амплитудасына әсер етеді.

4. Сигнал ұзақтығының α рет көбеюі, оның спектрінің сонша рет тарылуына әкеледі.

3.5. Кездейсоқ процесс – сигналдың моделі

Пайдалы ақпараттардың құрамына нақты сигналдармен қатар, шумен кедергі де кіреді. Кедергі көбінесе басқа сыртқы ақпарат көздерінен шыққан сигналдар – аппаратуралардың "бұрылуы", негізгі сигналға тұрақсызданған факторларға әсер ету, т.с.с. Олардың физикалық табиғаты кездейсоқ емес, зерттегеннен кейін, детерминделген кедергі айналып сигналдан шығарылуы мүмкін. Ал шулар – ақпарат көзінің табиғатымен немесе сигналдың құрастыру және детекторлау құрылғыларымен шартталған сигналдың кездейсоқ флуктациялары. Кедергінің табиғаты белгісіз болғандықтан, олар – кездейсоқ сигнал.

Ықтималдықтар теориясы кездейсоқ шамалар және олардың мінездемелерін "статикада" қарастырады. Кездейсоқ сигналдарды "динамикада" бейнелеу, зерттеу есептерінде, олар уақыт немесе кез келген айнымалыдар бойынша өзгеруін, кездейсоқ процестер теориясы қарастырады.

Кездейсоқ шамаларды үлестіргенде универсалды координата ретінде, уақыт "t" координатасын қолданамыз. Уақыт бойынша кездейсоқ шамаларды үлестіру және кез келген математикалық формада көрсететін сигналдарды жалпы жағдайда – *кездейсоқ процестер* деп атайды. Техникалық әдебиеттерде "кездейсоқ сигнал" және "кездейсоқ процесс" терминдері синоним ретінде қолданылады.

Кездейсоқ сигналдардың детерминделген сигналдардан ерекшелігі – олардың мағыналары кез келген уақыт мезеттерінде есептеліне алмайды. Олардың мағыналары тек қана берілген бірден кем ықтималдықпен белгілі мағыналарға мүмкіндік беретін, кездейсоқ сигналдардың мінездемелері – *статистикалық* деп аталады.

Жалпы жағдайда физика-техникалық мәліметтерді сараптау және өңдеу процесінде статистика әдісімен жазылған сигналдың үш түрімен жұмыс жасау керек болады. Біріншіден, физикалық процестерді айқындайтын бұл ақпаратты сигналдар өз табиғатында ықтималды. Екіншіден, обьектілер немесе физикалық процестердің белгілі параметрлерінен тәуелді ақпараттық сигналдар, жалпы жағдайда алдын ала белгілі емес мәндер мен ақпараттық сигналдардың мәліметтері бойынша анықтамасына жатады. Үшіншіден, ақпараттық сигналдармен бірге жүретін, уақыт бойынша бей-берекет өзгеріп тұратын шулар мен кедергілер, бірақ ережеге сай уақыт бойынша өзгеру және өз мәні сияқты статистикалық тәуелді емес. Әдетте, сондай сигналдарды өңдеген мына мақсаттар қойылады:

- пайдалы сигналды табу;
- сигналдың параметрлерін бағалау;
- сигналдың ақпараттық құрамын бөлу (сигналдарды шу және кедергіден тазалау) ;
- сигналдардың кейбір кезекті интервалдар бойынша тәртібін алдын ала болжау (экстраполяция).

Сонымен, нақты сигналдар (кедергілер) кездейсоқ процестер болып саналады [12]. Кездейсоқ процесс аргументтің кез келген мәнінде кездейсоқ шама болатын мәнді x(t) кездейсоқ функциямен белгіленеді. Тәжірбиенің өзгермейтін шартты кезінде x(t) кездейсоқ процесі $x_n(t)$ -ның кез келген нақты формасын қабылдай алады.

Белгілі тәжірбиеде тіркелген кездейсоқ процестің нақты түрі, оның *реализациясы* деп аталады. Кездейсоқ $\{x_n(t)\}$ процестің барлық мүмкін болатын реализацияларының жиынтығы – оның *ансамблі* деп аталады.

Кездейсоқ процестердің жіктейтін негізгі нышандары: күйінің кеңістігі, уақыт параметрі, әртүрлі t_i уақыт мезетінде x (t_i) кездейсоқ шамаларының статистикалық байланыстары.

Күйінің кеңістігі деп, x (t_i) кездейсоқ шамаларының мүмкін жиынтығын атайды:

- Күйінің кеңістігі жиынтығы континуум болатын кездейсоқ процесс, ал уақыттың кез келген мезетінде өзгеруі, мүмкін жай-күйдің үздіксіз кездейсоқ процесі.
- Егер күйінің кеңістігі шекті немесе есептік санды уақыттар моментінде өзгеретін болса – ол үздіксіз кездейсоқ тізбек.
- Кездейсоқ процесс күйінің кеңістігінің жиынтығы шектеулі, олар кез келген уақыт бойынша өзгереді – ол дискретті кездейсоқ процестер.
- Егер күйінің жағдайы тек қана шектеулі немесе есептік санды уақыттар мезетінде өзгеретін болса – онда дискретті кездейсоқ тізбек болады.

Анықтамаға сәйкес, кездейсоқ x(t) процесс әртүрлі $t_1,...,t_i,...,t_N$ мезеттеріде тәуелді кездейсоқ $x_1 = x(t_1),...,$ $x_i = x(t_i),..., x_N = x(t_N)$ шамалардың N жүйесімен сипатталуы мүмкін. Жүйенің N шексіз көбею кезінде жүйе, қарастырылған x(t) кездейсоқ процесіне эквивалентті.

Көрсетілген жүйенің жеткілікті мінездемесі $w_N(x_1,..., x_i,..., x_N,$ $, t_1,..., t_i,..., t_N)$ ықтималдықтарының N – ретті тығыздығы болып саналады. Ол $(x_1, x_1 + \Delta x_1),...,$ $(x_i, x_i + \Delta x_i),$ $...,(x_N, x_N + \Delta x_N)$ интервалдарында сәйкес орналасатын $t_1,..., t_i,..., t_N$ уақыт мезеттеріндегі мәндердің p_N реализациясының ықтималдығын есептеуге мүмкіндік береді, мұнда $x_i\ (1 \le i \le N)$ – x_i кездейсоқ шамасынының қабылдайтын мағынасы.

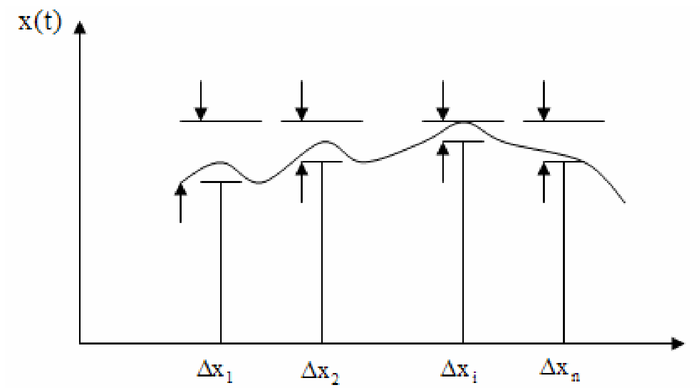
3.5.1. Кездейсоқ процестердің ықтималдық сипаттамалары

Кездейсоқ x(t) процесс 3.7-суретте көрсетілген. Кейбір берілген t_2 мезетінде әртүрлі реализациялар $x_1(t_2), x_2(t_2),..., x_n(t_2)$ әртүрлі мәндерді қабылдайды. $x_n(t_k)$ мәндері кездейсоқ шама болады $k = 1, ..., n$.

Кездейсоқ процестің толық мінездемесі n – ретті $p_n(x_1, t_1, ..., x_n, t_n)$ үлестіруінің функциясы болып саналады.

Бір ретті $p_1(x_1, t_1)$ үлестіру функциясы, $x(t_1)$ кездейсоқ шама кейбір x_1 мәнінен аса алмайтын $p_1(x_1, t_1) = p[x(t_1) \leq x_1]$ ықтималдығын анықтайды.

Ал оның жеке туындысы $\frac{\partial p_1(\xi_1, t_1)}{\partial x_1} = w_1(\varsigma_{1,} t_1)$ $- \{x_n(t)\}$ кездейсоқ процесінің ықтималдығының бір ретті тығыздығы. Уақыт бойынша t_1 $t \geq t_1$ мезетінің туындысынан алынған және уақыттың әртүрлі мезеттерінде кездейсоқ шамалардың тәуелсіздігін айқындайтын $x_{1,}$ бір кездейсоқ шаманың үлестіруін бейнелейді.



3.7-сурет. Кездейсоқ процесс

Алдыңғы мезеттің мәні мен уақыттың келесі кезекті мезетінде x(t) кездейсоқ процестің мүмкін мәндер арасындағы байланысты орнату үшін екі ретті $w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ ықтималдықтардың тығыздық ұғымы енгізіледі.

Бұл t_1 уақытының мезетінде x шамасы $(x_1, x_1 + dx_1)$ интервалында орналасу ықтималдығын анықтайды. Бұл x(t) қисығы (x_1,t_1) және (x_2,t_2) нүктелерінің маңынан өтетін ықтималдығы болады.

Енді n – ретті $w_n(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)$ ықтималдығының тығыздығы түсінігін енгізейік. Сонда $w_n(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)dx_1,...,dx_n$ деп, кездейсоқ x(t) процестің қисығы n нүктесінің жақын маңынан өтетін ықтималдығын көрсетеді. Осылайша кездейсоқ процесс $w_1, w_2,...w_n$ функциялары және олардың арасындағы байланыстармен анықталады.

Екі ретті $w_2 = w_2(x_1,x_2,t_1,t_2)$ ықтималдығының тығыздығы t_1 және t_2 еркін уақыттар мезетінде x_1 және x_2 кездейсоқ шамаларының екі мәндерінің үйлесімді реализациясының ықтималдығын анықтауға мүмкіндік береді (яғни процестің динамикасын бағалау). Сонымен, x(t) кездейсоқ процесінің ықтималдығының екі ретті тығыздығы:

$$w_1(x_1;t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_2 .$$

Кездейсоқ процестерді зерттегенде, төмен қатар ықтималдығының тығыздығын қолданғанда, көбінесе түзетілмейтін қиындыққа әкеледі. Кездейсоқ шамалардың (математикалық күтім, дисперсия) және корреляциялық функцияның [2,12] сандық мінездемелердің үйлесімділігі, кездейсоқ процестердің қарапайым мінездемелерін білсе жеткілікті.

1. Кездейсоқ x(t) процестің математикалық күтімі – кездейсоқ емес $m_x(t_i)$ уақыт функциясы, барлық мүмкін болатын реализациясының жиынтығы бойынша $x(t_i)$ кез келген t_i аргументінде кездейсоқ шаманың орташа мәніне тең:

$$m_x(t_1) = M\{x(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_1(x_1, t_1) dx_1 .$$

2. Кездейсоқ x(t) процестің дисперсиясы уақытының t_1 мезеті үшін, кездейсоқ $x(t_1)$ процесі мәнінің өзінің $m_x(t_i)$ орташа мәнінен шашу дәрежесін бейнелейді:

$$D_x(t_1) = M\{[x(t_1) - m_x(t_1)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)]^2 w_1(x_1; t_1) dx_1 ,$$

$$D_x(t_1) = \sigma_x^2(t_1),$$

мұнда $\sigma_x(t_1)$ – орташа квадраттық ауытқу.

Екі ретті t_1 және t_2 мезеттерінде кездейсоқ x(t) процесі мәнінің статистикалық тәуелділігін бағалау үшін кездейсоқ емес $R_x(t_1,t_2)$ функция қолданылады. Ол – автокорреляциялық $R_x(t_1,t_2)$ функция мен $x(t_1)$ және $x(t_2)$ процесінің корреляциялық мезетіне тең.

$$R_x(t_1, t_2) = M[\overset{0}{x}(t_1)\overset{0}{x}(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overset{0}{x}(t_2)\overset{0}{x}(t_2) w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 , \quad (3.16)$$

мұнда $\overset{0}{x}(t) = x(t) - m_x$ –ортандырылған кездейсоқ процесс.

Сонымен қатар, екі кездейсоқ x(t) және y(t) процестер арасындағы байланыс, өзара ковариациялық және өзара корреляциялық функциялармен белгіленеді. Жалпы жағдайда $t_1 = t$ және $t_2 = t + \tau$ еркін уақыт мезетіне былай жазуға болады:

$$R_{XY}(t, t + \tau) = M\{x(\tau) y(t + \tau)\} \quad (3.17)$$

$$K_{XY}(t, t + \tau) = M\{(x(t) - m_x(t))(y(t + \tau) - m_y(t + \tau))\} . \quad (3.18)$$

Өзара функциялар еркін функциялар (тақ және жұп қасиеттері жоқ) болып есептеледі де, келесі сәйкестікті қанағаттандырады:

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau), \quad (3.19)$$

$$\left|R_{xy}(\tau)\right|^2 \le R_x(0)R_y(0) \cdot$$

Бір процестен екіншісіне қатысты τ өзгерісі берілген кезде кездейсоқ процестердің арасында сызықты тәуелсіздіктің деңгейін бейнелейтін, нормаланған өзара ковариациялық функция (екі процестердің корреляциялық коэффициенті) келесі мәнімен анықталады:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_x(\tau)\sigma_y(\tau)}. \quad (3.20)$$

Кездейсоқ процестердің статистикалық тәуелсіздігі x және y екі кездейсоқ шамалар мәндерінің арасындағы байланыстың жоқ болуын анықтайды. Бұл, бір кездейсоқ шаманың ықтималдығының тығыздығы, екінші кездейсоқ шама қандай мәнді қабылдауына тәуелді емес дегенді білдіреді.

Ықтималдықтың екі ретті тығыздығы, бұл жағдайда осы екі шаманың ықтималдығының бір ретті тығыздығының көбейтіндісі

$$p(x, y) = p(x)\, p(y).$$

Бұл шарт кездейсоқ шамалардың статистикалық тәуелсіздігінің міндетті шарты болып саналады. Кері жағдайда, кездейсоқ шамалар арасында сызықты немесе сызықты емес сияқты белгілі статистикалық байланыс қолданылуы мүмкін. Сызықты статистикалық байланыс, корреляциялық коэффициент арқылы саналады:

$$r_{xy} = \frac{[M\{X \cdot Y\} - M\{X\} \cdot M\{Y\}]}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

Корреляциялық r_{xy} коэффициенттің мәні –1-ден +1-ге дейінгі аралықта өзгереді. Жеке жағдайда, егер кездейсоқ шамалар $x = ay + b$ сызықты сәйкестікпен байланысты болса, онда ***a*** константа белгісіне тәуелді корреляция коэффициенті ±1-ге тең болады. r_{xy} = 0 кезінде кездейсоқ шамалар корреляцияланбаған жағдайда, r_{xy} үшін анықтамадан төмендегідей болады

$$M\{X \cdot Y\} = M\{X\} \cdot M\{Y\}.$$

Шамалардың статистикалық тәуелсіздігінен, олардың корреляцияланбағандығын қолдану қажет. Мысалы, $x = \cos\varphi$ және $y = \sin\varphi$ кездейсоқ шамалар, мұнда φ–0…2π интервалында бірқалыпты үлестірімді кездейсоқ шама, корреляцияның нөлдік коэффициентін және олардың тәуелсіздігімен бірге қабылдайды.

3.5.2. Стационарлы кездейсоқ процестер

Кездейсоқ процестер уақыт бойынша (аргумент бойынша) олардың ағымының біртектілік деңгейі бойынша ажыратылады. Кездейсоқ процестер бірінші және екінші ретті мезеттерден де жоғарғы ретті мезеттермен байланыс. Мезеттердің реттілігі жоғарылаған сайын, кездейсоқ процестердің және олардың таңдалған реализациясының ықтималдық құрылымы ары қарай талдана бейнеленеді. Бірақ, осы мезеттерді тәжірбиелік бағалау таңдау бойынша шектелген, бұл көбінесе стационарлы кездейсоқ процестер бойынша таңдалады.

Ақпараттық жүйелерде уақыт бойынша біртекті шамамен ағып өтетін кездейсоқ процестер көп кездеседі. Олар кейбір орташа мәннің маңында үздіксіз кездейсоқ тербеліс түрінде бейнеленеді. Сонымен бірге, осы тербелістің мінездемесі де, орташа мәні де уақыт бойынша өзгерістің бар болуын қабылдамайды. Осындай процестер – стационарлы (мысалы, электрлік құрылғылардың шулауы) болады.

Кез келген динамикалық жүйеде кездейсоқ процесс «өтпелі» процестен басталып, орнатылған режимге ауысады.

Осы орнатылған режимді стационарлыға жақын деп атауға болады. Дәлме-дәл айтқанда, стационарлы кездейсоқ процестер уақыт бойынша шексіз, яғни басы да, соңы да жоқ. Дегенмен, тәжірбиеде осындай процестер қолданылмайды, бірақ жеткілікті жуықтамалы белгіленген уақыт аралағында көптеген кездейсоқ процестерді стационарлы деп атауға болады.

Стационарлы «тар» мағынада n – ретті $w_n(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n)$ ықтималдығы тығыздығының үлестірім функциясы өзгермейтін кездейсоқ процестерді айтады. Олдарда кез келген n және τ уақыт t осі бойынша $t_1,t_2,...t_n$ нүктелерінің барлық тобының кез келгені жылжығанда [12]

$$w_n(x_1,t_1;x_2,t_2;...;x_n,t_n) =$$
$$= w_n(x_1,t_1+\tau,x_2,t_2+\tau;...;x_n,t_n+\varepsilon).$$

«Тар» мағынада стационарлы анықтауда келесі қасиеттер болу керек:

1. Ықтималдықтың тығыздығының бір ретті үлестірім функциясы уақытқа тәуелді емес:

$$w_1(x_1,t_1) = w_1(x_1t_1+\tau) = w_1(x).$$

2. Ықтималдық тығыздығының екі ретті үлестірім функциясы тек қана уақыт $t_2 - t_1 = \tau$ айырмашылығына тәуелді, яғни

$$w_2(x_1t_1;x_2t_2) = w_2(x_1x_2;t_2-t_1) = w_2(x_1,x_2\tau).$$

3. Ықтималдық тығыздығының үш ретті үлестірім функциясы тек қана уақыттың екі $t_2 - t_1 = \tau_1$ және $t_3 - t_1 = \tau_2$ айырмашылықтарына тәуелді:

$$w_3(x_1,t_1,...,x_3,t_3) = w_3(x_1,x_2,x_3,\tau_1,\tau_2).$$

Математикалық күтім және дисперсияның ықтималдық тығыздығының бір ретті үлестірім функциясы арқылы өрнектелетіндіктен, бірінші қасиетіне негіздеп стационарлық кездейсоқ процесс үшін математикалық күтім мен дисперсияның уақытқа тәуелді емес екендігін растауымызға болады.

Екінші қасиет негізінде кездейсоқ процестің корреляциялық функциясы, тек қана τ уақытының айырмашылығына тәуелді, яғни

$$m_x(t_1) = m_x = const;$$

$$D_x(t_1) = D_x = const; \tag{3.21}$$

$$R_x(t, t_1 + \tau) = R_x(\tau).$$

Тәжірбиеде (3.21) шарты орындалу кезінде жоғарғы ретті мезеттер, уақытқа тәуелді кездейсоқ процестер көп кездеседі. Сондықтан стационарлы (3.21) түсінігін мақсатқа лайықты кеңейту қажет.

“Кең” мағынада стационарлы (Хинчин бойынша). “Кең” мағынада стационарлы процестің математикалық күтімі және дисперсиясы уақытқа тәуелді емес, ал корреляциялық функциясы тек қана уақыттың $\tau = t_2 - t_1$ айырмашылығына тәуелді кездейсоқ процестер болып саналады.

“Тар” мағынада стационарлы кездейсоқ процесс “кең” мағынада да стационарлы болады, бірақ керісінше айтуға болмайды.

Стационарлы процестердің стационарлы емес процестерге қарағанда өз табиғатында қарапайым және қарапайым мінездемелермен бейнеленеді.

Стационарлы процестер арасында көбісі эгродикалық шартты қанағаттандырады. Ол жеткілікті ұзақтықта алынған кездейсоқ процестің әрбір реализациясы ансамбльден тұратын, барлық реализациялардың қасиеттері туралы тәжірбиелік толық ақпарат береді.

Кездейсоқ процестердің мінездемелері белгіленген уақыт мезетінде (процестердің қимасы бойынша) реализацияның ансамблі бойынша орташаландыру жолымен бағаланады. Бірақ, стационарлы процестердің көбісі эгродикалық қасиетті қанағаттандырады. Оның мәні – процестің реализациясының жеткілікті бір ұзындығы бойынша реализацияның кез келген көлемі сияқты, процестің барлық қасиеттерін талдауға болатынында. Басқа сөзбен айтқанда, сондай процесте кездейсоқ шаманың үлестірім заңдылығы, даму координатасы сияқты реализацияның ансамблі үшін қимасы бойынша бір болуы мүмкін. Сондай процестер эргодикалық (ergodic) атауын қабылдады.

Эргодикалық процестерде мына шарттар орындалады:

$$m_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^1 x(t)dt = x_0, \quad D_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - x_0]^2\, dt,$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - x_0][x(t+\tau) - x_0]dt \cdot$$

Эргодикалық қасиет, стационарлы кездейсоқ процестің өте маңызды қасиеті болып саналады. Эргодикалық кездейсоқ процестің математикалық күтімі оның кез келген реализация-сының тұрақты құрастырушысына тең. Ал дисперсия, оның флюктуациялық құрылымының күші болады, сондай-ақ функцияның анықтамасы бір реализацияның шектелген статистикалық мәліметтері бойынша жасалып, шын мәнінде сәйкес функцияға тек қана белгіленген жуықтаумен анықталады. Осы мақсатқа лайық бұл функцияларды – *статистикалық* деп атауға болады.

Эргодикалықтың қасиеттері тек қана процестерді зерттеудің сәйкес әдістерін қолдану үшін жеткілікті кездейсоқ процестің алғашқы екі моменттеріне қатынасы бойынша көрсете алады.

Тәжірбие бойынша кездейсоқ процестің эргодикалығы төменгі шарт арқылы анықталады:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T R(\tau)d\tau = 0 \cdot$$

Егер процестің корреляциялық функциясы τ аргументінің мәні өсу кезінде нөлге ұмтылса, онда процесс ақырғы әдісте сәйкесінше, бірінші және екінші ретті мезеттердің эргодикалық мәніне қатысты болады. Бұл сәйкестік, сигналдардың корреляциялық теориясы негізінде болады.

Енді корреляциялық функцияның қасиеттерін қарастырайық.

