МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Рудненский индустриальный институт

Кафедра инженерных и социально-гуманитарных дисциплин

Арепьева С.В.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Учебное пособие

Рудный 2018

УДК 512.81(0758)
ББК 22.143 я73
А 86

Рецензенты:

Таджигитов А.А. – к.ф. – м.н., доцент, заведующий кафедрой «Математика и информатика» СКГУ им. М.Козыбаева
Шалдыкова Б.А. – к.ф. – м.н., заведующая кафедрой кафедрой инженерных и социально-гуманитарных дисциплин Рудненского индустриального института

Арепьева С.В.
А 86 Аналитическая геометрия на плоскости: учеб. пособие / С.В. Арепьева – Рудный, 2018. – 70 с.

ISBN 978-601-7554-96-5

В учебном пособии изложены вопросы аналитической геометрии на плоскости. Пособие содержит справочный материал и методические рекомендации по решению задач. Для самопроверки практических навыков задания для самоконтроля в разных формах. Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей и форм обучения. Пособие будет активным помощником студентам и позволит им рационально организовать самостоятельную работу по изучению данной темы, активизировать участие на практических занятиях и СРСП. Рекомендуется для подготовки к ВОУД.

УДК 512.81(0758)
ББК 22.143 я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия — раздел геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры.

Разработка всех понятий и методов, необходимых для определения и использования осей координат, заняла продолжительный период в истории математики.

Архимед (287–212 гг. до н.э.) при доказательстве своих теорем о площадях плоских фигур и объемах тел не пользовался осями координат. Аполлоний (ок. 260–170 гг. до н.э.) написал трактат из восьми книг "О кониках", в котором исследовал эллипсы, параболы и гиперболы, определяемые как сечения кругового конуса. В этом трактате, фактически, уже используются координаты, хотя им и не приписываются числовые значения. Широта и долгота в "Геометрии" Птолемея (85–165 гг. н.э.) были уже числовыми координатами. Требовалось, однако, продолжительное влияние восточной математики, чтобы в Европе стала развиваться алгебра, а также философский принцип объединения, сформулированный Декартом как рационалистический подход к изучению природы, чтобы возникла научная тенденция к объединению алгебры и геометрии. В книге Декарта "Геометрия" (1637г.) классическая геометрия была включена в алгебру.

Иногда утверждается, что книга Декарта внесла основополагающий вклад в создание аналитической геометрии. Это, однако, не совсем верно, хотя бы потому, что Декарт использовал не оси координат, а одну прямую, на которой он откладывал отрезки и к которой проводил перпендикуляры. На прямой не указывалась стандартная начальная точка O и не определялось направление. Поэтому мы не можем признать, что прямая Декарта являлась осью координат, а длины отрезков — абсциссами или ординатами. Ближе к аналитической геометрии подошел Ферма (P. Fermat, 1601–1665), написавший (до 1636 года) небольшую работу по геометрии "Введение в изучение плоских и телесных мест". При жизни Ферма "Введение", как и другие его работы, не было опубликовано, но в списках стало известно многим математикам. Составитель некролога Ферма в Journal des Sçavans от 9 февраля 1665 года говорит, что "Введение" видели "раньше, чем г. Декарт опубликовал что–либо по этому вопросу". Было известно "Введение" и Декарту, которому его прислал в 1638 году Мерсенн — общий корреспондент Декарта и Ферма и посредник между ними. Декарт отнесся к "Введению" без всякого интереса (см. его письмо от 9 февраля 1639 года). "Введение" было опубликовано в 1679 году сыном Ферма. В это время уже существовало издание 1659–1661 гг. "Геометрии" Декарта с приложением голландского математика И. Гудде (J. Hudde, 1628–1704), в котором использовались положительные и отрицательные координаты, а также элементы анализа бесконечно малых. В 1679 году Ф. Лапр ввел пространственную систему координат. На этом фоне публикация "Введения" Ферма уже не могла произвести такого сильного впечатления, как если бы она была сделана в 1636 году. Но именно во "Введении" впервые используются координатные оси, координаты точек относительно этих осей и уравнения типа $y = kx$, $xy = k^2$, $x^2 + y^2 = c^2$, $x^2 \pm a^2 y^2 = b^2$ для координат точек прямых линий и конических сечений. Заметим, однако, что аналитическая геометрия — это синтез не геометрии и алгебры, а геометрии и анализа. Поэтому подлинную аналитическую геометрию мы можем найти только у корифеев Анализа — Ньютона (I. Newton, 1643–1727), Лейбница (G.W. Leibniz, 1646–1716) и Эйлера (L. Euler, 1707–1783).

Во второй половине XVIII века аналитическая геометрия, получив мощную поддержку зрелого анализа, завоевала новые вершины (Лагранж, Монж), однако рассматривается уже скорее как аппарат дифференциальной геометрии.

Данное учебное пособие является дополнением к учебникам и учебным пособиям по математике. Предназначено для студентов всех специальностей и всех форм обучения.

При подготовке пособия автор руководствовалась принципом повышения уровня математической подготовки студента. Все основные вопросы освещены достаточно подробно. Цель разработки данного пособия автором – дать студенту наиболее полный объем актуальной информации и математических знаний в доступной и понятной форме.

Структура учебного пособия следующая. Всего 3 главы. Каждая глава разбита на параграфы. Параграф содержит теоретический материал (основные определения, формулы и т.п.), необходимый для осмысления темы. Приводятся методические рекомендации по решению определенного круга задач, алгоритмы их решения.

Для каждой главы содержатся типовые задачи не только с решениями, но и для самостоятельной работы, позволяющие достаточно полно охватить учебный материал.

Для обеспечения оценки уровня подготовленности студентов в настоящее время используются методы тестирования, в частности, с применением современных компьютерных технологий. Поэтому наряду с традиционными контрольными заданиями, в пособии предлагается достаточный объем тестовых заданий. Варианты тестов предложены как с одним правильным ответом, так и с несколькими правильными ответами. Проверить вычисления можно по предложенным в конце пособия ответам.

Для самоконтроля студентам предлагается ответить на вопросы.

В конце пособия приводится список литературы.

Приведенные задания для контрольной работы и тесты могут быть эффективно использованы при подготовке к различным проверочным работам, в том числе к ВОУД.

1 Прямая на плоскости

1.1 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Прямая — одно из фундаментальных понятий геометрии.

При систематическом изложении геометрии прямая линия обычно принимается за одно из исходных понятий, которое лишь косвенным образом определяется аксиомами геометрии. Согласно примеру Д. Гильберта («точкой можно назвать хоть стул»), может обозначать достаточно произвольные объекты, даже изображение которых будет зависеть от выбранной аксиоматики и/или модели геометрии. Например, в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского прямыми являются полуокружности.

Если основой построения геометрии служит понятие расстояния между двумя точками пространства, то прямую линию можно определить как линию, путь вдоль которой равен расстоянию между двумя точками.

Аналитически прямая задаётся уравнением (в трёхмерном пространстве — системой уравнений) первой степени.

Свойства прямой в евклидовой геометрии.

1.Через любую точку можно провести бесконечно много прямых.

2.Через любые две несовпадающие точки можно провести единственную прямую.

3.Две несовпадающие прямые на плоскости или пересекаются в единственной точке, или являются параллельными (следует из предыдущего).

4.В трёхмерном пространстве существуют три варианта взаимного расположения двух прямых:

прямые пересекаются;

прямые параллельны;

прямые скрещиваются.

5.Прямая линия — алгебраическая кривая первого порядка: в декартовой системе координат прямая линия задается на плоскости уравнением первой степени (линейное уравнение).

Всякая прямая в декартовой системе координат может быть представлена уравнением прямой первой степени и, обратно, всякое уравнение первой степени относительно x и y определяет прямую линию.

Рассмотрим прямую, не параллельную осям координат. Положение ее на плоскости вполне определяется заданием угла наклона прямой к положительному направлению оси OX и величиной отрезка OB, отсекаемого прямой на оси OY (рисунок 1). Обозначим этот угол через φ.

Величину отрезка OB обозначим через b. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка, лежащая на прямой.

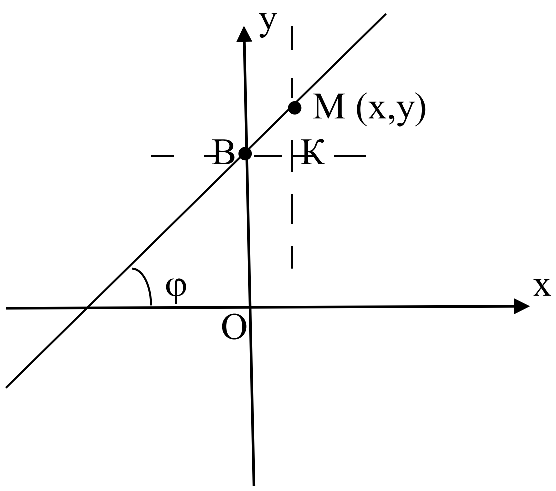

Рисунок 1 – Прямая с угловым коэффициентом

Проведем прямые BK и MK, параллельные осям координат. Получим прямоугольный треугольник MBK, для которого верно соотношение:

$$tg\varphi = \frac{MK}{BK}. \qquad (1)$$

Тангенс угла наклона прямой к оси OX называют угловым коэффициентом прямой.

Обозначим его буквой к, т.е. $tg\varphi = \kappa$. Из рисунке 1 видно, что MK= y- b, BK=x, равенство (1) теперь можно записать в виде: $\kappa = \frac{y-b}{x}$, или окончательно

$$y = \kappa x + b. \qquad (2)$$

Уравнению (2) удовлетворяют лишь координаты точек, лежащие на рассматриваемой прямой, оно нарушается, если точка не лежит на прямой. Таким образом, полученное уравнение (2) является уравнением заданной прямой линии.

Уравнение прямой вида (2) называют уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Уравнение (2) получено, считая, что прямая не параллельна осям координат.

Рассмотрим частные случаи расположения прямой на координатной плоскости.

1.Пусть прямая параллельна оси OY (рисунок 2). Обозначим через абсциссу точки пересечения этой прямой осью OX. Очевидно, любая точка прямой имеет абсциссу, равную а, если же точка не лежит на прямой, то ее абсцисса будет отлична от а. Следовательно, уравнение этой прямой имеет вид х=а

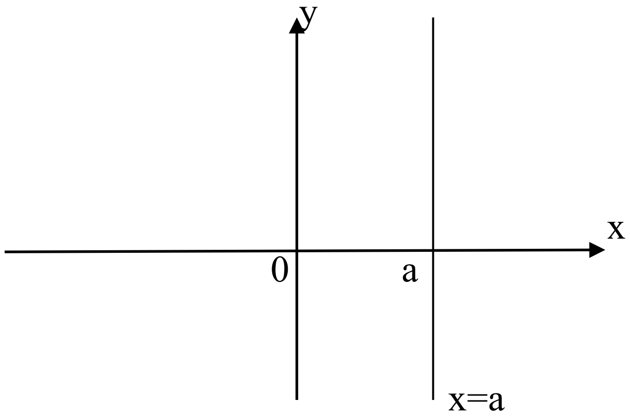

Рисунок 2 – Прямая х=а

2. Пусть прямая параллельна оси ОХ. Ее угловой коэффициент к =0. Считая этот случай частным, из уравнения (2) получаем у=b (рисунок 3).

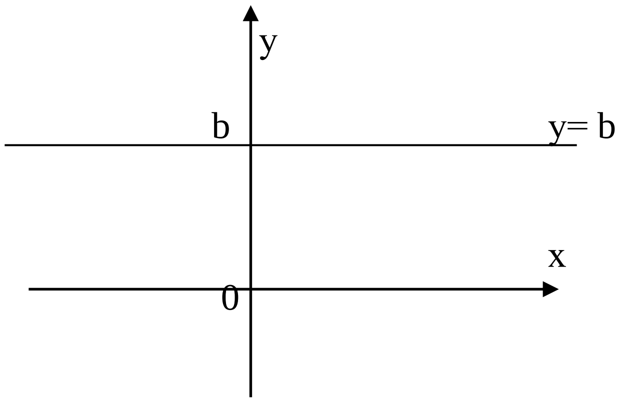

Рисунок 3 – Прямая у= b

Пример 1. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ОY отрезок b=3 и составляющей с осью: 1) $\varphi=45^0$; 2) $\varphi=135^0$.

Решение. 1) к = tgφ =tg45^0 =1. Подставляем в уравнение (2):
уравнение прямой имеет вид: у=х+3;

2) к=tg φ=tg135^0= -1. Уравнение имеет вид: у= -х+3.

Ответ: 1) у=х+3; 2) у= -х+3.

1.2 Общее уравнение прямой

Общее уравнение первой степени относительно х и у имеет вид:

$$Ax+By+C=0, \qquad (3)$$

где A, B, C – произвольные числа, не равные нулю одновременно. Разрешим уравнение (3) относительно y (считая, что B≠0):

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

или, введя обозначения $-\frac{A}{B} = K$, $-\frac{C}{B} = b$, $y = Kx + b$.

Если B=0, $A \neq 0$ то получим $x = -\frac{C}{A}$, или обозначая $-\frac{C}{A} = a$, $x = a$.

Получили уравнение прямой, параллельной оси OY.

При A=0 уравнение (3) примет вид: By+C=0, или $y = -\frac{C}{B}$.

Обозначая $-\frac{C}{B} = b$, получим y=b.

Получили уравнение прямой, параллельной оси OX.

Таким образом, всякое уравнение первой степени относительно x и y определяет прямую линию. Уравнение (3) называют общим уравнением прямой.

Пример 2. Написать уравнение с угловым коэффициентом для прямой, заданной общим уравнением 2x+3y+7=0.

Решение. Разрешим уравнение относительно y:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}.$$

Видно, что угловой коэффициент $\kappa = -\frac{2}{3}$, а величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY, $b = -\frac{7}{3}$.

Ответ: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$.

Рассмотрим некоторые его частные случаи.

1. При C=0 уравнение (3) имеет вид:

$$Ax+By=0, \qquad (4)$$

которое определяет прямую, проходящую через начало координат, т.к. уравнению удовлетворяют координаты начала x=0, y=0.

2. Если в уравнении (3) A=0, получим

$$By+C=0, \tag{5}$$

или y=b (где $b = -\frac{B}{C}$).

Получим уравнение прямой, параллельной оси OX, т.к. для всех точек прямой линии ордината y имеет постоянное значение.

3. При B=0 уравнение (3) примет вид:

$$Ax+C=0, \tag{6}$$

или x=a (где $a = -\frac{C}{A}$), прямая параллельная оси OY.

4. При C=0, B=0 уравнение (3) имеет вид: Ax=0 или x=0. Прямая совпадает с осью OY.

