МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Рудненский индустриальный институт

Б.А. Шалдыкова

Функции нескольких переменных

Учебное пособие

Рудный 2018

УДК 517.3 (075.8)
ББК 22.161.6Я73
Ш18

Рецензенты:
Ахманова Д.М. - кандидат физико-математических наук, Карагандинский государственный университет им. Е. Букетова
Арепьева С.В. – кандидат физико-математических наук, Рудненский индустриальный институт

Шалдыкова Б.А.
Функции нескольких переменных:
Ш 18 Учебное пособие/ Б.А. Шалдыкова – Рудный:
Рудненский индустриальный институт, 2018.- 69 с.

ISBN 978-601-7554-63-7

В учебном пособии приведены основные теоретические сведения, рассмотрены функции от двух и n переменных, область определения, геометрическое толкование, частные производные, дифференцирование сложных функций, неявные функции и их дифференцирование, полный дифференциал и его применение к приближенным вычислениях, экстремумы функции двух переменных, условный экстремум, наибольшее и наименьшее значение функции в области, производная по направлению. Имеется большое количество упражнений и задач для самостоятельного решения. Приведены подробные решения всех типовых задач.

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей.

УДК 517.3 (075.8)
ББК 22.161.6Я73

ISBN 978-601-7554-63-7

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Многие вопросы естествознания приводят к рассмотрению такой зависимости между несколькими переменными величинами, при которой значение одной из этих переменных величин полностью определяется значениями остальных переменных.

Так, например, при рассмотрении каких-либо физических характеристик тела (плотности или температуры) нам приходится учитывать изменение этих характеристик при переходе от одной точки тела к другой. Поскольку каждая точка тела определяется тремя декартовыми координатами x, y, z, то рассматриваемые характеристики определяются значениями трех переменных. При рассмотрении физических процессов, меняющихся во времени, значения физических характеристик определяются значениями четырех переменных: трех координат точки x, y, z и времени t.

Для изучения такого рода зависимостей вводится понятие функции нескольких переменных и развивается аппарат для исследования таких функций методами дифференциального исчисления. На случай функции нескольких переменных распространяются многие понятия и утверждения, справедливые для функции одной переменной.

Примером функции двух переменных, в частности, служит площадь прямоугольника, а объем прямоугольного параллелепипеда можно рассматривать как функцию трех переменных. В экономике примерами функции нескольких переменных могут служить такие понятия, как функция полезности, производственная функция.

Понятия из раздела функции нескольких переменных необходимы для изучения кратных и криволинейных интегралов, систем дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, теории функций комплексного переменного и операционного исчисления, многомерных случайных величин в теории вероятностей и т.д.

Если с помощью частных производных можно определить скорость изменения функции в точке в направлении оси Ox, то понятие градиента дает возможность выяснить направление наибольшего возрастания и убывания функции. Для производственной функции эластичность функции относительно x_i показывает отношение предельной производительности i-го ресурса к средней производительности этого ресурса.

Формулу полного дифференциала можно использовать при приближенных вычислений. Кроме того, понятие полного дифференциала можно использовать для определения полной прибыли многопрофильного предприятия, где за каждый аргумент можно принять каждый вид деятельности предприятия, а за частные приращения – частичные прибыли по видам.

Пособие охватывает все темы дифференциального исчисления функций нескольких переменных, предусмотренные программой курса. В начале каждого раздела приводятся краткие теоретические сведения, затем разбирается довольно большое количество стандартных примеров, демонстрирующих применение тех или иных формул и теорем. Для самостоятельной работы в конце пособия приведены вопросы для самоконтроля, варианты типового задания и тесты для самопроверки с одним и более вариантами ответов.

1 Основные понятия

Определение. Если каждой паре (x,y) значений двух независимых переменных величин x и y из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины z, то говорят, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная в области D и обозначают

$$z = f(x;y).$$

Значения аргументов x и y, для которых функция определена и существует, называется областью определения функции двух переменных и обозначается D.