Кездейсоқ процестің корреляциялық функциясының мынандай қасиеттері бар:

I. Аргумент τ өскен сайын $x(t)$ және $x(t+\tau)$ арасындағы тәуелсіздік бәсеңдеп және уақыт $\tau \to \infty$ олардың арасындағы байланыс аз шамада болады, яғни

$$R_x = \lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} m_1[x(t)x(t+\tau)] = m_x^2(x) = R_x(\infty)\cdot$$

Аргумент $\tau \to \infty$ энергиясы шектеулі сигналдардың автокорреляциялық функциясы (АКФ) нөлге ұмтылады, АКФ-ның физикалық мәніне тіке шығады. Бұл санақтарды тәуелсіз деп есептеуге болатын аралықта τ_{max} –уақытша корреляцияның белгіленген максимальды мәнімен АКФ-ның ұзындығын шектеуге мүмкіндік береді. Кездейсоқ шаманың уақытша корреляциясының интегралдық мінездемесі әдетте, корреляцияның оңтайлы интервалы болып саналады, ол келесі формула бойынша анықталады:

$$\tau_k = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho(\tau)| d\tau = \frac{1}{R_x(0)} \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau\cdot \qquad (3.22)$$

Инженерлік есептерде кездейсоқ функцияның (қиманың) арасы τ_k қашықтау болса, олардың арасында корреляция жоқ деп саналады.

II. Аргумент τ азайған сайын, $x(t)$ және $x(t+\tau)$ арасындағы тәуелсіздік күшейеді де, $\tau \to 0$ ұмтылғанда,

$$R_x(0) = \lim_{\tau\to 0} R_x(\tau) = \lim_{\tau\to 0} m_1[x(t), x(t+\tau)] = m_1[x^2(t)] = m_2[x(t)]\cdot$$

Осылайша $\tau = 0$ кезінде корреляциялық функция кездейсоқ x(t) процесінің бастапқы екі ретті мезетіне ұмтылады. Оның физикалық мәні: $\tau = 0$ кезінде корреляциялық функция стационарлы кездейсоқ сигналдың толық орташа қуатын бейнелейді.

Сәйкесінше, стационарлы кездейсоқ сигналдың дисперсиясы

$$D(x) = R_x(0) - R_x(\infty) \cdot$$

III. Автокорреляциялық функция жұп функция болады

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \cdot$$

Соңғысы да қатынаста $t = t - \tau$ кезінде

$$x(t)x(t+\tau) = x(t-\tau)x(t) \;.$$

Басқаша айтқанда, $x(t_1)$ және $x(t_2)$ екі кездейсоқ шамалардың мезеттері осы шамалар қарастырылатын реттілікке байланысты емес, сәйкесінше өз аргументтеріне қатысты симметриялы

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1) \cdot$$

IV. Корреляциялық функцияның максимумы $\tau = 0$ кезінде байқалады. Бұл сондай-ақ, $\tau = 0$ кезінде өз байланысы әртүрлі санақтардың байланыстарынан аз бола алмайды. Өйткені өз санақтары байланысының дәрежесі есептеледі. Корреляциялық функциясының максимумының мәні сигналдың орташа қуатына тең.

Бұл пікірдің дәлелі. Кездейсоқ процестің бірінші ретті мезеті:

$$m_1\{[x(t) + x(t+\tau)]^2\} = m_1\{x^2\} + 2m_1[x(t)x(t+\tau)] +$$
$$+ m_1[x^2(t+\tau)] = 2R_{xx}(0) + 2R_{xx}(\tau),$$

сонымен қатар, квадраттың орташа мәні теріс болуы мүмкін емес, сонда

$$2R_x(0) + 2R_x(\tau) \geq 0, \quad |R_x(\tau| \leq |R_x(0)| \cdot$$

V. Егер $x(t)$ кездейсоқ функциясына $f(t)$ кездейсоқ емес функцияны қоссақ, онда ковариациялық функция өзгермейді. Жаңа кездейсоқ функцияны $y(t) = x(t) + f(t)$ деп белгілейік. Жаңа шаманың математикалық күтімі:

$$\overline{y}(t) = \overline{x}(t) + f(t).$$

Осыдан $y(t) - \overline{y}(t) = x(t) - \overline{x}(t)$ болады және сәйкесінше

$$R_y(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2).$$

VI. Егер $x(t)$ кездейсоқ функциясын $f(t)$ кездейсоқ емес функциясына көбейтсек, онда оның $R_x(t_1, t_2)$ корреляциялық функциясы $f(t_1) \cdot f(t_2)$-ға көбейтіледі. Берілген қасиеттің негізі, үйлесімді бұдан бұрынғы пункттің әдістемесі бойынша жүргізіледі.

VII. Кездейсоқ процестің корреляциялық функциясын тұрақты С мәніне көбейткен жағдайда, АКФ мәні C^2-қа көбейтіледі.

3.3-мысал. Стационарлы кездейсоқ сигналдың типті корреляциялық функциясының (КРФ) мысалын келтірейік (3.8-сурет).

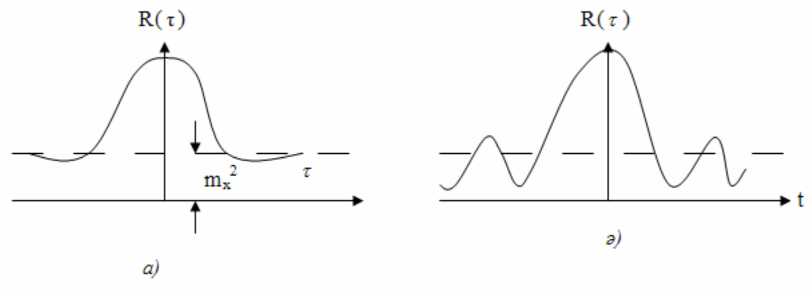
1. Монотонды корреляциялық функция $R(\tau)$ (3.8*а*-сурет);
2. Монотонды емес корреляциялық функция (3.8 *ә*-сурет);

Тәжірбиеде стационарлы кездейсоқ x(t) сигналдың орнына, оның математикалық күтімінен ауытқуы қарастырылады, яғни орталандырылған стационарлы кездейсоқ сигнал (процестің флуктациясы):

$$x_0(t) = x(t) - m_x(x).$$

Стационарлы кездейсоқ сигналдың флуктациясының корреляциялық функциясы:

$$R_x^0(\tau) = m_1[x_0(t)x_0(t+\tau)] = m_1\{[x(t) - a(x)] \times \\ \times [x(t+\tau) - a(x)]\} = R_x(\tau) - a^2(x) \, . \qquad (3.23)$$



3.8-сурет. Типтік корреляциялық функциялар

Ортандырылған стационарлы кездейсоқ сигналдың математикалық күтімі нөлге тең, ал дисперсиясы

$$D_0(x) = R_x^0(0) \cdot$$

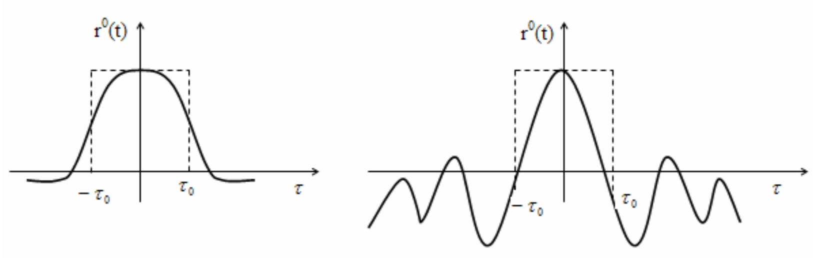
Ортандырылған стационарлы кездейсоқ сигналдың корреляциялық функциясының, оның дисперсиясына қатынасы – стационарлы процестің флукуациясының КРФ (корреляция коэффициенті) нормаланған корреляциялық функциясы деп аталады

$$r_x^0(\tau) = \frac{R^0{}_x(\tau)}{D_0(x)}$$

3.4-мысал. 3.9-суретте кездейсоқ сигналдардың типтік нормаланған корреляциялық функциялары келтірілген.

Таза стационарлы кездейсоқ процес үшін әрдайым $x(t)$ шамасының $\tau > \tau_0$ мәні кезінде $\tau = \tau_0$ корреляция уақытының мәнін көрсетуге болады және $x(t+\tau)$ -ны тәуелсіз деп есептеуге болады. Сонымен қатар, тәжірбие бойынша $\tau > \tau_0, |r_x^0(\tau)| < \sigma = 0.05$ кезінде сигналда тәуелсіз деп санайды.

τ_0 интервалы стационарлы процестің корреляция уақыты деп аталады.



3.9-сурет. Типтік нормаланған корреляциялық функциялар

Корреляция уақыты нормаланған корреляциялық функциясының графигі бойынша, ауданға тең бірлік биктігінің тік төртбұрышты импульсі негіздеуінің жарты ені сияқты анықталады:

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} r_x^0(\tau)d\tau = \frac{1}{R_{xx}^0(0)}\int_0^{\infty} R^0{}_x(\tau)d\tau \cdot$$

Стационарлы кездейсоқ процестер физикалық және техникалық есептерді шығарғанда, ең жиі кездеседі. Стационарлы кездейсоқ функциясының теориясы ерекше, толық өңделген. Бізді қызықтырған шектелген интервалдарда стационарлылықтың шарттарын қанағаттандыратын кездейсоқ процестер де, жалпы стационарлық класта қарастырылады да, ол *квазистационарлы* деп атайды.

Жалпы жағдайда дисперсияның, корреляцияның және математикалық күтімнің мәндері t уақыты мезетіне қатысты болуы мүмкін, яғни уақыт бойынша өзгереді. Осындай процестер стационарлы емес процестердің класын құрады.

3.5-мысал. Кездейсоқ функция $z(t) = x(t) + y$ өрнегімен берілген, $y -$ $x(t)$ - пен корреляцияланбаған кездейсоқ шама. $x(t)$ – стационарлы эргодикалық функция. $z(t)$ функциясы эргодикалық функция ма?

Шешімі.

z(t) функциясы стационарлы, бірақ эргодикалық емес, сондай ақ $\tau \to \infty$ кезінде былай болады

$$R_z(\tau) \to D_y \cdot$$

3.5.3. Стационарлы кездейсоқ процестің спектральдық тығыздығы

Детерминделген сигналдардарды зерттеуге гармоникалық талдау қолайлы болып шықты. Осыған байланысты кездейсоқ процеске де Фурье түрлендіруін қолдану қажет. Бірақ, кездейсоқ процеске гармоникалық талдауды тікелей қолдануға болмайды, өйткені:

1. Кездейсоқ процестің $x_k(t)$ реализациясы абсолюттік интегралдану шартын қанағаттандырмайды

$$\int_{\infty}^{\infty} | x_k(t) | \, dt < \infty .$$

2. Кездейсоқ $x(t)$ процестің жиіліктік спектрі де кездейсоқ функция болады.

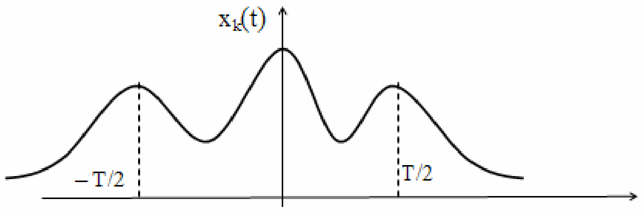
Кездейсоқ $x(t)$ процесін гармоникалық талдау тәсілімен зерттеу үшін, оның жеке реализациясынын [2] спектрлік ыдыратуын орташаландыру керек.

Гармоникалық талдау тәсілімен зерттеу үшін келесі функцияны қарастырамыз (3.10-сурет).

$$x_k{}'(t) = \begin{cases} x_k(t), \text{при } \ t \le |\dfrac{T}{2}|, \\ 0, \qquad \text{при } \ t > |\dfrac{T}{2}|. \end{cases} \tag{3.24}$$

Осы функция үшін тура Фурье түрлендіруін қолданамыз:

$$S_k(j\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_k(t)e^{-j\omega t}dt$$



3.10-сурет. Анықталатын функция (3.24)

және сигналдың орташа қуаты

$$P_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x_k(t)]^2 dt$$

Басқаша жағынан алғанда сигналдың орташа қуаты жиіліктік спектрі арқылы былай анықталады:

$$P_T = \int_0^{\infty} \frac{|S_k(j\omega)|^2}{\pi T} d\omega \cdot$$

мұнда $S_k(\omega) = \dfrac{|S_k(j\omega)|^2}{\pi T}$ – спектрлік функция (қуаттың спектральдық тығыздығы) немесе жиілік спектр бойынша реализация қуатының үлестіруін бейнелейді.

Реализациялар жиынтығының спектральдық тығыздығын мүмкін болатын $S_k(\omega)$ мәндерінің ансамблін орташаландыру операциясы арқылы былай есептейміз:

$$m_1[S_k(\omega] = \frac{1}{\pi T} m_1\{|S_k(j\omega)|^2] = \frac{1}{\pi T} m_1\{S_k(j\omega)S_k(-j\omega)\} =$$

$$= \frac{1}{\pi T} m_1 \{ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_n(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_k(t_1) e^{-j\omega t_2} dt_2 \} =$$

$$= \frac{1}{\pi T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} m_{\cdot} \{ x_n(t_1) x_n(t_2) \} \exp(-j\omega(t_1 - t_2)) dt_1 dt_2 \cdot$$

Сондай-ақ, стационарлы кездейсоқ сигналдың корреляциялық $R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau)$ функциясы тек қана бір аргументтің функциясы болып саналады, сонда

$$m_1[G_k(\omega)] = \frac{1}{\pi T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt_2 \cdot$$

Енді периодымыз $T \to \infty$ шектікке ұмтылғанда,

$$G(\omega) = \lim_{T \to \infty} G_k(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos\omega\tau d\tau \cdot \qquad (3.25)$$

Кездейсоқ процестің спектральдық $G(\omega)$ тығыздығы, олардың реализациясының жиынтығының орташаландырған мінездемесі болып саналады және (3.25) корреляциялық функциясының тура Фурье түрлендіруімен анықталады. Басқаша, Фурье түрлендіруін кері түрлендіру арқылы корреляциялық функцияны анықтауға болады

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} G(\omega) \cos\omega\tau d\omega \cdot \qquad (3.26)$$

Табылған (3.25) және (3.26) формулары – Хинчин-Винер түрлендіруі деп аталады. Жиіліктік ω орнына қарапайым f жиілікті қойсақ, келесі теңдеуге келеміз:

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} G(\omega) \cos 2\pi f\tau df \,;$$

$$G(f) = 4\int_0^{\infty} R(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau \cdot$$

Стационарлы кездейсоқ процесс эгродикалық гипотезаға сәйкес болғанда, жиынтық бойынша орташаландыруды уақыт бойынша орташаландыруға ауыстыруға болады, сонда

$$G(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|S_k(j\omega)\right|^2}{\pi T} \cdot \qquad (3.27)$$

Осылайша стационарлы кездейсоқ сигналдың спектрін екі әдіс арқылы анықтауға болады [3,12]:

а) x(t) бір реализацияның тікелей бақылауымен және (3.27) шектігі арқылы табылуымен;

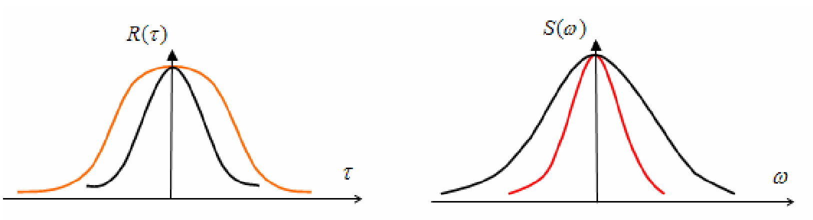
ә) корреляциялық (3.25) функциядан Фурье түрлендіруі бойынша табылуымен.

Спектрлік $G(\omega)$ функциясы ақпарат теориясында үлкен рөль атқарады. Оның физикалық мәнін түсіну үшін корреляциялық функцияда τ нөлге теңдейміз:

$$R(0) = \int_0^{\infty} G(\omega)d\omega \cdot$$

Мұндағы $R(0)$ – сигналдың қуаты, сонда $G(\omega)$ жиіліктік спектр бойынша сигналдың қуатын үлестіру, орташаланған энергетикалық суретін бейнелейді.

Фурье түрлендіруі бойынша $R(\tau)$ α рет созылуы кезінде оның жиіліктік $G(\omega)$ спектрі сонша рет тарылады (3.11-сурет).

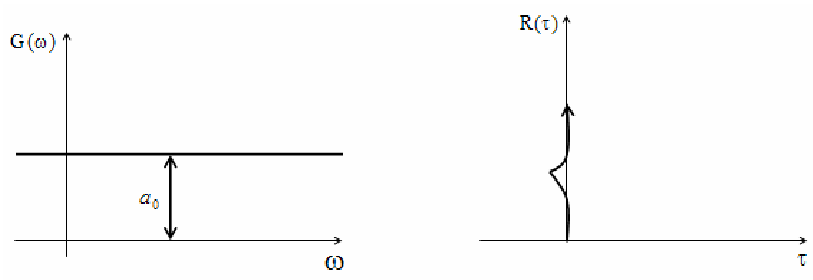


3.11-сурет. Кореляциялық функция және оның спектрі

Осы қасиетке байланысты $G(\omega) = a_0 = const$ кезінде шектелген және ерекше қызық жағдайды қарастырамыз. Яғни, қуаттың спектральдық тығыздығы ақ шу деп аталатын барлық жиіліктерде біркелкі болғанда (3.12-сурет), сол сигналдың корреляциялық функциясы былай анықталады:

$$R(\tau) = \int_0^\infty S_0 \cos\omega\tau d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \pi a_0\delta(\tau), \qquad (3.28)$$

интеграл $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(j\omega\tau)d\omega$ $\delta(\tau)$ функциясынан кері Фурье түрлендіруі.



3.12-сурет. Ақ шудың кореляциялық функциясы мен спектрі

Сондықтан, ақ шудың корреляциялық функциясы дельта – функция арқылы өрнектеледі:

$$R(\tau) = \begin{cases} \infty, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases}$$

Бұл сигналдың мінездемелік қасиеті, кездейсоқ $x(t)$ процестің мәні кез келген жуық уақыт мезетінде корреляциясы жоқ. [16]. Мұндай процес – абсолютті таза процесс.

«Ақ шу» түсінігі кездейсоқ процестің спектрлік қасиетіне негізделген және ықтималдық тығыздығының үлестерімен байланысты емес. «Ақ шу» – табиғатта ешқашан кездеспейтін дәріптеушілік. Өйткені, мұндағы кездейсоқ процестің жеткілікті жуық мәндерінің тәжірбиелік корреляциялары бар және де нақты процестердің қуаты шектеулі. Дәріптеушілік өте маңызды және математикалық талдауды айтарлықтай жеңілдетеді де, айтарлықтай үлкен кемшіліктерге әкелмейді.

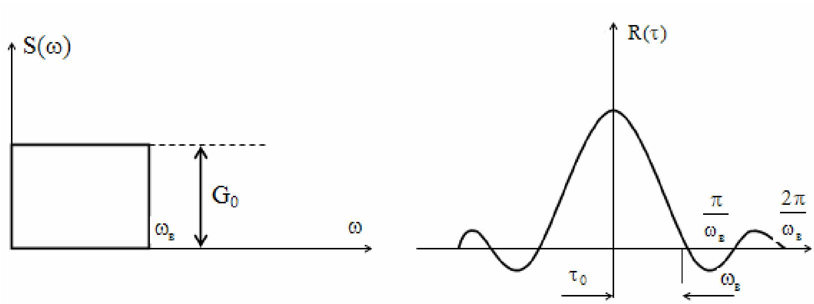
Нақты процестердің спектрлері тәжірбиелі нақты жүйені өткізудің шектелген аралығы болғандықтан, $\Omega_э = \omega_b - \omega_a$ аралықпен шектелген.

3.13-суретте нақты сигналдың спектральдық және корреляциялық функциясы көрсетілген.

3.13-суретте келтірілген нақты сигналдың спектрі корреляциялық функциясы арқылы келесі формуламен анықталады:

$$R(\tau) = \int_0^\infty G_0 \cos\omega\tau d\omega = G_0\omega_0 \frac{\sin\omega_в\tau}{\omega_в\tau} = P_0 \frac{\sin\omega_в\tau}{\omega_в\tau},$$

мұнда $P_0 = G_0\omega_в -$ кездейсоқ сигналдың орташа қуаты.



3.13-сурет. Нақты сигналдың спектрлері

Мұндай процесте, корреляциялық τ_0 уақытының мағынасы шектеулі. Мысалы, ол корреляциялық $R(\tau)$ функция бірінші рет нөлге тең болған және $\tau = 0$ арасындағы интервал, яғни $\tau_0 = \dfrac{\pi}{\omega_в}$ (3.13-сурет). Осылайша спектрдің шектігі, корреляцияның пайда болуына апарады, оның үстіне $\Omega_э$ жиілігі аралығының қысқаруы, сигналдың корреляцияның τ_0 интервалын ұлғайтады.

3.5.4. Кездейсоқ процестің спектрінің оңтайлы ені

Тәжірбиеде бірқалыпты емес спектрлі сигналдар жиі қолданылады (3.14-сурет).

Бірқалыпты емес спектрлі кездейсоқ процесті талдағанда спектрдің оңтайлы ені немесе эквивалентті спектрдің ені түсінігін қолданылады [9]

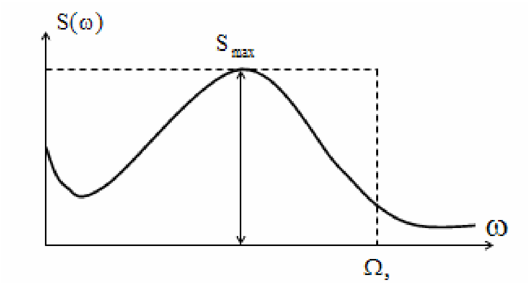
$$\Omega_э = \frac{\int_0^{\infty} S(\omega)d\omega}{S_{max}}. \qquad (3.29)$$

Осы сигналдың орташа қуаты:

$$\int_0^{\infty} S(\omega)d\omega = R(0) = S(0)\Omega_э. \qquad (3.30)$$

Бұл сигналдың корреляциялық интервалы:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$



3.14-сурет. Бірқалыпты емес сигналдың спектрі

ескере отырып, келесі өрнекпен анықталады:

$$\tau_0 = \frac{\int_0^{\tau} |R(\tau)| d\tau}{R(0)} = \frac{\pi S(0)}{2R(0)} = \frac{\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau}{R(0)}. \qquad (3.31)$$

Корреляциялық τ_0 интервал (3.31) формуладан былай саналады:

$$\tau_0 = \frac{\int_0^{\tau} |R(\tau)| d\tau}{R(0)} = \frac{\int_0^{\tau} |R(\tau)| d\tau}{\Omega_э S(0)} = \frac{\pi\int_0^{\tau} |R(\tau)| d\tau}{2\cdot\Omega_э \int_0^{\tau} R(\tau)d\tau)} = \frac{\pi}{2\cdot\Omega_э} = \frac{1}{4\cdot F_э} \qquad (3.32)$$

Бақылау сұрақтары.