5. При C=0, A=0 уравнение (3) примет вид: By=0 или y=0. Прямая совпадает с осью OX.

1.3 Угол между двумя прямыми

Пусть даны две прямые (рисунок 4):

$$L_1: \; y=k_1 x + b_1 \quad \text{и} \quad L_2: \; y=k_2 x + b_2 .$$

Обозначим через φ угол между этими двумя прямыми. Получим формулу, по которой можно вычислить угол между прямыми. Из уравнений прямых известны углы α_1 и α_2. $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

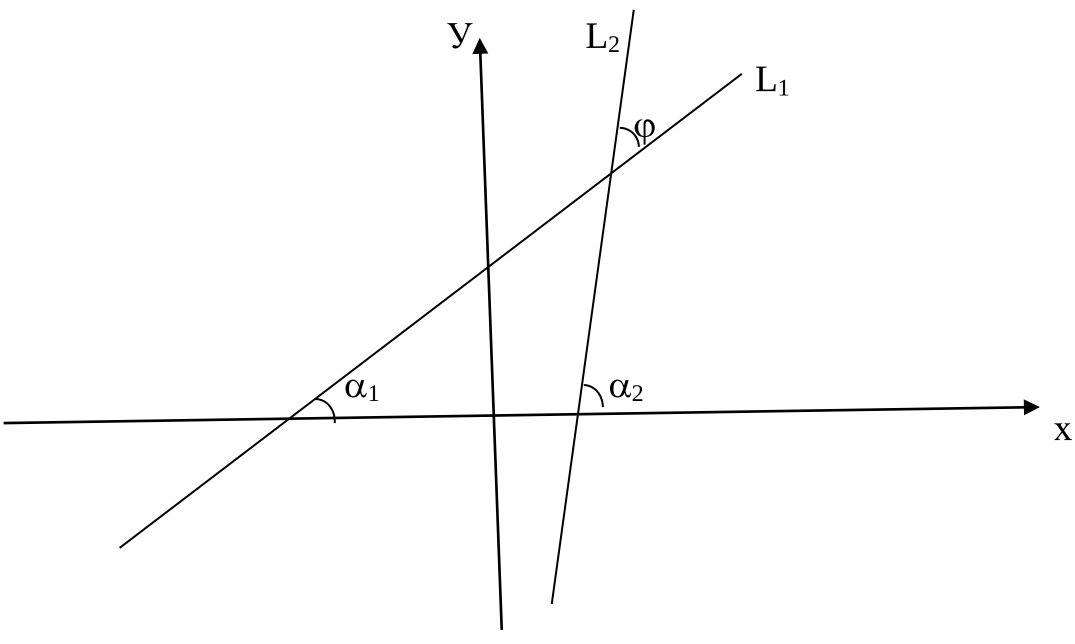

Рисунок 4 – Прямые на плоскости

По известной формуле имеем:

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}.$$

Так как $tg\alpha_1 = k_1$ и $tg\alpha_2 = k_2$, получим:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (7)$$

Формул (7) – формула для вычисления угла между двумя прямыми.

Пример 3. Найти угол между прямыми y=2x+5 и 3x+y+2=0.

Решение. Угловые коэффициенты прямых равны $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = -3$ соответственно. По формуле (7) получим:

$$tg\varphi = \frac{-3-2}{1+2\cdot(-3)} = 1, \text{ отсюда } \varphi = 45^0.$$

Ответ: 45^0.

Рассмотрим частные случаи расположения прямых на плоскости, параллельность и перпендикулярность двух прямых.

Параллельность прямых. Пусть $L_1 \parallel L_2$, тогда $\varphi = 0^0$, $\mathrm{tg}\, 0^0 = 0$.
По формуле (7):

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0.$$

При каком условии дробь равна нулю? При условии равенства нулю числителя. Т.е. $к_2 - к_1 = 0$, или $к_2 = к_1$.

Для параллельности двух прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были равны.

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow к_2 = к_1. \qquad (8)$$

Перпендикулярность прямых. Пусть $L_1 \perp L_2$, тогда $\varphi = 90^0$, $\mathrm{tg}\, 90^0 \to \infty$.
По формуле (7):

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \to \infty.$$

При каком условии дробь не существует? При условии равенства нулю знаменателя. Т.е. $1+\kappa_1\kappa_2=0$, или $\kappa_2=-\dfrac{1}{\kappa_1}$.

Для перпендикулярности двух прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были обратно пропорциональны с противоположным знаком:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \kappa_2=-\frac{1}{\kappa_1}. \qquad (9)$$

Пример 4. Определить взаимное расположение прямых 3x-4y+5=0 и 6x-8y-3=0.

Решение.

Прямые 3x-4y+5=0 и 6x-8y-3=0 параллельны, т.к. их угловые коэффициенты $\kappa_1=\dfrac{3}{4}$ и $\kappa_2=\dfrac{3}{4}$ равны, условие (8).

Ответ: параллельны.

Пример 5. Определить, при каком значении к прямая y=кх+3 будет перпендикулярна прямой y=4x-1.

Решение.

Угловой коэффициент второй прямой y=4x-1 равен $\kappa_2=4$. Из условия перпендикулярности (9) получим $\kappa_1=-\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{4}$.

1.4 Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

Найдем уравнение прямой с данным угловым коэффициентом κ, проходящей через данную точку $M(x_1,y_1)$. Уравнение этой прямой будем искать по формуле (2): y=кx+b. Неизвестное значение b определим из условия прохождения искомой прямой через точку М, координаты которой должны удовлетворять уравнению (2). Подставляя в это уравнение вместо текущих координат значения (x_1,y_1) получим: $y_1=\kappa x_1+b$.

Отсюда можно определить b и подставить найденное значение в уравнение (2) $b=y_1-\kappa x_1$, $y=\kappa x+(y_1-\kappa x_1)$, или $y-y_1=\kappa(x-x_1)$.

$$y-y_1=\kappa(x-x_1) \qquad (10)$$

- уравнение прямой линии, проходящей через точку $M(x_1, y_1)$ и имеющий данный угловой коэффициент κ.

Пример 6. Найти уравнение прямой проходящей через точку М(1,2) параллельно прямой 2х-3у+5=0.

Решение.

В силу условия параллельности прямых (8) угловой коэффициент искомой прямой равен угловому коэффициенту $\kappa = \frac{2}{3}$ данной прямой. Итак, подставляя в уравнение (10) $\kappa = \frac{2}{3}$, $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, получим уравнение искомой прямой $y - 2 = \frac{2}{3}(x-1)$. После преобразования имеем: 2х-3у+4=0.

Ответ: 2х-3у+4=0.

Пример 7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку М(-1,1) перпендикулярно прямой 3х-у+2=0.

Решение.

Угловой коэффициент данной прямой $\kappa_1 = 3$. Из условия перпендикулярности прямых $\kappa_1 \kappa_2 = -1$ получаем угловой коэффициент κ_2 искомой прямой: $3\kappa_2 = -1$ или $\kappa_2 = -\frac{1}{3}$. Итак, из (10) получим уравнение искомой прямой х+3у-2=0.

Ответ: х+3у-2=0.

1.5 Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Даны две точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$. Найдем уравнение прямой, проходящей через эти точки. Так как эта прямая проходит через точку М, то согласно формуле (10) ее уравнение имеет вид: $y - y_1 = \kappa(x - x_1)$, где к – неизвестный угловой коэффициент. Значение этого коэффициента определим из того условия, что искомая прямая проходит через точку N, а значит ее координаты удовлетворяют уравнению (10): $y_2 - y_1 = \kappa(x_2 - x_1)$, отсюда $\kappa = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Поставим найденное значение К в уравнение (13) и получим

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

или

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ . \tag{11}$$

Формула (11) определяет уравнение прямой, проходящей через две точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$.

В частном случае, когда точки M(a,0) и N(0,b) лежат на осях координат, то уравнение (11) примет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{12}$$

Уравнение (12) называют уравнением прямой в «отрезках», здесь a и b обозначают отрезки, отсекаемые прямой на осях координат.

Пример 8. Составим уравнение прямой, проходящей через точки M(1,2) и B(3,-1).

Решение. Согласно (11) уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{y-2}{-1-2}=\frac{x-1}{3-1},$$

откуда

$$\frac{y-2}{-3}=\frac{x-1}{2},$$

или

$$2(y-2)= - 3(x-1)$$

окончательно получаем искомое уравнение 3x+2y-7=0.

Ответ: 3x+2y-7=0.

Прямая, проходящая через данную точку $M_0(x_0;\ y_0)$ в направлении вектора $\vec{s}=\{m;n\}$ (рисунок 5) имеет параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \end{cases} \tag{13}$$

Вектор $\vec{s}=\{m;n\}$ называют направляющим вектором прямой.

$$L \parallel \vec{s}$$

Каноническое уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ и имеющую направляющий вектор $\vec{s} = \{m; n\}$ имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \tag{14}$$

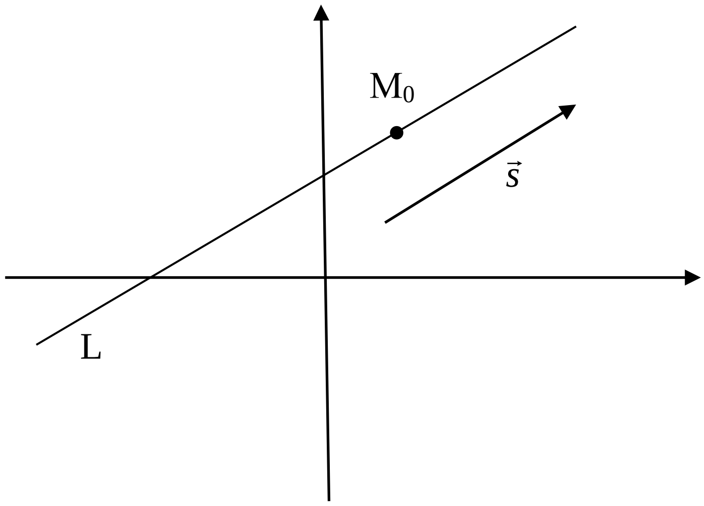

Рисунок 5 - Прямая

1.6 Расстояние от точки до прямой

Задачу вычисления расстояния от данной точки до прямой можно легко решить, используя уже полученные знания. Рассмотрим на конкретном примере.

Пример 9. Пусть дана точка M(-1,1) и прямая 3x-4y+12=0. Необходимо найти расстояние от этой точки до прямой EF. Расстояние d от точки M до прямой EF равно длине перпендикуляра MN, опущенного из M на EF (рисунок 6).

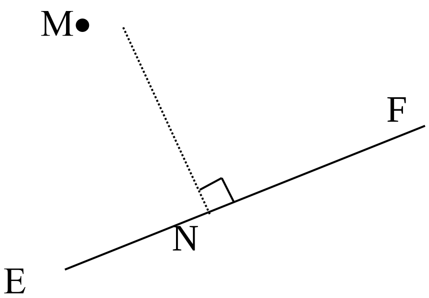

Рисунок 6 – Расстояние от точки до плоскости

Запишем алгоритм решения задачи.

1.Найдем угловой коэффициент κ_1 прямой EF, для этого разрешим уравнение прямой EF относительно у:

$$y = \frac{3}{4}x + 3 \tag{15}$$

$$\kappa_1 = \frac{3}{4}.$$

2. Используя условия перпендикулярности двух прямых, найдем угловой коэффициент κ_2 перпендикуляра MN:

$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = -1 \text{ или } \frac{3}{4} \cdot \kappa_2 = -1, \text{ отсюда } \kappa_2 = -\frac{4}{3}.$$

3.Напишем уравнение прямой MN, проходящей через точку M(-1,1) с угловым коэффициентом $\kappa_2 = -\frac{4}{3}$:

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x+1)$$

или

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}. \tag{16}$$

4.Вычислим координаты точки N – точки пересечение прямой EF с перпендикуляром MN. Координаты этой точки удовлетворяют уравнениям (15) и (16), их получим, решив совместно эти уравнения. Приравняем правые части этих уравнений

$$\frac{3}{4}x + 3 = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

и вычислим отсюда абсциссу x точки N:

$$\frac{3}{4}x + \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3} - 3$$

или

$$\frac{25}{12}x = -\frac{10}{3},$$

откуда $x = -\frac{8}{5}$.

Поставив найденное значение, например в уравнение (15), вычислим ординату точки N:

$$y = \frac{3}{4}\left(-\frac{8}{5}\right) + 3$$

или

$$y = -\frac{6}{5} + 3,$$

откуда $y = \frac{9}{5}$.

Итак, точка N имеет координаты $N\left(-\frac{8}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

5.Найдем теперь расстояние между точками M и N:

$$|MN| = d = \sqrt{\left(-1 + \frac{8}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{9}{5}\right)^2} = 1.$$

Эту задачу можно легко решить, используя общую формулу вычисления расстояния d от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой Ax+By+C=0, которая имеет вид:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{17}$$

Для задачи получим:

$$d = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1.$$

Ответ: 1.

По формуле (17) определяют расстояние от точки до прямой на плоскости.

2 Кривые второго порядка

Общее уравнение второго порядка относительно x и y содержит члены второй степени $\left(x^2, xy, y^2\right)$, первой степени (x, y) и нулевой степени (свободный член), имеет вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (18)$$

В уравнении (18) хотя бы один из коэффициентов A, B, C должен быть отличен от нуля. Уравнение (18) является уравнением второй степени, а линии, уравнения которых описываются уравнением типа (18), называют кривыми второго порядка.

В зависимости от значений коэффициентов уравнения (18) графиками кривых второго порядка являются окружности, эллипсы, гиперболы и параболы.

Впервые кривые второго порядка изучались Менехмом, учеником Евдокса. Его работа заключалась в следующем: если взять две пересекающиеся прямые и вращать их вокруг биссектрисы угла, ими образованного, то получится конусная поверхность. Если же пересечь эту поверхность плоскостью, то в сечении получаются различные геометрические фигуры, а именно эллипс, окружность, парабола, гипербола и несколько других фигур.

Однако эти научные знания нашли применение лишь в XVII веке, когда стало известно, что планеты движутся по эллиптическим траекториям, а пушечный снаряд летит по параболической. Ещё позже стало известно, что если придать телу первую космическую скорость, то оно будет двигаться по окружности вокруг Земли, при увеличении этой скорости — по эллипсу, при достижении второй космической скорости — по параболе, а при скорости, большей второй космической — по гиперболе.

2.1 Окружность

Самой простой кривой второго порядка является окружность, которую можно определить как геометрическое место точек, удаленных от данной точки C(a,b) на равное расстояние R.

