МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Рудненский индустриальный институт

Кафедра строительства и строительного материаловедения

Смирнова С.В.

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Рудный 2015

УДК 004(075.8)
ББК 65 в 631

Рецензенты:

Таджигитов А.А. – к.ф. – м.н., доцент, заведующий кафедрой «Математика» СКГУ им. М.Козыбаева
Шалдыкова Б.А. – к.ф. – м.н., старший преподаватель кафедры безопасности жизнедеятельности и промышленной экологии Рудненского индустриального института

Рекомендовано к изданию Ученым Советом РГП на ПХВ «РИИ», протокол № 10 от 31.05.14г.

Смирнова С.В.
С 50 Практикум по математике: учебное пособие. – Рудный, 2015. – 60 с.

ISBN 978-9965-845-96-3

В учебном пособии изложены вопросы некоторых разделов математики: основы линейной алгебры и аналитической геометрии, введение в математический анализ, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и многих переменных, ряды, элементы теории вероятностей и математической статистики. Пособие содержит справочный материал и методические рекомендации по решению задач.

Для самопроверки практических навыков в каждой теме представлены задачи для самостоятельной работы.

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей вечерней формы обучения. Пособие будет активным помощником студентам и позволит им рационально организовать самостоятельную работу по изучению данной дисциплины, активизировать участие на практических занятиях и СРСП.

УДК 004(075.8)
ББК 65 в 631

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данный «Практикум по математике» является дополнением к учебникам и учебным пособиям по математике. Предназначено для студентов технических специальностей вечерней формы обучения.

При подготовке «Практикума» автор руководствовалась принципом повышения уровня математической подготовки студента. Все основные вопросы освещены достаточно подробно.

Структура «Практикума» следующая. Всего 6 глав. Каждая глава разбита на параграфы. Параграф содержит справочный материал (основные определения, формулы и т.п.), необходимый для решения задач. Приводятся методические рекомендации по решению определенного круга задач, алгоритмы их решения. Конец решения задачи обозначается знаком «Δ».

Все параграфы каждой главы содержат типовые задачи не только с решениями, но и для самостоятельной работы, позволяющие достаточно полно охватить учебный материал.

Для обеспечения оценки уровня подготовленности студентов в настоящее время используются методы тестирования, в частности, с применением современных компьютерных технологий. Поэтому наряду с традиционными контрольными заданиями, в «Практикуме» предлагается достаточно большое число тестовых заданий.

В конце пособия приводятся образцы заданий для контрольной работы по всем разделам и тесты для подготовки к рубежному контролю № 1 и № 2.

Приведенные задания для контрольной работы и тесты могут быть эффективно использованы при подготовке к различным проверочным работам.

1 Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

1.1 Определители

Справочный материал

Определитель второго порядка	число, равное $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
Определитель третьего порядка	число, равное $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ $= \left(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}\right) -$ $- \left(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}\right)$
Определитель n - го порядка	число, записываемое в виде $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
Минор элемента a_{ij} определителя n -го порядка	определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания i - строки и j - столбца. Обозначают символом M_{ij} .
Алгебраическое дополнение элемента a_{ij}	величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$
Теорема разложения	Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения

Схема вычисления определителя второго порядка:

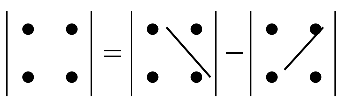
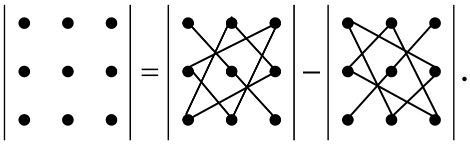


Схема вычисления определителя третьего порядка (правило треугольника или правило Сарруса) выглядит следующим образом:



Решение задач.

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -11 & 4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -11 & 4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = (-11)\cdot 12 - 4\cdot 5 = -152. \quad \mathbf{\Delta}$$

2. Вычислить определить $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ -2 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ -2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 7 + (-1)\cdot(-5)(-2) + 4\cdot 6\cdot 3 - (-2)\cdot 0\cdot 3 - 4\cdot(-1)\cdot 7 -$$

$$-6\cdot(-5)\cdot 2 = 0 - 10 + 72 - 0 + 28 + 60 = 150. \ \Delta$$

3. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix}$.

Решение. Δ = 5+0-36+0-40-12= -83. **Δ**

4. Найти минор M_{12} и алгебраическое дополнение A_{12} определителя

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используя определение минора и алгебраического дополнения, находим

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 35 = -35. \Delta$$

5. Вычислить определитель примера 3 разложением по первой строке.
   Решение. Найдем алгебраические дополнения.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -7, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -(-20) = 20$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -12$$

Δ = 1· (-7)+(-2)·20+3·(-12) = -7-40-36= - 83. **Δ**

6. Вычислить определитель 4$^{\text{го}}$ порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} - 3 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}.$$

Найдем алгебраические дополнения A_{12}, A_{13}

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -(15 - 60 + 45) = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 18 + 24 = 0$$

Тогда определитель $\Delta = 0$. $\boldsymbol{\Delta}$

Решите самостоятельно.

1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

2.Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

3.Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix}$. Вычислить алгебраическое дополнение A_{12}, минор M_{23}, определитель Δ.

1. 2 Векторы

Справочный материал

Скалярная величина	величина, которая может быть задана числом в выбранной системе единиц
Вектор	величина, которая задается числовым значением и направлением
Коллинеарные вектора	вектора, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой)
Координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	коэффициенты X, Y, Z в разложении вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$: $\bar{a} = X \cdot \bar{i} + Y \cdot \bar{j} + Z \cdot \bar{k}$
Условие коллинеарности двух векторов заданных координатами $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$	пропорциональность их соответствующих

и $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$	координат: $\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}$
Направляющие косинусы вектора $\bar{a}=\{X, Y, Z\}$	косинусы углов, образуемых вектором $\bar{a}$ с положительными направлениями осей *OX*, *OY*, *OZ*: $\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$; $\cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$; $\cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.
Скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$	число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними: $(\bar{a},\bar{b})=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cdot\cos\varphi$
Формула вычисления скалярного произведения векторов $\bar{a}=\{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{b}=\{X_2, Y_2, Z_2\}$, заданных в координатной форме	$(\bar{a},\bar{b})=X_1\cdot X_2+Y_1\cdot Y_2+Z_1\cdot Z_2$
Формула вычисления угла φ между векторами $\bar{a}=\{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{b}=\{X_2, Y_2, Z_2\}$	$\cos\varphi=\frac{X_1\cdot X_2+Y_1\cdot Y_2+Z_1\cdot Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$
Условие перпендикулярности (ортогональности) двух векторов	$X_1\cdot X_2+Y_1\cdot Y_2+Z_1\cdot Z_2=0$
Проекция вектора на вектор	$пр_{\bar{в}}\bar{a}=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{\lvert\bar{b}\rvert}$
Векторное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$	вектор $\bar{d}$, модуль которого численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, вектор $\bar{d}\perp\bar{a}$, $\bar{d}\perp\bar{b}$, тройка $\bar{a},\bar{b},\bar{d}$ - правая

Векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в координатной форме

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\bar{k}$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$S_{\text{пар}}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$$

Решение задач.

1. Даны три точки A(1;1;1), B(2;2;2), C(4,3,5). Найти площадь S_Δ треугольника ABC.

Решение. Определим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\overline{AB}=\{1;1;1\}$, $\overline{AC}=\{3;2;4\}$. Модуль векторного произведения векторов $\left|\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right]\right|$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Площадь треугольника ABC: $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Найдем векторное произведение

$$\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right]=\left\{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right\},\text{ или }\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right]=\{2;-1;-1\}.$$

Тогда $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ (кв.ед.). **Δ**

2. Найти длины векторов $\bar{a}=\{3,2,1\}$, $\bar{b}=\{2,-3,0\}$ и их скалярное произведение.

Решение. $|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$;

$\left|\bar{b}\right|=\sqrt{\bar{b}^2}=\sqrt{2^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{13}$; $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=3\times2+2\times(-3)+1\times0=0$;

Значит, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны. **Δ**

3. Вершины треугольника ABC имеют координаты A(1,2,-3); B(0,1,2); C(2,1,1). Найти длины сторон AB и AC и угол A.

Решение.

$$\overrightarrow{AB}=\{(0-1),(1-2),(2+3)\}=\{-1,-1,5\}$$

$$\overrightarrow{AC}=\{(2-1),(1-2),(1+3)\}=\{1,-1,4\}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos A = \frac{\left(\overline{AB} \times \overline{AC}\right)}{\left|AB\right|\left|AC\right|} = \frac{(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 5\cdot 4}{3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{20}{9\sqrt{6}}\,.\ \mathbf{\Delta}$$

4. Найти проекцию вектора $\bar{b} = \{5,-3,7\}$ на вектор $\bar{a} = \{2,-2,1\}$.