1. Детерминделген сигналдардың түсінігін беріңіз?
2. Детерминделген сигналдардың математикалық ұсыныстарының түрлерін келтіріңіз.
3. Неліктен детерминделген сигналдардың модельдерін зерттеу керек?
4. Уақыт бойынша берілген сигналды сипаттаңыз.
5. Сигналдардың спектрлік ұсынысының мәні неде?
6. Сигналдардың жиілік ұсынысының артықшылығын атаңыз.
8. Амплитудалық және фазалық спектрлерді анықтаңыз.
9. Периодты және периодты емес сигналдардың спектрлерінің айырмашылығы неде?
10. Спектрдің тәжірибелік енінің түсінігін беріңіз.
11. Сигналдың ұзақтығы мен оның спектрі енінің аралығында қандай тәуелділік бар?
12. Кездейсоқ процестің анықтамасын беріңіз.
13. n – өлшемді ықтималдық функция мен оның тығыздығының мағынасын түсіндіріңіз.
14. Кездейсоқ сигналдың сандық сипаттамаларын келтіріңіз.
15. Кездейсоқ сигналдың корреляциялық функциясының мағынасын түсіндіріңіз.
16. Стационарлы кездейсоқ сигналдың анықтамасын беріңіз.

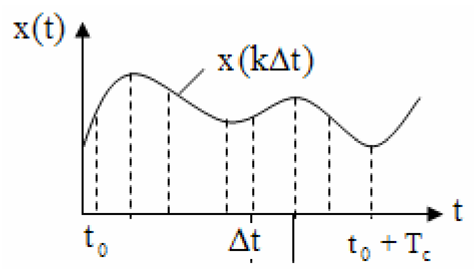
17. Стационарлы кездейсоқ сигналдың корреляциялық функциясы мен спектральдық тығыздығының өзара байланысын көрсетіңіз.
18. Кездейсоқ процесс спектрінің оңтайлы ені қалай анықталады?
19. Стационарлы кездейсоқ сигналдың спектральдық тығыздығының негізгі қасиеттерін түсіндіріңіз.

4. АҚПАРАТТЫ КВАНТТАУ

Ақпаратты тасымалдағанда, сақтағанда және өңдегенде сигналдардың аналогты сипатынан, цифрлық сипатына өтудің айтарлықтай артықшылығы бар (деңгей және уақыт бойынша кванттау).

4.1. Ақпаратты дискреттеу есебінің жалпы қойылымы

Уақыт бойынша дискреттеу – үздіксіз хабарламаны, оның уақыттың дискретті мезетінде алынған мәнінің (санақтарының) тізбегімен ауыстырылуы болып саналады (4.1-сурет). Мұндай ауыстыруда Δt дискреттеу интервалының ішінде барлық үздіксіз функцияның мәндерінің жиынтығы жоғалып кетеді. Осылай құрылған функция, уақыттың дискретті мезетінде санақтардың тізбегімен анықталады [9,11].



4.1-сурет. Уақыт бойынша хабарламаны дискреттеу

Уақыт бойынша дискреттеу, бірқалыпты және адаптивті (бірқалыпты емес) болып бөлінеді. Егер дискреттеу Δt интервалының мағынасы тұрақты (өзгермесе) болса, онда – *бірқалыпты дискреттеу*. Дискреттеу Δt интервалының мағынасы өзгеріп тұрса, онда – *адаптивті* (бірқалыпты емес). Дискреттеу Δt интервалының мағынасы, мысалы хабарламаның уақыт бойынша жылдамдығының өзгеруімен, еріксіз байланысты болуы мүмкін.

Адаптивті дискреттеудің теориялық зерттеуі және тәжірибелік іске асыруы көп қиындықтар туғызады. Мысалы, дискреттеу құрылғыларын айтарлықтай іске асыру қиынға түседі, өйткені дискреттелетін хабарлар туралы кең көлемді априорлық мәліметтер керек болады.

Бірқалыпты дискреттеу кең таралған. Бұл дискреттеудің теориясы мен техникасы жеткілікті іске асырылған.

Уақыт бойынша үздіксіз функцияларды дискреттеудің математикалық бейнелеуінің негізінде $a_д(t)$ импульстік дискреттеу функциясы бар. Ол периоды Δt δ – функциясының тізбегі

$$a_д(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)\cdot \qquad (4.1)$$

Фурье түрлендіруін қолдана отырып, импульстік дискреттеу функциясының спектрін табамыз:

$$A_д(f) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{\Delta t})\cdot \qquad (4.2)$$

Теңдеу (4.2) импульстік дискреттеу функциясының спектрі периодты δ – функциялардың тізбегі (периоды $\Delta f = \frac{1}{\Delta t}$) екенін көрсетеді.

δ – функцияның бірінші қасиетіне сай,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_0)d\xi = 1,$$

(4.1) теңдігіндегі әр құрушының ауданы бірге тең, ал (4.2) теңдігі $\frac{1}{\Delta t}$-ға ұмтылады. Ауданның бұл мәндері δ– функциялардың “салмақтарын” анықтайды.

Математикалық көзқарас бойынша үздіксіз $x(t)$ функциясын дискреттеу, үздіксіз $x(t)$ функциямен импульстік дискреттеу $a_д(t)$ функцияның көбейтіндісі:

$$x_д = x(t)a_д(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - k\Delta t) \cdot \qquad (4.3)$$

Енді δ – функцияның фильтрлік қасиетінің

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)\delta(\xi - \xi_0)d\xi = x(\xi_0)$$

көмегімен келесі қатынасқа келеміз:

$$x(t)\delta(t - k\Delta t) = x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t) \cdot \qquad (4.4)$$

Бұл (4.4) теңдігі функция $x(t)$ -ны бірлік δ – импульске көбейту, импульстің $t = k\Delta t$ уақыт мезетіндегі мәні – бірдің орнына $x(t)$ -ның мәніне тең болғанын көрсетеді. Әдетте, бұл ауданды δ – импульсінің салмақты коэффициенті дейді. Басқаша айтқанда, $x(t)$ -ны бірлік δ – импульске көбейту $t = k\Delta t$ уақыт мезетінде, үздіксіз $x(t)$ функциясының санағын алумен сәйкес келеді. Ары қарай (4.4) теңдігін ескере отырып, (4.3) қатынасын келесі түрде бейнелейміз:

$$x_д = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t) \cdot \qquad (4.5)$$

Осылайша, $x(t)$-ны $a_д(t)$ импульстік дискреттеу функциясына көбейту, периодтық δ – импульстері тізбегінің түрленуіне әкеледі. Бұл импульстердің салмақтары $t = k\Delta t$ мезеттерінде хабардың шұғыл мәнідеріне тең.

Тәжірбие жүзінде импульстік дискреттеу $a_д(t)$ функциясын δ – импульстер түрінде жүзеге асыру мүмкін емес. Үздіксіз хабарлардың техникалық дискреттеуі, қысқа импульстердің периодтық тізбегімен басқарылатын кілтті құрылғылармен орындалады. Бұл жағдайда, санақтардың ұзақтығы шектеулі. Себебі, санақ бір нүктеде емес δ импульсінің ұзақтығына тең уақыт интервалында алынады. Егер τ ұзақтығын $\frac{\tau}{\Delta t} << 1$ орындалатындай етіп алынса, амплитудалары хабардың шұғыл мәндеріне пропорционалды қысқа импульстердің тізбегі құрылады.

Тәжірибеде уақыт бойынша дискреттеуді іске асырғанда, көбінесе мұны үздіксіз хабардың импульстік түрленуі деп атайды (амплитудалық – импульстік модуляция АИМ) [7].

Уақыт бойынша дискреттеу есептерін шешкенде келесі сұрақтар туады:

1. Дискреттеу Δt интервалын таңдағанда қандай ой-пікір қажет?

2. Үздіксіз хабарламаның, оның дискреттеу уақыт мезеттерінде алынған санақтарының тізбегімен ауыстыру дәлдігі қалай және қандай факторларға байланысты?

3. Үздіксіз хабарламаларды қалпына келтіру, принципиальды мүмкін болатын Δt-ның максимальды интервалының мағынасы қандай?

Бұл есептерді тек дискреттеу проблемасын оған кері проблемамен – уақыттың дискретті мезетінде ғана белгілі шұғыл мәні мен үздіксіз функциясының қайта қалпына келуіне байланыста қарастырғанда шешуге болады. Бұл мәселенің қиындығы, дискреттелген кезінде Δt – интервалдарының ішіндегі үздіксіз функциялар туралы жоғалған мәліметтерді қалпына келтіру болып саналады.

Белгілі, ұзақтығы Т хабарламаны дискреттеу – санақтары аз санымен ауыстырылғанда Δt интервалының ұзақтығы созылады. Сондықтан, бастапқы үздіксіз функцияларының қайта қалпына келтірілуі қиынға түседі. Ал керісінше, санақтардың саны көбейгенде Δt қысқарады, бастапқы үздіксіз функцияларды қайта қалпына келтіру жеңілдейді.

Осылай, қарастырылып отырған дискреттеу проблемасының бір мағыналы шешімі жоқ. Үздіксіз хабарламаның анағұрлым үнемдірек импульстік түрлендіруін орындау, қайта қалпына келтірудің қиындауына алып келсе, ал үнемді емес импульстік түрлендіру – қайта қалпына келтіру процедурасының жеңілдеуіне алып келеді.

4.2. Үздіксіз хабарламаларды шектеулі дискреттеу

Үздіксіз хабарламаларды дискреттеу теориясында берілген дәлдікпен, санақтары бойынша үзілісіз функциялардың қайта қалпына келтірілуі мүмкін, максимальды (шектеулі) дискреттеу $\Delta t = \max \Delta t$ интервалы туралы сұрақ аса маңызды. Бұл жағдайда санақтардың қажетті саны, минимальды болады

$$N = \min N = [\frac{T}{\max \Delta t}] \cdot$$

Жоғарыда келтірілген шартқа сай, дискреттеуді (жоғарғы берілген қатынастың бүтін бөлігі алынады) шектеулі (оптимальды) деп аталады. Сонымен қатар, берілген дәлдікпен дискретті санақтардың минимальды санымен, үздіксіз хабарламаның көрінісі қамтамасыз етіледі.

Сигналдарды дискреттеу мәселесі өте күрделі зерттеулер санынының көптігіне қарамастан, оның мәселелерінің түгел шешілуі мүмкін емес.

Қазіргі кезде үздіксіз хабарламаларды шектеулі дискреттеуде В.А. Котельниковтың теоремасы кең қолданылады [2,9].

Бұл теореманың бастапқы қалпына тоқтайық. Дискреттеу теориясын құру үшін хабарламаның кейбір моделіне сүйену қажет. Айталық, мүмкін үздіксіз хабарлардың жиынтығына сәйкес келетін $\{x(t)\}$ квазистационарлы кездейсоқ процестің $x(t)$ -ның бір реализациясы көрсетілген делік.

Бұл реализация қаншалықты қиын болғанымен, уақыттың кейбір кездейсоқ емес (детерминделген) функциясын көрсетеді. Солай болғандықтан, оның кешенді спектрі Фурье түрлендіруі бойынша [18]:

$$G_x(j\omega) = \int_0^{T_c} x(t) e^{-j\omega t} dt \cdot \qquad (4.6)$$

Кедергілердің мүмкін деңгейлеріне талап етілетін дәлдікке сүйене отырып, бұл спектрді $\omega_c = 2\pi F_c$ жиілікпен шектейміз, яғни шектеулі амплитудалық спектрлі хабарламаның моделін енгіземіз. Бұл модельдің ерекшеліктері:

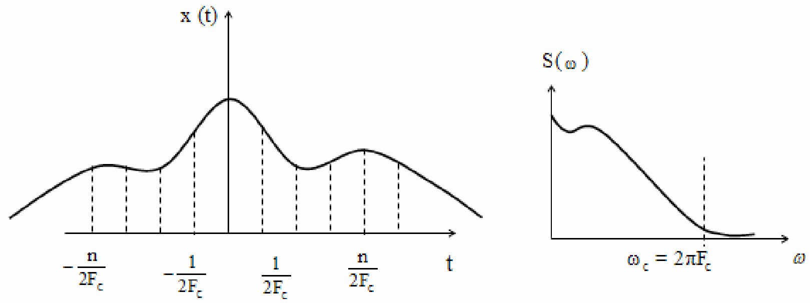
– кездейсоқ процестің бір реализациясына қатысты болғандықтан, детерминделген функцияға сәйкес келеді;

– спектрі шектеулі.

Мұндай модельге келесі теорема сай. Егер үздіксіз уақыт x(t) функциясының нөлден F_c-ға дейінгі жиілік жолағымен шектелген спектрі болса, онда бұл функция толығымен $\Delta t = \frac{1}{2F_c}$ интервалдарымен алынған өзінің шұғыл мәндерінің тізбегімен анықталады (В.А. Котельников теоремасы).

В.А. Котельников теоремасының дәлелдемесі. Үздіксіз x(t) функция $-\infty < t < \infty$ интервалында берілген және $\omega_c = 2\pi F_c$ жиіліктен жоғары құраушылары болмайтын, өзінің бір-бірінен $\Delta t = \frac{1}{2F_c}$ қашықтықта орналасқан $x(\frac{n}{2F_c})(n = 1,2\ldots)$ мәндерімен толық анықталатынын көрсетеміз.

4.2-суретте дискреттелетін сигнал мен оның спектрі келтірілген.



4.2-сурет. Дискреттелетін сигнал және оның спектрі

Теореманың шарты бойынша жиіліктер $|\omega| > 2\pi F_c$ болғанда, спектр $S(j\omega)$=0. Бұл $S(j\omega)$ спектрін $(-2\pi F_c\ 2\pi F_c)$ интервалында $4\pi F_c$ периодымен Фурье қатарына жіктейміз:

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi\frac{\omega}{2\omega_c}} \tag{4.6}$$

немесе

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega\frac{n}{2F_c}}, \tag{4.7}$$

мұнда

$$C_n = \frac{1}{4\pi F_c} \int_{-2\pi F_c}^{2\pi F_c} S(j\omega) e^{-j\omega\frac{n}{2F_c}} d\omega \cdot \tag{4.8}$$

Келесі жағынан, Фурьенің кері түрлендіруі бойынша:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \tag{4.9}$$

және $|\omega| > 2\pi F_c$ жиіліктегі $S(j\omega) = 0$ қатынасын ескере отырып,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi F_c}^{2\pi F_c} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \cdot \tag{4.10}$$

Енді $t = \frac{n}{2F_c}$ дискреттi мезеттерде $x(t)$ сигналды анықтаймыз, мұнда $n = -\infty, 0, .., \infty$.

Ол үшін (4.10) өрнегіне уақыттың орнына $t = \frac{n}{2F_c}$ қоямыз:

$$x(\frac{n}{2F_c}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi F_c}^{2\pi F_c} S(j\omega)e^{j\omega\frac{n}{2F_c}}d\omega \cdot \qquad (4.11)$$

(4.11) және (4.8) өрнектерін салыстару нәтижесінде (4.7) қатынасындағы $S(j\omega)$ жіктелуінің C_n коэффициенттері $t = \frac{n}{2F_c}$ дискретті уақыт мезеттерінде үздіксіз x(t) сигналдардың санақтарына пропорционал екендігі шығады, яғни:

$$C_n = \frac{1}{2F_c}x(-\frac{n}{2F_c}) \cdot \qquad (4.12)$$

Сондықтан, (4.12) өрнегі В.А. Котельниковтың теоремасын дәлелдейді.

Шынында да, егер $\frac{n}{2F_c}...,\quad n = -\infty, 0,.., \infty$ санақ нүктелерінде x(t) уақыт функциясы белгілі болса, C_n коэффициенттері анықталады.

Бұл, коэффициенттер $S(j\omega)$ спектрін анықтайды, ал $S(j\omega)$ спектрі Фурьенің кері түрлендіруі бойынша – x(t) негізгі үздіксіз сигналды. Бұл жиілігі $\omega_c = 2\pi F_c$ аспайтын және бір-бірінен $\Delta t = \frac{1}{2F_c}$ интервалға қалып отыратын берілген санақ нүктесін шұғыл мәндерінен өтетін бір ғана функцияның бар екендігін білдіреді.

Сигнал x(t) және оның спектрі $S(j\omega)$ арасындағы байланысты (4.7) өрнегіне (4.12) -ны қою арқылы анықтаймыз:

$$S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2F_c}x(-\frac{n}{2F_c})e^{j\omega\frac{n}{2F_c}} = \frac{1}{2F_c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(\frac{n}{2F_c})e^{-j\omega\frac{n}{2F_c}}. \qquad (4.13)$$

Осылай $x(t)$ сигналы мен оның $S(j\omega)$ спектрі арасында бір мағыналы байланыс бар, бірақ $x(t)$ спектр $S(j\omega)$ секілді бір мағыналы түрде $\{x(\frac{n}{2F})\}$ дискретті мәндермен анықталады. Осылай В.А.Котельниковтың теоремасын дәлелдеу әдісі төмендегі кезеңдерден тұрады:

1. Спектрлік $S(j\omega)$ функциясы C_n (4.8) коэффициентімен Фурье қатарымен көрсетіледі.

2. Фурьенің кері түрлендіруі бойынша $t = \frac{n}{2F_c}$ (4.11) нүктелеріндегі $x(\frac{n}{2F})$ уақыт функциясы анықталады.

3. (4.8) және (4.11) салыстыра келе, Фурье қатарының коэффициенті C_n мен $x(-\frac{n}{2F})$ санақтарының байланысы орнатылады. Бұл – теореманы толық дәлелдейді.

4.3. Үздіксіз сигналды қайта қалпына келтіру әдістері

Санақтар $x(\frac{n}{2F_c})$ арқылы $x(t)$ функцияны қалпына келтіру үшін спектрінің өрнегін (4.13) Фурьенің (4.10) кері түрлендіруіне қоямыз:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi F_c}^{2\pi F_c} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi F_c}\int_{-2\pi F_c}^{2\pi F_c}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\frac{n}{2F_c})e^{-j\omega\frac{n}{2F_c}+j\omega t}d\omega \cdot \qquad (4.14)$$

Ең ақырында оны былай жазамыз [17]:

$$x(t)=\frac{1}{4\pi F_c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(\frac{n}{2F_c})\int_{-2\pi F_c}^{2\pi F_c}e^{-j\omega(\frac{n}{2}-t)}d\omega=$$

$$=\frac{1}{4\pi F_c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(\frac{n}{2F_c})\frac{-1}{j(\frac{n}{2F_c}-t)}\left[e^{-j2\pi F_c(\frac{n}{2F_c}-t)}-e^{j2\pi F_c(\frac{n}{2F_c}-t)}\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi F_c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(\frac{n}{2F_c})\frac{1}{2j(2\pi F_c t-\pi n)}\cdot\left[e^{j(2\pi F_c t-\pi n)}-e^{-j(2\pi t-\pi n)}\right].$$

Эйлер формуласын $\frac{e^{j(2\pi F_c t-\pi n)}-e^{-j(2\pi F_c t-\pi n)}}{2j}=\sin(2\pi F_c t-\pi n)$ ескере отырып, $x(t)$ сигналын санақтары арқылы анықтаймыз:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(\frac{n}{2F_c})\frac{\sin(2\pi F_c t-\pi n)}{2\pi F_c t-\pi n}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\Delta t)\frac{\sin 2\pi F_c(t-n\Delta t)}{2\pi F_c(t-n\Delta t)}. \qquad (4.15)$$

Жоғарғы (4.15) теңдеуді В.А. Котельниковтың қатары деп аталады.

Солай, x(t) функциясының $\frac{\sin z}{z}$ түріндегі координатты функция бойынша қатарға жіктелуі алынған. Ал жіктеу коэффициенттері бір-бірінен $\frac{1}{2F_ñ}$ қашықтыққа қалып қоятын x(t) функциясының өзінің мәндері болып саналады. Осылай, қисынға келтірілген теорема дәлелденіп қана қоймай, сонымен қоса, x(t)-ның құрылу әдісі көрсетілген, егер оның санақтарлары белгілі болса.

Үздіксіз $x(t)$ функциясын (4.15) қатарға жіктеу өте маңызды, әрі ақпарат теориясында басқа да аумақтарда оның Фурье жіктелуінен маңыздылығы кем емес

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \varphi_k(t) \cdot$$

Көбейткіш $\dfrac{\sin 2\pi F_c (t - n\Delta t)}{2\pi F_c (t - n\Delta t)}$ санақ функциясы деп аталады.

Санақ функциясының негізгі қасиеттерін қарастырайық:

1. Уақыт $t = n\Delta t$ мезетінде оның мәні максимальды (ол 1-ге тең).

2. Уақыт Δt ($t = (k \pm l)\Delta t$ мезетінде (мұндағы 1– кез келген бүтін сан) санақ функциялары нөлге тең.

3. Санақ функциясының амплитудасы алымының (синус функциясының амплитудасының) мәні, шектілігі және бөлімінің мәнінің тез өсу күшіне орай тез өшпелі.

4. Санақ функциялары $[-\infty, \infty]$ интервалында ортогональды.

Санақ функциясының ортогональды қасиетін көрсетейік. Ол үшін бір-бірінен шамалары Δt ретті айрықшаланатын санақ функцияларын қарастырамыз.

Бұл тізбектіліктен екі санақ функциясын таңдаймыз:

$$\frac{\sin \omega_c (t \quad n\Delta t)}{\omega_c (t \quad n\Delta t)} \text{ және } \frac{\sin \omega_c (t \quad m\Delta t)}{\omega_c (t \quad m\Delta t)}.$$

Бұл функциялардың көбейткішінен интеграл алсақ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c (t - n\Delta t)}{\omega_c (t - n\Delta t)} \cdot \frac{\sin \omega_c (t - m\Delta t)}{\omega_c (t - m\Delta t)} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2F_c} = \dfrac{\pi}{\omega_c}, & \text{егер } m = n, \\ 0 & \text{, егер } m \neq n. \end{cases}$$

Яғни, біз қарастырып отырған санақ функциялары – ортогональды.

Ортонормалдаған қатар қалыпқа келтіретін көбейткішті енгізу қажет. Онда санақ функциясының ортогональды тізбегі

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{\omega_c}{\pi}} \frac{\sin \omega_c (t - n\Delta t)}{\omega_c (t - n\Delta t)}.$$

В.А. Котельниковтың теоремасы сигнал спектрінің $\omega_ń$ жиілігіне қатысты симметриялық болмаған кезде де дұрыс. Бұл жағдайда уақыт интервалы

$$\Delta t = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Егер, ұзақтығы T_c хабарламаның спектрін F_c жиілігімен шектесек, онда В.А. Котельниковтың теормасына сәйкес санақтар саны

$$m = \frac{T_c}{\Delta t} = 2F_c T_c. \tag{4.16}$$

Бұл жағдайда В.А. Котельниковтың теоремасы келесі түрде жазылады:

$$x(t) = \hat{x}(t) = \sum_{k=-m/2}^{m/2} x_k \varphi_k(t). \tag{4.17}$$

(4.17) қатар мүшелерінің саны шектеулі, яғни үздіксіз сигнал бұл қатармен нақты көрсетілмейді. Бұл өрнектің жуықтылығы, қатар мүшелері санының шектілігінен, олардың қосындысы сигналдың x(t) шұғыл мәніне T_c-ның барлық интервалында дәл келмейді, тек қана санақ нүктелерінде ғана дәл келеді [8]. Функиялар x(t) және $\hat{x}(t)$ санақ нүктелерінің арасындағы интервалдарда бір-біріне ұқсас емес, сондықтан қателік пайда болады. Қатарлар мүшелерінің санын көбейту арқылы бұл қателікті азайтуға болады. Бұл қатені азайту үшін сигналдың ұзақтылығы T_c шектеулі болғанда, дискреттеу Δt

интервалын көбейту қажет. Ол спектрдің F_c жиілігінің мәнін жоғарылату керек.