Точка C называется центром окружности, а R – радиусом данной окружности. Уравнение окружности с центром в точке C(a,b) и с радиусом R всегда можно привести к простому виду:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (19)$$

Пример 9. Привести к виду (19) уравнение второго порядка $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

Решение.Сгруппируем члены, содержащие x, и отдельно члены, содержащие y, и выделим в них полные квадраты, т.е. двучлен x^2-2x представим в виде $x^2-2x=(x-1)^2-1$, а двучлен y^2+4y в виде $y^2+4y=(y+2)^2-4$.

После этого преобразования данное уравнение запишется так:

$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-4=0$ или $(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$.

Получили уравнение окружности с центром в точке C(1,-2) и радиусом, равным 3.

Ответ: $(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$.

Если начало координат совпадает с центром окружности, то ее уравнение имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2. \tag{20}$$

В частном случае, если R=0, имеем уравнение $x^2+y^2=0$, определяющее одну точку – начало координат.

Свойства окружности:

1.Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (касательная); иметь с ней две общие точки (секущая).

2.Касательная к окружности всегда перпендикулярна её диаметру, один из концов которого является точкой касания.

3.Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.

4.Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.

5.Длину окружности с радиусом R можно вычислить по формуле $C = 2\pi R$.

6.Вписанный угол либо равен половине центрального угла, опирающегося на его дугу, либо дополняет половину этого угла до 180°.

7.Два вписанных угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

8.Вписанный угол, опирающийся на дугу длиной в половину окружности равен 90°.

9.Угол между двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности равен полуразности мер дуг, лежащих между секущими.

10.Угол между пересекающимися хордами равен полусумме мер дуги лежащей в угле и дуги напротив нее.

11.Угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой хордой.

12.Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

13.При пересечении двух хорд произведение отрезков, на которые делится одна из них точкой пересечения, равно произведению отрезков другой.

14.Произведение длин расстояний от выбранной точки до двух точек пересечения окружности и секущей проходящей через выбранную точку не зависит от выбора секущей и равно абсолютной величине степени точки относительно окружности.

15.Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей и равен абсолютной величине степени точки относительно окружности.

16.Окружность является простой плоской кривой второго порядка.

17.Окружность является коническим сечением и частным случаем эллипса.

2.2 Эллипс

Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (больше расстояния между фокусами), равная 2a. Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2 (рисунок 7), а расстояния между ними через 2c.

$$F_1F_2 = 2c \tag{21}$$

Примем за ось абсцисс прямую, соединяющую фокусы, выбрав на ней положительное направление от F_2 к F_1; начало координат возьмем в середине отрезка F_1F_2 между фокусами. Тогда координаты точек F_1 и F_2 будут соответственно (c,0) и (-c,0). Обозначим сумму расстояний точек эллипса от фокусов через 2a. По определению эллипса имеем $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Каноническое уравнение эллипса в выбранной системе координат с данными обозначениями имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{22}$$

Здесь $b^2 = a^2 - c^2 (c < a)$.

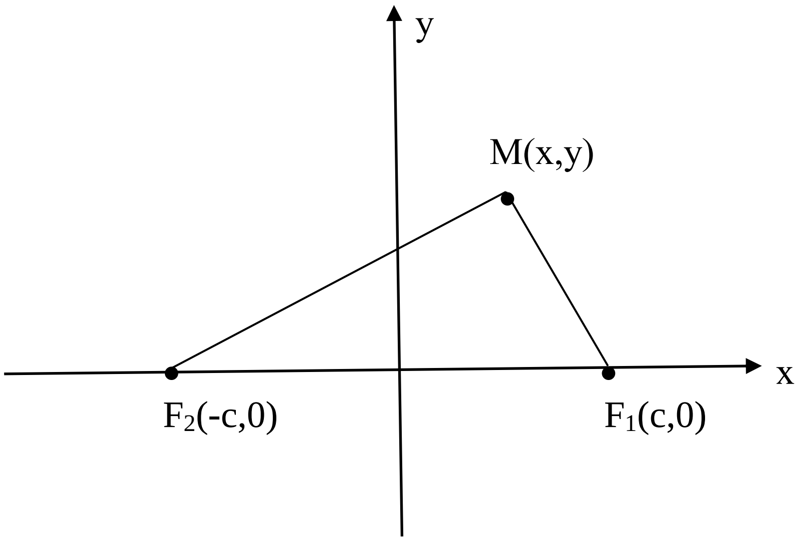

Рисунок 7 – Фокусы

Так как уравнение (22) содержит только квадраты текущих координат, то если точка (x,y) находится на эллипсе, то и точки $(\pm x, \pm y)$ находятся на эллипсе при произвольном выборе знаков у координат. Это означает, что оси координат являются осями симметрии эллипса.

Ось симметрии эллипса, на которой находятся фокусы, называют фокальной осью. Центр симметрии (точка пересечения осей симметрии) называют центром эллипса.

Для эллипса, заданного уравнением (22), фокальная ось совпадает с осью OX, а центр – с началом координат. Точки пересечения с осями симметрии называют его вершинами. Вершины A_1, A_2, B_1, B_2 эллипса, заданного уравнением (22), находятся в точках пересечения эллипса с осями координат.

Координаты вершины A можно найти, полагая в уравнении (22) y=0, $\frac{x^2}{a^2} = 1$, откуда $x^2 = a^2$ и $x = \pm a$. Полагая x=0, найдем ординаты вершин B_1 и B_2; $\frac{y^2}{b^2} = 1$, или $y^2 = b^2$, откуда $y = \pm b$.

Итак, вершины эллипса имеют следующие координаты: $A_1(a,0), A_2(-a,0), B_1(0,b), B_2(0,-b)$ (рисунок 8).Отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$, соединяющие противоположные вершины эллипса, называют соответственно большой и малой осями эллипса.

Длины a и b называют соответственно большой и малой полуосями эллипса.

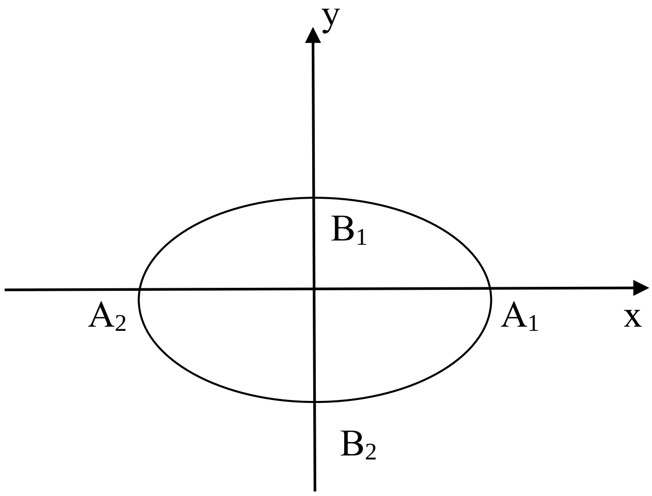

Рисунок 8 - Эллипс

Если $a = b$ $(c = 0)$, уравнение (22) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$ и определяет окружность, а значит окружность можно рассматривать как частный случай эллипса с равными полуосями.

Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - называют эксцентриситетом эллипса.

Для эллипса $0 \le \varepsilon < 1$ (для окружности $\varepsilon = 0$). Величина эксцентриситета влияет на форму эллипса. Так, при очень малом ε полуоси a и b почти равны и эллипс напоминает окружность. Если же величина ε близка к единице, то эллипс имеет сильно вытянутую форму.

Если фокусы эллипса расположены на оси OY, то эллипс «вытягивается» вдоль оси OY, тогда фокусы имеют следующие координаты $F_1(0, c)$ *и* $F_2(0, -c)$.

Как известно, траекторией движения планет и некоторых комет является эллипс, в одном из фокусов которого находится солнце. Оказывается, эксцентриситеты планетных орбит малы, а кометных – велики (близки к 1). Таким образом, планеты движутся почти по окружностям, а кометы – по вытянутым эллипсам, то приближаясь к солнцу, то удаляясь от него.

Пример 10. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось b=3.

Решение.

По условию 2c=8, т.е. c=4, b=3, $b^2 = a^2 - c^2$, отсюда $a^2 = b^2 + c^2$, т.е. $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ или a=5. Уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

2.3 Гипербола

Гиперболой называют геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

По определению гиперболы $F_2M - F_1M = \pm 2a$. Знак плюс в правой части надо выбирать, если $F_2M > F_1M$ и минус, если $F_2M < F_1M$ (рисунок 7).

Каноническое уравнение гиперболы в выбранной системе координат при данных обозначениях имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (23)$$

где $b^2 = c^2 - a^2 (c > a)$.

Уравнение (23) содержит квадраты текущих координат, следовательно, оси координат являются осями симметрии гиперболы. Ось симметрии, на которой находятся фокусы, называют фокальной осью, точка пересечения осей симметрии – центр гиперболы. Для гиперболы, заданной уравнением (23), фокальная ось совпадает с осью OX, а центр – с началом координат.

Точки пересечения с осями симметрии. Точки пересечения гиперболы с осями симметрии называются вершинами гиперболы. Полагая в уравнении (23) y=0, найдем абсциссы точек пересечения с осью OX: $\frac{x^2}{a^2} = 1$ или $x^2 = a^2$, откуда $x = \pm a$. Итак, точки $A_1(a,0), A_2(-a,0)$ являются вершинами гиперболы.

Если же в уравнении (23) принять x=0, получим $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ или $y^2 = -b^2$, т.е. для y получают мнимые значения. Это означает, что гипербола не пересекает ось OY. В соответствии с этим ось симметрии, пересекающая гиперболу называют действительной осью (фокальная ось); ось симметрии, которая не пересекает гиперболу, - ее мнимой осью.

Для гиперболы, заданной уравнением (23), действительной осью симметрии является ось OX, а мнимой осью – ось OY. Длина отрезка $A_1A_2 = 2a$, число a называется действительной полуосью гиперболы. Отложим на мнимой оси гиперболы по обе стороны от центра симметрии O отрезки OB_1 и OB_2 длиною b, тогда отрезок $B_1B_2 = 2b$ называют мнимой осью, а величина b – мнимой полуосью гиперболы (рисунок 9).

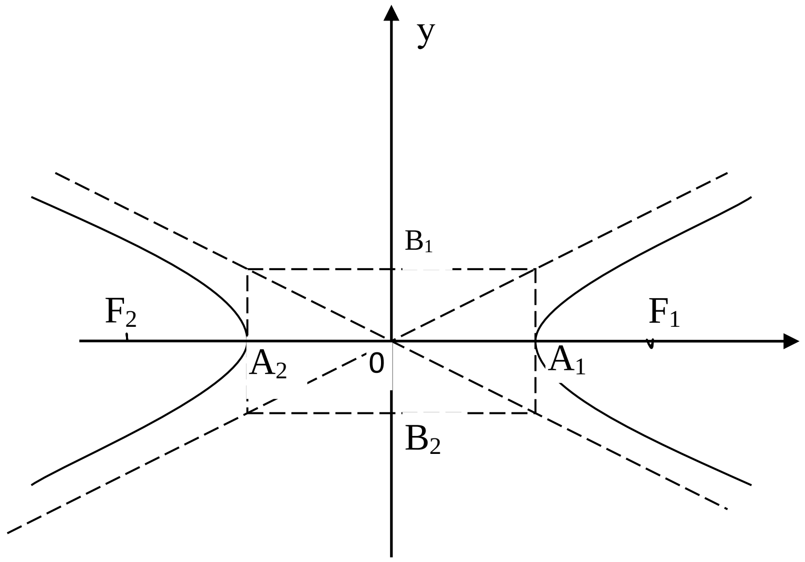

Рисунок 9 - Гипербола

Из уравнения (23) видно, что $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, следовательно, $|x| \geq 1$. Кривая имеет форму изображенную на рисунке 9. Она располагается вне прямоугольника со сторонами, равными 2a и 2b, с центром вначале координат, и состоит из двух отдельных ветвей, простирающихся в бесконечность. Диагонали этого прямоугольника определяются уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x\,;\; y = -\frac{b}{a}x \tag{24}$$

и являются асимптотами гиперболы. Если a=b, то гипербола называется равносторонней. Если мнимая ось гиперболы равна 2a и расположена на оси OX, а действительная ось равна 2b и расположена на оси OY, то уравнение такой гиперболы (рисунок 10) имеет вид:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{25}$$

Гиперболы (23) и (25) называют сопряженными гиперболами.

Эксцентриситетом гиперболы называют отношение фокусного расстояния к действительной оси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{26}$$

Для любой гиперболы $\varepsilon > 1$, это число определяет форму гиперболы.

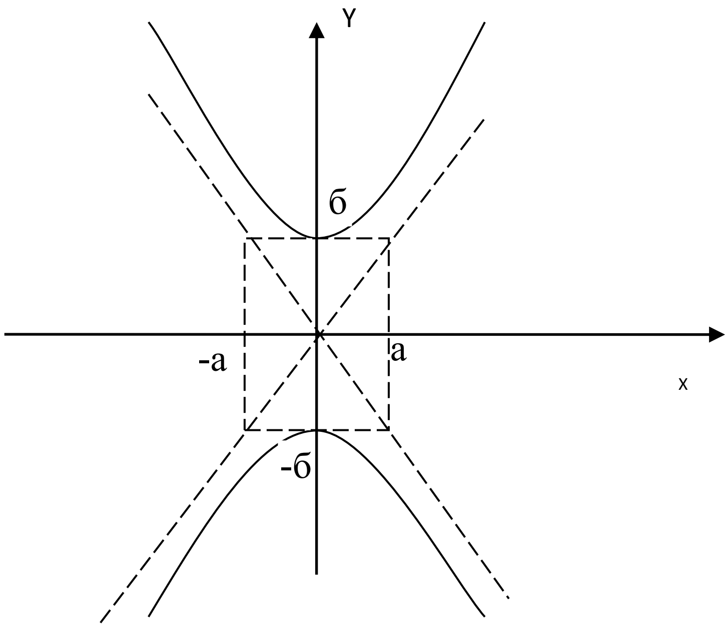

Рисунок 10 - Гипербола

Пример 10. Найти координаты фокусов и вершин гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$. Написать уравнения ее асимптот и вычислить эксцентриситет.

Решение. Напишем каноническое уравнение гиперболы, для этого обе части уравнения поделим на 144. После сокращения получим $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Отсюда видно, что $a^2 = 9$, т.е. $a = 3$ и $b^2 = 16$, т.е. $b = 4$.

Для гиперболы $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$, отсюда $c = 5$.

Теперь можем написать координаты вершин и фокусов гиперболы:

$$A_1(3,0), A_2(-3,0), F_1(5,0), F_2(-5,0).$$

Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.

Уравнения асимптот имеют вид: $y = \frac{4}{3}x$ и $y = -\frac{4}{3}x$.

Ответ: $A_1(3,0), A_2(-3,0), F_1(5,0), F_2(-5,0)$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$, $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$.