Определение. Если каждой совокупности независимых переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n$ соответствует определенное значение величины u, то u называется функцией n переменных и обозначается

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Множество значений $x_1, x_2, \cdots, x_n$, для которых функция u определена, называется областью определения функции n – переменных.

Функции двух и трёх переменных, как и функция одной переменной, могут быть заданы различными способами: аналитическим, графическим, с помощью таблиц (функция двух переменных).

1. Явное задание функций.

Функция двух переменных: $z = f(x;y)$. Например, $z = e^{xy}$.

Функция трёх переменных: $u = f(x;y;z)$. Например, $u = 2x^2 - 3y^2 + 4z^2$

2. Неявное задание функций.

Функция двух переменных: $F(x;y;z) = 0$. Например, $e^{xy} + e^{yz} - 2 = 0$.

Функция трёх переменных $F(x;y;z;u) = 0$. Например, $e^{xy} + e^{yz} - 2u^3 = 0$.

Пример 1. Найти область определения функции $z = \ln(4 + 4x - y^2)$.

Решение. Логарифм определен только при положительном значении его аргумента, поэтому

$$4 + 4x - y^2 > 0 \text{ или } 4 + 4x > y^2.$$

Чтобы изобразить геометрически область определения, найдем сначала её границу

$$4 + 4x = y^2 \text{ или } y^2 = 4(1 + x).$$

Полученное уравнение определяет параболу, вершина которой расположена в точке $(-1, 0)$, а ось направлена в положительную сторону оси Ox. Точки пересечения параболы с осью Oy получаются из условия $x = 0$, откуда $y^2 = 4$, т.е. $y = \pm 2$ (рисунок 1).

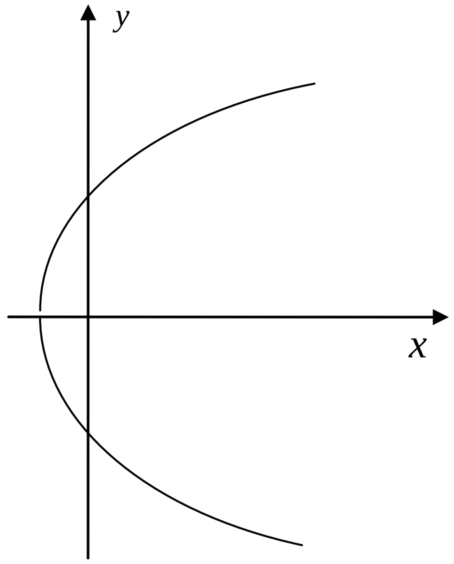

Рисунок 1 – Область определения функции

Парабола делит всю плоскость на две части – внутреннюю и внешнюю по отношению к параболе. Для точек одной из этих частей выполняется неравенство $y^2 < 4 + 4x$, а для другой $y^2 > 4 + 4x$. На самой параболе: $y^2 = 4 + 4x$. Чтобы установить, какая из этих двух частей является областью определения данной функции, т.е. удовлетворяет условию $y^2 < 4 + 4x$, достаточно проверить это условие для какой-нибудь одной точки, не лежащей на параболе. Например, начало координат $(0,0)$ лежит внутри параболы и удовлетворяет требуемому условию $0 < 4 + 4 \cdot 0$.

Следовательно, рассматриваемая область состоит из внутренних точек параболы. Сама парабола в область входить не может, так как для точек параболы $4 + 4x - y^2 = 0$, и логарифм не определен.

Линию, ограничивающую данную область будем называть границей области. Точки области, не лежащие на границе, будем называть внутренними точками области. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется открытой или незамкнутой. Если к области относятся и точки границы, то область называется замкнутой. Область называется ограниченной, если существует такая константа C, что расстояние любой точки области от начала координат O меньше C, то есть $|OM| < C$.

Пример 2. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = R^2 - x^2 - y^2$.

Решение. Функция $z = R^2 - x^2 - y^2$ геометрически представляет собой верхнюю полусферу радиуса R с областью определения E : $x^2 + y^2 \le R^2$, являющуюся кругом радиуса R в плоскости XOY.