В.А. Котельников қатарының мүшелері санының шектілігіне байланысты қателіктің әсерінен болған ортаквадраттық қателік, келесі формуламен анықталады:

$$\delta_T^2 = \frac{\int_0^{T_c} [x(t) - \hat{x}(t)]^2 dt}{\int_0^{T_c} x^2(t) dt} = \frac{\int_0^{T_c} E_T^2(t) dt}{E}, \qquad (4.18)$$

мұнда $E_T(t)$ – $x(t)$ және $\hat{x}(t)$ арасындағы қателіктің энергиясы, E – үздіксіз хабарламалардың энергиясы.

Осылай, В.А. Котельниковтың теоремасы бойынша ұзақтығы шектеулі үздіксіз хабарламаны дискреттеу қателікке әкеледі, оның бір құраушысы шектеулі спектрлі модельді кіргізумен байланысты:

$$\delta_F^2 = \frac{\int_{\omega_c}^{\infty} G_x(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega} = \frac{\Delta P_x}{P_x} = \frac{\Delta E_x}{E_x}, \qquad (4.19)$$

ал екіншісі құраушысы – (4.18) жіктеу мүшелері санының шектілігі.

Жалпы ортаквадраттық қателік былай анықталады:

$$\delta_g^2 = \delta_T^2 + \delta_F^2 \geq 2\delta_F = \frac{2}{E_x} \int_{\Omega_b}^{\infty} G(\omega) d\omega = \frac{2\Delta E_x}{E_x}. \qquad (4.20)$$

Үздіксіз сигналдарды қайта қалпына келтіру әдістері. Шектеулі ұзақтықты уақыт үздіксіз функциясының, оның санақтары бойынша қайта қалпына келуі (4.13) арқылы екі әдіспен орындалады:

– фильтрлік тәсіл – аналогты фильтрді қолдану арқылы;

– интерполяциялық тәсіл – арнайы интерполяторларды немесе есептеу техникасының құралдарын қолдану арқылы.

Фильтрлік тәсілде $\Delta t = \dfrac{1}{2F_c}$ интервалды (4.13)-пен анықталатын санақтардың тізбегі, төменгі жиіліктегі фильтрдің (ТЖФ) кірісіне беріледі. Фильтрдің шығысындағы кернеу, фильтрдің әрбір келіп түсетін санақтары жауаптарының суперпозициясымен анықталады.

Бұл жағдайда қолданылатын ТЖФ -дің импульстік өтпелі функциясы

$$h(t) = 2F_c \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}.$$

Мұндай өтпелі функция тік бұрышты өтпелі функциялы төменгі жиілікті фильтріне сай келгендіктен, физикалық түрде жүзеге асуы мүмкін емес.

Интерполяциялық тәсілде (4.13) үздіксіз функцияның қалпына келу алгоритмінің саны $m = 2F_c T_c$ санақ $\varphi_k(t) = \dfrac{\sin 2\pi F_c (t - k\Delta t)}{2\pi F_c (t - k\Delta t)}$ функцияларының құрылуына және олардың $x_k = x(k\Delta t)$ дискретті санақтарына тең салмақтық коэффициенттерін ескере отырып, олардың қосындыларын шығару.

Техника бойынша бұл күрделі операция, өйткені ол құрылған φ_K функциясының санақтарын сақтауды қажет етеді және олардың салмақты коэффициенттерін ескере отырып қосындылауды талап етеді.

Аталған себептерге байланысты В.А. Котельниковтың теоремасына сәйкес, үздіксіз хабарларды шектеулі дискреттеу, сонымен қоса, хабарламалардың қайта қалпына келтірілуі қарастырылған әдістерін тәжірибеде қолданбайды.

Кездейсоқ сигналды дискреттеу. Сигналдарды дискреттеу теориясының кейінгі дамуы Н.А. Железновтың жұмыстарымен байланысты. Мұнда кездейсоқ сигналдар үшін санақтар арасындағы Δt максимальды интервалдың мағынасы шешілген.

Н.А. Железнов моделінің айрықша ерекшеліктері:

1. Сигналдың спектрі тұтас және барлық жиіліктік аумақта мағынасы нөлден ерекшеленген.

2. Сигналдың корреляциялық функциясы, корреляция интервалынан тыс нөлге тең.

3. Сигналдың ұзақтылығы шектеулі және оның ұзақтығы корреляцияның τ_0 интервалынан біршама көп $(T_c >> \tau_0)$.

4. Стационарлы және стационарлы емес процестер қарастырылады.

Сигнал спектрінің шексіздігі мен оның ұзақтылығының шектілігі бұл модельдің үлкен артықшылығы болып саналады: ол айтарлықтай дәрежеде реалды сигналдарға көбірек жауап береді. Бұл, корреляциялық интервалы шектелген сигналдың моделі.

Жалғыз шектігі – корреляциялық функцияның шектелуі:

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} R_{xx}(\tau), & \tau \le \tau_0, \\ 0, & \tau > \tau_0. \end{cases}$$

Жоғарыда аталған қасиеттеріне жауап беретін стационарлы кездейсоқ сигналдар үшін Н.А. Железнов олар нөлден корреляция τ_0 интервалына тең уақыт аралығында ғана айрықшаланатын $\overline{\varepsilon}^2$ ортаквадраттық қателікпен сызықты болжау жүйесімен, қалауынша жобалана алады деп көрсеткен. Онда дискретті санақтардың саны мынаған тең:

$$N = \frac{T_c}{\tau_0}.$$

Үздіксіз хабарламаны дискреттеу қадамын анықтайтын кейбір мысалдарды қарастырамыз.

4.1-мысал. В.А. Котельников теоремасы бойынша детерминделген функция үшін Δt дискреттеу қадамын анықтау

$$x(t)=\begin{cases}2e^{-t} & \text{при} \quad t\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad t\prec 0,\end{cases}$$

спектрдің тәжірбиелік ені формуласы арқылы анықталады және коэффициенті $\eta = 0{,}95$.

Шешімі. Детерминделген x (t) функцияның спектральдық сипаттамасы мына формула арқылы есептеледі

$$S(j\omega)=2\int_0^{\infty} e^{-t}e^{-j\omega t}dt=\frac{2}{1+j\omega}.$$

Детерминделген x(t) функцияның спектральдық сипаттамасының модулі:

$$S(\omega)=2\int_0^{\infty} e^{-t}e^{-j\omega t}dt=\frac{2}{\sqrt{1+\omega^2}}\cdot$$

Спектрдің тәжірбелік енін анықтайтын формуласын қолдап,

$$\int_0^{\infty}\frac{4}{1+\omega^2}d\omega=\frac{0{,}95}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{4}{1+\omega^2}d\omega,$$

сондай-ақ, $$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}d\omega=\operatorname{arctg}\omega\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2},$$

онда:

$$\operatorname{arctg}\omega_{п}=0{,}95\frac{\pi}{2}=1{,}49\cdot$$

Тангенстер мәнінің кестесінен,

$$\omega_{п}=13{,}1\ \frac{1}{c}\cdot$$

Сонымен, детерминделген x(t) функцияның дискреттеу қадамы Δt

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_п} = 0{,}24 \text{ с.}$$

4.4. Дискреттеу процесінде интерполяцияның Лагранж көпмүшелері

Қазіргі уақытта техникалық қосымшаларда үздіксіз хабарламалардың дискреттеу интервалы, олардың санақтары бойынша ыңғайлылық пен қарапайымдылықты қайта қалпына келтіру талабымен айтарлықтай анықталады.

Дискреттеу процесінде (n+1) шектеулі туындылары бар x(t) үздіксіз функция n дәрежелі көпмүшемен аппроксимацияланады.

Сигналды қайта қалпына келтірудің таңдалған әдісіне байланысты, көпмүше интерполяциялаушы немесе экстраполяциялаушы болуы мүмкін. Минимальды қателікті қамтамасыз ету есебі әдетте, сигналды қалпына келтіруде қойылмайды, оның мүмкін қателігі ε_0 көрсетіледі.

Көпмүшелікпен $\varphi_n(t)$ функцияны x(t) қалпына келу $\varepsilon(t)$ қателігі аппроксимацияның әр аумағында қалдық $L_n(t)$ мүшемен анықталады, ол мынаған тең:

$$\varepsilon(t) = L_n(t) = x(t) - \varphi_n(t). \tag{4.21}$$

Сондықтан, дискреттеу Δt қадамы $L_n(t) \le \varepsilon_0$ шартынан таңдалады.

Ең жоғарғы дәрежелі апроксимациялайтын көпмүшені ең төмен мүмкін ε_0 қателікте таңдауда, санақтардың ең кіші санымен қамтамасыз етуге болады. Бірақ, бұл кезде әдістің техникалық жүзеге асу қиындығы жоғарылайды. Соған орай, әдетте нөлдік, бірлік, екілік дәрежелі көпмүшелер қолданылады (сатылық, сызықтық және параболалық аппроксимацияға сәйкес).

Лагранждың интерполяциялық көпмүшесінің көмегімен тәжірибеде қайта қалпына келтіру әдісі кеңінен қолданылады [2,9].

Теңжақты t_i түйіндерге $[t_0, t_n]$ кесіндіде Лагранж көпмүшесі мына түрде болады:

$$L_n(t) = L_n[t_0 + \chi\Delta t] =$$

$$= (-1)^n \frac{\chi(\chi-1)..(\chi-n)}{n!} \sum_{i=}^{n} (-1)^i \frac{C_n^i x(t_i)}{\chi - i}, \qquad (4.22)$$

мұнда

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = ... = t_1 - t_{i-1} = \Delta t;\ \chi = (\frac{t - t_0}{\Delta t}), n = 0,1,2,...,i = 0,1..\cdot$$

Егер $x(t)$ функциясының бір қашықтықтағы нүктелерде барлық санақтары дәл болса, онда Лагранждың интерполяциялық көпмүшесі t_i нүктелерінде бастапқы функцияға сай келеді. Қалған $[t_0, t_n]$ интерполяциялық кесінділердің нүктелерінде сәйкестік болмайды. Тек бастапқы $x(t)$ функциясы n дәрежесінен жоғары емес көпмүше болған жағдайда.

Үздіксіз x(t) бастапқы функцияны n ретті шектеулі туындылары бар Лагранждың интерполяциялық $L_n(t)$ көпмүшесімен қайта қалпына келтіру қателігі, қалдық мүшемен анықталады:

$$R_n(t) = |x(t) - L_n(t)| \le \frac{M_{(n+1)}}{(n+1)!} \Delta t^{n+1} |\chi(\chi-1)...\chi - n|, \qquad (4.23)$$

мұнда $M_{(n+1)} = \max|x^{n+1}(t)|$ – (n+1) – туындылардың максимальды мәндерінің модулі.

Дискреттеу Δt қадамын $x(t_i)$ функциясының санақтары бойынша сигнал $x(t)$- ны Лагранж $L_n(t)$ көпмүшесімен қайта қалпына келтіру қателігі келесі шарт арқылы таңдалады

$$\varepsilon(t) = R_n(t) \le \varepsilon_0; \tag{4.24}$$

мұндағы ε_0 – дискреттеудің берілген мүмкін болатын қателігі.

Жоғарғы (4.23) және (4.24) формулалар бірқалыпты Δt дискреттеудің қадамын анықтағанда бастапқы болып саналады.

Енді, дискреттеуде ең жиі қолданылатын тәсілдерді қарастырайық.

4.2-мысал. Нөлдік дәрежелі Лагранждың интерполяциялық көпмүшесінің негізінде бірқалыпты дискреттеудің қадамын анықтаймыз.

Қайта қалпына келтіретін $y(t)$ функцияның мәні кез келген t уақыт мезетінде әр j-шы $t_{j-1} \le t \le t_j$ уақыт интервалында $x(t_j)$ санаққа тең болады (4.3-сурет).

Бұл жағдайда қалдық мүше (4.24)

$$R_0(t) \le M_1 \chi \Delta t. \tag{4.25}$$

Егер $\chi = 1$ болғанда $R_0(t)$-ның мәні максимальды. Бірқалыпты дискреттеудің қадамы (4.24) және (4.25) ескеру арқылы,

$$\Delta t = \frac{\varepsilon_0}{M_1}. \tag{4.26}$$

Нөлдік дәрежелі көпмүшелерді қолданғандағы санақтардың жиілігі

$$F_0 = \frac{M_1}{\varepsilon_0}.$$

Санақтар $x(t_i)$ мәндерімен бастапқы x(t) сигналды қайта қалпына келтіруін экстраполяция және интерполяция арқылы өткізуге болады.

Экстраполяция арқылы қалпына келтіру кезінде дискреттеудің $[t_{0j}, t_{0j+1}]$ j-ші интервалына елестетін y(t)=$L_0(t)$ функция мынаған тең:

$$y_j(t) = x(t_{0j}),$$

интерполяция арқылы келтіру кезінде

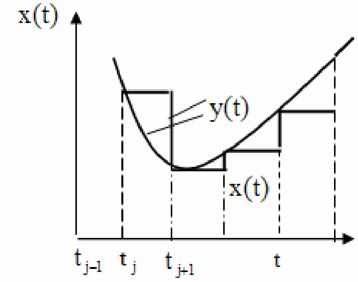
$$y_j(t) = x(t_{0j+1}). \tag{4.27}$$

Өрнек (4.23)-ке сәйкес таңдалған әр дискреттеу Δt интервалында жақын келудің сапа көрсеткіші $\lambda_{max} = 1$ шамаға жете алады.

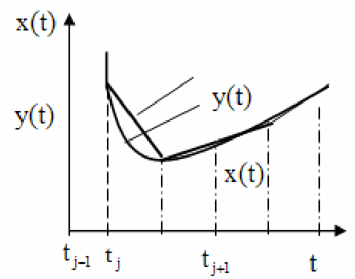
Егер

$$y_i(t) = \frac{[x(t_{0j}) + x(t_{0j+1})]}{2}$$

болса, онда бірқалыпты дискреттеудің қадамын қателікті жоғарылатпай, екі есе үлкейтуге мүмкіндік береді.



4.3-сурет. Сатылы аппроксимация



4.4-сурет. Сызықты аппроксимация

4.3-мысал. Бірінші дәрежелі Лагранждың интерполяциялық көпмүшелері негізінде бірқалыпты дискреттеу қадамын анықтайық.

Әр уақыт $[t_{j-1}, t_j]$ интервалында бастапқы x(t) сигналын қалпына келтіру үшін екі $x(t_j)$ және $x(t_{j-1})$ санақтар қолданылады. Олар тура сызықпен қосылады (4.4-сурет). Қалдық мүшенің максимальды $R_{1\max}$ мәнін, оның туындысын нөлге теңестіру арқылы табамыз:

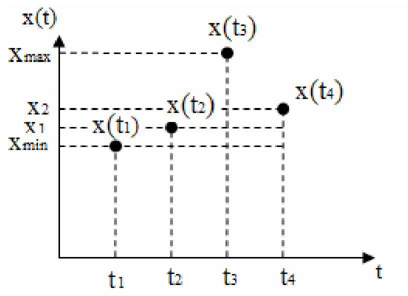
$$R_{1\max} = \frac{M_2}{2}\left|\frac{(t_1 - t_0)(t_0 - t_1)}{4}\right| = \frac{M_2(\Delta t)^2}{8}. \qquad (4.28)$$

Бұдан дискреттеудің мүмкін болатын қадамын табамыз:

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{M_2}}. \qquad (4.29)$$

4.5. Сигналдарды деңгей бойынша кванттау

Деңгей бойынша кванттау – бұл уақыт бойынша кванттау нәтижесінде алынған $x(t_i)$ үздіксіз сигналдардың (деңгей бойынша) t_i санақ мезеттерінде дискреттеудің түрленуі. Кванттау нәтижесінде x_{min}-дан x_{max}-ға дейінгі диапазонда мәндерінің жиынтығы үздіксіз $x(t_i)$ сигнал, x_k – деңгейлі кванттау мәндерінің дискретті жиынтығына түрленеді (4.5- сурет).



4.5-сурет. Деңгей бойынша сигналдарды кванттау

Кванттау қадамы Δx келесі формула бойынша анықталады:

$$\Delta x = x_j - x_{j-1}.$$

Деңгей бойынша кванттауды – *сигналды өлшеу* деп санауға болады.

Шынында да, 4.5-суретте $x(t_1)$ сигнал кванттаудың 0 - ші деңгейін (k =0), ал $x(t_4)$ сигнал кванттаудың 2-деңгейін құратыны көрініп тұр.

Деңгей бойынша кванттауда сигнал $x(t_i)$ әрқашан кванттау дейгейімен сәйкес келе бермейді (4.5-сурет- $x(t_2)$ сигнал). Бұл жағдайда келесі тәсілдердің бірін қолданылады:

– $x(t_i)$-ны жақын мәнмен теңестіреді (біздің жағдайда x_2 – мен);

– $x(t_i)$-ны жақын кіші (немесе үлкен) мәнмен теңестіреді.

Сонда жақын үлкен мәнмен теңестіру кезінде $x(t_2)$ сигналы x_2– мен теңестіріледі және бұл, оның кванттау деңгейіне қаншалықты жақын орналасқанына тәуелсіз. Жақын кіші мәнмен теңестіру кезінде $x(t_2)$ сигналы x_1 – мен теңестіріледі де, бұл да оның кванттау деңгейіне қаншалықты жақын орналасқанына тәуелсіз.

Деңгей бойынша кванттағанда кванттау қателігі $\xi(x_k)$ пайда болатыны анық

$$\xi(x_k) = x(t_i) - x_k \, .$$

Деңгей бойынша кванттау қателігі – кванттау қадамы азайған сайын азаяды.

Деңгей бойынша кванттаудың келесі түрлері бар:

– бірқалыпты, сигналдың өзгеру диапазоны n бірдей бөліктерге бөлінеді. Онда, кванттау қадамының мағынасы берілсе, x_k-ны көрсету үшін деңгейдің k санын білген жеткілікті;

– бірқалыпсыз, сигналдың өзгеру диапазоны n әртүрлі бөліктерге бөлінген кезде.

Бірқалыпты кванттауда кванттау Δx қадамы

$$\Delta x = \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}.$$

Ең үлкен ауытқу белгілерін пайдаланып, кванттаудың қателігін анықтайық:

$$\sup_x \xi(x) = \sup_x \left| x(t) - \bar{x}_i \right| \cdot$$

Егер $\Delta_{x_i} = \Delta_x = \text{const}$ және кванттау деңгейі x_i

$$\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$$

интервалының ортасында таңдалса, берілген n мәнінде кванттаудың ең үлкен қателігі $\sup\left|\xi(x)\right|$ минимальды.

Сигнал $x(t_i) = x$ үлестіру p(x) тығыздықты X кездейсоқ шамасының реализациясы ретінде қарастырсақ, x-ке тәуелді кездейсоқ шаманың Δx – кванттау қателігінің сипаттамаларын табуға болады.

Кванттау қателігі

$$\Delta x_k = x - x_k \tag{4.30}$$

$-0{,}5\delta_k \le x_k \le 0{,}5\delta_k$ интервалында өзгереді.

Кванттау қателігінің максимумы

$$\max \Delta x_k = \max\left| x(t_i) - x_k \right| = \delta_k .$$

Кванттау k-шы деңгейінде $(k = 0,\ldots,n\text{ - }1)$ қателіктің Δx_k математикалық күтімі

$$M(\Delta x_k) = \int_{x_к - \frac{\delta_k}{2}}^{x_к + \frac{\delta_k}{2}} (x - x_k) p(x) dx, \tag{4.31}$$

ал, оның дисперсиясы

$$D(\Delta x_k) = \int_{x_k - \frac{\delta_k}{2}}^{x_k + \frac{\delta_k}{2}} (x - x_k)^2 p(x)dx \cdot \tag{4.32}$$

Сигналдың x(t) өзгеру диапазонын δ_k интервалымен салыстырғанда оны кішкене деп есептегендіктен, бұл интервалда $p(x)$-ның мәнін тұрақты, әрі оның мәні тең өзінің кейбір орта деңгейдегі $p(x_k)$ мәніне тең, яғни

$$p(x_k)\delta_k = \int_{x_k - \frac{\delta_k}{2}}^{x_k + \frac{\delta_k}{2}} p(x)dx \cdot$$

Осыдан,

$$M(\Delta x_k) = 0,$$

ал

$$D(\Delta x_k) = \frac{1}{12} p(x_k)\delta_k^2 = \frac{1}{12}\delta_k^2 [p(x_k)\delta_k] \cdot \tag{4.33}$$

Өрнек (4.33) k-шы деңгейдің кванттау қателік дисперсиясы x-тың бұл интервалға түсуге ықтималдығына көбейтілген осы интервалында, бірқалыпты үлестірілген сигналдың дисперсиясы екенін көрсетеді.

Кванттаудың деңгейі бойынша толық қателігінің дисперсиясы, сигналдың өзгеру (x_{min}, x_{max}) диапазонында (4.33) өрнегінің барлық кванттау деңгейлерінің қосындысы болады:

$$D[\Delta x] = \sum_{k=0}^{m-1} D(\Delta x_k) = \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{m-1} p(x_k)\delta_k^3 \cdot \tag{4.34}$$

Кванттаудың бірқалыпты қадамында $(\delta_k = \delta)$деңгей бойынша кванттаудың қателік дисперсиясы

$$D[\Delta x] = \frac{\delta^2}{12}\sum_{k=0}^{m-1} p(x_k)\delta \cdot \tag{4.35}$$

Максимальды x_{max} деңгейді асып түсетін сигнал x(t) мәнінің пайда болуының ықтималдығы өте аз деп санап, мынаны жазамыз:

$$\sum_{k=0}^{m-1} p(x_k)\delta = \sum_{k=0}^{m-1} p(x_k) = 1.$$

Сонда, деңгей бойынша сигналды бірқалыпты кванттауға мына формула шығады:

$$D[\Delta x] = \sum_{k=0}^{m-1} D(\Delta x_k) = \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{m-1} p(x_k)\delta_k^3 = \frac{\delta^2}{12}. \qquad (4.36)$$

Бұдан, бірқалыпты кванттауға арналған деңгей бойынша кванттаудың орташа квадратты қателігі

$$\sigma[\Delta x] = \sqrt{D[\Delta x]} = \frac{\delta}{2\sqrt{3}}. \qquad (4.37)$$

Кванттау қателігінің Δx статистикалық сипаттамалары тығыздықтың p(x) үлестірімінің түрімен, сонымен қатар ол δ_k шамамен тәуелді. Деңгей бойынша тиімді кванттау X сигнал шкаласының қалыпсыз бөлуіне байланысты болуы мүмкін.

Кодтау. Кейінгі түрлендірудің жүзеге асыру ыңғайлығы, дискретті сигналды кодтауын қажет етеді.