Решение.

$$Пр_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{\left|\bar{a}\right|} = \frac{2\cdot 5 + (-2)\cdot(-7) + 1\cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{27}{3} = 9\,.\ \mathbf{\Delta}$$

5. Найти площадь треугольника, имеющего вершины в точках $A(5;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(4;-2;2)$.

Решение.

$$\overline{AB} = (-2;-1;-1),\ \overline{AC} = (-1;-4;3)$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -7\bar{i} + 7\bar{j} + 7\bar{k}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\ \right| = \frac{1}{2}\sqrt{49 + 49 + 49} = \frac{1}{2}\sqrt{147}\,.\ \mathbf{\Delta}$$

6. Даны векторы $\bar{a} = (3;-2;4)$ и $\bar{b} = (1;3;-1)$. Найти $\alpha = \left|(2\bar{a} - \bar{b}) \times (4\bar{a} + 5\bar{b})\right|$.

Решение.

$$\alpha = \left|(2\bar{a} - \bar{b}) \times (4\bar{a} + 5\bar{b})\right| = \left|8\bar{a} \times \bar{a} + 10\bar{a} \times \bar{b} + 4\bar{b} \times \bar{a} - 5\bar{b} \times \bar{b}\right| =$$

$$= \left|10\bar{a} \times \bar{b} + 4\bar{a} \times \bar{b}\right| = 14\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -10\bar{i} + 7\bar{j} + 11\bar{k}$$

$$\alpha = 14\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = 14\sqrt{100 + 49 + 121} = 14\sqrt{270}\,.\ \mathbf{\Delta}$$

7. Найти единичный вектор $\bar{e}$, ортогональный двум заданным векторам $\bar{a}=(2;1;-1)$ и $\bar{b}=(1;-3;3)$.

Решение.

Одним из векторов, перпендикулярных двум заданным, является их векторное произведение $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$. Найдем разложение $\bar{c}$ в естественном базисе.

$$\bar{c}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}=-7\bar{j}-7\bar{k}$$

и его модуль $|\bar{c}|=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2}$. Искомый вектор

$$\bar{e}=\frac{1}{\bar{c}}\cdot\bar{c}=\frac{1}{7\sqrt{2}}(0;-7;-7)=\left(0;\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}}\right).\ \mathbf{\Delta}$$

8.Даны точки A(1;1;1), B(4;4;4), C(3;5;5) и D(2;4;7). Найти объём тетраэдра ABCD.

Решение. Объём тетраэдра V_T равен одной шестой объёма параллелепипеда $V_T=\frac{1}{6}\cdot V_{пар}$. Найдём координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:
$\overline{AB}=\{3;3;3\}$, $\overline{AC}=\{2;4;4\}$ $\overline{AD}=\{1;3;4\}$.
Тогда

$$V_{пар}=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=18.$$

Объём тетраэдра равен: $V=\frac{1}{6}\cdot 18=3$ (куб.ед.). $\mathbf{\Delta}$

Решите самостоятельно.

1. Даны два вектора $\bar{a}=\{1,1,-2\}$ и $\bar{b}=\{2,-1,0\}$. Найти косинус угла между векторами $\bar{c}=2\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}$.

2. При каком значении α векторы $\bar{a}-\bar{b}$ и $\alpha\ \bar{a}-\bar{b}$ ортогональны? (Координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в примере 1).

3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=3\bar{i}-4\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-3\bar{k}$.

4. Найти момент силы $\overline{F} = (2;-3;0)$ приложенной к точке $A(1;-2;0)$ относительно точки $O(4;-6;1)$.

5. Компланарны ли векторы $\overline{a} = (3;-1;2), \overline{b} = (4;3;-1), \overline{c} = (-1;-4;3)$?

6. Найти высоту пирамиды с вершинами $A(0;0;1)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;0;-1)$, $D(4;1;0)$, опущенной из вершины D.

1.3 Прямая на плоскости. Плоскость.

Справочный материал

Уравнение прямой с угловым коэффициентом	y=kx+в, где k – угловой коэффициент
Общее уравнение прямой	Ax+By+C=0, здесь A, B, C – произвольные числа, не равные нулю одновременно
Формула вычисления угла между двумя прямыми $y = k_1 x + в_1$ и $y = k_2 x + в_2$	$tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$
Условие параллельности двух прямых $y = k_1 x + в_1$ и $y = k_2 x + в_2$	$k_1 = k_2$
Условие перпендикулярности двух прямых $y = k_1 x + в_1$ и $y = k_2 x + в_2$	$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$
Уравнение прямой проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ с данным угловым коэффициентом k	$y - y_1 = \kappa(x - x_1)$
Формула вычисления расстояния d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой Ax+By+C=0	$d = \dfrac{\lvert Ax_1 + By_1 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
Общее уравнение плоскости	Ax+By+Cz+D=0

Решение задач.

1. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси OY отрезок b=3 и составляющую с осью: 1) $\varphi=45^0$; 2) $\varphi=135^0$.

Решение. 1) Используя определение углового коэффициента: $k = tg\varphi = tg45^0 = 1.$

Уравнение прямой имеет вид: $y = 1 \cdot x + 3$. Или $y = x + 3$. Δ

2) Аналогично $k = tg\varphi = tg135^0 = -1,\ y = -x + 3$. Δ

2.Найти угловой коэффициент и величину отрезка, отсекаемого прямой на оси OY, заданной общим уравнением 2x+3y+7=0.

Решение. Разрешим уравнение относительно y, т.е. приведем к виду: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$. Видно, что угловой коэффициент $k = -\frac{2}{3}$, а величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY, $b = -\frac{7}{3}$. Δ

3.Найти угол между прямыми y=2x+5 и 3x+y+2=0.

Решение. Пронумеруем прямые в порядке их записи, тогда их угловые коэффициенты будут равны $k_1 = 2$, $k_2 = -3$ соответственно.

Тогда: $tg\varphi = \frac{-3-2}{1-2\cdot 3} = 1$. Отсюда $\varphi = 45^0$. Δ

4.Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(1;2;1)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{1;2;3\}$.

Решение.

$$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)+3\cdot(z-1)=0$$

или

$$x+2y+z-8=0.\ \Delta$$

Решите самостоятельно.

1. Даны вершины треугольника A(2,-2), B(3,-5), C(5,7). Составьте уравнения высоты BD, вычислите ее длину.

2. Составить уравнения всех сторон треугольника ABC, где A(3,2), B(5,-2), C(5,2). Найти их длины.

3. Для прямой M_1M_2 написать уравнение с угловым коэффициентом, в отрезках и общее уравнение, где M_1 (1,2), M_2 (-2,6). Начертить график прямой.

4.В треугольнике $M_0M_1M_2$ найти уравнение меридианы, высоты, проведенных из вершины M_0, а также уравнение средней линии EF, параллельной основанию M_1M_2. Вычислить длину найденной высоты.
M_0 (3,2), M_1 (-2,5), M_2 (6,5).

5. Даны две точки M_1 (-1,2), M_2 (2,4). Найти уравнение прямой, проходящей через эти точки. Указать угловой коэффициент прямой. Построить полученную прямую.

2 Введение в математический анализ

2.1 Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

Справочный материал

Числовая последовательность	если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие определенное число $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
Предел числовой последовательности	если $\forall E > 0 \ \ \exists \ \ N = N(E) : n > N$ верно $\lvert a_n - A \rvert < E$ Обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
Второй замечательный предел	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e, \quad e \approx 2{,}718281\ldots$

Решение задач.

1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^5+5n^2-3}{n^2+5n^5+6}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^5+5n^2-3}{n^2-5n^4+6}$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+5n^2-9}{3n^2+8n^5+6}$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+8}{4n-2}\right)^n$.

Решение.

При вычислении пределов а) – в) имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^5+5n^2-3}{n^2+5n^5+6}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{n^3}-\dfrac{3}{n^5}}{\dfrac{1}{n^3}+5+\dfrac{6}{n^5}}=\dfrac{2+0-0}{0+5+0}=\dfrac{2}{5}$. Δ

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^5+5n^2-3}{n^2-5n^4+6}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+\dfrac{5}{n^3}-\dfrac{3}{n^5}}{\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{5}{n}+\dfrac{6}{n^5}}=\dfrac{7+0-0}{0-0+0}=\dfrac{7}{0}=\infty$. Δ

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+5n^2-9}{3n^2+8n^5+6}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}-\dfrac{9}{n^5}}{\dfrac{3}{n^3}+8+\dfrac{6}{n^5}}=\dfrac{0+0-0}{0+8+0}=\dfrac{0}{8}=0$. Δ

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+8}{4n-2}\right)^n$.

Раскрывая неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$, используем второй замечательный предел. В основании степени выделим целую часть:

$$\frac{4n+8}{4n-2}=1+\frac{4n+8}{4n-2}-1=1+\frac{4n+8-4n+2}{4n-2}=1+\frac{10}{4n-2}.$$

Таким образом $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+8}{4n-2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{10}{4n-2}\right)^n$.