2.4 Парабола

Парабола есть геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Выберем систему координат таким образом: за ось OX примем прямую, проходящую через фокус F перпендикулярно к директрисе, за положительное направление примем направление от директрисы к фокусу.
За начало координат примем середину O отрезка от точки F до директрисы, длину которого обозначим через P и будем называть параметром параболы. Пусть M(x,y) произвольная точка, лежащая на параболе (рисунок 11). Пусть точка N основание перпендикуляра, опущенного из M на директрису. По определению параболы MN=MF.

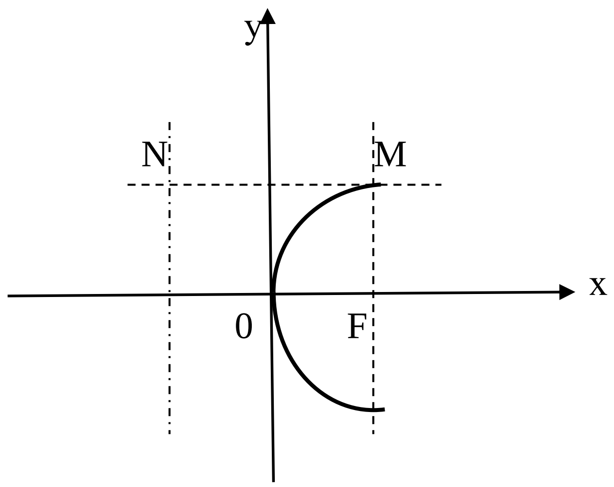

Рисунок 11 - Парабола

Из этого условия получаем каноническое уравнение параболы в выбранной системе координат

$$y^2 = 2px \qquad (27)$$

Пусть $p > 0$, исследуем форму параболы. Из канонического уравнения параболы видно, что x не может принимать отрицательных значений, т.е. все точки параболы лежат справа от оси OY. Уравнение содержит переменную y в квадрате, значит парабола симметрична относительно оси OX, эта ось называется осью параболы. Точка O пересечения параболы с ее осью симметрии называется вершиной параболы. Для параболы, заданной уравнением (27), вершина совпадает с началом координат, а ось симметрии – с осью OX. График параболы имеет вид, изображенный на рисунке 11. Уравнение директрисы записывается в виде:

$$x = -\frac{p}{2}. \qquad (28)$$

При $p > 0$ парабола располагается левее оси OY.

Парабола $x^2 = 2py$ имеет фокус $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, директрису $y = -\frac{p}{2}$ и расположена над осью OX, если $p > 0$, и под осью OX при $p < 0$. Осью симметрии такой параболы является ось OY, а вершиной – начало координат.

Пример 11. Составить уравнение параболы и ее директрисы, зная, что она симметрична относительно оси OY, фокус находится в точке F(0;2), вершина совпадает с началом координат.

Решение. Будем решать уравнение параболы в виде $x^2 = 2py$.

По условию $\frac{p}{2} = 2$, а значит p=4. Итак, искомое уравнение имеет вид: $x^2 = 8y$, уравнение ее директрисы: y = -2.

Ответ: $x^2 = 8y$, y = -2.

Свойства параболы:

1.Парабола — кривая второго порядка.

2.Она имеет ось симметрии, называемой осью параболы . Ось проходит через фокус и перпендикулярна директрисе.

3.Пучок лучей параллельных оси, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. Для параболы с вершиной в начале координат (0; 0) и положительным направлением ветвей фокус находится в точке (0; 0,25).

4.Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ будет лежать на директрисе.

5.Парабола является антиподерой прямой.

6.Все параболы подобны. Расстояние между фокусом и директрисой определяет масштаб.

7.При вращении параболы вокруг оси симметрии получается эллиптический параболоид.

8.Прямая пересекает параболу не более чем в двух точках.

9.Эксцентриситет параболы ε =1.

2.5 Замечательные кривые

Понятие линии возникло в сознании человека в доисторические времена. Траектория брошенного камня, очертание цветов и листьев растений, извилистая линия берега и другие явления природы с давних пор привлекли внимание людей. Наблюдаемые многократно, они послужили основой для постепенного установления понятия о линии. Но потребовался значительный промежуток времени для того, чтобы наши предки стали сравнивать между собой формы кривых. Первые рисунки на стенах пещер, примитивные орнаменты на домашней утвари показывают, что люди умели не только отличать прямую от кривой, но и различать отдельные кривые. В разговорном языке «кривая», «кривой» «кривое» употребляется, как прилагательные, обозначающие, то что откланяется от прямого, от правильного, от справедливого. Говорят о кривой палке, кривой дороге, о кривом зеркале; «без соли, и стол кривой» - гласит пословица. Так же и сегодня, все что нас окружает, состоит из множества черт, которые, в свою очередь, складываются из различных кривых. В силу частой встречаемости кривые находят широкое практическое применение: они встречаются в быту, живописи, архитектуре, природе.

Изучение этих кривых, а также принципа их построения способствует тому, что, определяя закономерности, которым подчиняется след движущейся точки, и, описывая их, можно прийти к тому, что, зная только параметры направляющей и производящей фигур, можно построить например, по круговой траектории движутся люди при катании на колесе обозрения, карусели, по гиперболе движутся альфа-частицы в опыте Резерфорда при рассеивании их ядром атома; по эллипсам движутся планеты вокруг Солнца, по параболе – тело в однородном поле силы тяжести, брошенное под углом к горизонту. Знакомство с кривыми, изучение их свойств позволит расширить геометрические представления, углубить знания, повысить интерес к геометрии; создаст содержательную основу для дальнейшего изучения математики, физики и других наук.

2.5.1 Лемниската Бернулли

Название происходит от греч. λημνισχος (лемнискос) — лента, повязка. В Древней Греции «лемнискатой» называли бантик, с помощью которого прикрепляли венок к голове победителя на спортивных играх. Данный вид лемнискаты назван в честь швейцарского математика Якоба Бернулли, положившего начало её изучению. В 1694 г. Якоб Бернулли в работе, посвященной теории приливов и отливов, использовал в качестве вспомогательного средства линию, которую он задает уравнением

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2). \qquad (29)$$

Он отмечает сходство этой линии с цифрой 8 и узлообразной повязкой, которую он именует «лемниском» (рисунок 12). Отсюда называние лемниската. Лемниската получила широкую ивестность в 1718 г., когда итальянский математик Джулио Карло Фаньяно (1682 – 1766) установил, что интеграл, представляющий длину дуги лемнискаты, не выражается через элементарные функции.

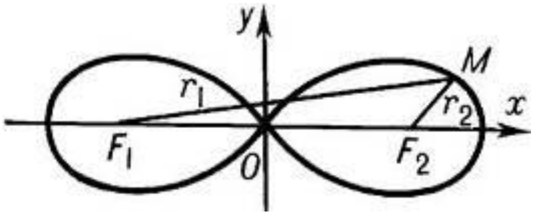

Рисунок 12 - Лемниската Бернулли

Лемниската есть частный вид линии Кассини. Однако, хотя линии Кассини получили всеобщую известность с 1749 г., тождественность «восьмерки Кассини» с лемнискатой Бернули была уставновлена лишь в 1806 г. (итальянским математиком Саладини).

Лемниската есть геометрическое место точке, для которых произведение расстояний от них до концов данно отрещка $F_1F_2 = 2c$ равно c^2. Точки F_1, F_2 называют фокусами лемнискаты; прямая F_1F_2 – ее осью.

2.5.2 Циклоида

Циклоидой именуют кривую, которая описывает точка окружности, катящейся без скольжения по неподвижной прямой (рисунок 13).

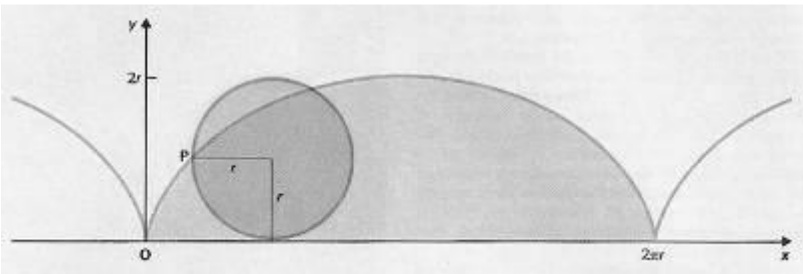

Рисунок 13 - Циклоида

Название кривой дал Галилео Галилей, впервые обративший на нее внимание. Сравнивая вес двух металлических пластинок равной толщины, одна из которых была вырезана по циклоиде, а другая по окружности, порождающей эту циклоиду, Галилей обнаружил, что площадь сегмента циклоиды в три раза больше площади соответствующего круга. Опыты Галилея дали толчок строгим математическим исследованиям циклоиды. Сначала его ученик Торричелли, а затем Роберваль, Декарт и Ферма не только обосновали зависимость, открытую Галилеем, но и установили ряд других свойств циклоиды. Простота и изящество определения циклоиды привлекали к ней многих математиков XVII-XVIII вв. Ею занимались Паскаль, Лейбниц, Гюйгенс, Даниил Бернулли. Причем вначале циклоида сама была предметом пристального изучения, а впоследствии на ней проверялись мощные методы зарождающего математического анализа. Циклоида характеризуется параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = rt - r\sin t; \\ y = r - r\cos t. \end{cases} \quad (29)$$

2.5.3 Декартов лист

Впервые уравнение кривой исследовал Р. Декарт в 1638 году, однако он построил только петлю в первом координатном угле, где x и y принимают положительные значения (рисунок 14). Декарт полагал, что петля симметрично повторяется во всех четырёх координатных четвертях, в виде четырёх лепестков цветка. В то время эта кривая называлась цветком жасмина (рисунок 15). В современном виде эту кривую впервые представил Х. Гюйгенс в 1692 году.

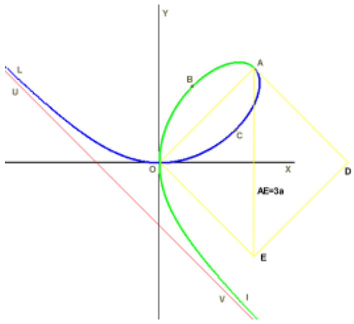

Рисунок 14 – Декартов лист

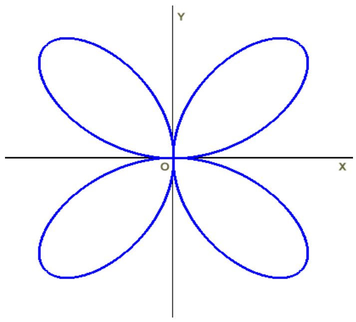

Рисунок 15 – Декартов лист

Декартов лист является плоской кривой третьего порядка и задаётся уравнением

$$x^3 + y^3 = 3axy. \tag{31}$$

Коэффициент 3а выражает диагональ квадрата, сторона которого равна наибольшей хорде ОА петли, так что $OA = \frac{3a}{\sqrt{2}}$, а диагональю такого квадрата будет $AE=3a$. Точка О – узловая. Осью симметрии петли является прямая ОА, задаваемая уравнением $y=x$.

2.5.4 Кардиоида

Кардиоида впервые встречается в трудах французского учёного Луи Карре (Louis Carrè, 1705 г.). Название кривой дал Джованни Сальвемини ди Кастиллоне в 1741 г. «Спрямление», то есть вычисление длины кривой, выполнил Ла Ир, который открыл кривую независимо, в 1708 г. Также независимо описал кардиоиду голландский математик Й. Коерсма (J. Koersma, 1741 г.). В дальнейшем к кривой проявляли интерес многие видные математики XVIII-XIX веков. Понаблюдаем за какой-нибудь точкой окружности, когда последняя катится по внешней стороне неподвижной окружности равного радиуса (рисунок 16). Траекторией точки будет кардиоида. По мнению математиков, придумавших название кривой, она отдаленно напоминает форму сердца (греческое слово «кардиа» означает «сердце»). Уравнение кардиоиды в прямоугольных координатах:

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 - 4a^2(x^2+y^2)=0 \tag{32}$$

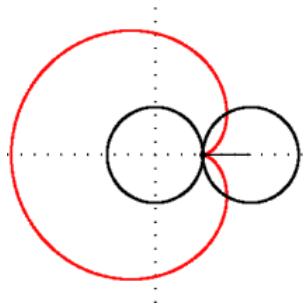

Рисунок 16 - Кардиоида

Сорок лет назад математик Илья Блох привел многочисленные примеры явления и применения кардиоиды. Так, изучая фотографию обратной стороны Луны, он выявил, что выдающиеся вершины гор и обособленные кратеры единственным образом складываются в последовательность, представляющую собой две сопряженные кардиодические линии. Центр этого изображения совпадает с центром диска Луны, а его длина равна половине диаметра диска. В те же годы в журнале "Наука и жизнь" один из космонавтов писал о самой экономичной траектории полета с планеты на планету с возвращением туда, откуда стартовал корабль. Такая траектория представляет собой математически правильную кардиоиду. Кардиоида используется как линия для вычерчивания профилей, если требуется, чтобы скользящий по профилю стержень совершал гармонические колебания. При этом скорость поступательного движения стержня будет изменяться без скачков. Этим свойством она выгодно отличается от спирали Архимеда, у которой, благодаря постоянности скорости стержня, в конце каждого хода стержня происходят удары (скорость скачком меняет значение скорости с v на —v), что вызывает быстрое изнашивание механизма.

2.5.5 Спираль Архимеда

Архимедова спираль – плоская кривая, описываемая точкой М, равномерно движущейся по прямой ОА, в то время как эта прямая равномерно вращается в плоскости вокруг одной из своих точек О. Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между витками (рисунок 17).

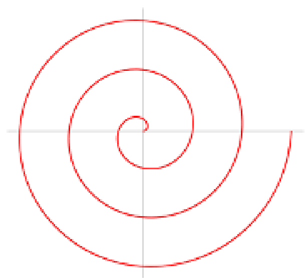

Рисунок 17 - Спираль Архимеда

Спираль Архимеда состоит из бесконечно многих витков. Она начинается в центре, и все более и более удаляется от него по мере того, как растет число оборотов. По спирали Архимеда идет, например звуковая дорожка. Одна из деталей швейной машинки – механизм для равномерного наматывания нити на шпульку – имеет форму спирали Архимеда. Спираль Архимеда в настоящее время широко используется в технике. Одно из изобретений ученого – винт (прообраз объемной спирали)- использовалось как механизм для передачи воды в оросительные каналы из низколежащих водоемов. Винт Архимеда стал прообразом шнека – устройства, широко используемого в различных машинах для перемешивания жидких, сыпучих и тестообразных материалов. Самая распространенная его разновидность – винтовой ротор в обычной мясорубке.
Уравнение Архимедовой спирали в полярной системе координат записывается так:

$$\rho=\kappa\varphi \qquad (33)$$

2.5.6 Циссоида Диоклеса

Циссоида Диоклеса – плоская алгебраическая кривая 3-го порядка. Уравнение этой кривой в декартовой прямоугольной системе координат имеет соответственно вид:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \tag{34}$$

В декартовой системе координат, где ось абсцисс направлена по OX, а ось ординат по OY, на отрезке OA = 2a, как на диаметре строится вспомогательная окружность (рисунок 18).