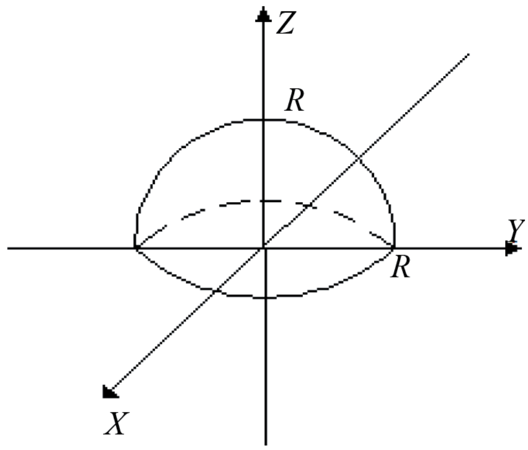

Рисунок 2 – Верхняя полусфера

Графиком функции двух переменных, заданной уравнением $z = f(x;y)$ или $F(x;y;z)=0$, является поверхность в пространстве, проектирующаяся в область определения D функции z на плоскости Oxy.

2 Линии и поверхности уровня

Определение. Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называется линия $f(x,y)=C$ на плоскости Oxy, в точках которой функция сохраняет постоянное значение С.

Пример 1. Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Уравнение семейства линии уровня имеет вид $x^2 + y^2 = C(C > 0)$. Придавая С различные действительные значения, получим концентрические окружности с центром в начале координат.

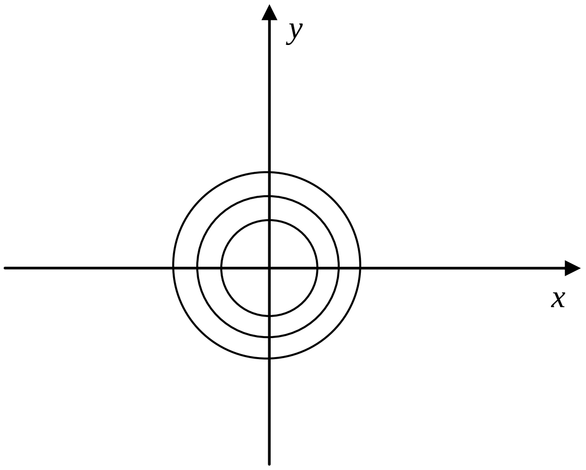

Рисунок 3 – Линии уровня функции $z = x^2 + y^2$

Определение. Поверхностью уровня функции $u = f(x;y;z)$ называется множество всех точек пространства $Oxyz$, для которых данная функция имеет одно и то же значение.

Пример 2. Найти поверхность уровня функции $u = x^2 - y^2 - z^2$

Решение. Уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид $x^2 - y^2 - z^2 = C$. Если С=0, то получим конус $x^2 - y^2 - z^2 = 0$; если С>0, то $x^2 - y^2 - z^2 = C$ - семейство двуполостных гиперболоидов; если С<0, то $x^2 - y^2 - z^2 = C$ - семейство однополостных гиперболоидов.

Линии и поверхности уровня постоянно встречаются в физических вопросах. Например, соединив на карте поверхности Земли точки с одинаковой средней суточной температурой или с одинаковым средним суточным давлением, получим соответственно изотермы и изобары, важные для прогноза погоды.

3 Частные производные функции двух переменных

3.1. Частные и полное приращения функции

Пусть дана функция $z = f(x, y)$ в некоторой области D. Пересечем поверхность плоскостью $y = const$, тогда мы получим функцию одной переменной x. Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $z = f(x, y)$ также получит приращение $\Delta_x z$, которое называется частным приращением функции по x:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \tag{3.1}$$

Аналогично, пересекая поверхность плоскостью $x = const$, получим частное приращение относительно переменной y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{3.2}$$

Если обе переменные получают приращения, то функция $z = f(x, y)$ также получит приращение, оно называется полным приращением функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{3.3}$$

Полное приращение функции, вообще говоря, не равно сумме частных, т.е. $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Пример 1. Найти частные и полное приращения функции $z = xy$.