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+8}{4n-2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{4n-2}\right)^n=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{4n-2}\right)^{\frac{4n-2}{10}}\right]^{\frac{10n}{4n-2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{4n-2}}=e^{\frac{10}{4}}=e^{\frac{5}{2}}.$$

Δ

Решите самостоятельно.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+5}$

2. Вычислить $\lim_{x\to\infty} \frac{7x-2x^4}{4x^4+3x^2+1}$

3. Вычислить $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3x^2}{5x^3+9}$

4. Вычислить $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-1}{x+2}$

5. Вычислить $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{4n+5}\right)^{2n}$.

2.2 Предел функции

Справочный материал

Предел функции при x $\to\infty$	$\forall E>0 \quad \exists \quad S>0, S=S(E): \forall x: \lvert x\rvert > S$ верно $\lvert f(x)-A\rvert<E$, обозначается $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$
Предел функции при $x\to x_0$	$\forall E>0 \quad \exists \quad \delta>0, \delta=\delta(E): \forall x\neq x_0$ и удовлетворяет условию $\lvert x-x_0\rvert<\delta$, выполняется неравенство $\lvert f(x)-A\rvert< E$ $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$
Первый замечательный предел	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
Сравнение порядковых бесконечно малых	Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, если предел их отношения равен некоторому числу $m\neq 0$. Если $m = 0$, то $\alpha(x)$ бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\beta(x)$
Эквивалентные бесконечно малые	$\alpha(x) \sim \beta(x)$, если $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$

При вычислении пределов пользуются таблицей эквивалентов (таблица 1).

Таблица 1 - Таблица эквивалентов

$x \to 0$	$\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$
$\sin x \sim x$	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$tg\, x \sim x$	$tg\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$arctg\, x \sim x$	$arctg\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x) \cdot \log_a e$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$
$e^x - 1 \sim x$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$(1+x)^m - 1 \sim mx$	$(1+\alpha(x))^m - 1 \sim m\alpha(x)$
$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$	$\sqrt{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{2}\alpha(x)$

Решение задач.

1. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ $\quad$ *б*) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$ $\quad$ *в*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{arctg\, 2x}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6} = \left| \dfrac{2\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)-3}{(-3)^2+5\cdot(-3)+6} = \dfrac{18-15-3}{9-15+6} = \dfrac{0}{0} \right|$,

т.е. получив неопределенность, раскрываем её, путем разложения многочленов:

$$2x^2+5x-3 = 2\cdot(x+3)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x+3)\cdot(2x-1)$$

$$x^2+5x-3 = (x+3)\cdot(x+2) = (x+3)\cdot(x+2).$$

Следовательно, исходный предел можно записать в виде

$$\lim_{x\to -3} \frac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\cdot(2x-1)}{(x+3)\cdot(x+2)} = \lim_{x\to -3} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{-6-1}{-3+2} = 7 .\ \Delta$$

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}=\left|\dfrac{\sqrt{2+7}-3}{7-7}=\dfrac{3-3}{0}=\dfrac{0}{0}\right|.$

Чтобы раскрыть неопределенность, избавляемся от иррациональности в знаменателе:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}\cdot\frac{\sqrt{2+x}+3}{\sqrt{2+x}+3}=\lim_{x\to 7}\frac{2+x-9}{(x-7)\cdot\left(\sqrt{2+x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)\cdot\left(\sqrt{2+x}+3\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{2+x}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}\,.\ \Delta$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{arctg\,2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Для раскрытия неопределенности используем таблицу 1

$$\sin 3x\sim 3x,\ arctg\,2x\sim 2x.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{arctg\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.\ \Delta$$

Решите самостоятельно.

1. Найти указанные пределы.

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-9x}{3x^2-8x-3}$ *при* 1) $x_0=4$ 2) $x_0=3$ 3) $x_0=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{7x\sin 3x}$ *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(3x-1)-\ln(3x-2)]$.

2. Найти указанные пределы.

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$ *при* 1) $x_0=3$ 2) $x_0=5$ 3) $x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}\,x}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 2x}{6x}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\ln(1+x)}$.

2.3 Непрерывность функции

Справочный материал

Непрерывная функция f(x) в точке x_0	если она определена в этой точке, существует $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} f(x)$, этот предел равен значению функции в точке x_0 $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Точка разрыва функции	точка, в которой нарушается хотя бы одно из условий непрерывности
Скачок функции	если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует, но существует оба односторонних предела в точке x_0
Устранимый разрыв	если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но функция f(x) в точке x_0 не определена или определена, но так, что $f(x_0)$ не равно $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
Бесконечный разрыв	если хотя бы один из односторонних пределов не существует (в частности равен бесконечности)
Функция, непрерывная на отрезке	если она непрерывна во всех точках этого отрезка

Решение задач.

1.Функция $f(x)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения x:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le -2 \\ x^2-4, & -2 < x < 1 \\ 4-2x, & x \ge 1. \end{cases}$$

Исследовать ее на непрерывность.

Решение. Точки разрыва данной функции могут быть лишь в точках перехода от одного аналитического выражения к другому. Поэтому исследуем на непрерывность в точках $x=-2$ и $x=1$. Определим односторонние пределы в точке $x=-2$.

$$\lim_{x\to-2-0} f(x)=\lim_{x\to-2}(x+2)=0,\ \lim_{x\to-2+0} f(x)=\lim_{x\to-2}\left(x^2-4\right)=0.$$

Односторонние пределы совпадают, следовательно, данная функция непрерывна в точке $x=-2$.

Определим односторонние пределы в точке $x=1$.

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1}\left(x^2-4\right)=-3,\ \lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1}(4-2x)=2.$$

Так как односторонние пределы не равны, то данная функция в точке $x=1$ имеет разрыв первого рода. Следовательно, в точке $x=1$ скачок функции равен

$$\Delta x=\left|\,2-(-3)\,\right|=5.$$

Значение функции $f(1)=4-2\cdot1=2$, значит, функция непрерывна справа в точке $x=-2$. Δ

2. Исследовать функцию на непрерывность $f(x)=2^{\frac{1}{x+5}}$ и сделать схематический чертеж.

Решение. Точка x =-5 является точкой разрыва, т.к не входит в область определения функции.

$$\lim_{x\to-5-0} 2^{\frac{1}{x+5}}=2^{\frac{1}{-5-0+5}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-5+0} 2^{\frac{1}{x+5}}=2^{\frac{1}{-5+0+5}}=2^{\infty}=\infty$$

Следовательно, x = - 5 точка разрыва 2-го рода (рисунок 1)

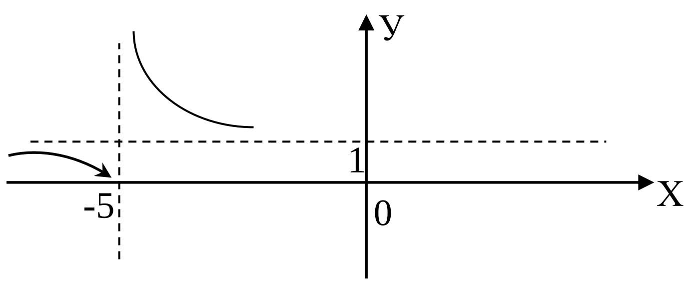


Рисунок 1

Δ.

Решите самостоятельно.

1. Функция у задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента х. Требуется:

1) найти точки разрыва функции, если они существуют
2) найти односторонние пределы и скачок функции в точках разрыва
3) сделать чертеж

$$y = \begin{cases} 2x+1 & при\ x < -1 \\ x^2 & при\ -1 \le x \le 2 \\ 6-x^2 & при\ x > 2 \end{cases}$$

2. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{x^2+2}{x-2}$. В случае разрыва установить его характер. Сделать схематический чертеж.

3.Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. В случае разрыва установить его характер. Сделать схематический чертеж.

3 Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной

3.1 Производная

Справочный материал

Производная функции в точке x_0	предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю: $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
Геометрический смысл производной	производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$, т.е. $f'(x_0) = tg\alpha$
Дифференциал функции $y = f(x)$	произведение производной функции

в точке x_0	$f'(x_0)$ на приращение аргумента Δx, т.е. $dy = f'(x_0)\cdot\Delta x$, если x - независимая переменная, то $dy = f'(x_0)\cdot dx$

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то сумма (разность), произведение и частное этих функций (частное при условии $v(x)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке:

$$(u\pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}.$$

Производные всех простейших элементарных функций можно свести в следующую таблицу 2.

Таблица 2 - Таблица производных злементарных функций

$(c)' = 0$	$\left(e^x\right)' = e^x$
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Решение задач.

1.Найти производную функции $y=(x+1)^2\cdot\sin x$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования произведения:

$$y'=((x+1)^2)'\cdot\sin x+(x+1)^2(\sin x)'=2(x+1)(x+1)'\cdot\sin x+(x+1)^2\cos x$$

;

$$y'=2(x+1)\cdot\sin x+(x+1)^2\cos x=(x+1)(2\sin x+(x+1)\cdot\cos x).\ \Delta$$

2. Найти производную функции $y=\dfrac{3x+1}{x^2-2}$.