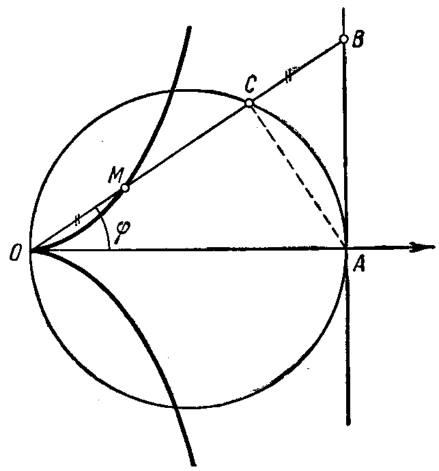

Рисунок 18 - Циссоида Диоклеса

3 Полярная система координат

Понятие угла и радиуса были известны ещё в первом тысячелетии до н. э. Греческий астроном Гиппарх (190—120 гг до н. э.) создал таблицу, в которой для разных углов приводились длины хорд. Существуют свидетельства применения им полярных координат для определения положения небесных тел. Архимед в своём сочинении «Спирали» описывает так называемую спираль Архимеда, функцию, радиус которой зависит от угла. Работы греческих исследователей, однако, не развились в целостное определение системы координат.

В IX веке персидский математик Хабас аль-Хасиб аль-Марвази применял методы картографических проекций и сферической тригонометрии для преобразования полярных координат в другую систему координат с центром в некоторой точке на сфере, в этом случае, для определения Киблы — направления на Мекку. Персидский астроном Абу Райхан Бируни (973—1048) выдвинул идеи, которые выглядят как описание полярной системы координат. Он был первым, кто, примерно в 1025 году, описал полярную экви-азимутальную равнопромежуточную проекцию небесной сферы.

Существуют разные версии о введении полярных координат в качестве формальной системы координат. Полная история возникновения и исследования описана в работе профессора из Гарварда Джулиан Лоувел Кулидж «Происхождение полярных координат». Грегуар де Сен-Венсан и Бонавентура Кавальери независимо друг от друга пришли к похожей концепции в середине XVII века. Сен-Венсан описал полярную систему в личных заметках в 1625 году, напечатав свои труды в 1647; а Кавальери напечатал свои труды в 1635 году, и исправленную версию в 1653 году. Кавельери применял полярные координаты для вычисления площади, ограниченной спирали Архимеда. Блез Паскаль впоследствии использовал полярные координаты для вычисления длин параболических дуг.

В книге «Методы флукций» (написана в 1671 году, напечатана в 1736 году) сэр Исаак Ньютон исследовал преобразование между полярными координатами, которые он обозначал как «Седьмой способ; Для спиралей» («англ. *Seventh Manner; For Spirals*»), и девятью другими системами координат. В статье, опубликованной в 1691 году в журнале *Acta eruditorum*, Якоб Бернулли использовал систему с точкой на прямой, которые он назвал полюсом и полярной осью соответственно. Координаты задавались как расстояние от полюса и угол от полярной оси. Работа Бернулли была посвящена проблеме нахождения радиуса кривизны кривых, определённых в этой системе координат.

Введение термина «полярные координаты» приписывают Грегорио Фонтана. В XVIII веке он входил в лексикон итальянских авторов. В английский язык термин попал через перевод трактата Сильвестра Лакруа «Дифференциальное и интегральное исчисление», выполненного в 1816 году Джорджем Пикоком Для трёхмерного пространства полярные координаты впервые предложил Алекси Клеро, а Леонард Эйлер был первым, кто разработал соответствующую систему.

Полярная система координат — двухмерная система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.

Полярная система координат особенно полезна в случаях, когда отношения между точками проще изобразить в виде радиусов и углов; в более распространённой, декартовой или прямоугольной системе координат, такие отношения можно установить только путём применения тригонометрических уравнений.

Полярная система координат задаётся лучом, который называют нулевым или полярной осью (рисунок 19). Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или полюсом. Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: радиальной и угловой.

Радиальная координата (обычно обозначается ρ) соответствует расстоянию от точки до начала координат. Угловая координата также называется полярным углом или азимутом и обозначается φ, равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку.

Определённая таким образом радиальная координата может принимать значения от нуля до бесконечности, а угловая координата изменяется в пределах от 0° до 360°. Однако, для удобства область значений полярной координаты можно расширить за пределы полного угла, а также разрешить ей принимать отрицательные значения, что отвечает повороту полярной оси по часовой стрелке.

Каждая точка в полярной системе координат может быть определена двумя полярными координатами, что обычно называются ρ (радиальная координата, угловое расстояние) и φ (угловая координата, полярный угол, азимут, позиционный угол, иногда пишут t). Координата ρ соответствует расстоянию до полюса, а координата φ равна углу в направлении против часовой стрелки от луча через 0° (иногда называется полярной осью).

Полярный радиус определен для любой точки плоскости и принимает неотрицательные значения $\rho \geq 0$.

Полярный угол φ определен для любой точки плоскости, за исключением полюса О, и принимает значения $-\pi < \varphi \leq \pi$. Полярный угол измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси:
-в положительном направлении (против направления движения часовой стрелки), если значение угла положительное;
-в отрицательном направлении (по направлению движения часовой стрелки), если значение угла отрицательное.

Например, точка с координатами (3, 60^0) будет выглядеть на графике как точка на луче, который лежит под углом 60° к полярной оси, на расстоянии 3 единиц от полюса. Точка с координатами (3, -300^0) будет нарисована на том же месте.

Связь между декартовыми и полярными координатами по формулам:

$$x=\rho\cos\varphi \tag{35}$$

$$y=\rho\sin\varphi. \tag{36}$$

И наоборот, связь между полярными и декартовыми координатами по формулам:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{37}$$

$$\varphi = arctg\,\frac{y}{x} \qquad (38)$$

Например, уравнение окружности в полярных координатах имеет вид:

$$\rho(\varphi) = a. \qquad (39)$$

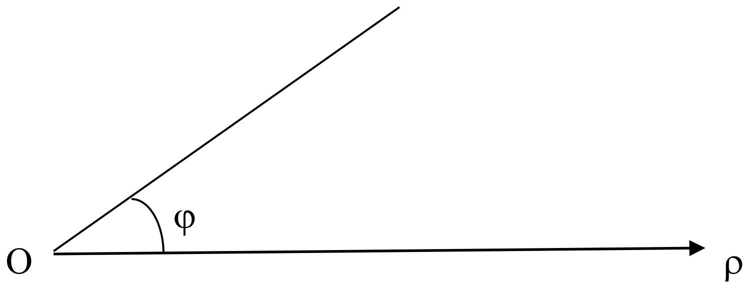

Рисунок 19 – Полярная система координат

Уравнение вида $\rho = m\cdot\sin(k\varphi)$ ($m > 0$, $k > 0$, k – натуральное число), задаёт полярную k -лепестковую розу, длина лепестка которой равна m.

Например, уравнение $\rho = 5\cdot\sin 4\varphi$ задаёт четырёхлистник с длиной лепестка в 5 единиц, уравнение $\rho = 3\cdot\sin 5\varphi$ – 5-лепестковую розу с длиной лепестка в 3 единицы и т.д.

Пример 12. Перейти к полярному уравнению кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2),\ \ a > 0.$$

Решение. По формулам (35) и (36) имеем:

$$(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = a^2\,(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)$$

$$\rho^4 = a^2\,\rho^2\cos 2\varphi$$

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Получили уравнение лемнискаты Бернулли (рисунок 12).

Ответ: $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Примеры решения задач.

Задача 1 Даны координаты вершин треугольника A(0,-2), B(1,1), C(3,0). Написать общее уравнение медианы треугольника, опущенной из вершины B.

Решение. Найдем координаты точки M, середины основания AC.

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}; \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1.$$

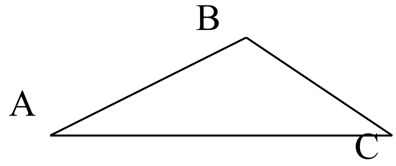

Рисунок 20 – Треугольник ABC

Напишем теперь уравнение прямой BM, проходящей через две точки B и M (формула (11)).

$$\frac{y-(-1)}{1-(-1)} = \frac{x-3/2}{1-3/2}; \qquad \frac{y+1}{2} = \frac{x-3/2}{-1/2}.$$

После элементарных преобразований имеем:

$$-\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}2x - \frac{2}{3}\cdot 2$$

или

$$-y-1 = 4x - 6,$$

отсюда

$$4x + y - 5 = 0.$$

Получили искомое уравнение медианы.

Ответ: $4x + y - 5 = 0$.

Задача 2. Даны три точки A(3,1), B(1,-2), C(3,4). Написать уравнений прямой, проходящей через точку C перпендикулярно прямой AB.

Решение. Запишем уравнений прямой AB, проходящей через две точки A и B, по формуле (11) :

$$\frac{y-1}{-2-1} = \frac{x-3}{1-3},$$

или

$$-2(y-1)= -3(x-3).$$

Отсюда

$$2y – 2 = 3x – 9.$$

Решая это уравнение относительно переменной у, найдем уравнение прямой АВ с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}.$$

Угловой коэффициент этой прямой равен $\kappa = \frac{3}{2}$.

Из условия перпендикулярности двух прямых (формула (9)) получим угловой коэффициент κ_1 прямой, перпендикулярной АВ:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{\kappa} = -\frac{2}{3}.$$

Запишем теперь уравнений прямой с данным угловым коэффициентом κ_1 и проходящей через точку С. Воспользуюсь формулой (10).
Отсюда

$$y - 4 = -\frac{2}{3}(x-3).$$

После элементарных преобразований получаем требуемое уравнение:

$$y = -\frac{2}{3}x + 6.$$

Ответ: $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

Задача 3. Дано уравнение второго порядка $9x^2 + 4y^2 – 36x + 8y – 4 = 0$. Написать каноническое уравнение кривой и определить ее тип. Найти полуоси, координаты центра симметрии и фокусов кривой.

Решение. Задача сводится к тому, чтобы привести данное уравнение к одному из следующих видов:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

или

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Первое из этих уравнений определяет эллипс, а второе – гиперболу с центром симметрии в точке $O(x_0, y_0)$, полуосями *a, b* (для гиперболы: *a* – вещественная полуось). Фокусы таких кривых имеют координаты: $F_1(x_0 + c, y_0)$ и $F_2(x_0 - c, y_0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$ (для эллипса, если a – большая полуось) и $c^2 = в^2 - a^2$, если a<b $c^2 = a^2 + b^2$ (для гиперболы).

Для решения поставленной задачи выделим полные квадраты в следующих выражениях:

$$9x^2 - 36x = 9(x^2 - 4x + 4) - 36 = 9(x-2)^2 - 36;$$

$$4y^2 + 8y = 4(y^2 + 2y + 1) - 4 = 4(y+1)^2 - 4.$$

Подставим теперь полученные выражения в данное уравнение:

$$9(x-2)^2 - 36 - 4(y+1)^2 - 4 + 4 = 0$$

или

$$9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 36.$$

Поделив обе части уравнения на 36, получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Отсюда видно, что центр симметрии эллипса находится в точке O(2,-1), прямые $x - 2 = 0$, $y + 1 = 0$ являются его осями симметрии. Полуоси эллипса a = 2, b = 3, $c = \sqrt{в^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. Получим координаты фокусов $F_1(2;-1+\sqrt{5})$, $F_2(2;-1-\sqrt{5})$.

Ответ: $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$, эллипс, a = 2, b = 3, $F_1(2;-1+\sqrt{5})$, $F_2(2;-1-\sqrt{5})$.

Задача 4. Дано уравнение кривой в декартовых координатах $(x^2 + y^2)^2 = 4xy^2$. Написать это уравнение в полярных координатах.

Решение. Воспользуемся формулами (35) и (36) и подставим эти выражения в данное уравнение.

$$(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = 4\rho\cos\varphi\cdot\rho^2(\sin\varphi)^2.$$

Используя формулы тригоноиетрии

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

$$2\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \sin 2\varphi,$$

получим:

$$\rho^4 = 2\rho^3 \sin 2\varphi \sin\varphi .$$

Поделим обе части на ρ^3, получим искомое уравнение

$$\rho = 2\sin 2\varphi \cdot \sin\varphi .$$

Ответ: $\rho = 2\sin 2\varphi \cdot \sin\varphi$.

Задача 5. Даны вершины треугольника A(1,-1), B(0,2), C(3,1). Составить уравнение высоты AD и прямой, проходящей через вершину A, параллельно стороне BC. Вычислить длину высоты AD.

Решение. Для решения задачи воспользуемся рисунком 20.
Напишем уравнение прямой BC, проходящей через точки B(0,2) и C(3,1):

$$\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-2}{1-2} .$$

Запишем полученное уравнение в виде $y = к_1 x + b$:

$$y = -\frac{1}{3}x + 2 ,\; k = -\frac{1}{3} .$$

Напишем уравнение прямой, проходящей через точку A, параллельно стороне BC:

$$y = -\frac{1}{3}(x-1) - 1$$

или

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} .$$

Напишем уравнение высоты AD:

$$y = 3(x - 1) - 1$$

или

$$y = 3x - 4.$$

Выписать совместно уравнения прямых AD и BC:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 2 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$

Найдем решение системы уравнений – координаты точки D: $x = \frac{9}{5}$; $y = \frac{7}{5}$.

Найдем длину высоты AD:

$$|AD| = \sqrt{\left(1 - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(-1 - \frac{7}{5}\right)^2},$$

$$|AD| = \frac{4\sqrt{10}}{25}.$$

Ответ: y = 3x – 4, $|AD| = \frac{4\sqrt{10}}{25}$.

Задача 6. Написать каноническое уравнение кривой $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$. Определить тип кривой, выписать ее параметры.

Решение. Выделим полные квадраты независимых переменных:

$$9x^2 - 54x = 9(x^2 - 6x + 9) - 81,$$

$$-16(y^2 + 4y + 4) + 64 = -16(y + 2)^2 + 64.$$

Преобразуем уравнение:

$$9(x - 3)^2 - 81 - 16(y + 2)^2 + 64 - 127 = 0$$

или

$$9(x - 3)^2 - 16(y + 2)^2 = 144$$

отсюда

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

или

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} - \frac{(y+2)^2}{3^3} = 1.$$

Это уравнение определяет гиперболу. Выпишем параметры кривой. Действительная полуось а = 4, мнимая полуось в = 3, $c^2 = a^2 + в^2 = 16 + 9 = 25$, с = 5. Расстояние между фокусами 2с = 10. Центр симметрии С(3,-2). Координаты фокусов $F_1(8,-2), F_2(-2,-2)$.