Сандардың позициялық формадағы жазбасының мысалы біз қолданатын форма болып саналады (сандардың араб формасы). Осылай, 123 және 321 сандарында 3 цифрының мәні, мысалы оның сандағы орнымен байланысты: бірінші жағдайда үш бірлікті білдірсе (яғни, жай үш), екіншіде – үш жүздікті білдіреді.

Сонда N саны келесі формула бойынша былай шығады:

$$N = \sum_{i=0}^{1} a_i m^i = a_1 m^1 + ... + a_1 m^1 + a_0 m^0, \qquad (4.38)$$

мұнда (l) – бірге азайтылған санның разряд саны, i – разрядтың реті, m – санау жүйесінің негіздемесі, a_i – 0-ден m – 1-ге дейін және i – ші сандық ретті санға сай келетін кез келген бүтін сандық мәнді қабылдайтын көбейткіш.

Мысалы, 345 ондық $(m = 10)$ саны үшін оның толық мәні келесі формула бойынша есептеледі:

$$3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 345.$$

Римдік сандар – сандардың құрылуының жартылай позициялық жүйесінің мысалы болып саналады: осылай, IX және XI сандарындағы I белгісі екі жағдайда да бірлікті білдіреді (позициялық емес). Бірақ, X (онды белгілейтін) белгісінің сол жағында болса, ол оннан алынады, ал оң жақта – ол оңға қосылады. Бірінші жағдайда, санның толық мәні 9-ға тең, екіншісінде – 11.

Қазіргі ақпаратта үш санау жүйесі қолданылады (барлығы – позициялық): екілік, он алтылық және ондық.

Екілік санау жүйесі – дискретті сигналдарды кодтауға есептеу кезінде техникада қолданылады. Екілік сигналды аппараттық құрылғымен келтіру, жай нәрсе. Бұл санау жүйесінде, санды келтіру үшін екі таңба қолданылады – 0 және 1.

Он алтылық санау жүйесі – дискретті сигналды кодтауға қолданылады, оның тұтынушысы, жақсы дайындалған пайдаланаушылар – ақпараттар саласындағы мамандар. Мұндай формада операциялық жүйенің интегралданған бөлшегі арқылы сұралған кез келген файлдың мазмұны көрсетіледі. Мысалы, MS DOS жағдайында Norton Commander құралдарымен. Санды көрсету үшін қолданылатын таңбалар – 0-ден 9-ға дейінгі ондық сандар және латын алфавитінің әріптері – A, B, C, D, E, F.

Ондық санау жүйесі де дискретті сигналды кодтауға қолданылады. Оның тұтынушысы жақсы дайындалмаған пайдаланаушылар – ақпараттар саласындағы мамандар емес (кез келген адам мұндай тұтынушы бола алатыны анық). Санды көрсету үшін қолданылатын таңбалар – 0-ден 9-ға дейінгі цифрлар.

Барлық үш сандау жүйесінің алғашқы бірнеше натурал сандарының арасындағы ұқсастық, ауыстыру кестесінде (4.1-кесте) көрсетілген.

4.1-кесте

Ауыстыру кестесі

Ондық жүйе	Екілік жүйе	Он алтылық жүйе
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F
16	10000	10

Сандар көрсетілетін санау жүйелерін ажырату үшін екілік және он алтылық сандарын белгілеуде қосымша реквизиттер енгізіледі:

- екілік сандар үшін – санның оң жағындағы төменгі индекс 2 цифр түрінде немесе В әріпі не b (binary – екілік), әйтпесе В мен b таңбалары санның оң жағында көрсетіледі. Мысалы, 1010002 = = 101000b = 101000B = 101000B = 101000b;
- он алтылық сандар үшін – санның оң жағындағы төменгі индекс 16 саны немесе Н әріпі, не (h) (hexadecimal – он алтылық) түрінде немесе Н не (h) таңбалары, санның оң жағында көрсетіледі. Мысалы, 3AB16 = 3ABH = 3ABh = 3ABH = 3ABh.

Сандарды бір санау жүйесінен басқасына аудару үшін арнайы ережелер бар. Олар санның форматына байланысты ажыратылады – бүтін немесе дұрыс бөлшек. Нақты сандар үшін бүтін сан мен дұрыс бөлшекке арналған аудару ережесінің комбинациясы қолданылады.

Бүтін сандарды аудару ережесі. Бүтін санды аудару ережесі, әрқашан бүтін санды береді.

Ондық санау жүйесінен екілік және он алтылық санау жүйесіне аудару:

а) бастапқы бүтін сан, аударылатын санау жүйесінің негізіне бөлінеді (екілік санау жүйесіне аударуда 2-ге немесе он алтылық санау жүйесіне аударғанда 16-ға бөлінеді); дербес және қалдық шығады;

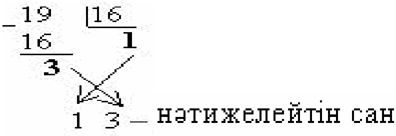
ә) егер шыққан дербес аудару, орындалып жатқан санау жүйесінің негізінен аз болса, онда бөлу процесі тоқтатылып а) қадамына көшеді. Өзге жағдайда дербеске – ә) қадамында сипатталған әрекетті орындайды;

б) барлық шыққан қалдықтар, соңғы дербес аудару орындалатын санау жүйесінің аудару кестесіне сәйкес цифрға түрлендіреді;

в) нәтижелейтін сан құрылады: оның жоғарғы разряды – шыққан соңғы дербес, әрбір келесі кіші разряд соңғысынан басталып, біріншісімен аяқталатын бөлуден шыққан қалдықтардан құрылады. Осылайша, шыққан санның кіші разряды – бөлуден алынған бірінші қалдық, ал үлкен разряды – соңғы дербес.

4.4-мысал. 19 санын он алтылық санау жүйесіне аудару керек.

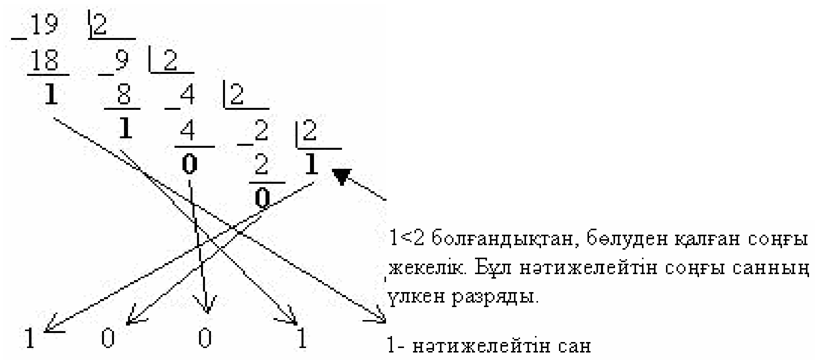
Шешімі.



Осыдан, 19 = 1316.

4.5-мысал. 19 санын екілік санау жүйесіне аудару керек.

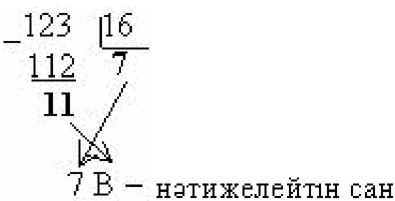
Шешімі.



Осыдан, 19 = 100112.

4.6-мысал. 123 санын он алтылық санау жүйесіне аудару қажет.

Шешімі.



Мұндағы 11 – қалдық В – он алтылық цифрына түрлендірілген (4.1 -кесте) және осыдан кейін берілген цифр санға кірді.

Осылай, 123 = 7В16.

Екілік және он алтылық санау жүйесінен – ондық санау жүйесіне аудару, осы сияқты түрде жүзеге асырылады.

4.6. Сигналдың энергиясын, санақтары бойынша анықтау

Ақпараттық жүйелерді талдау және синтездеу кезінде сигналдың санақтары арқылы шыққан энергиясының өрнегі жиі қолданылады.

Белгілі, энергия тең (квадраттық әсер):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \cdot \tag{4.39}$$

В.А. Котельниковтың теоремасы бойынша сигналдың энергиясын, оның санақтары арқылы анықтаймыз.

В.А. Котельниковтың қатарын энергияның (4.39) өрнегіне қойып, мынандай формулаға келеміз:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_n x(\frac{n}{2F_c})\frac{\sin(2\pi F_c t - \pi n)}{2\pi F_c t - \pi n}\right]^2 dt \cdot \tag{4.40}$$

Интегралдың астындағы қосындының квадратын, екі қосындыны көбейту түрінде көрсетуге болады:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_к x(\frac{к}{2F_c})\frac{\sin(2\pi F_c t - \pi к)}{2\pi F_c t - \pi к}\right]\left[\sum_l x(\frac{l}{2F_c})\frac{\sin(2\pi F_c t - \pi l)}{2\pi F_c t - \pi l}\right]dt \tag{4.41}$$

немесе екілік қатар түрінде

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_k\sum_l x(\frac{к}{2F_c})x(\frac{l}{2F_c})\frac{\sin(2\pi F_c t - \pi к)}{2\pi F_c t - \pi к}\frac{\sin(2\pi F_c t - \pi l)}{2\pi F_c t - \pi l}\right\}dt \cdot \tag{4.42}$$

Интеграл (4.42)-де интегралдау және қосындылау ретін өзгертіп, сонымен қоса $x(\frac{к}{2F_c})$ және $x(\frac{1}{2F_c})$ санақтары уақыт t - дан тәуелсіз болғандықтан, келесі қатар түріне келеміз:

$$E=\sum_k\sum_l x(\frac{к}{2F_c})x(\frac{1}{2F_c})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi F_c t-\pi к)}{2\pi F_c t-\pi к}\frac{\sin(2\pi F_c t-\pi l)}{2\pi t-\pi l}dt\,. \quad (4.43)$$

Санақтар функцияларының $k=1$ ортогональдылығының нәтижесінде (4.43)-дегі интегралдың мағынасы $\frac{1}{2F_c}$ тең. Сондықтан, ең ақырында дискретті сигналдың энергиясы

$$E=\frac{1}{2F_c}\sum_n\left[x(\frac{n}{2F_c})\right]^2. \quad (4.44)$$

Егер сигнал уақыт бойынша [0,T] интервалымен шектеулі болса, онда санақтардың саны $2F_c(T+1)$ болады және теорема әділ.

Теорема. Үздіксіз x(t) функциясының ортаквадратты мәні, дискретті санақтардың орта квадратына тең (егер $n=2F_cT$ мәні, айтарлықтай үлкен болса),

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt=\frac{1}{2F_cT}\sum_{n=0}^{2F_cT}x^2(\frac{n}{2F_c})\,. \quad (4.45)$$

Егер сигнал $[t_1,t_2]$ (T=t_2-t_1) уақытында шектеулі болса, онда санақтар саны шектеулі және $n=2F_cT$.

Бұл жағдайда сигналдың энергиясы

$$E=\frac{1}{2F_c}\sum_{n=0}^{2F_cT}\left[x^2(\frac{n}{2F_c})\right]^2. \quad (4.46)$$

Бақылау сұрақтары.

1. Дискреттеу және кванттау процестерінің мәні неде?
2. Дискретті және цифрлық ақпараттық тасымалдаудың артықшылықтарын сипаттаңыз.
3. Дискреттеудің жалпы есебінің қойылуын сипаттаңыз.
4. Сигналдың қайта қалпына келтірудің интерполяциялық және экстра-поляциялық әдістерін салыстырыңыз.
5. Сигналды қайта қалпына келтіруін орташа квадраттық критерийін қалай түсінеді?
6. В.А. Котельников теоремасын сипаттаңыз.
7. Санақтардың жиынтықтығымен шектелген спектрлі үзіліссіз функцияның алмастыруының физикалық мүмкіндігін түсіндіріңіз.
8. В.А. Котельников теоремасымен негізделген үздіксіз сигналдардың тасымалдау әдісін техникалық іске асыру қиындықтары?
9. Ең үлкен ауытқудың белгілері бойынша бірқалыпты дискреттеу процедурасы қандай?
10. Адаптивті дискреттеудің артықшылығы мен кемшіліктерін көрсетіңіз.
11. Бірқалыпты кванттаудың орташа квадраттық қатесін өрнектеңіз.
12. Кванттау шуы деген не?
13. Сигналдың кванттау қадамын, кедергі болған жағдайда қалай есептейді?
14. Сигналдың энергиясын дискретті санақтар арқылы анықтаңыз.

5. БАЙЛАНЫС КАНАЛДАРЫ МЕН ЖҮЙЕЛЕРІ

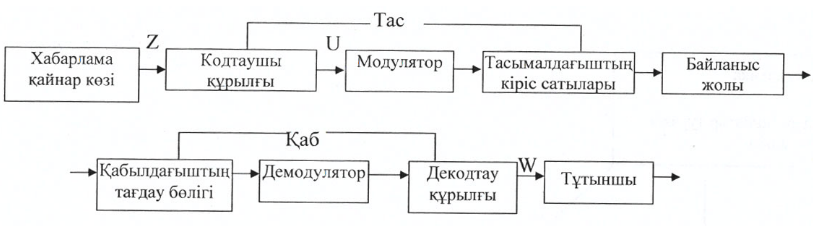
5.1. Негізгі анықтамалар

Байланыс жүйелері [3,5] хабарламаны тасымалдау үшін қызмет етеді. Хабарлама үздіксіз (сөйлеу, музыка), дискретті (жазба мәтін, цифрлық мәліметтер) болуы мүмкін. Байланыс жүйесінде хабарлама белгілі ретпен байланыс каналымен келіскен сигналға түрлендіріледі.

Радиотелефон мен теледидар – амплитудалық және жиілік модуляциялардың жүйелерін үздіксіз (аналогтық) жүйе түріне жатқызуға болады. Үздіксіз хабарламалар кейде дискреттікке түрлендіріледі (кванталады) және дискреттік жүйелерінің әдістерімен тасылады. Бұған мысал ретінде сөздерді кодты – импульсті модуляция арқылы тасымалдайтын жүйені келтіруге болады.

Хабарламаларды тасымалдағыш түрлері бойынша байланыс жүйлерін – *үздіксіз* және *дискреттік* деп бөледі. Дискреттік жүйеге – телеграф байланыс жүйелерін атауға болады.

Байланыс каналы деп, хабарламаны ақпарат көзінен оның қабылдағышына дейін тасымалдауға қызмет ететін техникалық құралдардың жиынтығын айтады. Оның құрамына – таратқыш, байланыс жолы және қабылдағыш кіреді (5.1-сурет). Байланыс каналы, хабарламаның көзі және ол қабылдағыш байланыс жүйесін құрады.



5.1-сурет. Байланыс каналы

Тасымалдағыш құрылғылары хабарламаны, берілген байланыс жолы бойынша тасымалдауға қолайлы сигналға түрлендіреді. Оған қарапайым мысал, телефонияда бұл операциялар алғашында хабарламаны анықтауыш электрлік емес шамаларды – электрлік шамаларға түрлендіреді.

Жалпы жағдайда, хабарламаны сигналға түрлендіру процесі үш операциядан тұрады: *қайта құру, кодтау* және *модуляциялау*. Көп каналды байланыс жүйелерінде бірнеше хабарламаларды жалпы бір жол арқылы тасымалдауды қамтамасыз етуші, өзара үш операцияға «көп каналды» сигналдың қалыптасу операциясын қосу шарт.

Байланыс жолы – бұл тасымалдауыштан, қабылдағышқа сигналдарды тасымалдауға қолданылатын орта. Байланыс жолы мәліметтерді тасымалдау ортасынан тәуелсіз мынадай болады:

1. Сымды.
2. Кабельді.
3. Жер бетті және жерсеріктік байланыс радиоканалдары.

Сымды байланыс жолі – элементтерді қандай да бір оқшаулауынсыз, бағаналар арасындағы сымдар.

Кабельдік жолдер мәліметтерді өте жоғарғы жылдамдықпен тасымалдауын қамтамасыз етеді (10 Гбит және жоғары). Жер бетіндегі және жер серіктік байланыс радиоканалдар таратқыштарымен радиотолқындарын қабылдағыш арқылы қалыптастырады. Радиоканалдар әртүрлі. Қысқа, орташа және ұзын толқындары амплитудалық модуляцияның диапазоны, ол қиыр байланысты қамтамасыз етеді. Бірақ, оның тасымалдау жылдамдығы төмен. Ультрақысқа толқындарда ол жоғарғы жылдамдықтармен қамтамасыз етіледі, өйткені онда жиіліктік модуляция қолданылады. Өте жоғары жиіліктер диапазонында (4Ггц-тен жоғары) сигналдары жер ионосферасында шағылыспайды және тұрақты байланысқа таратқыш пен қабылдағыш бір-біріне көрініп тұруы керек.

Байланыс жолдардың негізгі сипаттамалары:

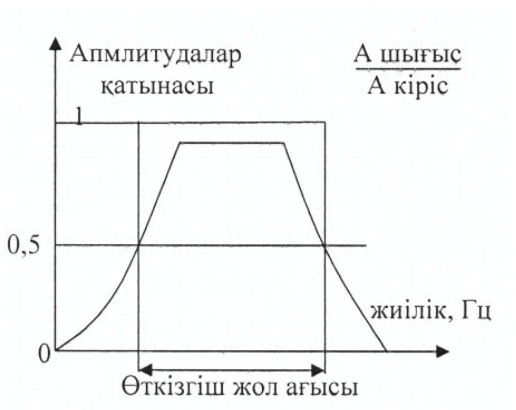
1. Амплитудалық – жиіліктік сипаттамалар;
2. Өткізкіш жол ағысы;
3. Сигналдың басылуы;

4. Кедергіге төзімділігі;
5. Жолдың соңындағы қиылысқан нысаналар;
6. Өткізгіштік қабілеті;
7. Мәліметтерді тасымалдағыштың нақтылығы;
8. Меншікті құны.

Байланыс жолына түскен сигналды гармоникалық қосындысы ретінде қарастыруға болады.

Синусоидалдық сигналдардың байланыс жолында бұрмалау дәрежесі амплитудалық – жиіліктік сипаттамалары мен өткізу жол ағысымен, берілген жиілікте өшуі арқылы бағаланады. Амплитудалық – жиіліктік сипаттама (5.2-сурет) жолдан шығарда, барлық мүмкін жиіліктеріндегі берілетін сигналдардың синусоидалдық амплитудаларының, оның кірудегі амплитудаларымен салыстырғанда сөнетінін көрсетеді. Осы мінездемеде амплитудалар орнына, сигналдың қуаты қолданылады. Амплитудалық – жиіліктік жолдың мінездемесі (сипаттамасы) нақты шығатын сигналдың формасын кез келген кіретін сигнал арқылы анықтауға мүмкіндік береді.

Амплитудалық – жиіліктік мінездеменің күрделілігіне байланысты, тәжірибеде басқа да қарапайым сипаттамалары– өткізу жолағы мен басылу қолданылады.



5.2-сурет. Амплитудалық – жиіліктік сипаттама

Өткізгіш жол ағысы – бұл үздіксіз жиіліктік диапазон, онда шығу және кіру сигналы амплитудаларының қатынасы берілген мағынадан аспайды. Әдетте, оның мағынасы 0,5 шамасында. Сонымен, өткізкіш жол ағысы синусоидалдық сигналдың жиілігінің диапазонын анықтайды, сондай-ақ бұл сигнал байланыс жолымен ешбір бұрмалаусыз беріледі. Басылу – сигнал амплитудасы немесе қуатының байланыс жолында берілген жиіліктерде тасымалдағандағы салыстырмалы қысқаруы.

5.2. Модуляция. Модуляцияның негізгі түрлері

Ақпаратты тасымалдау үшін сигналдың екі параметрі керек: *селекциялық* (сұрыптау, іріктеу) және *ақпараттық*.

Селекциялық параметрлер – сигнал мен кедергілердің жиынтығынан, пайдалы сигналдарды бөлуге мүмкіндік береді.

Ақпараттық параметрлер – ақпаратты тасымалдау үшін қызмет етеді.

Тасымалдауыштың ақпараттық параметрін тасымалдау – сигналдың заң бойынша өзгеруін басқаруды – *модуляция* деп атайды.

Ақпараттық параметрлер бірнеше болуы мүмкін, солардың бірі, міндетті селекциялық (өзгермейтін) параметр.

Тасымалдауыштың параметрінің формасы мен санына байланысты модуляцияның әртүрлі әдістері болуы мүмкін.

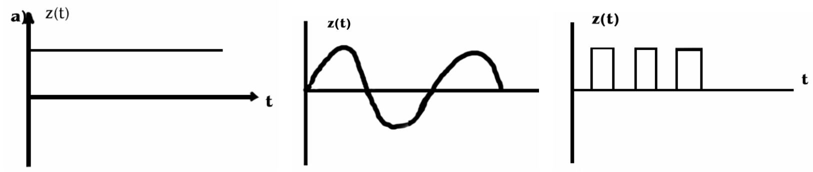
Модуляцияның мынандай әдістері бар:

1. Үздіксіз модуляция – тасымалдауыштың ақпараттық параметрінің өзгеруі, үздіксіз.

2. Импульстік модуляция – тасымалдауыш рөлінде периодтік импульстердің тізбегі.

3. Дискретті – егер модуляциялағанда ақпараттық параметрі мәнінің сандары санаулы қолданылады (мысал – цифрлық модуляция).

Тасымалдауыш сигналдардың негізгі түрлері 5.3-суретте келтірілген.



а) ә) б)

5.3-сурет. Ақпаратты тасымалдауыш сигналдардың негізгі түрлері:
а) тұрақты кернеу; ә) гармоникалық тербеліс (үздіксіз модуляция); б) периодтық импульстердің тізбегі

5.2.1. Үздіксіз модуляция

Үздіксіз модуляция – тар жиілікті жолақпен дискретті мәліметтерді каналдармен тасымалдағанда қолданылады. Қоғамдық телефон желісінде пайдаланатын тоналдық жиіліктік канал – осы каналдың, типтің өкілі.

Үздіксіз модуляцияда [7] тасымалдауыш ретінде үздіксіз жиілікті гармоникалық тербеліс болып саналады:

$$u = u_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (5.1)$$

мұндағы u_0 – амплитуда; ω_0 – жиілік және φ_0 – тербелістің фазасы.

Осы гармоникалық тербелістің парметрлерін өзгерте отырып, модуляцияның әр түрін табуға болады.

Амплитудалық модуляцияда (АМ) гармоникалық тербелістің амплитудасы $x(t)$ сигналмен байланысты, кейбір белгілі u_0 мағынасының маңайында өзгереді:

$$u = u_0 + \Delta u \cdot x(t), \qquad (5.2)$$

мұнда тұрақты коэффициент Δu амплитудаға $x(t)$ сигналдың әсерінен ерекшеленеді.

Жиіліктік модуляцияда (ЖМ) гармоникалық тербелістің жиілігі $x(t)$ сигналмен байланысты, кейбір белгілі ω_0 мағынасының маңайында өзгереді:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega\, x(t)\ ,$$

мұнда тұрақты коэффициент $\Delta\omega$ жиілікке $x(t)$ сигналдың әсерінен ерекшеленеді.

Фазалық модуляцияда (ФМ) гармоникалық тербелістің фазасы $x(t)$ сигналмен байланысты кейбір белгілі φ_0 мағынасының маңайында өзгереді:

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi\, x(t)\ , \qquad (5.3)$$

мұнда тұрақты коэффициент $\Delta\varphi$, фазаға $x(t)$ сигналдың әсерінен ерекшеленеді.