Решение. Используем здесь правило дифференцирования дроби

$$y'=\frac{(3x+1)'\cdot(x^2-2)-(x^2-2)'\cdot(3x+1)}{(x^2-2)^2}=\frac{3\cdot(x^2-2)-2x\cdot(3x+1)}{(x^2-2)^2}=$$

$$=\frac{3x^2-6-6x^2-2x}{(x^2-2)^2}=\frac{-6-3x^2-2x}{(x^2-2)^2}.$$

Δ.

3. Найти производную функции $y=\ln arctgx^2$.

Решение. Используем правило дифференцирования сложной функции

$$y'=\left(\ln arctgx^2\right)'=\frac{1}{arctgx^2}\cdot\left(arctgx^2\right)'=\frac{1}{arctgx^2}\cdot\frac{1}{1+\left(x^2\right)^2}\cdot\left(x^2\right)'=$$

$$=\frac{1}{arctgx^2}\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x=\frac{2x}{\left(1+x^4\right)arctgx^2}.\ \Delta$$

4. Найти производную третьего порядка от функции $y=x\ln x$.

Решение. Последовательно находим

$$y'=\ln x+1,\ y''=\frac{1}{x},\ y'''=-\frac{1}{x^2}.\ \Delta$$

Решите самостоятельно.

1.Найти производную функции $y=\sqrt{\ln(3x+1)}+\sin^3 x-\dfrac{1}{2x-3}$.

2. Найти производную функции $y = 2^{x^2-1} \cdot tg\sqrt{x}$.

3. Найти производную функции $y = \sqrt{\sin(2x+1)} + \ln\left(x^2 + 5x\right)$.

4. Найти производную функции $y = \dfrac{x}{e^{2x-1}}$.

5. Найти производную функции $y = \dfrac{\left(x^4 - 12\right) \cdot tg5x}{\cos^2 x}$.

3.2 Приложения производной к исследованию функций

Справочный материал

Интервалы монотонности	интервалы возрастания и убывания функции
Точка максимума (минимума) функции $y = f(x)$	точка x_0, для которой существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек $x \neq x_0$ принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$,($f(x_0) < f(x)$)
Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба функции	$f''(x_0) < 0$ - график выпуклый, $f''(x_0) > 0$ - график вогнутый. Точки, лежащие на графике и отделяющиеся выпуклую часть от вогнутой.
Асимптота к графику функции $y = f(x)$	прямая, к которой приближается точка $M(x, y)$, лежащая на графике, при неограниченном удалении ее от начала координат; асимптоты бывают наклонные $y = k \cdot x + b$, вертикальные $x = a$, горизонтальные $y = b$

Решение задач.

1. Исследовать и построить график функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$.

Решение. Областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме $x = 1$, при котором знаменатель обращается в нуль. Проверим на четность, нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x) - 1} = -\frac{x^2 + 1}{x + 1}.$$

Данная функция является функцией общего вида.
Точка $x = 1$ является точкой разрыва

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = +\infty, \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty.$$

Выясним вопрос о существовании асимптот.
Из предыдущего следует, что прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции.
Если $x \to +\infty (x \to -\infty)$, то $y \to +\infty (y \to -\infty)$, следовательно, горизонтальных асимптот у графика нет.
Вычислим

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.
Найдем производную

$$y' = \frac{(x^2 + 1)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x - 1)^2};$$

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

Стационарными точками являются корни уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$, т.е. точки $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}$ (в этих точках $y' = 0$).
Исследуем знак производной в интервалах $(-\infty, 1 - \sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}, 1), (1, 1 + \sqrt{2})$ и $(1 + \sqrt{2}, +\infty)$. Полученные результаты запишем в таблицу 3.

Таблица 3 – Поведение функции $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ на интервалах

x	$-\infty < x\, 1-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2} < x < 1$	$1 < x < 1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2} < x < \infty$
y'	+	0	-	-	0	+
y	возрастает	макс. $y_{\max} =$ $= 2(1-\sqrt{2})$	убывает	убывает	миним $y_{\min}(1+\sqrt{2})$ $= 2(2+\sqrt{2})$	возрастает

$$y''=\frac{(x^2-2x-1)'(x-1)^2-((x-1)^2)'(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)\left(x^2-2x+1-x^2+2x+1\right)}{(x-1)^4}$$

$$y''=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

В области определения функции y'' не обращается в нуль, а значит, график функции не имеет точек перегиба. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость. Результаты запишем в таблицу 4.

Таблица 4 – Выпуклость функции

x	$-\infty < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
y''	-	не входит в область определения	+
y	график выпуклый		график вогнутый

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

Так как уравнение $x^2+1=0$ не имеет вещественных корней, график пересекает ось OY в точке $(0,-1)$. На основании полученных данных строим график функции $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ (рисунок 2). Δ

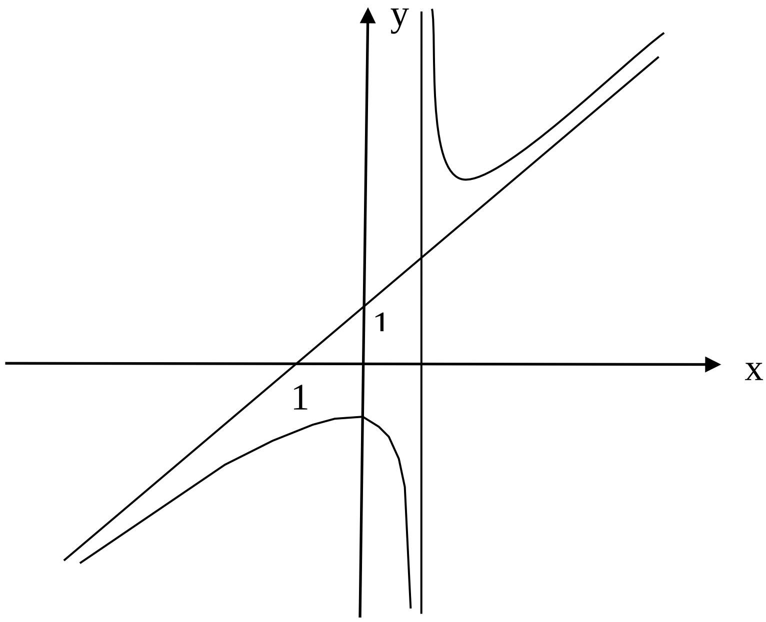


Рисунок 2

2. Установить интервалы монотонности функции $y = 2x^3 - 3x^2$.

Решение. Область определения $(-\infty; +\infty)$.

$y' = 6x^2 - 6x$. $y' = 0$: $6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Область определения разбиваем на интервалы: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$. Проверяем знак первой производной на каждом из этих интервалов.

На $(-\infty; 0)$: $y'(-1) = 6 + 6 = 12 > 0$, на $(0; 1)$ $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2} < 0$ и на $(1; +\infty)$ $y'(2) = 6 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 12 > 0$.

Следовательно, на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$ функция монотонно возрастает, а на интервале $(0; 1)$ функция монотонно убывает. Δ

3. Определить экстремум функции $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$.

Решение. Областью существования функции является вся числовая ось $(-\infty, +\infty)$. Находим производную $y' = x^3 - 4x$.

Приравниваем производную нулю, находим стационарные точки:

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 4) = 0.$$

Решая это уравнение, получаем $x = 0$, $x = \pm 2$. Рассмотрим интервалы $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$. Посмотрим, как ведет себя производная $y' = x^3 - 4x$ на каждом из этих интервалов. На интервале $(-2; 0)$ и $(2; +\infty)$ производная $f'(x) > 0$, на интервале $(-\infty; -2)$ и $(0; 2)$ производная $f'(x) < 0$. (Убедиться в этом можно, подставляя в производную, какую – нибудь точку из рассматриваемых интервалов).

Таким образом, переходя через точку $x = 0$, производная меняет знак с плюса на минус, т.е. стационарная точка $x = 0$ является точкой максимума, а в точке $x = -2$ и $x = 2$ происходит смена знака производной с минуса на плюс, следовательно, стационарные точки $x = -2$ и $x = 2$ является точками минимума.

Подставляя, точки $x = \pm 2$ и $x = 0$ в уравнение $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ находим максимум и минимум функции.

Получим $y_{\min} = y(\pm 2) = \frac{1}{4} \cdot (\pm 2)^4 - 2 \cdot (\pm 2)^2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$ и $y_{\max} = y(0) = 3$. Δ

Решите самостоятельно.

1.Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \dfrac{2x}{x^3 + 1}$.

2. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \dfrac{e^x}{x + 1}$.

3. Найти экстремумы функции $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$.

4. Исследовать функцию $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$ и построить ее график.