Ответ: $\frac{(x-3)^2}{4^2}-\frac{(y+2)^2}{3^3}=1$, гипербола, а = 4, в = 3, $F_1(8,-2), F_2(-2,-2)$.

Задача 7. Дано уравнение кривой в полярных координатах $\rho = a(1+\cos\varphi)$. Построить данную кривую (кардиоиду) и записать уравнение в декартовых координатах.

Решение.

Составим таблицу значений (таблица 1).

Таблица 1 - Таблица значений для построения графика

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
ρ	2a	1,9a	1,7a	1,4a	a	0,6a	0,3a	0,1a	a

Учитывая что, $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$, таблицу от π до 2π можно не заполнять, а отразить кривую симметрично относительно полярной оси.

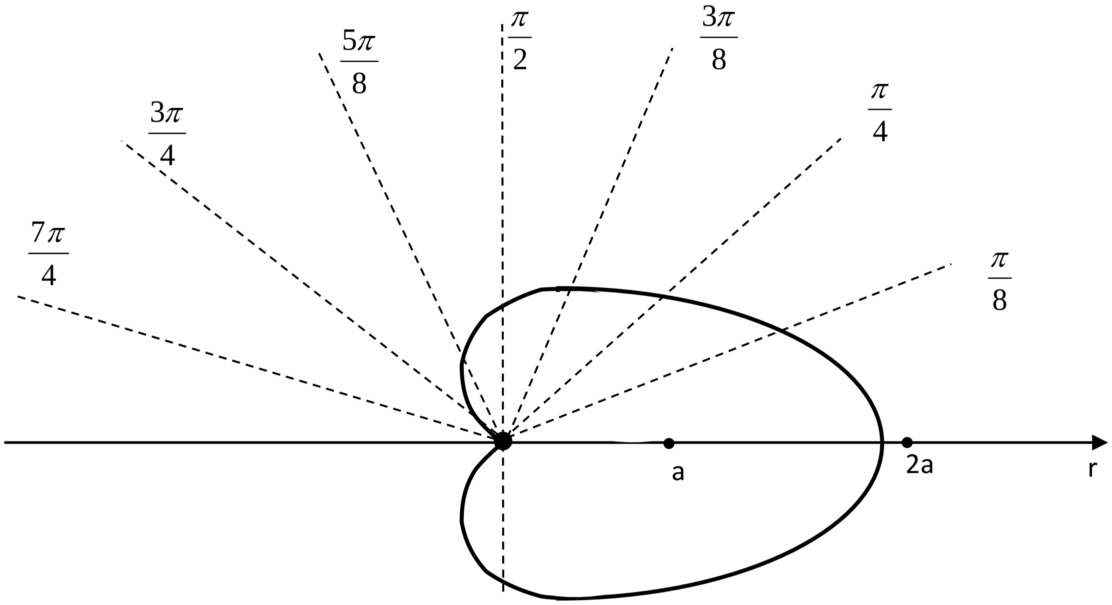

Рисунок 21 - Кардиоида

Задача 8. Стороны квадрата лежат на параллельных прямых 5x-3y-10=0 и 5x-3y+7=0. Найти площадь этого квадрата.

Решение. Длина стороны квадрата равна расстоянию от любой точки первой прямой до второй прямой. Выбираем на первой прямой точку M_0, полагая $y_0=0$; тогда $x_0=2$, $M_0(2;0)$. Расстояние от этой точки до второй прямой определяем по формуле (17):

$$d = \frac{|5 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{25+9}} = \frac{17}{\sqrt{34}}.$$

Искомая площадь квадрата

$$S = d^2 = 17^2/34 = 8{,}5 \text{ (кв.ед)}$$

Ответ: 8,5 (кв.ед).

Задача 9. Даны уравнения двух сторон ромба x-3y-7=0 и x-3y-12=0 и одной диагонали x+2y+3=0. Найти координаты всех вершин.

Решение. Так как коэффициенты при переменных в уравнениях сторон одинаковы, то нам даны параллельные стороны ромба (рисунок 22).

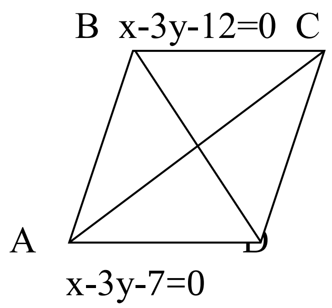

Рисунок 22 – Ромб

Решая совместно уравнение стороны AD и диагонали AC, находим координаты точки A:

$$\begin{cases} x-3y-7=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow A(1; -2).$$

Аналогично, рассматривая совместно уравнения стороны BC и диагонали AC, находим координаты точки C:

$$\begin{cases} x-3y-12=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow C(3; -3).$$

Так как диагонали ромба в точке пересечения P делятся пополам, то координаты точки P определяются:

$$x_p = \frac{x_A + x_C}{2} = 2, \quad y_p = \frac{y_A + y_C}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Угловой коэффициент диагонали AC: $к_{AC}$ = -1/2. Тогда угловой коэффициент другой диагонали $к_{BD} = -1/к_{AC} \Rightarrow к_{BD} = 2$, поскольку диагонали ромба взаимно перпендикулярны. По формуле (10) запишем уравнение диагонали BD:

$$y+5/2 = 2(x-2),$$

или

$$4x-2y-13=0.$$

Найдем координаты точки B:

$$\begin{cases} x-3y-12=0 \\ 4x-2y-13=0 \end{cases} \Rightarrow B(3/2;\ -7/2).$$

Координаты точки D получаем из соотношений:

$$x_D = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{5}{2},\ y_D = \frac{y_B + y_D}{2} = -\frac{3}{2},$$

в результате имеем

$$D\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right).$$

Ответ: A(1; - 2), C(3; - 3), B(3/2; - 7/2), D $\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Задача 10. Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через центр гиперболы $y = \frac{4x-4}{2x+1}$ и вершину параболы $y= -x^2+2x-\frac{1}{3}$. Составить уравнение окружности, касающейся гиперболы в ее вершинах.

Решение. Выделим целую часть в уравнении гиперболы:

$$y = \frac{4x-4}{2x+1} = \frac{4(x+\frac{1}{2})-6}{2(x+\frac{1}{2})} = 2 - \frac{3}{x+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$y-2 = -\frac{3}{x+\frac{1}{2}}$$

или

$$(x+\frac{1}{2})\cdot(y-2) = -3.$$

Центр симметрии гиперболы в точке $O^*\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Выделим полный квадрат в уравнении параболы:

$$y=-x^2+2x-\frac{1}{3}=-(x-1)^2-\frac{1}{3}+1=-(x-1)^2+\frac{2}{3}.$$

Вершина параболы в точке А(1; $\frac{2}{3}$).

По формуле (10) составим уравнение прямой O^*A: 8x+9y-14=0.

Найдем по формуле (17) расстояние от точки О(0;0) до прямой 8x+9y-14=0:

$$d=\frac{|8\cdot 0+9\cdot 0-14|}{\sqrt{64+81}}=\frac{14}{\sqrt{145}}\approx 1{,}2.$$

Очевидно, что центр искомой окружности должен совпасть с центром гиперболы $O^*\left(-\frac{1}{2};2\right)$ и иметь радиус R, равный расстоянию от точки O^* до любой из вершин гиперболы, $\Rightarrow$ R=$\sqrt{6}$. Тогда по формуле (19) уравнение искомой окружности:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=6.$$

Ответ: 1,2. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=6.$

Задача 11. Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку А(2;1), одна из которых параллельна прямой 3x-2y+2=0, а другая перпендикулярна той же прямой.

Решение. По формуле (10) уравнение прямой, проходящей через точку А(2;1) имеет вид:

$$y-1=к(x-2).$$

Из этого пучка прямых выделим две прямые – параллельную и перпендикулярную данной. Угловой коэффициент параллельной прямой $к_1=3/2$. По условию (8) $к_2=к_1=3/2$ и ее уравнение имеет вид:

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2),$$

или

$$3x-2y-4=0.$$

По условию (9) перпендикулярности двух прямых $к_3 = -\frac{1}{\kappa_1} = -\frac{2}{3}$.

И уравнение прямой:

$$y-1=-\frac{2}{3}(x-2),$$

или

$$2x+3y-7=0.$$

Ответ: 3х-2у-4=0, 3х-2у-4=0.

Задача 12. Составить полярное уравнение прямой х+у=4.

Решение. По формулам (35) и (36) имеем:

$$\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi=4$$

$$\rho(\cos\varphi + \sin\varphi)=4$$

$$\rho=\frac{4}{\cos\varphi+\sin\varphi}.$$

Ответ: $\rho=\frac{4}{\cos\varphi+\sin\varphi}$.

Глоссарий

Таблица 2 – Основные понятия и формулы

№	Понятие	Определение (формула)
1	2	3
1	Уравнение прямой с угловым коэффициентом	y=kx+в, здесь k – угловой коэффициент
2	Общее уравнение прямой	Ax+By+C=0, здесь A, B, C – произвольные числа, не равные нулю одновременно
3	Формула вычисления угла между двумя прямыми $y=k_1x+в_1$ и $y=k_2x+в_2$	$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$
4	Условие параллельности двух прямых $y=k_1x+в_1$ и $y=k_2x+в_2$	$k_1=k_2$
5	Условие перпендикулярности двух прямых $y=k_1x+в_1$ и $y=k_2x+в_2$	$k_1=-\frac{1}{k_2}$
6	Уравнение прямой проходящей через данную точку $M_1(x_1,y_1)$ с данным угловым коэффициентом k	$y-y_1=к(x-x_1)$
7	Формула вычисления расстояния d от точки $M_1(x_1,y_1)$ до прямой Ax+By+C=0	$d=\frac{\lvert Ax_1+By_1+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
8	Уравнение окружности с центром в точке C(a, в) и радиусом R	$(x-a)^2+(y-в)^2=R^2$
9	Окружность	геометрическое место точек, удаленных от точки C(a, в) на равное расстояние R
10	Эллипс	геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная
11	Каноническое уравнение эллипса	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$, где a, в – полуоси эллипса

Продолжение таблицы 2

1	2	3
12	Гипербола	геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная
13	Каноническое уравнение гиперболы	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$, где а – действительная, в – минимальная полуоси гиперболы
14	Парабола	геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой
15	Каноническое уравнение параболы	$y^2 = 2px$, здесь р – расстояние от фокуса до директрисы
16	Уравнение прямой, проходящей через две точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
17	Уравнение прямой в «отрезках»	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
18	Полярная система координат	двухмерная система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя числами — полярным углом φ и полярным радиусом ρ
19	Связь между декартовыми и полярными координатами	x=ρcosφ y=ρsinφ
20	Эксцентриситет эллипса, гиперболы	$\varepsilon = \frac{c}{a}$

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите уравнение прямой с угловым коэффициентом.

2. Что называется угловым коэффициентом прямой?

3. Всякая ли прямая в декартовой системе координат может быть представлена уравнениями первой степени?

4. Запишите частные случаи уравнения прямой.

5. Как располагаются прямые в декартовой системе координат?

6. По какой формуле вычисляется угол между прямыми?

7. По какой формуле вычисляется уравнение прямой, проходящей через две точки?

8. Назовите условие параллельности прямых.

9. Назовите условие перпендикулярности прямых.

10.Запишите уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющую данный угловой коэффициент.

11. Как определить величины отрезков, отсекаемых прямой по осям ОХ и ОУ?

12. Запишите уравнение прямой в «отрезках».

13. Какая система координат называется полярной?

14. Какими числами определяется точка в полярной системе координат?

15. Укажите связь декартовых координат с полярными координатами.

16. Сформулируйте определение эллипса.

17. Перечислите основные характеристики эллипса.

18. Запишите каноническое уравнение гиперболы.

19. По какой формуле находят эксцентриситет эллипса и гиперболы?

20. Какая кривая называется параболой?

21. Запишите уравнение директрисы параболы.

22.Перечислите замечательные кривые.

23. Какие области применения кривых знаете?

24. Каким образом задаётся полярная система координат на плоскости?

25. Укажите уравнения кривых в полярных координатах.

Задания для самостоятельной работы

В данном разделе представлены задания для самостоятельной работы в разных формах: в виде контрольной работе по теме «Прямая на плоскости» (5 задач), контрольная работа по теме «Кривые на поскости», 20 вариантов, самостоятельная работа по теме «Решение систем линейных уравнений», 10 вариантов. Тест по теме «Аналитическая геометрия на плоскости» с одним правильным ответом, 30 вопросов. Тест по теме «Аналитическая геометрия на плоскости» с несколькими правильными ответами, 30 вопросов. В конце пособия представлены ответы для самопроверки на некоторые задания.

Задание 1 Контрольная работа по теме «Прямая на плоскости»

1.1 Даны вершины треугольника A(2,-2), B(3,-5), C(5,7). Составьте уравнения высоты BD, вычислите ее длину.

1.2 Составить уравнения всех сторон треугольника ABC, где A(3,2), B(5,-2), C(5,2). Найти их длины.

1.3 Составить уравнения всех высот треугольника с вершинами A(3,2), B(5,-2), C(1,0). Найти длины высот.

1.4 Через точки A(1,-2) и B(5,4) проведена прямая. Составить уравнения прямых, проходящих через точку C(-2,0) перпендикулярно и параллельно прямой AB. Вычислить расстояние от точки C до прямой AB.

1.5 Даны координаты вершин прямоугольной трапеции A(5,-1), C(7,3), D(9,-1) с основаниями AD и BC. Написать уравнения всех сторон трапеции. Вычислить ее высоту.

Задание 2 Контрольная работа по теме «Кривые на плоскости»

1.1 Привести к каноническому виду и определить тип кривой
$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$

1. 2 Привести к каноническому виду уравнение кривой $y^2 - 6y - 16x + 25 = 0$.Определить ее тип и вычислить основные параметры.

1.3 Привести к каноническому виду уравнение кривой
$4x^2 + 16y - y^2 + 18y - 49 = 0$. Определить ее тип, вычислить основные параметры.

1.4 Привести к каноническому виду уравнение кривой $x^2 + 8x - 9y - 29 = 0$. Определить ее тип, вычислить основные параметры.

1. 5 Привести к каноническому виду уравнение второго порядка
$4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$. Определить тип кривой, вычислить основные параметры.

Задание 3 Решите самостоятельно следующие задания (по вариантам).