Амплитудалық модуляцияның заңын табу үшін (5.2) формуласын (5.1) формуласына қоямыз:

$$u_{АМ} = u_0[1 + \frac{\Delta u}{u_0} x(t)]\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\cdot$$

Фазалық модуляцияның заңын табу үшін (5.3) формуланы (5.1) формулаға қоямыз:

$$u_{ФМ} = u_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi \cdot x(t))\,.$$

Егер жиілік модуляцияда кіріс сигнал, синусоидалық $x(t) = x \cdot \sin\Omega t$ болса, онда

$$u_{ЧМ} = u_0\cos(\omega_0 t - \frac{\Delta\omega \cdot x}{\Omega}\cos\Omega t),$$

мұндағы $\frac{\Delta\omega}{\Omega}$ – модуляцияның индексі, $\Delta\omega \cdot x$ – жиілік девиациясы.

Модуляцияның индексі кіші кезінде модуляцияланған тербелістің ағыс жолы модуляциялайтын тербеліс жиілігінің екі еселенген мәніне тең. Модуляцияның индексі үлкен кезінде модуляцияланған тербелістің жолағы, модуляциялайтын тербелістің жиілік девиациясының екі еселенген мәніне жақын.

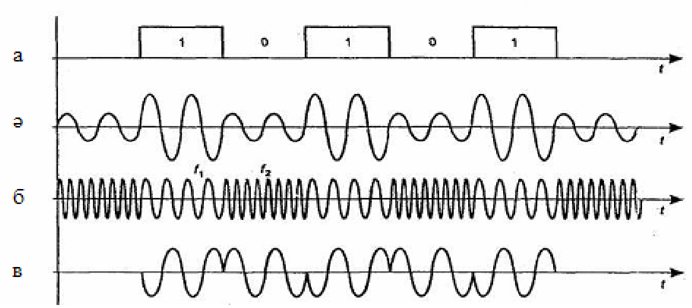
5.1-мысал. Диаграммада (5.4*а*-сурет) негізгі ақпараттың бит тізбегі көрсетілген. Ол, логикалық бір үшін жоғарғы деңгей потенциалымен және логикалық нөл үшін, нөлдік деңгей потенциалымен көрсетілген. Мұндай кодтау әдісі – *потенциал коды* деп аталады, ол компьютердің блоктары арасында мәліметтерді тасымалдау кезінде жиі қолданылады.

Амплитудалық модуляция кезінде (5.4*ә*-сурет) логикалық бір үшін жиілік таситын синусоида амплитудасының бір деңгейі, ал логикалық нөлге – басқа деңгейі таңдалады. Бұл әдіс тәжірибеде төменгі кедергі тұрақтылығы үшін таза түрде сирек қолданылады, бірақ модуляцияның басқа түрімен – фазалық модуляциямен қолданылады.

Жиіліктік модуляция кезінде (5.4*б*-сурет) негізгі мәліметтердің 0 және 1 мәндері әртүрлі жиілікті – f_0 және f_1 синусоидасымен тасылады. Бұл модуляция әдісі модемдерде күрделі схемаларды талап етпейді. Әдетте бұл 300 немесе 1200 бит/с төмен жылдамдықта жұмыс істейтін модемдерде қолданылады.

Фазалық модуляция кезінде (5.4*в*-сурет) 0 және 1 мәліметтер мәніне бірдей жиілікті сигналдарға сәйкес келеді. Бірақ, әртүрлі фазамен, мысалы 0 және 180 градустары немесе 0, 90,180 және 270 градустары.

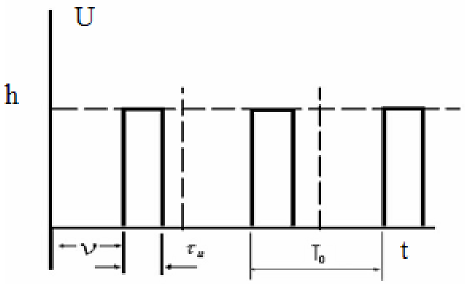
Жылдамдығы жылдам модемдерде жиі модуляцияның құрамдастырылған әдістері қолданылады, ал ереже бойынша ол амплитудалық пен фазалықтан құрамдалған.



5.4-сурет. Модуляциялардың диаграммасы

5.2.2. Импульстік модуляция

Импульстік модуляция кезінде [11] тасымалдағыш ретінде импульстер (формасы идеалдық жағдайда тік бұрышты) тізбегі болады. 5.5-сурет олардың параметрлері көрсетілген: h – деңгейі, τ_u – ұзақтылығы, ω – жиілігі, ν – фазасы.



5.5-сурет. Тік бұрышты импульстер тізбегі

Импульстер тізбегі төменгі қатар ретінде ұсынылуы мүмкін:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} h\,\delta_\lambda\,(t - k\frac{2\pi}{\omega} + \nu)\,,$$

мұнда $\delta_\lambda(t)$ – төмендегі қасиетпен сипатталған «тік бұрышты» функция:

$$\delta_{\lambda}(t) = \begin{cases} 1,\ \text{егер} & \dfrac{2k\pi}{\omega} \le t \le \dfrac{2k\pi}{\omega} + \tau_u \\ 0,\ \text{егер} & \dfrac{2k\pi}{\omega} + \tau_u \le t \le \omega \end{cases}.$$

Тасымалдағыштың параметрін өзгерте отырып, импульстік модуляцияның төрт түріне келеміз:

1. Амплитудалық – импульстік модуляция (АИМ):

$$h = h_0 + \Delta h \cdot x(t),$$

мұнда параметр Δh келесі қатынас бойынша ізделінеді

$$h_0 > \Delta h |X_{max}|.$$

2. Ендік – импульстік модуляция:

$$\tau_u = \tau_{u0} + \Delta\tau_u x(t),$$

параметр $\Delta\tau_u$

$$\tau_{u0} > \Delta\tau_u |X_{max}|.$$

3. Жиіліктік – импульстік модуляция:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cdot x(t).$$

4. Фазалық – импульстік модуляция:

$$\nu = \nu_0 + \Delta\nu \cdot x(t)$$

5.2.3. Модуляцияның цифрлық әдістері

Модуляцияның цифрлық әдістері [3,18] негізінде пайдалы үзілісссіз сигналдардың үш түрлі түрлендіреді:

1) дискреттеу;
2) кванттау;
3) кодтау.

Төртінші түрлендіру – модуляция, көп каналды жүйеде сигналдарды тасымалдағанда қолданылады.

Өте кең тараған цифрлық модуляциялар – импульстік – кодтау модуляциясы, дельта – модуляция және модуляцияның құрамдастырылған түрлері.

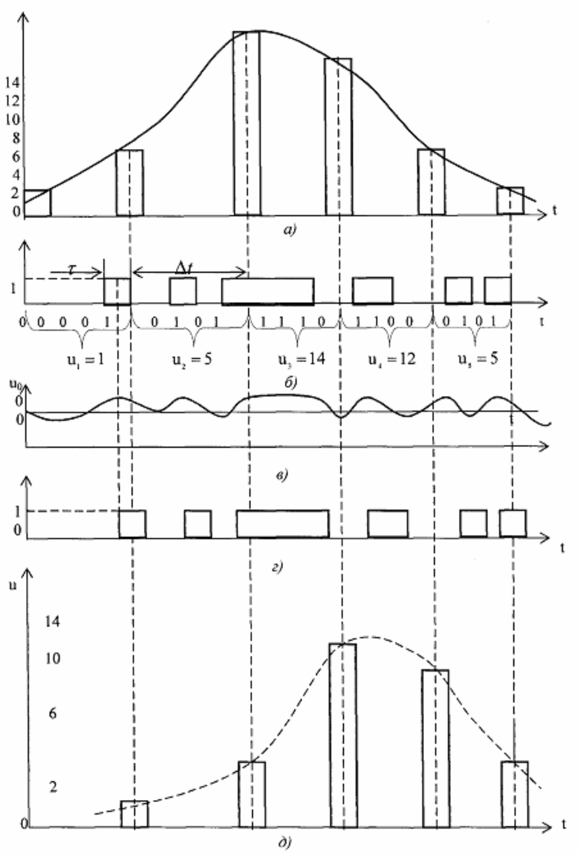
Ақпаратты цифрлық әдістермен тасымалдауыштардың құндылықтары:

1. Ақпаратты тасымалдауыштардың сапалылығына – аппаратуралардың тұрақсыз сипаттамалары тән, әлсіз әсер етуі.
2. Жоғарғы кедергі тұрақтылығы.
3. Байланыс жүйесіндегі байланыстарында сигналдардың қайта қалпына келтіру мүмкіндігі.
4. Әртүрлі хабарламаларда сигналдардың универсалды формалары (сөйлеу, телевизиялық бейнелер, дискретті мәліметтер, т.б.).
5. Бұл жүйелердің цифрлық – электрондық машинамен (ЦЭМ) және электронды автоматтық телефон станцияларымен жақсы келісуі.
6. Сигналдардың ЦЭМ арқылы тасымалдауы мен өндеуін автоматтау мүмкіндігі.

Модуляцияның цифрлық түрлері келесі аймақтарда қолданылады:

Автоматтық телефон станциялары (АТС) арасындағы бірігіп әрекет ететін қосынды желілерін тығыздау, электрондық АТС-пен интегралдық байланыс топшаларын құру, тура көрінетін радиорелейді байланыс желілері және алыс байланыс желілері, жерсеріктік байланыс жүйелері мен телеметрияда.

5.6-суретте импульстік-кодтық модуляция (ИКМ) принципімен құрылған жүйедегі уақыттық сигналдардың диаграммалары келтірілген.



5.6-сурет. ИКМ принципімен құрылған жүйедегі сигналдардың уақыттық диаграммалары

5.2.4. Модуляцияланған тербелістердің спектрлік анализі

Модуляцияланған сигналдың спектрінің кеңдігі, модуляцияның түріне байланысты. Соған сәйкес, типтері әртүрлі модуляциямен тасымалданған сигналдардың спектрлерін бағалау өте пайдалы. Өйткені, физикалық деңгейде тасымалдауыш сигналдардың потенциалдық кедергіге төзімділігі, оның спектрінің кеңділігімен анықталады [3,4].

Енді әртүрлі үздіксіз модуляция бойынша табылған периодты сигналдардың спектрлерін қарастырайық.

а) Амплитудалық – модуляцияланған гармоникалық сигнал:

$$x(t) = A(t)\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Амплитудалық модуляцияда сигналдың амплитудасы төмендегі белгілі заң бойынша өзгереді:

$$A(t) = A_0 + \delta_A \cdot f(t)$$

мұндағы A_0 – амплитуданың тұрақты құрамы; δ_A – модуляция бойынша амплитуданың ең үлкен өзгеруі; $f(t)$ – нормалданған функция (– 1-ден +1-ге дейінгі шектеулерде өзгереді).

Сигналдың модуляциялайтын параметрі (бұл жағдайда амплитуда) ақпараттың тікелей тасымалдаушы болуынан, онда f(t) функциясы тасымалдайтын хабарламаның уақыт бойынша өзгеру заңы болады.

Амплитудалық – модуляцияланған гармоникалық сигнал жалпы жағдайда уақыт функциясы түрінде

$$x(t) = A_0[1 + m_A \cdot f(t)]\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{5.4}$$

мұндағы $m_A = \dfrac{\delta_A}{A}$ – амплитудалық модуляцияның тереңдігі.

Егер, f(t) функциясы гармоникалық заң бойынша өзгерсін [6]

$$f(t) = \cos\Omega t,$$

сонымен қатар $\Omega \prec\prec \omega_0$.

Онда (5.4) өрнегін былай түрлендіреміз:

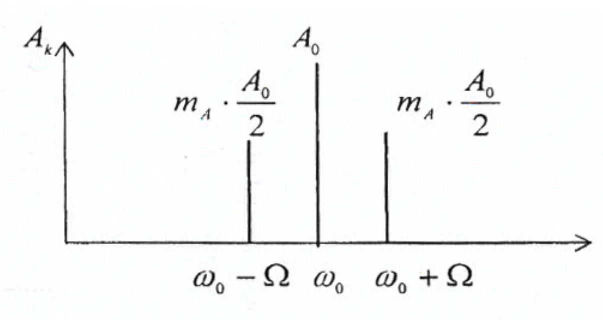
$$x(t) = A_0[1 + m_A \cos\Omega\, t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) +$$
$$+ \frac{A_0 m_A}{2} \sin[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0] + \frac{A_0 m_A}{2} \sin[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0] \cdot \quad (5.5)$$

(5.5) өрнегінде көрсетілгендей, модуляцияланған сигналдың спектрі үш гармоникалық құраушыдан құралады: негізгі ω_0 жиілік және екі бүйір жиілікпен – төменгі $\omega_0 - \Omega$ және жоғарғы $\omega_0 + \Omega$ (5.7*а*-сурет).

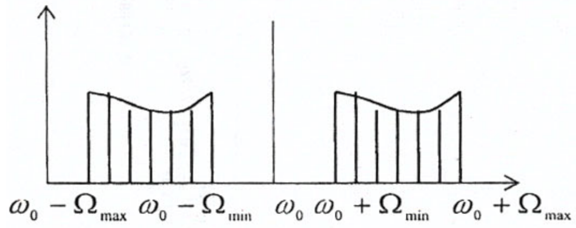
Сигнал спектрінің ені

$$\Delta\omega = 2 \cdot \Omega \ .$$

Егер гармоникалық сигналдың модуляциясы өте күрделі заңдылықпен, сонымен қатар орайжанауыш амплитудалық спектрі $\Omega_{мин}$ -нен $\Omega_{макс}$-ге жиілікті диапазонында болса, онда амплтудалық – модуляцияланған сигналдың спектрінде екі бүйір жиіліктің орнына, екі бүйір жолағы болатынын көрсетуге болады (5.7*ә*-сурет). Сонымен қатар, жиіліктің төменгі бүйір жол ағысы $\omega_{0к} - \Omega_{макс}, \omega_{0к} - \Omega_{мин}$ аралығында, ал жиіліктің жоғарғы бүйір жол ағысы $-\omega_{0к} + \Omega_{мин}, \omega_{0к} + \Omega_{макс}$ аралығында болады.



а)



ә)

5.7-сурет. Гармоникалық сигналдың спектрлері

Бұрмаланбаған сигналдарды тасымалдағанда, байланыс каналдың жиілігінің өткізгіш жол ағысы $2 \cdot \Omega_{макс}$ тең болады. Яғни, байланыс каналының өткізу жол ағысы модуляцияланған сигнал спектрінің ең жоғарғы жиілігінен екі есе көлемді.

Модуляцияланған сигналдың жиіліктік жол ағысын азайту үшін немесе байланыс каналының керекті өткізу жол ағысын, бір жол ағысын тасымалдауыш ретінде қолданады. Осылай тасымалдағанда фильтрлер арқылы таситын жиілік пен бүйір жол ағысының жиіліктері басылады, яғни тасымалдау $\Omega_{макс} + \Omega_{мин}$ жиіліктер жол ағысында өндіріледі. Бұл жағдай, байланыс каналдың қажетті жол ағысын екі есе қысқартуға мүмкіндік береді.

ә) Жиіліктік – модуляцияланған гармоникалық сигнал.

Жиіліктік модуляция кезінде сигналдың жиілігі жалпы түрде мына заң бойынша өзгереді:

$$\omega(t) = \omega_0[1 + m_\omega f(t)],$$

мұндағы ω_0 – тұрақты құраушының жиілігі; $m_\omega = \dfrac{\delta_\omega}{\omega_0}$ – жиіліктік модуляцияның тереңдігі; δ_ω – модуляцияда жиіліктің ең көп, көлемді өзгеруі (жиіліктің девиациясы); $f(t)$ – модуляцияның заңы.

Жиіліктік – модуляцияланған сигнал мынадай түрде бейнеледі:

$$x(t) = A_0 \sin\varphi(t) = A_0 \sin[\int_0^t \omega(t)dt + \varphi_0] =$$

$$= A_0 \sin[\omega_0 t + \omega_0 m_\omega \int_0^t f(t)dt + \varphi_0],$$

мұндағы $\varphi(t)$ – гармоникалық сигналдың ағымдағы фазасы; φ_0 – сигналдың бастапқы фазасы.

Егер, жиіліктің модуляциясы гармоникалық заң бойынша іске асқанда, жиіліктік – модуляцияланған сигнал былай жазылуы мүмкін:

$$x(t) = A_0 \sin[\omega_0 t + \omega_0 m_\omega \int_0^t \cos\Omega t\, dt + \varphi_0] = A_0 \sin(\omega_0 t + \beta \sin\Omega t) =$$

$$= A_0 \sin\omega_0 t \cos[\beta \sin \Omega t] + A_0 \cos \omega_0 t \sin[\beta \sin \Omega t], \quad (5.6)$$

мұнда $\beta = \dfrac{\delta_\omega}{\Omega}$ – жиіліктік модуляциясының индексі.

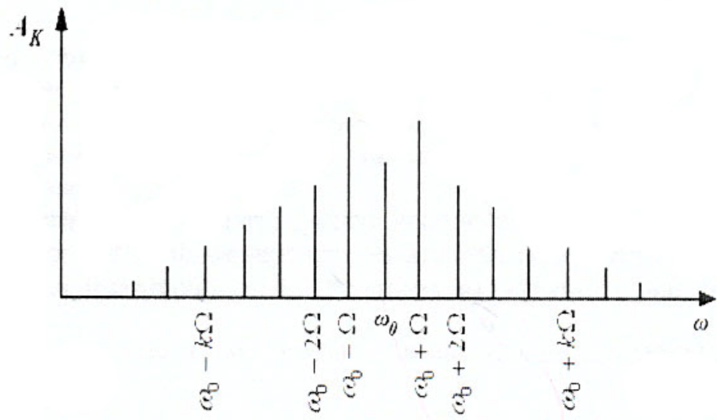
Осындай сигнал келесі түрде беріледі:

$$x(t) = A_0\{J_0(\beta) \sin \omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\beta)[\sin(\omega_0 + k\Omega)t +$$

$$+ (-1)^k \sin(\omega_0 - k\Omega t)]\},$$

мұндағы $J_0(\beta)$ – нөл ретті Бессель функциясы; $J_0(\beta)$ – *k* ретті Бессель функциясы.

Жиіліктік модуляцияланған сигналдың амплитудалық спектрі 5.8-суретте көрсетілген.



5.8-сурет. Жиіліктік – модуляцияланған сигналдың спектрі

Дискретті спектр тасымалдауыш ω_0 жиілігі және шектеусіз көлемді жоғарғы және төменгі бүйірлі жиіліктерден $\omega_0 + k\Omega$ және $\omega_0 - k\Omega$ құраушы тербелістерден тұрады.

Амплитуданың гармоникалық құраушысының таралуы, жиіліктік модуляцияның индексіне тәуелді. Ең аз жиіліктік модуляцияның индекс кезінде ($\beta \to 0$) жиіліктік модуляцияланған сигналдың спектрі, амплитудалық модуляцияланған сигналдар спектрінен мүлдем ерекшеленбейді. Ол үш гармоникалық құраушыдан құралады: негізгі ω_0 жиілік және екі бүйір жиілікпен – төменгі $\omega_0 - \Omega$ және жоғарғы $\omega_0 + \Omega$. Осы жағдайда байланыс каналдың өткізу жол ағысы $2 \cdot \Omega$ тең болуы керек.

Модуляция индексі β өсуімен, бүйір құраушылардың салмағы өсе бастайды да, соған сәйкес байланыс канал өткізу жол ағысы да үлкейеді. Егер, оны тек қана спектрлерде қарастырсақ, құраушылардың амплитуда 5 – 10%-дан кем емес модуляцияға дейін, тасымалдауыштың A_0 амплитудасынан, онда спектрдің сол құрамдарының ені, соған сәйкес байланыс каналының жол ағысы $2(\delta_\omega + \Omega)$ тең болады.

Үлкен көлемді модуляциялық индексте ($\beta >> 1$) спектрдің ені жиіліктік девиацияның екі еселенген $2\delta_\omega$ мағынасына тең, модуляциялаушы сигналдың Ω жиілігінен тәуелсіз.

б) Фазалық – модуляцияланған гармоникалық сигнал:

$$x(t) = A_0 \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \ .$$

Фазалық модуляцияда гармоникалық сигналдың фазасы модуляцияланатын $f(t)$ сигналдың заңы бойынша өзгереді

$$\varphi(t) = \varphi_0 [1 + m_\varphi f(t)],$$

мұнда $m_\varphi = \dfrac{\delta_\varphi}{\varphi_0}$ – фазалық модуляцияның тереңдігі. δ_φ – фазаның модуляцияда ең көп өзгеруі (фазалық модуляцияның индексі).

Фазасы модуляцияланған сигналды былай бейнелеуге болады:

$$x(t) = A_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0 m_\varphi f(t) + \varphi_0]. \qquad (5.7)$$

Жиіліктің шұғыл мағынасы фазаның уақыт бойынша $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, туындауы болғандықтан, онда фазалық модуляцияда ол мынадай түрде болуы керек:

$$\omega(t) = \omega_0 + \varphi_0 m \ \frac{df(t)}{dt} \ .$$

Сондықтан, фазалық модуляцияланған сигнал модуляциялаушы функциясы $\dfrac{df(t)}{dt}$ жиіліктік модуляцияланған сигналмен эквивалентті болып саналады.

Кейбір жағдайда, модуляциялаушы сигнал гармоникалық болғанда, фазалық модуляцияланған сигналдың толық фазасы төменгі теңдікпен анықталады:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 m_\varphi \cos \Omega t + \varphi_0 .$$

Енді фазалық модуляцияланған тербелістері мына өрнекпен жазылады:

$$x(t) = A_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0 m_\varphi \cos \Omega t + \varphi_0] \ .$$

Фазалық модуляцияланған тербелістердің жиіліктігінің шұғыл мағынасы:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 - \delta_\varphi \Omega \sin\Omega t = \omega_0 - \omega_\beta \sin\Omega t ,$$

мұнда $\omega_\beta = \dfrac{\delta_\varphi}{\Omega}$ – фазалық модуляцияланған тербеліс жиіліктігінің девиациясы.

Фазалық модуляцияланған (5.7) және жиілік модуляцияланған (5.6) тербелістерін салыстырған нәтижесі бойынша гармоникалық модуляциялаушы сигнал кезінде жиіліктік модуляцияланған тербелістер, фазалық модуляцияланған тербелістерден гармоникалық функциясының тек фазасымен айырылады. Ол жоғары жиілікті тербелістің толық фазасының өзгеруін анықтайды. Сондықтан, сигналдың сыртқы келбеті ол жиіліктік немесе фазалық модуляциялағанынан қорытынды жасауға болмайды.

Бірақ, жиіліктік Ω өзгергенде жиіліктік және фазалық модуляциялар арасында айырмашылықтар көріне бастайды. Жиіліктік модуляция кезінде жиілік девиациясы ω_β модуляцияланған сигналдың амплитудасымен тәуелді және модуляцияның Ω жиілігінен тәуелсіз. Индекс β мағынасы жиіліктің Ω жоғарлауы нәтижесінде төмендейді.