5. Исследовать функцию $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

3.3 Неопределенный интеграл. Методы интегрирования

Справочный материал

Первообразная функция для функции $f(x)$	функция $F(x)$, производная которой, равна функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$
Неопределенный интеграл от функции $f(x)$	совокупность всех первообразных, т.е. выражение вида $F(x)$+C: $\int f(x)dx = F(x) + C$
Формула замены переменной	$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt$

Интегрирования по частям	интегрирование по формуле $\int u dv = uv - \int v du$

В таблице 5 приведены основные неопределенные интегралы

Таблица 5 – Таблица основных интегралов

$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$, $(k \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln \mid x \mid + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right\| + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	

Решите примеры.

1. Вычислить интеграл $\int \left(\frac{2}{1+x^2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx.$

Решение.

$$\int \left(\frac{2}{1+x^2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = 2\int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) dx =$$

$$= 2arctgx + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C. \ \Delta$$

2. Найти интеграл $\int \frac{3 + 5x - x^2}{x\sqrt{x}} dx.$

Решение. Делим каждое слагаемое числителя на знаменатель, затем применяем свойства интеграла и соответствующие формулы из таблицы интегралов

$$\int \frac{3+5x-x^2}{x\sqrt{x}}dx = 3\int x^{-\frac{3}{2}}dx + 5\int x^{-\frac{1}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 3\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 5\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{6}{\sqrt{x}} + 10\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C. \; \Delta$$

3. Найти $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

Решение. Сделаем замену переменной $x = t^2$. Тогда $dx = 2t\,dt$, $t = \sqrt{x}$.

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{2t \cdot dt}{t^2 + t} = 2\int \frac{tdt}{t(t+1)} = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\ln|t+1| + C = 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C.$$

Δ

3. Найти $\int (2x+3)e^{2x}dx.$

Решение. Для применения этой формулы подынтегральное выражение разбивают на две части, одну из которых принимают за u, а другую за dv.

$$\int (2x+3)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = 2x+3 & du = 2dx \\ d\upsilon = e^{2x}dx & \upsilon = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(2x+3)e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}2dx = \frac{1}{2}(2x+3)e^{2x} - \int e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}(2x+3)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C = (x+1)e^{2x} + C. \; \Delta$$

Решите самостоятельно.

1. Найти интеграл $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$

2. Найти интеграл $\int (x-1)\cdot(x^2+3)dx$

3. Найти интеграл $\int (7x+2)\cdot \sin\, x dx$

4. Найти интеграл $\int \dfrac{x^3-3x^2+x}{x^5}dx$

5. Найти интеграл $\int x\cdot \sin 3x dx$.

3.5 Определенный интеграл

Справочная литература

Интегральная сумма	$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$
Определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$	$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$
Формула Ньютона-Лейбница	$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$
Площадь криволинейной трапеции	$S=\int\limits_a^b f(x)dx$
Объем тела вращения	$V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^a f(x)dx=0$

2. $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)$

3. $\int\limits_a^b [f(x)\pm\varphi(x)]dx=\int\limits_a^b f(x)dx\pm\int\limits_a^b \varphi(x)dx$

4. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)+\int\limits_c^b f(x)dx$.

Решение задач.

1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \frac{5x^8+1}{x^4}dx.$.

Решение.

$$\int_1^2 \frac{5x^8+1}{x^4}dx = \int_1^2 \left(5x^4 + \frac{1}{x^4}\right)dx = \left(x^5 - \frac{1}{3}x^{-3}\right)\Big|_1^2 = \frac{751}{24}. \ \Delta$$

2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки $\int_0^1 \frac{2xdx}{1+x^2}$.

Решение. Выполним подстановку $t = 1 + x^2$. Тогда $dt = 2xdx$, $t = 1$ при $x = 0$ и $t = 2$ при $x = 1$. Поскольку функция $x = \sqrt{1-t}$ непрерывна на $[1,2]$, то и новая подынтегральная функция также непрерывна, и, значит, для нее существует первообразная на этом отрезке. Получаем

$$\int_0^1 \frac{2xdx}{1+x^2} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^2 = \ln 2. \ \Delta$$

3. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \sin xdx$.

Решение. $\int_0^{\pi} \sin xdx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$ Δ

4. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Решение. Сделаем замену переменной $x = \sin t, dx = \cos tdt$, если $x = 0,$ то t= 0, при x = 1, t = $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \ \Delta$$

5. Вычислить $\int_0^{\pi} x\cos xdx$.

Решение.

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x\,, & dv = \cos x dx \\ du = dx\,, & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= \pi\sin\pi - 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2.\ \Delta$$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, x = 1, x = 3$ и осью Ox.

Решение.

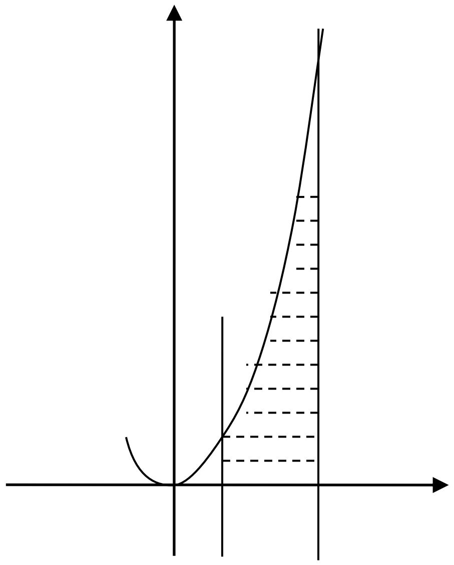


Рисунок 3

Находим площадь искомой фигуры (рисунок 3)

$$S = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}\text{(кв.ед.)}.\ \Delta$$

Решите самостоятельно.

1.Вычислить определенные интегралы:

$a)\ \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2+4}$ $б)\int_0^1 \frac{4arctgx - x}{1+x^2}dx$ в) $\int_0^1 xe^{-x}dx$ г) $\int_{-1}^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$

д) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2x$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = x + 2$.

4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x$

4 Дифференциальное и интегральное исчисления функции нескольких переменных

4.1 Основные понятия функции нескольких переменных

Справочный материал

Функция нескольких переменных $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	вполне определенное значение переменной z, которое соответствует каждому набору n переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n$ из некоторого множества X
Линия уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$	множество точек на плоскости, таких, что во всех точках значение функции одно и то же и равно С. Число С называют уровнем.
Частные производные функции $z = f(x, y)$	$z'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ $z'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x}$
Градиент функции $z = f(x, y)$	$grad\, z = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j}$
Экстремум функции $z = f(x, y)$	$\Delta = AC - B^2$, где $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Если $\Delta > 0$, то

при $A>0(C>0)$ имеем минимум, а при $A<0(C<0)$ имеем максимум.

Решение задач.

1. Найти частные производные функции $z = x\ln y + \frac{y}{x}$.

Решение. Чтобы найти частную производную по переменной x, считаем y постоянной величиной, т.е. $y' = 0$.

Тогда $z'_x = \ln y + y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \ln y - \frac{y}{x^2}$.

Дифференцируя по y, считаем x постоянной величиной, т.е. $x' = 0$.

$$z'_y = x \cdot (\ln y) + \frac{1}{x} \cdot (y)' = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}. \ \Delta$$

2 . Найти частные производные функции $z = x^y$.

Решение. При постоянном y имеем степенную функцию от x. Тогда $z'_x = yx^{y-1}$.

При постоянном x имеем показательную функцию от y и $z'_y = x^y \ln x$. Δ

3.Найти производные второго порядка $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(x^2+y\right)'_x}{x^2+y} = \frac{2x}{x^2+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(x^2+y\right)'_y}{x^2+y} = \frac{1}{x^2+y}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2x}{x^2+y}\right)'_x = \frac{2\cdot\left(x^2+y\right) - 2x\cdot 2x}{\left(x^2+y\right)^2} = \frac{2x^2+2y-4x^2}{\left(x^2+y\right)^2} = \frac{2\left(y-x^2\right)}{\left(x^2+y\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{2x}{x^2+y}\right)'_y = \frac{-2x\cdot 1}{\left(x^2+y\right)^2} = -\frac{2x}{\left(x^2+y\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{1}{x^2+y}\right)'_x = \frac{-2x}{\left(x^2+y\right)^2} = -\frac{2x}{\left(x^2+y\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{x^2 + y} \right)'_{yx} = \frac{-1}{\left(x^2 + y\right)^2} = -\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2} . \ \Delta$$

4. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1,1)$ в направлении вектора $\vec{a}$, составляющем угол $\alpha = 60^0$ с положительным направлением оси Ox.

Решение. Найдем значения частных производных в точке $M(1,1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x , \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y .$$

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_M = 2 \cdot 1 = 2 , \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_M = -2 \cdot 1 = -2 .$$

Так как $\cos\alpha = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\Big|_M = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}732 . \ \Delta$$

Решите самостоятельно.

1. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = arctg \frac{y}{1 + x^2}$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2 \cdot \sqrt[3]{z^2}$.

3. Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}$.

4. Найти градиент функции $z = 4x^3 y + xy^2$ в точке $M_0(2,3)$.