1.1 Для прямой M_1M_2 написать уравнение с угловым коэффициентом, в отрезках и общее уравнение. Начертить график прямой. Данные к задаче приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Данные к задаче 1.1

№ варианта	Координаты точек		№ варианта	Координаты точек	
	M_1	M_2		M_1	M_2
1	(2,1)	(6,-2)	16	(-2,5)	(6,-2)
2	(3,-1)	(1,4)	17	(3,-1)	(1,4)
3	(3,3)	(-1,4)	18	(3,3)	(-1,4)
4	(1,0)	(-2,-4)	19	(1,0)	(-2,-4)
5	(1,4)	(-2,-3)	20	(1,4)	(-2,-3)
6	(0,-3)	(2,1)	21	(0,-3)	(2,10)
7	(-3,0)	(-6,1)	22	(-3,0)	(-6,1)
8	(2,-2)	(1,0)	23	(2,-2)	(1,0)
9	(4,6)	(-5,-1)	24	(4,6)	(-5,-1)
10	(4,-1)	(6,0)	25	(4,-1)	(6,0)
11	(2,3)	(-4,-3)	26	(2,3)	(-4,-3)
12	(2,2)	(-1,6)	27	(2,2)	(-1,6)
13	(-6,2)	(4,0)	28	(-6,2)	(4,0)
14	(-1,-2)	(-3,-5)	29	(-1,-2)	(-3,-5)
15	(4,-2)	(6,0)	30	(4,-2)	(6,0)

1.2 В треугольнике $M_0M_1M_2$ найти уравнение меридианы, высоты, проведенных из вершины M_0, а также уравнение средней линии EF, параллельной основанию M_1M_2. Вычислить длину найденной высоты. Координаты точек M_0, M_1, M_2 заданы в таблице 4.

Таблица 4 – Данные к задаче 1.2

№ варианта	Координаты точек		
	M_0	M_1	M_2
1	2	3	4
1	(3,2)	(-2,5)	(6,-2)
2	(-2,6)	(3,-1)	(1,4)
3	(2,5)	(3,3)	(-1,4)
4	(2,-3)	(1,0)	(-2,-4)

Продолжение таблицы 4

1	2	3	4
5	(5,3)	(1,4)	(-2,-3)
6	(-1,-2)	(0,3)	(2,1)
7	(1,5)	(-3,0)	(-6,1)
8	(-3,-5)	(2,-2)	(1,0)
9	(1,1)	(4,6)	(-5,-1)
10	(3,2)	(4,-1)	(6,0)
11	(5,-5)	(2,3)	(-4,-3)
12	(1,4)	(2,2)	(-1,6)
13	(2,-3)	(-6,2)	(4,0)
14	(2,6)	(-1,-2)	(-3,-5)
15	(-1,2)	(4,-2)	(6,0)
16	(3,2)	(-2,5)	(6,-2)
17	(-2,6)	(3,-1)	(1,4)
18	(2,5)	(3,3)	(-1,4)
19	(2,-3)	(1,0)	(-2,-4)
20	(5,3)	(1,4)	(-2,-3)
21	(-1,-2)	(0,-3)	(2,1)
22	(1,5)	(-3,0)	(-6,1)
23	(-3,-5)	(2,-2)	(1,0)
24	(1,1)	(4,6)	(-5,-1)
25	(3,2)	(4,-1)	(6,0)
26	(5,-5)	(2,3)	(-4,-3)
27	(1,4)	(2,2)	(-1,6)
28	(2,-3)	(-6,2)	(4,0)
29	(2,6)	(-1,-2)	(-3,-5)
30	(-1,2)	(4,-2)	(6,0)

1.3 По каноническому уравнению кривой второго порядка определить тип кривой, начертить ее график. Найти координаты фокусов, вершин и центра (для центральной кривой). Сделать чертеж. Варианты заданий.

1) $x^2 + y^2 – 4x + 6y = 0$
2) $x^2 + y^2 + 6x – 4y = 0$
3) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 4y + 3 = 0$
4) $9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0$

5) $4x^2 + 36y^2 + 72y - 16x - 92 = 0$
6) $9x^2 + 4y^2 + 54x + 8y + 49 = 0$
7) $x^2 + 4y^2 - 2x + 56y + 181 = 0$
8) $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$
9) $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$
10) $36x^2 - 4y^2 - 72x + 16y - 88 = 0$
11) $9y^2 - 4x^2 + 16x + 18x + 29 = 0$
12) $x^2 - y^2 - 4y = 0$
13) $7x^2 - 2y^2 - 42x - 16y + 17 = 0$
14) $9x^2 - 4y^2 + 24y - 72 = 0$
15) $-x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$
16) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$
17) $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$
18) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 4y + 3 = 0$
19) $9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0$
20) $4x^2 + 36y^2 + 72y - 16x - 92 = 0$
21) $9x^2 + 4y^2 + 54x + 8y + 49 = 0$
22) $x^2 + 4y^2 - 2x + 56y + 181 = 0$
23) $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$
24) $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$
25) $36x^2 - 4y^2 - 72x + 16y - 88 = 0$
26) $9y^2 - 4x^2 + 16x + 18y + 29 = 0$
27) $x^2 - y^2 - 4y = 0$
28) $7x^2 - 2y^2 - 42x - 16y + 17 = 0$
29) $9x^2 - 4y^2 + 24y - 72 = 0$
30) $-x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$

1.4 Преобразовать к полярным координатам уравнение линии, заданной в декартовой системе координат. Варианты заданий.

1) $(x^2 + y^2)^2 = 20x^3$
2) $(x^2 + y^2)^2 = 8y^3$
3) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$
4) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$
5) $(x^2 + y^2)^2 = -20x^3$
6) $(x^2 + y^2)^2 = -8y^3$
7) $(x^2 + y^2)^2 = -4(x^2 - y^2)$
8) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 + y^2$
9) $(x^2 + y^2)^2 = 16(x^2 - y^2)$
10) $(x^2 + y^2)^2 = 16(y^2 - x^2)$
11) $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$
12) $(x^2 + y^2)^2 = -2y^3$
13) $(x^2 + y^2)^2 = -4x^3$
14) $(x^2 + y^2)^2 = 4x^3$
15) $(x^2 + y^2)^2 = 18xy$

16) $(x^2 + y^2)^2 = -18xy$
17) $(x^2 + y^2)^3 = x^4$
18) $(x^2 + y^2)^3 = -x^4$
19) $(x^2 + y^2)^3 = y^4$
20) $(x^2 + y^2)^3 = - y^4$
21) $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$
22) $(x^2 + y^2)^3 = - (x^2 - y^2)^2$
23) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$
24) $(x^2 + y^2)^3 = - 4x^2y^2$
25) $(x^2 + y^2)^3 = 8yx^3$
26) $(x^2 + y^2)^3 = -8yx^3$
27) $(x^2 + y^2)^3 = 4xy^3$
28) $(x^2 + y^2)^3 = - 4xy^3$
29) $(x^2 + y^2)^3 = -16xy^3$
30) $(x^2 + y^2)^3 = -16xy^3$

Задание 4 Тест по теме «Аналитическая геометрия на плоскости» с одним правильным ответом.

1.Найти угловой коэффициент прямой $3x + 5y - 4 = 0$:

а) 3/5;
б) -3/5;
в) 2/5;
г) 5/3;
д) -5/2.

2. Две прямые на плоскости XOY, заданные уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, перпендикулярны, если:

а) $k_1=k_2$;
б) $b_1=b_2$;
в) $k_1k_2=1$;
г) $k_1k_2= -1$;
д) $b_1b_2= -1$.

3. На координатной плоскости XOY найти точку M', симметричную точке M(3;-2) относительно начала координат:

а) $M'(-3;-2)$;
б) $M'(-3; 2)$;
в) $M'(3; 2)$;
г) $M'(1;-6)$;
д) $M'(-6;1)$.

4. Найти координаты вершины параболы $y+2=5(x-3)^2$:

а) (5;-2);
б) (2;5);
в) (-2;3);
г) (-5;-2);
д) (3;-2).

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M(-2;3) параллельно оси Ox:

а) 2x-3y=0;
б) y-3=0;
в) 3x+2y=0;
г) x+y+1=0;
д) x+2=0.

6. Даны вершины четырехугольника A (-2, 14), B(4, -2), C(6, -2), Д (6, 10). Определите точку пересечения его диагоналей AC и ВД:

а) $(4; \frac{2}{3})$;
б) $(4; \frac{1}{2})$;
в) $(4\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$;
г) (4; 1);
д) $(4\frac{1}{2}; 1)$.

7. На плоскости уравнение $y^2 = x^2 - 1$ определяет:

а) гиперболу;
б) прямую;
в) эллипс;
г) параболу;
д) окружность.

8. На плоскости уравнение $y = 2x^2 - 1$ определяет:

а) прямую;
б) параболу;
в) гиперболу;
г) эллипс;
д) окружность.

9. Угол между прямыми 2x + y = 0, $y = \frac{1}{2}x + 5$ равен:

а) 0^0 ;
б) 30^0 ;
в) 45^0 ;
г) 60^0 ;
д) 90^0.

10. Указать название линии заданной уравнением $x^2 + y^2 = 2y$:

а) эллипс;
б) гипербола;
в) парабола ;
г) окружность;
д) прямая.

11. Угол между прямыми 2x + y = 0, y = 3x – 4 равен:

а) 0 град;
б) 30 град;
в) 45 град;
г) 60 град;
д) 90 град.

12. Указать название линии заданной уравнением $x^2 + y^2 = 2x$:

а) эллипс;
б) гипербола;
в) парабола ;
г) окружность;
д) прямая.

13. Найти точку пересечения двух прямых 3x – 4y – 29 = 0 и 2x + 5y + 19 = 0:

а) (0,1);
б) (7,2);
в) (4,-1);
г) (3,-5);
д) (3,5).

14. Какую кривую определяет уравнение $(x – 2)^2 + (y – 4)^2 = 25$ на плоскости?

а) прямая;
б) парабола;
в) гипербола;

г) эллипс;
д) окружность.

15. Уравнение прямой, параллельной прямой у = 2х + 1 и проходящей через точку (1;1) будет:

а) $y = 1/2x + 1/2$;
б) $y = -1/2x + 3/2$;
в) $y = -2x + 3$;
г) $y = 2x - 1$;
д) $y=1/2x+1/2$.

16. Угол между прямыми на плоскости $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 1$ равен:

а) $\pi/2$;
б) 0;
в) $\pi/4$;
г) $\pi/6$;
д) $\pi/3$.

17. Уравнение окружности с центром в точке С(1;2), проходящей через точку М(3;4) имеет вид:

а) $(x+1)^2+(y+2)^2=4$;
б) $(x-1)^2+(y-2)^2=16$;
в) $(x-1)^2+(y-2)^2=8$;
г) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$;
д) $(x-1)^2+(y-2)^2=49$.

18 Для эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ найти сумму фокальных радиусов для произвольной точки эллипса:

а) 3;
б) 1;
в) 6;
г) 2;
д) $\sqrt{8}$.

19.Уравнение $y^2 = -6x$ определяет на плоскости ОХУ:

а) окружность;
б) эллипс;
в) гиперболу;
г) параболу, симметричную относительно оси ОХ;

д) параболу, с осью симметрии ОУ.

20.Найти расстояние между фокусом и директрисой параболы $y^2 = 6x$:

а) 6;
б) 12;
в) 3;
г) $3/2$;
д) 36.

21.Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М(-1,1) перпендикулярно прямой $7x + 2y - 6 = 0$:

а) $7x + 2y + 9 = 0$;
б) $2x - 7y + 5 = 0$;
в) $2x + 7y - 5 = 0$;
г) $2x - 7y + 9 = 0$;
д) $7x + 2y + 5 = 0$.

22. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку (2,-3) параллельно прямой $3x + y - 5 = 0$:

а) $x + 3y + 7 = 0$;
б) $3x + y - 3 = 0$;
в) $3x - y - 9 = 0$;
г) $x - 3y - 11 = 0$;
д) $3x + y + 3 = 0$.

23. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки А (1,-1) и В (2,0):

а) $y = x - 2$;
б) $y = x$;
в) $y = - x - 2$;
г) $y = - 1/3\ x + 2/3$
д) $y = x + 2$.

24. Какое из следующих уравнений является уравнением прямой:
1) $x^2 + y^2 = r^2$ 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 4) $y^2 = 2px$ 5) $y = kx + b$

а) 1;
б) 2;
в) 3;
г) 4;

д) 5.

25. Какое из следующих уравнений является уравнением параболы:

1) $x^2 + y^2 = r^2$ 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 4) $y^2 = 2px$ 5) $y = kx + b$

а) 1;
б) 2;
в) 3;
г) 4;
д) 5.

26. Укажите связь декартовых координат с полярными координатами:

а) $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$;
б) $x=\rho ins\varphi$, $y=\rho\cos\varphi$;
в) $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$;
г) $x=\rho tg\varphi$, $y=\rho ctg\varphi$;
д) $x=\rho$, $y=\varphi$.

27. Полярная система координат – это:

а) система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя числами — x и y ;
б) двухмерная система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя параметрами t_1 и t_2;
в) двухмерная система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя числами — $\rho\cos\varphi$ и $\rho\sin\varphi$;
г) двухмерная система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом;
д) система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя числами — ρ и $tg\varphi$.

28. Уравнение окружности в полярных координатах имеет:

а) $x=\rho$;
б) $y=\varphi$;
в) $\rho(\varphi) = \cos\varphi$;
г) $\rho(\varphi) = \sin\varphi$;
д) $\rho(\varphi) = a$.

29. Радиальная координата соответствует:

а) ординате точки;
б) расстоянию от точки до начала координат;

в) расстоянию между двумя точками на плоскости;
г) расстоянию между точкой и полярной осью;
д) абсциссе точки.

30. График кривой, заданной уравнением $r = 6 \cdot \sin 2\varphi$

а) 2-лепестковую розу с длиной лепестка в 6 единицы;
б) кардиоида;
в) лемниската Бернулли;
г) 6-лепестковую розу с длиной лепестка в 2 единицы;
д) эллипс.

Задание 5 Тест по теме «Аналитическая геометрия на плоскости» с несколькими правильными ответами.

1.Прямая $x - 2y+1=0$ проходит через точки:

а) (1;2);
в)(1;-2) ;
с)(0;1/2);
d)(-2;1);
e)(1;1) ;
f)(-1;0).

2. Точка C(-1;2) является центром окружности:

а) $(x-1)^2 +(y+2)^2 =9$;
в) $x^2 +y^2 =1$;
с) $(x+1)^2 +(y-2)^2 =4$;
d) $(x+2)^2 +(y-1)^2 =5$;
e) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 30$
f) $x^2 + y^2 + x - 2y - 2 = 0$

3. Для параболы $y^2 =4x$:

а)вершина в точке (0;4);
в) вершина в точке (0;0);
с) вершина в точке (4;0);
d) фокус F(0;1);
e) уравнение директрисы x=1;
f) уравнение директрисы y=1.