Фазалық модуляция кезінде модуляцияның индексі келесі өрнекпен анықталады:

$$\beta = \frac{\omega_\beta}{\Omega} = \delta_\varphi \ .$$

Яғни, ол модуляциялаушы сигналдың амплитудасына тәуелді, ал модуляцияның жиілігінен тәуелсіз.

Жалпы жағдайда фаза бойынша бір Ω жиілікпен модуляцияланған тербеліс спектрінің аналитикалық түрде Ω жиілікпен модуляцияланған жиіліктік, модуляцияланған сигналдың спектрі сияқты өрнектеледі.

Фазалық модуляцияланған сигналдың спектрі тасымалдауыш ω_0 жиілігі және шексіз көлемді жоғарғы және төменгі бүйірлі жиіліктерден $\omega_0 \pm k\Omega$ құраушы тербелістерден тұрады. Бүйірлі құрамының амплитудалары тек қана модуляцияның индексіне тәуелді. Ең аз фазалық модуляцияның индексі кезінде фазалық модуляцияланған сигналдың спектрі үш гармоникалық құраушыдан құралады: негізгі ω_0 жиілікпен және екі бүйір жиілікпен – төменгі $\omega_0 - \Omega$ және жоғарғы $\omega_0 + \Omega$. Спектрдің ені 2Ω тең. Егер $\beta >> 1$ спектрдің тәжірибелік ені екі еселенген жиіліктің девиациясына тең $\Delta\omega = 2\omega_в$, бірақ модуляциялаушы сигналдың амплитудасы мен жиілігінен тәуелді. Жиіліктік модуляциялаған сигналы спектрінің тәжірибелік ені, бұл жағдайда тек қана модуляциялаушы сигналдың амплитудасынан тәуелді.

Фазалық және жиіліктік модуляцияланған сигнал спектрінің тәжірибелік ені β рет сол жиілікте амплитудалық модуляцияланған сигналдың спектрінен кең.

5.4. Сигналдың, каналдың физикалық сипаттамаларын келістіру

Үздіксіз канал үш негізгі параметрмен сипатталады [9]:

а) сигналды тасылмалдау уақыты $T_к$;

ә) сигналды өткізу жол ағысының ені $F_к$;

б) каналда сигналдың, кедергілерден жоғарылығы $H_к$.

Сонда, каналдың көлемі (кеңдігі):

$$V_к = T_к \cdot F_к \cdot H_к.$$

Тасылатын сигнал, сол сияқты үш параметрмен ерекшеленеді:

а) ұзақтылығы T_c;

ә) спектрінің ені F_c;

б) кедергіден жоғарылығы H_c.

Сигналдың кедергіден жоғарылауы былай анықталады:

$$H_C = \log\left(\frac{P_u}{P_ç}\right),$$

мұндағы P_u – тасымайтын сигналдың орташа қуаттылығы;

$P_ç$ – каналдағы кедергілердің орташа қуаттылығы.

Сигналдың кеңдігі келесі өрнекпен анықталады:

$$V_C = T_C \cdot F_C \cdot H_C \cdot$$

Сигналды бұрмалайтын канал арқылы тасымалдаудың қажетті шарты былай анықталады [2,3]:

$$V_C \le V_K.$$

Бұрмалай тасымалдаудың жеткілікті шарты:

$$T_C \le T_K;$$

$$F_C \le F_K;$$

$$H_C \le H_K.$$

Егер $F_C > F_K$, онда спектр ені кішіреюі үшін сигналдың ұзақтылығын үлкейту керек. Ал егер $T_C > T_K$, онда сигналмен каналдың мінездемелерін сигнал спектрінің кеңеюі арқасында келістіреміз.

5.2-мысал. Магнитты лентаға жазылған телефондық сигнал спектрінің ені 3 кГц, өткізу жол ағасы 300 Гц байланыс каналы арқылы тасымалдау керек. Бұл сигналды қайта құрған кезде он есе кіші жазылған жылдамдықпен тасымалдау қажет. Оның, сонымен қатар, бастапқы сигнал спектрінің барлық жиіліктері 10 есе қысқарады. Бірақ, сонша рет тасымалдау да уақыт ұзарады. Қабылдаған кезде сигнал магниттік лентаға жазылып, содан кейін 10 есе көп жылдамдықпен ойнатылады. Каналдың өткізу жол ағысы сигнал спектрінің енінен үлкен болған жағдайда, сигналдарды бастапқы құрастырудан да тезірек тасымалдауға болады.

Сонда ол өткізу жол ағысына динамикалық диапазоны "алмасу" үшін жағдай туғызады. Мысалы, кеңжолағы, кедергіге төзімді модуляцияның түрлерін қолдана отырып, 60дБ динамикалық диапазонды хабарламаларды, сигнал тек қана кедергіні 20дБ асыратын каналдар арқылы тасымалдауға болады. Сонымен қатар, каналдың өткізу жол ағысы тасымалдауыш хабарламаның спектрінен бірнеше есе кең.

5.5. Көп каналды байланыс жүйелері

Бірнеше хабарламалар бір ортақ байланыс жолы арқылы таралса, онда байланыс жүйе – *көп каналды* болады.

Көп каналды байланыс жүйесінде бірнеше хабарламаны бір байланыс жолы арқылы таратады [6,16]. Осындай көп каналды жүйенің структуралық схемасы 5.9-суретте көрсетілген .

5.9-сурет. Көп каналды байланыс жүйесі

Бірнеше ақпарат көздерінен хабарламалары $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, … , $\lambda_n(t)$ модуляторларымен M_1 , M_2 , … , M_n электрлік $S_1(t)$, $S_2(t)$, … , $S_n(t)$ сигналдарға өрнектеледі. Олар тығыздалу (бірігу) құрылғысында байланыс жолымен тасымалдайтын біріккен S(t) топтық сигналға айналдырылады.

Кедергі $\eta(t)$ әсер ету нәтижесінде топтық S(t) сигнал бұрмаланады, содан кейін бөліну аппаратурасының кірісіне бұрмаланған топтық $\hat{S}(t)$ сигнал келеді. Топтық $\hat{S}(t)$ сигналдардан жеке $\hat{S}_1$ (t), $\hat{S}_2$ (t), … , $\hat{S}_n$ (t) сигналдар көшірмелері шығарылады. *Оларды* каналдың $Д_1$, $Д_2$, … , $Д_n$ демодуляторлары тиісті хабарламалардың $\hat{\lambda}_1(t), \hat{\lambda}_2(t), \ldots, \hat{\lambda}_n(t)$ көшірмелерін қайта құрады.

Сызықты сигналдардың бөліну теориясының элементтерін қарастырайық, оның негізін 1935 жылы Д.В. Агеев қалады.

Мына түрде *i* – каналдық сигналды белгілейміз:

$$S_i(t) = a_i X_i(t),$$

мұндағы a_i – тасымалдайтын хабарламаны бейнелейтін коэффициент; $X_i(t)$ – тасымалдауыш – сигнал. Коэффициент $a_i(t)$ функция $X_i(t)$ қарағанда «бәсеңдеу» болғандықтан, өзгеру интервалында $a_i(t) = a_i$ санауға болады.

Сызықты тасымалдағыш сигнал

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(t),$$

мұндағы n – каналдардың саны.

Бұл сигнал байланыс жолы арқылы тасымалдау процесінде $\varsigma(t)$ кедергі әсерінен, идеалдық қасиеттерінен ауытқу болады. Сондықтан, көп каналды жүйеде қабылдағышының кірісіндегі сигнал

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(t) + \xi(t) \cdot \qquad (5.8)$$

Көп каналды жүйе жұмысының ерекшелігі – өтетін $\varsigma(t)$ кедергілердің болуы, ол і – ші канал қуаттылығы бөлігінің, j-ші каналына, негізінде құрылғының жетілмегендігінен өткенін көрсетеді.

Қабылданған (5.8) сигнал мен сызықты тасымалдауыш сигналдың көбейтіндісінің интегралы

$$\int_0^T Z(t)\, X_i(t)dt = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2(t)dt + \int_0^T \xi(t) X_i(t)dt \cdot$$

Егер тасымалдағыш – сигналдар ортонормалдаған функцияның жүйесін құрса, онда

$$\int_0^T Z(t)\, X_i(t)dt = a_i + \int_0^T \xi(t) X_i(t)dt \cdot \qquad (5.9)$$

(5.9) формуладан ортонормалдаған тасымалдағыш – сигналдар және сызықты оптимальды өндіруін қолданғанда, сигнал/шу қатынасымен максимальды болғандықтан, пайдалы a_i сигналдарын бөліп алуға мүмкіндік береді. Шудың қуаты сигналдардың бөліну тәсілдеріне байланысты.

Тасымалдағыш – сигналдар ортонормалдаған шарты жеткілікті, бірақ қажетті емес. Сигналдардың қажетті бөліну тасымалдағышы – сигналдардың сызықты тәуелсіздігінің қатаң емес шарты болып саналады

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i(t) \equiv 0, \qquad (5.10)$$

ол барлық a_i коэффициенттері бір мезгілде нөлге тең болғанда орындалады. Бұл шарттың физикалық мағынасы (5.8) формулада анықталады. Егерде (5.10) орындалмаса, онда қабылданған сигнал кедергіден тұруы мүмкін. Өйткені, пайдалы сигналдар тасымалдағанда «өзара компенсацияланып» қалады. Бұл жағдай, (5.10) қанағаттандыртын $a_i = 0$ коэффициенттері табылғанда болады.

(5.9) формуланың талдауы бойынша көп каналды жүйенің қабылдағышы белгілі тасымалдағыш – сигналдарды пайдалана отырып қабылданған сызықты сигналаға, оптимальдықкорреляциялық өңдеуді орындауы қажет. Бұл сигналдарды формасы бойынша бөлудің жалпы әдісі болады. Бұл әдістің жеке жағдайларлары – жиіліктік, уақыттық, фазалық, кодтық бөліну, т.б. болып саналады.

1. Каналдың сигналдарының жиілікті бөлінуі. Канал сигналдардының жиілікті бөлінуі кезінде тасымалдағыштардың жиіліктері әртүрлі болады. Сондықтан, каналдық (модуляцияланған) сигналдар жалпы байланыс жол ағысында қиыспайтын жиілік жол ағысында орналасады және олар ортогональды. Қабылдағышта каналдық сигналдар жолақтық фильтрлер көмегімен ыдырайды. Фильтрдің күйге келтіру жиіліктері тасымалдаушылардың жиіліктеріне сәйкес келеді, айқындылық жол ағысы – модуляцияланған сигналдардың спектрінің еніне сәйкес.

Оңтайлы бөлінуді жүргізу үшін екі жағдайдың орындалуы қажет: тасымалдағыш сигналдардың жиіліктері әртүрлі болуы және модуляцияланған сигнал спектрінің еніне тең немесе үлкен интервалға таратылған; сызықты фильтрдің негізгі көрсеткішінің ауытқуы, бөліну сапалығына әсер етпеуі керек. Сондықтан, каналдар арасында қорғайтын жиілік интервалын қалдыру қажет.

Каналдық тасымалдаушыларды модуляциялау үшін барлық белгілі әдістерді қолдануға болады. Байланыс торабы жиіліктерінің жолақтарын бір жолақты модуляцияда үнемдірек қолданады. Өйткені, бұл жағдайда модуляцияланған сигнал спектрінің ені, пайдалы сигналдың спектрінің еніне тең.

Жиілікті бөлінудің негізгі артықшылығы: іске асырудың оңайлығы, кедергіге жоғары төзімділігі, қандайда болса да, егер байланыс жолының жалпы жол ағысы мүмкіндік берсе, каналдың санын ұйымдастыру қабілеттілігі мен оның ар қарай өркендеуі. Кемшіліктері: каналдар санының көбеюінен, жиілік жүйесі қолданатын жол ағымдарының болмай кеңеюі, «фильтрлеуге» кеткен шығындар үшін жиілік жолақтарын қолдану кезіндегі төменгі нәтижесі, негізінде көп фильтрден құрылғандықтан, аппараттың үлкендігі мен қымбаттығы.

2. Каналдық сигналдардың уақытша бөлінуі. Көп каналды каналдық сигналдарды уақыт бойынша бөлінетін жүйелер – дискретті және аналогты ақпаратты тасымалдау кезінде кеңінен қолданылады. Уақыт бойынша бөлінудің маңыздылығы – каналдардың кезекпен бір жиілікті пайдалануы. Бұл тек қана импульстік модуляция кезінде қолданылады, өйткені бір канал импульстерінің скважинасының кең болғандықтан, басқа каналдардың импульстерін орналастыруға болады.

Көп каналды каналдық сигналдарды уақыт бойынша бөлінетін жүйелердің тасымалдауыш және қабылдағыш құрылғыларының электрондық ауыстырушылары. Олардың міндеттері – каналдардың тасымалдауышымен, қабылдағышты периодты және синхронды түрде байланыс жолына қосып отыру.

Каналдық сигналдардың F жиілігінің қайталануы В.М. Котельников теориясына сәйкес таңдалынады. Құрылғылардың негізгі қасиеттерінің көмегімен ол мынаған тең:

$$F = (2,5 \div 5)\, F_{max} \,,$$

мұндағы F_{max} – пайдалы сигналдың жоғарғы шекаралас жиілігі.

Ауыстырғыштардың жұмысын синхрондау үшін қосымша синхрондаушы импульстер жіберіледі, оларға бір немесе бірнеше каналдар бөлінеді. Уақытша бөлінгенде импульстік модуляцияның әр түрі қолданылады: фазалық – импульстік, енді – импульстік, импульсті – кодтық, дельта – модуляция, т.б. Радиожолын қолданған кезде екілік модуляция қолданылады, мысалы ФИМ – АМ, ФИМ – ЖМ, ИКМ – ЖМ, ИКМ – БФМ.

Уақыт бойынша бөлінетін жүйелерде каналда жолақты фильтрлер болмайды, оның құны жиілікті бөліну құнының 40% жетеді. Каналдың уақытша бөліну кезінде өтпелі станцияларда олардың сандарына ешқандай кедергісіз және тасымалдауды жоғарғы сапада сақтау үшін, жай ғана каналдардың ерекшеленуі қажет. Осы жүйелердің аппаратураларының көлемдері мен салмақтары кіші болады. Өйткені микромодульдер, интегралды құрылғылар, цифрлық есептеу техникасы элементтерінің кең қолданысының кеңеюіне байланысты.

Негізгі кемшілігі – тасымалдауыш және қабылдаушы каналдардың коммутаторларының синхронды жұмыс жасауы көп санды каналдар аппараттарының жасалу қиындығы, каналдар санының көбеюімен, орналасатын жолағының жиілігінің ұлғаюуы және ол тасымалдаушы импульстердің ұзақтығының қысқаруына байланысты. Жиілік бойынша бөліну жүйелерімен салыстырғанда, оның жолағының ұлғаюуы, тасымалдауыштың импульстік әдістерінің кедергіге төзімділігін жоғарылатады (ФИМ, ИКД, ДМ), бұл уақытша бөлінудің негізгі артықшылығы болады.

Уақытша бөліну жүйелерінің ерекшеліктері – оларды телефонияда кең қолдануға әкелді. Соның ішінде импульстік – кодтық модуляциясы мен уақытша бөліну каналында (ИКМ – УБ) ерекшеленеді. Мұндай жүйелерде сөйлеу сигналдарын жиыстырамыз. Осының нәтижесінде жоғарғы сапасымен қамтамасыз ететін квантау дәрежесінің жалпы саны, күрт төмендейді. Сөйлеу ақпаратының тасымалдауының біркелкі емес кванттalғанда сапалығы ерекше $N_i = 2^7 = 128$ деңгейге жеткенде болады. Ал жақсы сапа – 64 және қанағаттандырылатын сапа – 32 деңгейлері. Қазіргі жүйелерде 8 – разрядтық код қолданылады, оның жетеуі ақпараттық импульстер, ал сегізінші – автоматты телефон станцияларының басқару сигналдарын тасымалдауға қолданылады.

ИКМ – УБ жүйелері қалалық және қалааралық телефон желісінің өзара бөлінуінде қолданылады. Оларды – сөйлеу, теледидарлық, видеотеледидарлық сигналдар мен жоғарғы мәліметтерді жылдамдықпен тасымалдауға қолданады. Сегіз белгілі кодта ұзындығы бір машиналық буынға (байтқа) тең кодтық комбинациялар бар. Сондықтан да, ИКД – УБ жүйелері ЦЕМ-дің кіретін және шығатын құрылғыларымен жақсы түйіндеседі. ИКМ каналдарда дискреттік ақпаратты тікелей синхронды кіргізу, стандартты телефон каналдарының тасымалдауыш жылдамдығын 64 кБодқа жеткізуге мүмкіндік береді. Жәй ақпаратты кіргізгенде оны екі рет түрлендіреді (аналогтық-цифрлық, цифрлық-аналогтық), оның максимальдық жылдамдығы 10 кБод шамасында.

3. Сигналдардың жиілікті – уақыттық бөлінуі. Мұндай жүйелердің жиіліктікте қандай артықшылықтары болса, уақыттық бөлінуде де сондай артықшылықтары бар. Оларды келесі процесс бойынша қалыптастырады: ең алдымен уақыт бойынша бөледі, ал кейін қалыптасқан канал топтарының жүйеге енуімен жиілікті бөлінуді береді. Онда әрбір топ өзінің тербелісімен жұмыс жасайды. Сонымен, каналдар жүйесінің сандары жоғарылайды, бірақ бөліну жүйелерімен салыстырғанда аппаратура айтарлықтай оңайланады.

4. Формасы бойынша каналдық сигналдардың бөлінуі – шу сияқты сигналдары бар кең жолақты байланыс жүйелерінің құрастыруы негізіне жатады. Әртүрлі форманың шу сияқты ескертпе дабылдарын қанағаттандырады. Тасымалдау үшін байланыс жолының ылғи бір жиіліктерінің жолағын қолдануға және сол уақыт интервалдарында сигналды тасымалдауға болады. Сондықтан да, байланыс жолының қолданылуының оңтайлылығы айтарлықтай өседі. Каналдық сигналдардың қабылдағышта бөлінулері үшін өте жиі, шу сияқты сигналдардың квазиортогональдықтылығы пайдаланылады.

5. Каналдық сигналдардың кодтық – адрестік бөлінуі жиілік пен уақыт бойынша бөліну, сигналдардың форма бойынша бөліну артықшылықтарының қосындысын береді. Кодтық – адресті бөліну жүйесінде көп жағдайда БУЖ радиожолын пайдаланғанда, яғни әрбір абонентке (стансияға) белгілі бір адрес беріледі. Ол жүйенің барлық абоненттеріне белгілі кодтық тізбе болып көрсетіледі. Абоненттер бір мезгілде ортақ жиілік жол ағысын қолданады, кодтық – адресті бөлетін жүйелерді сондықтан – *азат қолайлы жүйелер* деп атайды. Абоненттерде кез келген уақытта байланыс бар және басқа абоненттердің жолымен қолдануы кезінде де қолдана алады. Бір уақытта жұмыс істейтін абоненттер санының көбеюінің тоқтатып отырған негізгі факторы, кедергілер деңгейлерінің өзара өсуі болып саналады.

Тасымалдағыш сигналдар ретінде жоғары корреляциялық қасиетті және алдымен өзара корреляциялық функцияның көрсеткіштері төмен мағыналы сигнал ансамбльдері қолданылады. Мұндай сигналдар – *квазиортогональды* деп аталады. Кодтық – адресті бөліну жүйесінде үздіксіз, сондай-ақ дискретті сигналдар қолданылады. Бұл – үздіксіз сигналдарды жүйелерде шу сияқты немесе екілік псевдокездейсоқ тізбектер.

Көптеген кодтық – адресті жүйелерінде сигналдар ретінде жиілікті – уақыттық матрицаның элементтер жиынтығы қолданылады. ФИМ немесе ДМ арқылы үздіксіз сигналдардар ұзақтығы анықталған импульс тізбегіне түрлендіреді. Тасымалдағыштың (шифратор) тулғаушы құрылғысы әрбір екілік ақпараттық символды дискреттік адреске кодтайды – ол әртүрлі жиіліктікпен толтырылған бірнеше (үш-төрт) импульстер жинағы. Шифратордың басқару параметрлері ретінде, импульстер арасындағы уақыттық интервалдар және адрестік тізбектегі видеоимпульстерімен толтыру жиіліктері болады. Олар каналдық сигналдардың бөлінуі кезінде селекцияның параметрлері рөлін атқарады. Адресті тізбекте импульстердің уақыттық – жиіліктік комбинацияларының жалпы саны бірнеше мыңға жетеді (абоненттердің жалпы саны).

Қабылдағышта демодулятор алдында адресті тізбектің дешифраторы тұрады, ол тек қана өз адресінің ақпараттық сигналдарын белгілейді. Демодулятор белгіленген ақпараттық импульстерді пайдалы сигналдарға өрнектейді. Қабылдағыш цифрлық келісілген фильтр сияқты жұмыс істейді.

Кодты – жиілікті бөлінген жүйелердің басты ерекшелігі – жоғарғы оңтайлылық пен байланыстың сенімділігі, жиілікті бөлінген жүйелермен салыстырғанда аппаратураның арзандығы, кедергілерге жоғарғы төзімділігі.

Бақылау сұрақтары.

1. Модуляция және демодуляция процедураларының мазмұны?
2. Амплитудалық – модуляцияланған тербелістің өрнегін жазып алыңыз.
3. Жиілік – модуляцияланған тербеліс үшін өрнекті келтіріңіз.

4. Импульстік модуляция түрлерінің ерекшеліктері?
5. Ендік – импульстік модуляцияланған тербеліс үшін өрнекті жазып алыңыз.
6. Келесі операциялардың мағынасын түсіндіріңіз: уақыт бойынша дискреттеу, деңгей бойынша кванттау.
7. Модуляцияның цифрлық әдістерінің кедергіге өте шыдамдылығының себебі не?
8. Модуляцияның цифрлық әдістерінің қолдану аймағын атаңыз.
9. Амплитудалық модуляцияда модуляциялайтын сигналдың спектрі қалай өзгереді?
10. Жиілік модуляцияда модуляциялайтын сигналдың спектрі қалай өзгереді?
11. Кедергіге төзімділігі және іске асыру күрделілігі бойынша жиілік пен амплитудалық модуляцияның әдістерін салыстырыңыз.
12. Каналда сигналдың бұрмалаусыз тасымалдау шарттарын анықтаңыз.
13. Каналдардың бөлінуіне қандай принциптер қолданылады?
14. Хабарламалардың ақпарат көзінің негізгі ақпараттық сипаттамаларын атаңыз.
15. Дискреттік және үздіксіз ақпарат көзінің өнімділігі қалай анықталады?
16. Дискреттік және үздіксіз каналдардың тасымалдаушы жылдамдығы мен өткізу қабілеттілігі қалай анықталады?
17. Ақпарат көзімен байланыс каналының статистикалық сипаттамалары қалай келістіріледі?

БИБЛИОГРАФИЯЛЫҚ ТІЗІМ

1. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.