5. Найти градиент и производную функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(1,2)$.

4.2 Двойной интеграл

Справочный материал

Интегральная сумма — сумма произведений значений функции в точке M_i на площадь ΔS_i:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i$$

Двойной интеграл — если при стремлении к нулю шага разбиения x области D интегральные суммы имеют предел, то этот предел называют двойным интегралом от функции *f(x,y)* по области D и обозначают $\iint\limits_D f(x,y)dS$

или $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

Формула площади плоской фигуры

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

Перемена порядка интегрирования

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^в dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

Решение задач.

1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} (x+y^3)dxdy$, где область D есть прямоугольник, ограниченный прямыми x=1, x=2, y=0 и y=2.

Решение. Построим область D (рисунок 4).

Вычисляем данный интеграл

$$J = \iint\limits_{(D)} (x+y^3)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^2 (x+y^3)dy.$$

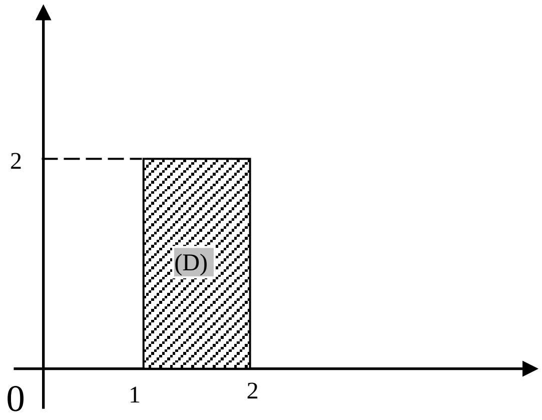


Рисунок 4

Внутренний интеграл вычисляем, считая x постоянным:

$$\int_0^2 (x+y^3)dy = (xy+\frac{y^4}{4})\Big|_0^2 = x\cdot 2+\frac{2^4}{4} = 2x+4$$

Полученную функцию от x интегрируем по отрезку [1,2]

$$J = \iint_{(D)} (x+y^3)dxdy = \int_1^2 (2x+4)dx = (2\cdot\frac{x^2}{2}+4x)\Big|_1^2 = 2^2+4\cdot 2-2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot 1 = 7\ .\ \Delta$$

2. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x,y)dxdy$ расставить пределы для того и другого порядка интегрирования по области (D), ограниченной прямыми x=0, x=1, y=1 и кривой $y=-\sqrt{2x-x^2}$.

Решение.

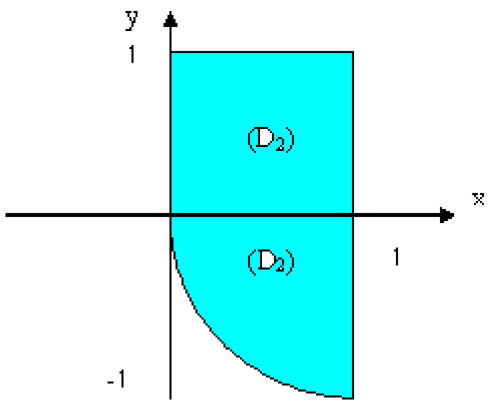


Рисунок 5

Область (D) находится в полосе между прямыми x=0 и x=1.

Нижняя граница – дуга окружности $y=-\sqrt{2x-x^2}$, верхняя - прямая y=1. Следовательно,

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x,y)dy\,.$$

Область (D) проектируется на ось OY в отрезок [-1,1]. Левая граница области имеет уравнение $y=-\sqrt{2x-x^2}$, т.е. $x=1-\sqrt{1-y^2}$ при $-1\le y=0$ и x=0 при $0\le y=1$. Правая граница x=1. Разбивая область (D) на две части (D_1) и (D_2), а интеграл на сумму двух интегралов, получим:

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx\,.\ \Delta$$

3. В двойном интеграле $\iint_{(D)} f(x,y)dxdy$ расставить пределы для того и другого порядка интегрирования по области (D), ограниченной прямыми y=0. x+y=2 и кривой $y=x^2$

Решение.

Вид области (D) (рисунок 6) указывает на то, что «удобнее» внутреннее интегрирование провести по x, а внешнее по y,

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{+\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx\,.$$

Если мы изменим порядок интегрирования, то результат уже не удастся записать в виде одного повторного интеграла, так как линия OBA имеет на разных участках разные уравнения.

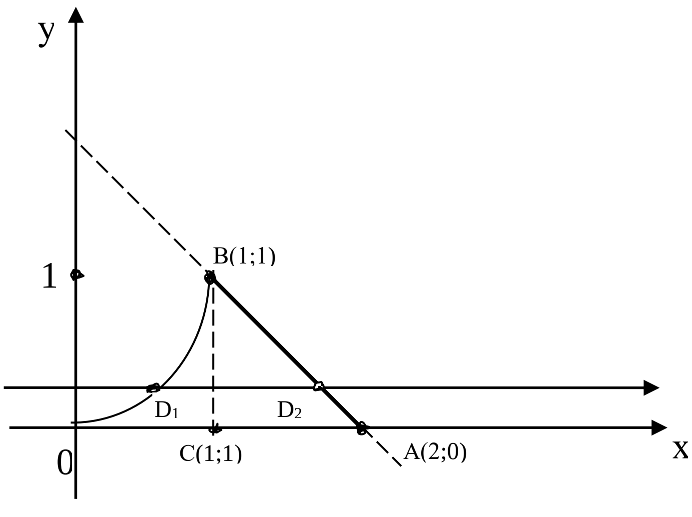


Рисунок 6

Разбивая область (D) на две: OBC и CBA, получим:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy \,.\ \Delta$$

Решите самостоятельно.

1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x \cdot ydxdx$, если область D ограничена прямой y=x–4 и параболой $y^2=2x$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$, D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy$, D - треугольник с вершинами O(0,0), A(1,-1), B(1,1).

4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $x=4y-y^2$, $x+y=6$

5 Числовые и функциональные ряды

5.1 Числовые и функциональные ряды

Справочный материал

Числовой ряд	бесконечная числовая последовательность : $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$ (1) или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$
Частичная сумма ряда S_n	сумма первых n членов ряда (1)
Ряд сходится	если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$
Ряд расходится	если частичная сумма S_n не имеет $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$
Необходимый признак сходимости ряда	Ряд (1) сходится если существует $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
Знакопеременный ряд	Ряд, среди членов которого имеются как положительные, так и

	отрицательные члены (притом и тех и других неограниченное число)
Знакочередующийся ряд	Знакопеременный ряд –ряд, у которого любые два рядом стоящие члена имеют противоположные знаки. Знакочередующийся ряд можно записать так: $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots, \quad (2)$ где все числа u_n (n=1,2,3…) положительны.
Функциональный ряд	Ряд вида: $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Решение задач.

1.Написать пять первых членов ряда по данному общему члену

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение**.** Подставляя в формулу общего члена последовательно значения n=1, 2, 3, 4, 5, получим:

$$u_1 = \frac{1}{1 \cdot 2};\ u_2 = \frac{1}{2 \cdot 3};\ u_3 = \frac{1}{3 \cdot 4};\ u_4 = \frac{1}{4 \cdot 5};\ u_5 = \frac{1}{5 \cdot 6}.\ \Delta$$

2. Написать формулу общего члена для каждого ряда**:**

а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$

б) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \ldots$

Решение.

а) Знаменатели членов данного ряда – натуральный ряд чисел.

Следовательно, общий член $u_n = \frac{1}{n}.$

б) Числители членов данного ряда – четные числа вида 2n, а знаменатели – числа, которые могут быть получены по формуле 3n+2.

Следовательно, общий член $u_n = \frac{2n}{3n+2}.\ \Delta$

3. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+...$

Решение. Общий член $u_n=\frac{n}{n+1}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, то необходимое условие сходимости (2) не выполняется. Следовательно, данный ряд расходится. Δ

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Решение. $$u_n=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Применяем признак Даламбера:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Так как, q<1 то по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится. Δ

5. Найти область сходимости степенного ряда.

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n+1}+...$$

Решение. $a_n=\frac{1}{n};\quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}.$

Радиус сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$

Следовательно, ряд сходится абсолютно в интервале (-1, 1).

Теперь исследуем поведение ряда на границах найденного интервала, то есть при x=-1 и при x=1.

Если x=-1, то получаем ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+(-1)^n\frac{1}{n}+...,$ который сходится по признаку Лейбница.

Если x= 1, получаем гармонический ряд, который расходится.

Таким образом, область сходимости данного ряда есть промежуток [-1, 1). Δ

Решите самостоятельно.

1.Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+.......+\frac{n}{3n-1}+.....$$

2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$

3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(3n-2)}}$

4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$

5. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{2n+1})^n$.

6. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n 2^{n-1}}$.