4. Прямая $y=x+3$:

а) проходит через точку (0;3);

в) образует с осью ОХ угол 60^0 ;
c) отсекает на оси ОУ отрезок, равный 3;
d) проходит через точку (3;3) ;
e) отсекает на оси ОХ отрезок, равный 3;
f) образует с осью ОХ угол 45^0 .

5. Для окружности $(x+4)^2+(y-3)^2 = 25$:

а) точка (-2;0) лежит на окружности;
в) радиус равен 25;
с) точка (-2;0) лежит внутри окружности;
d) радиус равен 5;
е) центр лежит в точке (4;3);
f) центр лежит в точке (0;0);
g) точка (-2;0) лежит вне окружности.

6. Число R=3 является радиусом окружности:

а) $x^2-2x+y^2+4y+4=0$;
в) $x^2+x+y^2-2y-2=0$;
с) $x^2+y^2=9$;
d) $(x-1)^2+(y+2)^2 = 3$;
е) $x^2+2x+y^2-4y=30$.

7. Для параболы $y^2=2x$:

а) фокус F(1;0);
в) вершина в точке (0;0);
с) уравнение директрисы у=1;
d) вершина в точке (0;4);
е) вершина в точке (4;0);

8. Число R=$\sqrt{3}$ является радиусом окружности:

а) $x^2+2x+y^2-4y=30$;
в) $(x+1)^2+(y-2)^2 = 9$;
с) $(x-1)^2+(y+2)^2 = 3$;
d) $x^2+y^2=9$;
е) $x^2-2x+y^2+4y-4=0$.

9. Уравнение, определяющее прямую на плоскости:

а) $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

в) $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{3}$

c) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=1$

d) 2xy=5

e) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^3}{3}=1$

f) $x+y^2=1$

g) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$

10. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k=3:

a) 3x-y=0;
в) 3x+y=0;
c) 2x-6y+1=0;
d) y+3x-7=0;
e) y-3x+7=0;
f) 3x+7=0;
g) y-3x-7=0.

11. Прямая x+2y-4=0:

a) перпендикулярно прямой -x+2y-3=0;
в) отсекает на оси Ox отрезок a=4;
c) отсекает на оси Oy отрезок b=2;
d) параллельна прямой 2y-3x= 3;
e) отсекает на оси Ox отрезок a=2;
f) отсекает на оси Oy отрезок b=4.

12. Точка E(-2;3) является серединой отрезка, заданного точками :

a) A(1;-1) и B(-6;7);
в) A(4;4) и B(-6;-7);
c) A(0;1) и B(-4;5);
d) A(-2;2) и B(-2;4);
e) A(3;0) и B(-7;3);
f) A(2;-1) и B(-6;7).

13. Прямая $x=4$:

a) проходит через точку (0;0);
в) перпендикулярна оси Oy;
c) отсекает от оси Ox отрезок равный 4;

d) образует с осью Ox угол 45^0 ;
e) образует с осью Ox угол 90^0 ;
f) образует с осью Ox угол 30^0;
g) параллельна оси Ox.

14. Уравнение прямой, проходящей через точки A(-1;3) и B(4;-2) имеет вид:

a) $x + y - 2 = 0$
в) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{3}$
c) $x + y = 0$
d) $\frac{x+1}{-1+4} = \frac{y+3}{3}$
e) $y - 3 = 0$
f) $x + 1 = 3 - y$
g) $y = x + 3$

15.Найти эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

a) 0,2 ;
в) 0,1 $\sqrt{64}$;
c) $4/10$;
d) 0,4;
e) $8/10$;
f) 0,8;
g) 0,3.

16. Для окружности $x^2 + y^2 = 16$:

a) точка (0;4) лежит на окружности;
в) точка (0;4) лежит внутри окружности;
c) точка (0;4) лежит вне окружности;
d) R=4;
e) R=16;
f) центр лежит в точке (16;4);
g) центр лежит в точке (0;0).

17. Прямая $y = -x$:

a) параллельна оси Oy ;
в) имеет угловой коэффициент k = -1;
c) перпендикулярна оси Oy;
d) образует с осью Ox угол 135^0;

e) перпендикулярна оси Ox ;
f) проходит через точку (0;0).

18. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки A(4;6) и B(-1;-4):

a) 3;
в) -2 ;
c) 0 ;
d) $\sqrt[3]{8}$
e) 2;
f) $\sqrt{4}$.

19. Прямые $3x+2y+7=0$ и $2x+3y-6=0$:

a) имеют разные угловые коэффициенты;
в) перпендикулярны;
c) образуют угол 90^0 ;
d) образуют угол 0^0 ;
e) параллельны;
f) образуют угол 45^0 ;
g) образуют угол 30^0 .

20. Уравнение $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}$=1 определяет на плоскости:

a) эллипс с полуосями 25 и 16;
в) гиперболу с полуосями 5 и 4;
c) эллипс с полуосями 5 и 4;
d) некоторую кривую;
e) кривую с центром симметрии в точке (0;0).

21.Уравнение прямой, отсекающей на оси OY отрезок b=3 и составляющая с осью OX угол $\varphi=45^0$ имеет вид:

a) y=x+3;
в) y= -x+3;
c) y = x+1/3;
d) y –x = 1/3;
e) y-x-3=0.

22. Уравнение прямой, отсекающей на оси OY отрезок b=3 и составляющая с осью OX угол $\varphi=135^0$:

a) y= - x+3;
в) y - x+3=0;
c) y + x+1/3;
d) y+x=3;
e) y= - (1/3)x+3;

23. Угол между прямыми y=2x+5 и 3x+y+2=0:

a) 135^0;
в) 0^0;
c) 45^0;
d) 75^0;
e) $\pi/4$;
f) $3\pi/4$.

24. Определите кривую $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$:

a) эллипс с центром в точке С(1,-2);
в) гипербола;
c) парабола;
d) окружность с центром в точке С(1; -2);
e) окружность с центром в точке С(-1; 2).

25. Координаты фокусов и вершин гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$:

a) $A_1(3,0), A_2(-3,0), F_1(5,0), F_2(-5,0)$;
в) $A_1(5,0), A_2(-5,0), F_1(3,0), F_2(-3,0)$;
c) $A_1(3,0), A_2(-5,0), F_1(5,0), F_2(-3,0)$;
d) $A_1(-3,0), A_2(-3,5), F_1(-5,0), F_2(-5,3)$;
e) $A_1(3,1), A_2(-3,1), F_1(5,1), F_2(-5,1)$.

26. Связь между полярными и декартовыми координатами по формулам:

a) $\rho = \sqrt{x^2 - y^2}$;
в) $\rho = \sqrt{x + y}$;
c) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$;
d) $\varphi = arcctg\,\frac{y}{x}$;
e) $\varphi = \arccos\frac{y}{x}$;
f) $\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$.

27. Полярное уравнение прямой x+y=2 имеет вид:

a) ρ=$\dfrac{2}{\cos\varphi - \sin\varphi}$;

в) ρ=$\dfrac{2}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$;

c) ρ=$\dfrac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}$;

d) ρ=$\dfrac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}$;

e) ρ=$\dfrac{1}{\cos\varphi - \sin\varphi}$.

28.Полярное уравнение окружности $x^2 + (y\text{-}R)^2 = R^2$ имеет вид:

a) $\rho = 2R\sin\varphi$;
в) $\rho = R\sin\varphi$;
c) $\rho = 2R\cos\varphi$;
d) $\rho = 2\sin\varphi$;
e) $\rho = 2\cos\varphi$;
f) $\sin\varphi = \dfrac{\rho}{2R}$.

29. Укажите верное свойство параболы:

a) Парабола — кривая второго порядка;
в) Эксцентриситет параболы ε <1;
c) При вращении параболы вокруг оси симметрии получается эллипсоид;
d) Все параболы подобны;
e) Парабола не имеет ось симметрии;
f) Прямая пересекает параболу более чем в двух точках;
g) Эксцентриситет параболы ε=1 .

30. Укажите верное утверждение для окружности:

a) уравнение окружности может иметь вид $(x\text{-}1)^2 - (y+2)^2 = 4$;
в) окружность является коническим сечением и частным случаем эллипса;
c) длина окружности $C = 4\pi R$;
d) угол между касательной и хордой равен дуге, стягиваемой хордой;
e) прямая всегда имеет только две общие точки с окружностью;
f) вписанный угол равен половине центрального угла.

Ответы к тестовым заданиям

Таблица 5 - Ответы к тестам с одним правильным ответом

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
б	г	б	д	б	д	а	б	д	г
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
в	г	г	д	г	б	в	д	г	в
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
г	б	а	д	в	а	г	д	б	а

Таблица 6 - Ответы к тестам с несколькими правильными ответами

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cef	ce	b	acf	cd	c	b	c	bc	aeg
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
bc	cdf	ce	af	bef	bdg	bdf	def	a	cde
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ae	ad	ce	d	a	cf	c	af	adg	b f

Список литературы

1. Гусак, А.А Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справ. пособие к решению задач / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2008. – 288 с.
2. Епихин, В.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач: Учебное пособие / В.Е. Епихин, С.С. Граськин. - М.: КноРус, 2013. - 608 с.
3. Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник / В.А. Ильин,Г.Д.Ким.-М.:Проспект,2012.-400с.
4. Кожухов, И.Б. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х т.Т. 1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры: Учебное пособие для втузов / И.Б. Кожухов. - М.: Физматлит, 2009. - 288 с.
5. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс: С контрольными работами: линейная алгебра; аналитическая геометрия; основы математического анализа; комплексные числа / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко.-М.:Айрис-пресс,2011.-576с.
6. Михалев, А.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / А.А. Михалев, И.Х. Сабитов. - М.:ИЦАкадемия,2013.-256с.
7. Просветов, Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Задачи и решения: Учебно-практическое пособие / Г.И. Просветов. - М.: Альфа-Пресс, 2009.-208с.
8. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ, 2003. -471 с. Раздел I. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии
9. Просветов Г.И. Математика в экономике. Задачи и решения/Г.И.Просветов. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство "Экзамен", 2004. - 446 с.
10. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч.1/Д.Т.Письменный. - 6-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2006. - 288 с. Гл.I-IV.
11.Солодовников А.С. Математика в экономике. Учебник ч. 1 М. / А.С. Солодовников, В.А.Бабайцев , А.В.Браилов.- Финансы и статистика, 1998.-224 с.
12.Каганов М.И. Абстракции в математике и физике. / – М.И.Каганов, Г.Я. Любарский М.: Физматлит, 2005. – 580 с.
13. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (Типовые расчеты): учеб. пособие для вузов/ Л.А. Кузнецов. - 9-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2007. - 240 с.
14. Казешев А.К. Математика для экономистов: учеб. пособие/ А.К. Казешев, С.А. Нурпеисов. - Алматы: Экономика, 2008. - 448 с.
15. Виленкин И.В. Высшая математика/И.В. Виленкин, В.М. Гробер. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. - 416 с.
16. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие для сред. проф. учеб. заведений/Н.В. Богомолов. - 10-е изд., перераб. - М.: Высшая школа, 2009. - 496 с.

17. Ильин В.А. Высшая математика: учебник/В.А. Ильина, А.В. Куркина. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Проспект, 2006, 2014.
18. Богомолов Н.В. Практические занятия по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. учеб. заведений/Н.В. Богомолов. - 10-е изд., перераб. - М.: Высшая школа, 2010. - 542 с.
19. Виленкин, И.В. Аналитическая геометрия. Дифференциальное и интегральное исчисление/И.В. Виленкин, В.М., Гробер. - 7-е изд. - Ростов н/Д: Феникс, 2013. - 444 с.
20.Шапкин, А.С. Задачи с решениями по аналитической геометрии: учеб. пособие/А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. - М.: Дашков и К, 2013. – 432 с.
21. Сборник задач по высшей математике. Ч.1.: учеб. пособие для бакалавров/Ред. А.С. Поспелов. - М.: Юрайт, 2012. - 608 с.
22. Артамонов, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: курс лекций для экономических специальностей / В.А. Артамонов. - М.: Дело АНХ, 2012. - 224 с.
23. Геворкян, П.С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / П.С. Геворкян. - М.: Физматлит, 2014. - 208 с.
24. Епихин, В.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач: Учебное пособие / В.Е. Епихин, С.С. Граськин. - М.: КноРус, 2013. - 608 с.
25. Золотаревская, Д.И. Аналитическая геометрия / Д.И. Золотаревская. - М.: КД Либроком, 2016. - 384 с.
26. Климов, А.С. Аналитическая геометрия. Лекции по геометрии. Часть I: Учебное пособие / А.С. Климов, Н.Е. Машнин. - СПб.: Лань П, 2016. - 416 с.
27. Клопов, М.И. Аналитическая геометрия: Учебник для вузов. 3 / М.И. Клопов, В.И. Максимов. - СПб.: Лань П, 2016. - 304 с.
28. Краснов, М.Л. Вся высшая математика. Т. 1: Аналитическая геометрия, векторная алгебра, линейная алгебра, диффер. исчисление: Учебник. Изд.стер / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - М.: КД Либроком, 2014. - 336 с.
29. Куликова, Е.В. Высшая математика для горных вузов.Т. 1. Аналитическая геометрия и элементы линейной алгебры: Учебное пособие для вузов / Е.В. Куликова. - М.: Горная книга, 2012. - 512 с.
30. Максимов, Ю.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект: Учебное пособие / Ю.Д. Максимов, В.И. Антонов и др. - М.: Проспект, 2015. - 144 с.
31. Максимов, Ю.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект / Ю.Д. Максимов, В.И. Антонов и др. - М.: Проспект, 2016. - 144 с.
32. Михалев, А.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / А.А. Михалев, И.Х. Сабитов. - М.:ИЦАкадемия,2013.-256с.
33. Моденов, П.С. Аналитическая геометрия. / П.С. Моденов. - М.: Альянс, 2016. - 697с.
34. Новиков, А.И. Начала линейной алгебры и аналитическая геометрия / А.И. Новиков. - М.: Физматлит, 2015. - 376 с.
35. Орлова, И.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия для экономистов: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И.В. Орлова, В.В. Угрозов,

Е.С. Филонова. - Люберцы: Юрайт, 2015. - 370 с.
36. Тищенкова, Л.М. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач (для бакалавров) / Л.М. Тищенкова. - М.: КноРус, 2013. - 608 с.
37. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии/ Д.В. Клетеник; Ред. Н.В. Ефимов. - 17-е изд., стереотип. - СПб.: Профессия, 2003. - 200 с.
38. Смирнова, С.В. Практикум по математике: учеб. пособие/ С.В. Смирнова. - Рудный: РИИ, 2015. – 60 с.