2. *Борисов Ю.П., Пенин П.И.* Основы многоканальной передачи информации. – М.: Связь, 1967. – 435 с.

3. *А. В. Крайников* и *др.*, Вероятностные методы в вычислительной технике: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1986. – 312 с.

4. *Галлагер Р. Д.* Теория информации и надежная связь. – М.: Советское радио, 1974. – 738 с.

5. *Горелов Г.В., Фомин А.Ф.* и *др.* Теория передачи сигналов на железнодорожном транспорте. – М.: Транспорт, 1999. – 415 с.

6. *Гурский Е.И.* Теория вероятностей с элементами математической статистики: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1971.– 328 с.

7. *Дмитриев В.И.* Прикладная теория информации. – М.: Высшая школа, 1989. – 328 с.

8. *Душин В.К.* Теоретические основы информационных процессов и систем. – М: Дашков и К, 2001. – 348 с.

9. *Зюко А.Г.* Помехоустойчивость и эффективность систем связи. – М.: Связь, 1972. – 359 с.

10. *Зюко А.Г.* Элементы теории передачи информации. – М.: Техника, 1969. – 298 с.

11. *Игнатов В.А.* Теория информации и передачи сигналов. Учебник для высших учебных заведений. – М.: Радио и связь, 1991: – 279 с.

12. *Коган И.М.* Прикладная теория информации. М.: Радио и связь, 1981 – 216 с.

13. *Лебедев Д.С.* Учеб. пособие по курсу «Основы теории информации». – М.: МГУ, 1966. – 160 с.

14. *Липкин И.А.* Основы статистической радиотехники, теории информации и кодирования. – М.: Радио и связь, 1978. – 239 с.

15. Основы кибернетики. Теория кибернетических систем /Под ред. К.А. Пупкова. – М.: Высшая школа, 1976. – 408 С.

16. *Пенин П.И.* Системы передачи цифровой информации. – М.: Радио и связь, 1976. – 366 с.

17. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1966. – 883 с.

18. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. – С-Пб.: Питер, 2003. – 608 с.

19. *Советов Б.Я.* Теория информации. – Л.: ЛГУ, 1985. – 172 с.

20. *Советов Б.Я.* Информационные технологии: Учебник для вузов по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления». – М.: Высшая школа,1994. – 368с.

21. *Солодов А.В.* Теория информации, ее применение к задачам автоматического управления и контроля . – М.: Наука, 1967.– 432 с.

22. *Тарасенко Ф.П.* Введение в курс теории информации. Томск: ТГУ, 1963. – 240 с,

23. *Темников Ф.Е., Афонин В.А., Дмитриев В.И.* Теоретические основы информационной техники. – М.: Энергия, 1979. –512 с.

24. *Финк Л.М.* Теория передачи дискретных сообщений. – М.: Советское радио, 1970. –727 с.

25. *Харкевич А.А.* Борьба с помехами. – М.: Физматгиз, 1965. – 276 с.

26. *Хартли Р.* Передача информации. Теория информации и ее приложения /Под ред. А.А. Харкевича. – М.: Физматгиз, 1959. – 350 с.

27. *Хэмминг Р.В.* Теория кодирования и теория информации. – М.: Радио и связь, 1983. – 174 с.

28. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Издательство иностранной литературы,1963. – 820 с.

29. *Ю.М. Яневич*. Задачи приема сигналов и определения их параметров на фоне шумов: Курс лекций. / С-Пб.:1985. – 300 с.

1-қосымша

1-ден 128-ге дейінгі сандардың екілік логарифмдері

x	$log_2 x$	x	$log_2 x$	x	$log_2 x$	x	$log_2 x$
1	0,00000	33	5,04439	65	6,02237	97	6,59991
2	1,00000	34	5,08746	66	6,04439	98	6,61471
3	1,58496	35	5,12928	67	6,06609	99	6,62936
4	2,00000	36	5,16993	68	6,08746	100	6,65386
5	2,32193	37	5,20945	69	6,10852	101	6,65821
6	2,58496	38	5,24793	70	6,12928	102	6,67242
7	2,80735	39	5,28540	71	6,14975	103	6,68650
8	3,00000	40	5,32193	72	6,16992	104	6,70044
9	3,16993	41	5,35755	73	6,18982	105	6,71425
10	3,32193	42	5,39232	74	6,20945	106	6,72792
11	3,45943	43	5,42626	75	6,22882	107	6,74147
12	3,58496	44	5,45943	76	6,24793	108	6,75489
13	3,70044	45	5,49185	77	6,26679	109	6,76818
14	3,80735	46	5,52356	78	6,28540	110	6,78136
15	3,90689	47	5,55459	79	6,30378	111	6,79445
16	4,00000	48	5,58496	80	6,32193	112	6,80732
17	4,08746	49	5,61471	81	6,33985	113	6,82018
18	4,16993	50	5,64386	82	6,35755	114	6,83289
19	4,24793	51	5,67242	83	6,37504	115	6,84549
20	4,32193	52	5,70044	84	6,39232	116	6,85798
21	4,39232	53	5,72792	85	6,40939	117	6,87036
22	4,45943	54	5,75489	86	6,42626	118	6,88264
23	4,52356	55	5,78136	87	6,44294	119	6,89482
24	4,58496	56	5,80735	88	6,45943	120	6,90689
25	4,64386	57	5,83289	89	6,47573	121	6,91886
26	4,70044	58	5,85798	90	6,49185	122	6,93074
27	4,75489	59	5,88264	91	6,50779	123	6,94252
28	4,80735	60	5,90689	92	6,52356	124	6,95420
29	4,85798	61	5,93074	93	6,53916	125	6,96578
30	4,90689	62	5,95420	94	6,55459	126	6,97728
31	4,95420	63	5,97728	95	6,56986	127	6,98869
32	5,00000	64	6,00000	96	6,58496	128	7,00000

2-қосымша

Екілік оқиғаның p және q ықтималтықтарының
H энтропиясы

p	$\log_2 p$	$p \log_2 p$	H	$q \log_2 q$	$\log_2 q$	q
0,0005	10,965784	0,005483	0,006204	0,000721	0,000722	0,9995
0,0010	9,965784	0,009966	0,011408	0,001442	0,001443	0,9990
0,0015	9,380882	0,014071	0,016234	0,002162	0,002166	0,9985
0,0020	8,965784	0,017932	0,020814	0,002882	0,002888	0,9980
0,0025	8,643956	0,021610	0,025212	0,003602	0,003611	0,9975
0,0030	8,380882	0,025142	0,029464	0,004322	0,004335	0,9970
0,0035	8,158429	0,028555	0,033595	0,005041	0,005058	0,9965
0,0040	7,965784	0,031863	0,037622	0,005759	0,005782	0,9960
0,0045	7,795859	0,035081	0,041559	0.006477	0,006507	0,9955
0,0050	7,643856	0,038219	0,045415	0,007195	0,007232	0,9950
0,0055	7,506353	0,041285	0,049198	0,007913	0,007957	0,9945
0,0060	7,380822	0,044285	0,052915	0,008630	0,008682	0,9940
0,0065	7,265345	0,047225	0,056572	0,009347	0,009408	0,9935
0,0070	7,158429	0,050109	0,060172	0,010063	0,010134	0,9930
0,0075	7,058894	0,052942	0,063721	0,010780	0,010861	0,9925
0,0080	6,955784	0,055726	0,067222	0,011495	0,011588	0,9920
0,0085	6,878321	0,058466	0,070676	0,012211	0,012315	0,9915
0,0090	6,795859	0,061163	0,074088	0,012926	0,013043	0,9910
0,0095	6,717857	0,063820	0,077460	0,013640	0,013771	0,9905
0,0100	6,643856	0,066439	0,080793	0,014355	0,014500	0,9900
0,0110	6,506353	0,071570	0,087352	0,015782	0,015958	0,9890
0,0120	6,380822	0,076570	0,093778	0,017208	0,017417	0,9880
0,0130	6,265345	0,081449	0,100082	0,018633	0,018878	0,9870
0,0140	6,158429	0,086218	0,106274	0,020056	0,020340	0,9860
0,0150	6,058894	0,090883	0,112361	0,021477	0,021804	0,9850

2 - қосымшаның жалғасы

p	$\log_2 p$	$p\log_2 p$	H	$q\log_2 q$	$\log_2 q$	q
0,0160	5,965784	0,095453	0,118350	0,022897	0,023270	0,9840
0,0170	5,878321	0,099931	0,12248	0,024316	0,024737	0,9830
0,0180	5,795859	0,104325	0,130059	0,025733	0,026205	0,9820
0,0190	5,717857	0,108639	0,135788	0,027149	0,027675	0,9810
0,0200	5,643856	0,112877	0,141441	0,028563	0,029146	0,9800
0,0210	5,573467	0,117043	0,147019	0,029976	0,030619	0,9790
0,0220	5,506353	0,121140	0,152527	0,031388	0,032094	0,9780
0,0230	5,442222	0,125171	0,157969	0,032797	0,033570	0,9770
0,0240	5,380822	0,129140	0,163346	0,034206	0,035047	0,9760
0,0250	5,321928	0,133048	0,168661	0,035513	0,036526	0,9750
0,0260	5,265345	0,136899	0,173917	0,037018	0,038006	0,9740
0,0270	5,210897	0,140694	0,179116	0,038422	0,039488	0,973D
0,0280	5,158428	0,144436	0,184216	0,040972	0,040972	0,9720
0,0290	5,107803	0,148126	0,189352	0,041226	0,042457	0,9710
0,0300	5,058894	0,151767	0,194392	0,042625	0,043943	0,9700
0,0310	5,011588	0,155359	0,199382	0,044023	0,045431	0,9690
0,0320	4,965784	0,158905	0,204325	0,045420	0,046921	0,9680
0,0330	4,921390	0,162406	0,209220	0,046815	0,048412	0,9670
0,0340	4,878321	0,165863	0,214071	0,048208	0,049904	0,9660
0,0350	4,836501	0,169278	0,218878	0,049600	0,051399	0,9650
0,0360	4,795859	0,172651	0,223642	0,050991	0,052895	0,9640
0,0370	4,756331	0,175984	0,228364	0,052380	0,054392	0,9630
0,0380	4,717857	0,179279	0,233046	0,053767	0,056891	0,9620
0,0390	4,680382	0,182535	0,237688	0,055153	0,057392	0,9610
0,0400	4,643856	0,185754	0,242292	0,056553	0,058894	0,9600
0,0410	4,608232	0,188938	0,246858	0,057921	0,060397	0,9590
0,0420	4,573467	0,192086	0,251388	0,059303	0,061902	0,9580

2-қосымшаның жалғасы

p	$\log_2 p$	$p \log_2 p$	H	$q \log_2 q$	$\log_2 q$	q
0,0440	4,506353	0,198280	0,260341	0,062061	0,064917	0,9560
0,0450	4,473931	0,201327	0,264765	0,063438	0,066427	0,9550
0,0460	4,442222	0,204342	0,269156	0,064814	0,067939	0,9540
0,0470	4,411195	0,207326	0,273514	0,066188	0,069452	0,9530
0,0480	4,380822	0,210279	0,277840	0,067560	0,070967	0,9520
0,0490	4,351074	0,213203	0,282134	0,068931	0,072483	0,9610
0,0500	4,321928	0,216096	0,286397	0,070301	0,074001	0,9500
0,0520	4,265345	0,221798	0,294833	0,073035	0,077041	0,9480
0,0530	4,237864	0,224607	0,290007	0,074400	0,078564	0,9470
0,0540	4,210897	0,227388	0,303152	0,075763	0,070078	0,9460
0,0550	4,184425	0,230143	0,307268	0,077125	0,081614	0,9450
0,0560	4,158429	0,232872	0,311357	0,078485	0,083141	0,9440
0,0570	4,132894	0,235575	0,315419	0,079844	0,084670	0,9430
0,0580	4,107803	0,238253	0,319454	0,081201	0,086201	0,9420
0,0590	4,083141	0,240905	0,323462	0,082557	0,087733	0,9410
0,0600	4,058894	0,243534	0,327445	0,083911	0,089267	0,9400
0,0625	4,00000	0,250000	0,337290	0,087290	0,093109	0,9375
0,0650	3,943416	0,256322	0,346981	0,090659	0,096962	0,9350
0,0675	3,888969	0,262505	0,356524	0,094019	0,100824	0,9325
0,0700	3,936501	0,268555	0,365924	0,097369	0,104698	0,9300
0,0725	3,785875	0,274476	0,375185	0,100709	0,108581	0,9275
0,0750	3,736966	0,280272	0,384312	0,104039	0,112475	0,9250
0,0775	3,689660	0,285949	0,393308	0,107360	0,116379	0,9225
0,0800	3,643856	0,291508	0,402179	0,110671	0,120294	0,9200
0,0825	3,599462	0,296956	0,410227	0,113972	0,124220	0,9175
0,0850	3,556393	0,302293	0,419556	0,117263	0,128156	0,9150
0,0875	3,514573	0,307525	0,428070	0,120544	0,132104	0,9125
0,0900	3,473931	0,312654	0,436470	0,123816	0,136062	0,9100
0,0925	3,434402	0,317682	0,444760	0,127078	0,140030	0,9075

2-қосымшаның жалғасы

p	$\log_2 p$	$p \log_2 p$	H	$q \log_2 q$	$\log_2 q$	q
0,0950	3,395929	0,322613	0,452943	0,130329	0,144010	0,9050
0,0975	3,358454	0,327449	0,461020	0,133571	0,148001	0,9025
0,1000	3,321928	0,332193	0,468986	0,136803	0,152003	0,9000
0,1025	3,286304	0,336846	0,476871	0,140024	0,156016	0,8975
0,1050	3,251539	0,341412	0,484648	0,143236	0,160040	0,8950
0,1075	3,217591	0,345891	0,492329	0,146438	0,164076	0,8925
0,1100	3,184425	0,350287	0,499916	0,149629	0,168123	0,8900
0,1125	3,152003	0,354600	0,507411	0,152811	0,172181	0,8875
0,1150	3,120294	0,358834	0,514816	0,155982	0,176251	0,8850
0,1175	3,089267	0,362989	0,522132	0,159143	0,180332	0,8825
0,1200	3,058894	0,367067	0,529361	0,162294	0,184425	0,8800
0,1225	3,029146	0,371070	0,536505	0,165434	0,188529	0,8775
0,1250	3,000000	0,375000	0,543564	0,168564	0,192645	0,8750
0,1275	2,911431	0,378857	0,550542	0,171684	0,196773	0,8725
0,1300	2,943416	0,382644	0,557438	0,174794	0,200913	0,8700
0,1325	2,915936	0,386361	0,564255	0,177893	0,205064	0,8675
0,1350	2,888969	0,390011	0,570993	0,180982	0,209228	0,8650
0,1375	2,862496	0,393593	0,577654	0,184061	0,213404	0,8625
0,1400	2,836501	0,397110	0,584239	0,187129	0,217591	0,8600
0,1425	2,810966	0,400563	0,590749	0,190186	0,221791	0,8575
0,1450	2,785875	0,403952	0,597185	0,193233	0,226004	0,8550
0,1475	2,761213	0,407279	0,603549	0,196270	0,230228	0,8525
0,1500	2,736966	0,410545	0,609840	0,199295	0,234465	0,8500
0,1525	2,713119	0,413751	0,616061	0,203311	0,238715	0,8475
0,1550	2,689660	0,416897	0,622213	0,205315	0,142977	0,8450
0,1575	2,666576	0,419986	0,628295	0,208309	0,247251	0,8425
0,1600	2,643856	0,423017	0,634310	0,211293	0,251539	0,8400
0,1625	2,621488	0,425992	0,640257	0,214265	0,255839	0,8375
0,1650	2,599462	0,428911	0,646138	0,217227	0,260152	0,8350
0,1675	2,577767	0,431776	0,651954	0,220178	0,264678	0,8325

2-қосымшаның жалғасы

p	$\log_2 p$	$p \log_2 p$	H	$q \log_2 q$	$\log_2 q$	q
0,1700	2,556393	0,434587	0,657705	0,223118	0,268817	0,8300
0,1725	2,535332	0,437345	0,663392	0,226047	0,273169	0,8275
0,1750	2,514573	0,440050	0,669016	0,228966	0,277534	0,8250
0,1775	2,494109	0,442704	0,674577	0,231873	0,281912	0,8225
0,1800	2,473931	0,445308	0,680077	0,234769	0,286304	0,8200
0,1825	2,454032	0,337861	0,685516	0,237655	0,290709	0,8175
0,1850	2,434403	0,450365	0,690894	0,240529	0,295128	0,8150
0,1875	2,415037	0,452820	0,696212	0,243393	0,299560	0,8125
0,1900	2,395929	0,455226	0,701471	0,246245	0,304006	0,8100
0,1925	2,377070	0,457586	0,706672	0,249086	0,308466	0,8075
0,1950	2,358454	0,459899	0,711815	0,251916	0,312939	0,8050
0,1975	2,340075	0,462165	0,716900	0,254735	0,317427	0,8025
0,2000	2,321928	0,464386	0,721928	0,257542	0,321928	0,8000
0,2050	2,286304	0,468692	0,731816	0,262124	0,330973	0,7250
0,2100	2,251539	0,472883	0,741483	0,268660	0,340075	0,7900
0,2150	2,217591	0,476782	0,750932	0,274151	0,349235	0,7850
0,2200	2,184425	0,480573	0,760167	0,279594	0,358454	0,7800
0,2250	2,152003	0,484201	0,769193	0,284992	0,367732	0,7750
0,2300	2,120294	0,487668	0,778011	0,290344	0,377070	0,7700
0,2350	2,089267	0,490978	0,786626	0,295648	0,386468	0,7650
0,2400	2,058894	0,494134	0,795040	0,300906	0,395929	0,7600
0,2450	2,029146	0,497141	0,803257	0,306116	0,405451	0,7550
0,2500	2,000000	0,500000	0,811278	0,311278	0,415037	0,7500
0,2550	1,971431	0,502715	0,819107	0,316392	0,424688	0,7450
0,2600	1,943416	0,505288	0,826746	0,321458	0,434403	0,7400
0,2650	1,915936	0,507723	0,834198	0,326475	0,444184	0,7350
0,2700	1,888969	0,510022	0,841465	0,331443	0,454032	0,7300
0,2750	1,862496	0,512187	9,848548	0,336362	0,463947	0,7250

2-қосымшаның жалғасы

p	$\log_2 p$	$p\log_2 p$	H	$q\log_2 q$	$\log_2 q$	q
0,2800	1,836501	0,514220	0,855451	0,341230	0,473931	0,7200
0,2850	1,810966	0,516125	0,862175	0,346049	0,483985	0,7150
0,2900	1,785875	0,517904	0,868721	0,350817	0,494109	0,7100
0,2950	1,761213	0,519558	0,875093	0,355535	0,504305	0,7050
0,3000	1,736966	0,521090	0,881291	0,360201	0,514573	0,700
0,3050	1,713119	0,522501	0,887317	0,364816	0,524915	0,6950
0,3100	1,689660	0,523795	0,893173	0,369379	0,535332	0,6900
0,3150	1,665576	0,524972	0,898861	0,373890	0,545824	0,6850
0,3200	1,643856	0,526034	0,904381	0,378347	0,556393	0,6800
0,3250	1,621488	0,526984	0,909736	0,382752	0,567041	0,6750
0,3300	1,599462	0,527822	0,914926	0,387104	0,577767	0,6700
0,3350	1,577767	0,528552	0,919953	0,391402	0,588574	0,6650
0,3400	1,556393	0,529174	0,924819	0,395645	0,599462	0,6000
0,3450	1,535332	0,529689	0,929523	0,399834	0,610043	0,6550
0,3500	1,514573	0,530101	0,934068	0,403967	0,621488	0,6500
0,3550	1,494109	0,530409	0,938454	0,408046	0,632629	0,6450
0,3600	1,473931	0,530615	0,942683	0,412068	0,643856	0,6400
0,3650	1,454032	0,530722	0,946755	0,416034	0,655157	0,6350
0,3700	1,434403	0,530729	0,950672	0,419943	0,666576	0,6300
0,3750	1,415037	0,530639	0,954434	0,423795	0,678072	0,6250
0,3800	1,395929	0,530453	0,958042	0,427589	0,689660	0,6200
0,3850	1,377070	0,530172	0,961497	0,431323	0,701342	0,6150
0,3900	1,358454	0,529797	0,965800	0,435002	0,713119	0,6100
0,3950	1,340075	0,529330	0,967951	0,438621	0,724993	0,6050
0,4000	1,321928	0,528771	0,970951	0,442179	0,736966	0,6000
0,4050	1,304006	0,528122	0,973800	0,445678	0,749038	0,5950
0,4100	1,286304	0,527385	0,976500	0,449116	0,761213	0,5900
0,4150	1,268817	0,526559	0,979051	0,452493	0,773491	0,5850

2-қосымшаның жалғасы

p	$\log_2 p$	$p \log_2 p$	H	$q \log_2 q$	$\log_2 q$	q
0,4200	1,251539	0,525645	0,981454	0,455808	0,785875	0,5800
0,4250	1,234464	0,524648	0,983708	0,459061	0,798366	0,5750
0,4300	1,217591	0,523564	0,985815	0,462251	0,810966	0,5700
0,4350	1,200913	0,522397	0,987775	0,465378	0,823677	0,5650
0,4400	1,184425	0,521147	0,989588	0,468441	0,836501	0,5600
0,4450	1,168123	0,519815	0,991254	0,471439	0,849440	0,5550
0,4500	1,152003	0,518401	0,992774	0,474373	0,862496	0,5500
0,4550	1,136062	0,516908	0,994149	0,477241	0,875672	0,5450
0,4600	1,120294	0,515335	0,995378	0,480043	0,888969	0,5400
0,4650	1,104697	0,513684	0,996462	0,482778	0,902389	0,5350
0,4700	1,089267	0,511956	0,997402	0,485446	0,915936	0,5300
0,4750	1,074001	0,510150	0,998196	0,488046	0,929611	0,5250
0,4800	1,058894	0,508269	0,998846	0,490577	0,943416	0,5200
0,4850	1,043943	0,506313	0,999351	0,493038	0,957356	0,5150
0,4900	1,029156	0,504282	0,999711	0,495430	0,971431	0,5100
0,4950	0,014500	0,502177	0,999928	0,497751	0,985645	0,5050
0,5000	1,000000	0,500000	1,000000	0,500000	1,000000	0,5000

МАЗМҰНЫ

Оқулық басылым

Айтжанов Бекмырза Құсайынұлы

Оқу құралы

АҚПАРАТ ТЕОРИЯСЫ

АБО бастығы *З.А. Ғұбайдулина*
Редакторы *К. Мүптекеқызы*
Компьютерде қалыптаған *А.Н. Оразалиева*

Басуға қол қойылды 09.11. 2012 ж.
Таралымы 300 дана. Пішімі 60х90 1/16. №1 баспаханалық қағаз.
Көлемі 10,6 есепті б.т. Шартты б.т. 9,8. Тапсырыс № 841.
Бағасы келісімді

Қ.И. Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық университетінің басылымы
Ақпараттық баспа орталығы, Алматы қ., Сәтбаев к, 22.

ISBN 978-601-228-353-2

9 786012 283532