6 Элементы теории вероятностей и математической статистики

6.1 Элементы теории вероятностей

Справочный материал

Случайное событие	явление, которое может произойти или не произойти в результате эксперимента
Достоверное событие	такое событие, которое наступает в результате появления любого элементарного события
Невозможное событие	событие, не наступающее ни при каком элементарном событии
Несовместные события	если их одновременное появление в опыте не возможно
Вероятность события	$P(A)=\frac{m}{n}$
Испытание	выполнение определенного комплекса условий, в которых наблюдается то или иное явление

Полная группа событий	несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появление хотя бы одного из них является достоверным событием
Сумма двух событий А и В	событие С=А+В, которое состоит в появлении либо события А, либо события В, либо событий А и В одновременно

Решение задач.

1. На складе готовой продукции находится изделия, среди которых 5% нестандартных. Найти вероятность того, что при выдаче изделия со склада оно будет стандартным.

Решение. Вероятность получения нестандартного изделия равна 0, 05; события выдачи стандартного и нестандартного изделия образуют полную группу. Следовательно, сумма их вероятностей равна единице, и тогда искомая вероятность равна 0,95. Δ

2. В ящике лежат 11 деталей, 3 из них нестандартные. Из ящика дважды берут по одной детали, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что во второй раз из ящика будет извлечена стандартная деталь – событие В, если в первый раз была извлечена нестандартная деталь – событие А.

Решение. После первого извлечения в ящике из 10 деталей осталось 8 стандартных, и, следовательно, искомая вероятность

$$P_A(B) = 0{,}8.\ \Delta$$

3. В условиях примера 2 найти вероятности того, что в первый раз извлечена нестандартная деталь.

Решение. Обозначим событие А – это извлечение из ящика нестандартной детали, а событие В – стандартной. Тогда $P(A) = \dfrac{3}{11}$, а условная вероятность $P_A(B) = 0{,}8$. Тогда по теореме 6.1.3

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{3}{11}\cdot\frac{8}{10} \approx 0{,}22.\ \Delta$$

4. Найти вероятность поражения цели при совместной стрельбе тремя орудиями, если вероятности поражения цели орудиями соответственно равны 0,9, 0,8, 0,7 (события А, В,С).

Решение. Поскольку события A, B, C являются независимыми, то искомая вероятность вычисляется по формуле (6.6):

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504. \ \Delta$$

5. 20 студентов из 30 занимаются в спортивных секциях. Какова вероятность что выбранный студент спортсмен.

Решение. Обозначим за событие A - выбранный студент спортсмен, n-число всех студентов, m-число спортсменов. По условию задачи n=30, m=20. Используя формулу (6.1):

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}. \ \Delta$$

6. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна 0,04. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,06. Предполагается, что оба события независимы. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит: хотя бы одну рекламу?

Решение. Обозначим события:

A - «Потребитель увидит рекламу по телевидению»

B - «Потребитель увидит рекламу на стенде»

C - «Потребитель увидит хотя бы одну рекламу»

Это значит, что потребитель увидит рекламу по телевидению, или на стенде, или по телевидению и на стенде.

По условию $P(A) = 0{,}04$, $P(B) = 0{,}06$.События A и B - совместные и независимые. Так как событие C состоит в совместном наступлении событий A и B, то искомая вероятность может быть по формуле (6.4):

$$P(C) = 0{,}04 + 0{,}06 - 0{,}0024 = 0{,}0976. \ \Delta$$

Решите самостоятельно

1. 20 студентов из 30 занимаются в спортивных секциях. Какова вероятность того, что выбранный студент спортсмен.

2. Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,4, 0,5, и 0,7. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов окажется: а) одно попадание в мишень; б)хотя бы одно попадание.

3. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна -0,9; второй-0,9, третий-0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: а) только второй экзамен; б)только один экзамен; в)три экзамена; г) по крайней мере два экзамена; д) хотя бы один экзамен.

4. Из 30 экзаменационных билетов студент подготовил только 25. Если он отказывается отвечать по первому взятому билету (которого он не знает), то ему разрешается взять второй. Определить вероятность того, что второй билет окажется счастливым.

5. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет нечетное число очков

6. В ящике 5 белых и 10 красных шаров. Какова вероятность того, что наудачу из ящика извлеченный шар окажется красным?

7. В коробке 3 синих и 7 желтых карандашей. Наудачу вынимают 2 карандаша. Найти вероятность того, что оба карандаша желтые

6.2 Элементы математической статистики

Справочный материал

Генеральная совокупность	вся совокупность объектов (наблюдений)
Выборка	объекты, которые отбирают из генеральной совокупности
Объем выборки	количество объектов n выборочной совокупности
Варианты	наблюдавшиеся значения признака X
Частота	количество, с которым наблюдается варианта
Вариационный ряд	ранжированный в порядке возрастания или убывания ряд вариантов и их соответствующих частот
Полигон	ломаная линия, соединяющая точки с координатами (x_i, n_i), значениями вариационного ряда

Средняя арифметическая вариационного ряда	величина, которую находят по формуле: $x_в = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n}$
Мода	варианта, которой соответствует наибольшая частота.
Медиана	значение признака, приходящееся на середину ранжированного ряда наблюдений
Дисперсия	средняя арифметическая квадратов отклонений от их средней арифметической $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_в)^2 n_i}{n}$

Решение задач.

1. Дана выборка

10 12 14 10 10 12 16 10 12 14 16 16 14 14 14 12 14 12 18 18

Найти вариационный ряд, моду, медиану, среднюю арифметическую, дисперсию.

Решение.

Составим вариационный ряд.

Таблица 7 – Вариационный ряд

x_i	10	12	14	16	18
n_i	4	5	6	3	2

Объем выборки равен n=4+5+6+3+2=20.

Мода равна 14, как варианта с наибольшей частотой.

Медиана равна также 14, как варианта, приходящаяся на середину вариационного ряда. По формуле (6.9) найдем среднее арифметическое

$$x_в = \frac{10 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 14 \cdot 6 + 16 \cdot 3 + 18 \cdot 2}{20} = 12{,}4.$$

Найдем дисперсию вариационного ряда

$$s^2 = \frac{(10-12{,}4)^2 \cdot 4 + (12-12{,}4)^2 \cdot 5 + (14-12{,}4)^2 \cdot 6 + (16-12{,}4)^2 \cdot 3 + (18-12{,}4)^2 \cdot 2}{20} = 7{,}04.$$

Δ

Решите самостоятельно.

1. Дана выборка

10	12	14	15	12	12	14	14	12	12
10	10	15	12	10	12	15	15	15	10.

Найти объем выборки, вариационный ряд, выборочную среднюю, выборочную дисперсию, моду, медиану.

Задания для контрольной работы

1. Вычислить определители

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ б) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$.

2. Даны векторы $\bar{a} = \{1;0;2\}$ и $\bar{b} = \{3;-1;1\}$. Найти косинус угла между векторами $\bar{c} = 3\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{b}$.

3. При каком значении α векторы $\bar{a} - \alpha\bar{b}$ и $\bar{a} + \alpha\bar{b}$, где $\bar{a} = \{1;0;3\}$ и $\bar{b} = \{3;-1;1\}$?

4. Даны координаты трех точек $A(1;-1;4)$, $B(0;5;3)$, $C(1;0;-4)$. Найти площадь треугольника ABC.

5. Найдите объем пирамиды и высоту, опущенную из вершины A. Координаты вершин: $A(-1;0;2)$, $B(3;-1;4)$, $C(2;-1;0)$, $D(4;2;-2)$.

6. Даны вершины треугольника A(2,-2), B(3,-5), C(5,7). Составьте уравнения высоты BD, вычислите ее длину.

7. Через точки A(1,-2) и B(5,4) проведена прямая. Составить уравнения прямых, проходящих через точку C(-2,0) перпендикулярно и параллельно прямой AB. Вычислить расстояние от точки C до прямой AB.

8.Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (1,-1,1), имеющей направляющий вектор $\bar{s} = \{4,0,1\}$.

9. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$ 1) $x_0 = 2$ 2) $x_0 = -3$ 3) $x_0 = \infty$

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x}{1 + 2x} \right)^{-4x}$ в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin 3x}{\ln(1 + 2x)}$.

10. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ и сделать чертеж.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x, & 0<x\le 2 \\ 6-x, & x>2 \end{cases}$$

11. Найти производные функции

а) $y=x^2\sqrt{1+x^2}$ б) $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ в) $y=arctg\ e^{2x}$

г) $y=\ln ctg 2x$ д) $\begin{cases} x=t^2+4t \\ y=t^5+2t \end{cases}$

12. Исследовать и построить график функции $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$.

13. Найти неопределенный интеграл

а) $\displaystyle\int\left(\frac{x^7}{2}+\frac{5}{x^5}\right)dx$ б) $\displaystyle\int\frac{\left(x^2\sqrt{x}-3\right)^2}{x}dx$ в) $\displaystyle\int(1-x)e^{-3x}dx$.

14. Вычислить определенный интеграл

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos x dx$ б) $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(2-x)\sin 3x dx$

15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=2x+\dfrac{5}{2}$.

16. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=arctg\dfrac{y}{1+x^2}$.

17. Вычислить двойной интеграл $\displaystyle\iint_D x\cdot y dxdx$, если область D ограничена прямой y=x–4 и параболой $y^2=2x$.

18. Исследовать на сходимость числовой ряд

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$.

19. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

20. В ящике лежит 11 деталей, 1 из них нестандартная. Из ящика извлекаются две детали. Найти вероятность того, что обе они будут стандартными.

21. Дана выборка

11	14	10	15	12	10	14	14	12	12
10	15	12	12	10	12	15	15	15	10.

Найти объем выборки, вариационный ряд, выборочную среднюю, выборочную дисперсию, моду, медиану.

Тест для проведения рубежного контроля №1

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$:

а) 13
б) 7
в) -43
г) 188
д) -7.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$:

а) -62
б) -10
в) 52
г) - 72
д) 72.

3. Алгебраическое дополнение A_{12} определителя равно $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$:

а) 12
б) -12
в) -2
г) 2
д) -14.

4. Алгебраическое дополнение A_{22} определителя равно $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$:

а) -12
б) 12
в) -8
г) 8
д) -10.

5. Дана прямая $2x + 3y - 3 = 0$. Определить угловой коэффициент:
а) - 2/3
б) 2/3
в) 2
г) -3/2
д) 1.

6. Дана прямая x + 5y – 2 = 0. Определить угловой коэффициент к прямой, перпендикулярной данной:
а) -1/5
б) -5
в) 3/5
г) -5/3
д) 5.

7. Дана прямая 3x + 5y – 3 = 0. Определить угловой коэффициент к прямой, параллельной данной:
а) 5/3
б) -3/5
в) 3/5
г) -5/3
д) 3.

8. Скалярное произведение векторов $\bar{a} = \{3; -4; -9\}$, $\bar{в} = \{2; \quad 1; \quad -2\}$ равно:
а) 28
б) $\{1; \quad 51; \quad 23\}$
в) 20
г) $\{8; \quad 1; \quad 1\}$
д) -16.

9. Найти проекции вектора $\overline{AB}$ на координатные оси, если:
A(3; 6; -1); B(3; -2; 1).
а) $\{0; \quad -8; \quad 2\}$
б) $\{0; \quad 4; \quad 0\}$
в) $\{3; \quad 6; \quad -1\}$
г) $\{3; \quad -2; \quad 1\}$
д) $\{0; \quad 8; \quad -2\}$.

10. Найти проекции вектора $\overline{AB}$ на ось OX, если:
A(5; 6; -1); B(0; -2; 1).
а) 5
б) -5
в) 0
г) 1
д) 2.

11. Определить угол между векторами: $\vec{a} = \{1; \quad 5; \quad 0\}$, $\vec{в} = \{2; \quad 10; \quad 0\}$:
а) $\varphi = \pi$

б) $\varphi = \arccos(1/4)$

в) $\varphi = \pi/3$

г) $\varphi = \pi/2$

д) $\varphi = 0$.

12. Угол между прямыми 2x + y = 0, y = 3x – 4 равен:
а) 0^0
б) 30^0
в) 45^0
г) 60^0
д) 90^0.

13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2}{x-5}$:

а) 0
б) ∞
в) 1
г) 2
д) 5.

14. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{(2x-1)^3}$:

а) 4
б) 2
в) ∞
г) 0
д) 1/2.

15. Установите точки разрыва функции $y = \dfrac{4}{\sqrt[5]{(x+1)(x-3)}}$:

а) -1;3
б) 1;-3
в) -1
г) 0
д) всюду непрерывна.

16. Определите точки разрыва функции $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$:

а) ± 2
б) ± 4
в) 2,4
г) 0;-2
д) 0;2.

17. Найдите производную функции $y = \dfrac{x^2+1}{x}$:

а) $1-\dfrac{1}{x^2}$

б) $1+\dfrac{1}{x^2}$

в) $x-\dfrac{1}{x}$

г) $1-\dfrac{1}{x}$

д) $\dfrac{1}{x^2}-1.$

18. Найдите производную функции $y=e^{x^2+1}$:

а) $2e^{x^2+1}$

б) $2xe^{2x}$

в) e^{x^2+1}

г) $2xe^{x^2+1}$

д) $(x^2+1)e^{x^2+1}.$

Тест для проведения рубежного контроля № 2

1.Найти линии уровня функции Z = 4 – x^3 + y^2:

а) C=4 - x^2 - y^2
б) C= 4-x^3 + y^2
в) C=4 + x^2 - y^2
г) C=4 - x^2
д) C=2 - x^2 - y^2

2.Найдите $Z_x^/ + Z_y^/$ в точке M(0;-1) если Z = x^2 - 3xy:
а) -6
б) 6
в) 1
г) 0
д) 2

3. Найдите $Z_x^/$ в точке M(1;0) если Z = x^2 + xy:
а) 2
б) -10
в) -2
г) 3
д) -5

4. Найдите $Z_y^/$ в точке M(1;1) если Z = $2x^3$ y – y^3 :
а) -1
б) 4
в) 8
г) -7
д) -5

5. Найдите интеграл $\int xe^{-x}dx$:
а) $e^{-x}(x+1)+C$;
б) $-e^{-x}(x+1)+C$;
в)$-e^{-x}(x-1)+C$;
г) $e^{-x}(x+1)+C$;
д) $\dfrac{x^2}{2}-e^{-x}+C$.

6.Вычислить интеграл $\int_0^3 (2+x^2)dx$:

а) 15

б) -3
в) –15
г) 3
д) 8.

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 3x$:
а) 4,5
б) 3/4
в) 6
г) 4/3
д) 10,5.

8.Найдите общий член ряда: $\frac{2}{11}+\frac{4}{101}+\frac{6}{1001}+\ldots$:

а) $\frac{2n}{10^n}$

б) $\frac{2^n}{10n}$

в) $\frac{2^n}{10^n+1}$

г) $\frac{2n}{10^n+1}$

д) $\frac{n}{10^n}$.

9. Укажите ряд, для которого выполняется необходимое условие сходимости:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{4n^2+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$.

а) 3

б) 2

в) 1,2

г) ни 1, ни 2, ни 3

д) 1,2,3.

10. Для исследования производительности труда из 1000 предприятий отобрано 50. Тогда объем выборки равен:
а) 20
б) 50
в)1000
г) 950
д) 1050.

11. Дано распределение $\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & 4 & 7 & 8 & 12 & 17 \\ \hline n_i & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{array}$. Тогда мода вариационного ряда равна:
а) 5
б) 12
в) 6
г) 17
д) 7.

12. Каждая лампочка может перегореть в течение гарантийного срока с вероятностью p=0,4. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока перегорят две лампочки из двух купленных.
а) 0,16
б) 0,64
в) 0,48
г)0,84
д) 0,36.

13. В ящике 10 белых и 8 красных шаров. Вынимают шарик. Какова вероятность того, что он зеленый?
а)0, 2
б)0
в)1
г)10/18
д)8/18.

Список литературы

1.Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - М.: Наука, 1980. – 424 с.

2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебник / Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1978. – 576 с.

3. Шнейдер, В.Е. Краткий курс высшей математики: учебник / В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. - М.: Высшая школа, 1978. – 240 с.

4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: учеб. пособие / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: Высшая школа, 1980. – 304 с.

5.Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2001. – 400 с.

6. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В.Е. Гмурман. - М.: Высшая школа, 1977. – 356 с.

7.Вентцель, Е.С. Теория вероятностей: учебник / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров.- М.: Наука, 2000. – 448 с.

8.Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие для сред. проф. учеб. заведений/Н.В. Богомолов. - 10-е изд., перераб. - М.: Высшая школа, 2009. - 496 с.

9.Виленкин И.В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов/ И.В. Виленкин, В.М. Гробер. - 5-е изд. - Ростов н/Д: Феникс, 2009, 2008, 2002. - 416 с.

10. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4-х ч. Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учеб. пособие для студ. вузов/Ред. А.П. Рябушко. - 4-е изд. - Минск: Вышэйшая школа, 2008. - 304 с.

11.Индивидуальные задания по высшей математике. В 4-х ч. Ч.2. Комплексные числа. Неопределённые и определённые интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для вузов/Ред. А.П. Рябушко. - 4-е изд., испр. - Минск: Вышэйшая школа, 2009. - 400 с.

12.Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике (Типовые расчеты): учеб. пособие для вузов/ Л.А. Кузнецов. - 9-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2007. - 240 с.

Св. план 2014 - 2015 уч. год.

Светлана Витальевна Смирнова

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Практикум по математике

Для студентов технических специальностей вечерней формы обучения

Подписано в печать
Тираж экз. Формат 21х30/2. Бумага листовая для ксероксной техники.
Печать ксероксная. Объем уч.-изд.л. Заказ №

Издание Рудненского индустриального института

Редакционно-издательский центр РИИ

г. Рудный, ул. 50 лет Октября, 58