Решение. $\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - xy = xy + y \cdot \Delta x - xy = y \cdot \Delta x$

$$\Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - xy = xy + x \cdot \Delta y - xy = x \cdot \Delta y$$

$$\Delta z = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - xy = xy + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot y + \Delta x \cdot \Delta y - xy = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

Получили, что $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

3.2 Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Определение. Окрестностью радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$, то есть точки, лежащие внутри круга радиуса r, с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определенная в некоторой области D плоскости Oxy. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит в области D или на ее границе.

Определение. Число A называется пределом функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек $M(x, y)$ из окрестности радиуса r точки $M_0(x_0, y_0)$ выполняется неравенство:

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Если число A является пределом функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, то пишут

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Свойства пределов функций одной переменной сохраняются и для функций многих переменных, то есть если функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют в точке M_0 конечные пределы, то:

1) $\lim\limits_{M \to M_0} c \cdot f(M) = c \cdot \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

2) $\lim\limits_{M \to M_0} [f(M) \pm g(M)] = \lim\limits_{M \to M_0} f(M) \pm \lim\limits_{M \to M_0} g(M)$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) \cdot g(M) = \lim\limits_{M \to M_0} f(M) \cdot \lim\limits_{M \to M_0} g(M)$;

4) $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M)}{g(M)} = \dfrac{\lim\limits_{M \to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} g(M)}$, если $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) \neq 0$.

Заметим, что предел функции двух переменных не должен зависеть от того, по какой линии точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{tg\,2xy}{x^2y}$.

Решение.

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{tg\,2xy}{x^2y} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\sin 2xy}{x^2y\cos 2xy} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\sin 2xy}{2xy} \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{2}{x\cos 2xy} = 1\cdot 2 = 2$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} (1+xy^2)^{\frac{y}{xy^2+x^2y}}$

Решение. Представим функцию в виде $[(1+xy^2)^{\frac{1}{xy^2}}]^{\frac{xy^2\cdot y}{xy^2+x^2y}} = [(1+xy^2)^{\frac{1}{xy^2}}]^{\frac{y^2}{x+y}}$. Так как $z = xy^2 \to 0$ при $x\to 0$ $y\to 3$, то

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} (1+xy^2)^{\frac{1}{xy^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

Тогда

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} (1+xy^2)^{\frac{y}{xy^2+x^2y}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} [(1+xy^2)^{\frac{1}{xy^2}}]^{\frac{y^2}{x+y}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \frac{y^2}{x+y}} = e^{\frac{9}{0+3}} = e^3.$$

Определение. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если имеет место равенство

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Из определения следует, что для непрерывности функции в точке должны быть выполнены следующие условия:

1) функция $z = f(x, y)$ определена в точке $M_0(x_0, y_0)$;

2) существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$;

3) предел равен значению функции в точке $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Если в некоторой точке не выполняется хотя бы одно из условий 1-3, то точка называется точкой разрыва функции $z = f(x, y)$.

Приведем еще одно определение непрерывности функции в точке:

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если:

1) функция определена в этой точке;

2) бесконечно малым приращениям $\Delta x, \Delta y$ соответствует бесконечно малое приращение Δz.

Определение. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в области.

Пример 3. Найти точки разрыва функции $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 4}$

Решение. Данная функция не определена в тех точках, в которых знаменатель обращается в нуль, т. е. в точках, где $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Это окружность с центром в начале координат и радиусом R=2. Значит, линией разрыва исходной функции будет окружность $x^2 + y^2 = 4$.

3.3 Частные производные

Определение. Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Обозначается частные производные так: z'_x, z'_y или $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, или $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Производная по переменной x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y) \tag{3.4}$$

Аналогично определяется производная по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y) \tag{3.5}$$

Правило вычисления частных производных: частной производной функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x называется производная, вычисленная в предположении что y постоянная; частной производной функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной y называется производная, вычисленная при постоянном x.

При вычислении частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Пример 1. Найти частные производные функций:

а) $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ б) $z = x^{\sqrt{y}}$ в) $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$

Решение. а) Чтобы найти частную производную по x, считаем y постоянной величиной, т.е. $y' = 0$. Тогда $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(x+\sqrt{xy})}$. Аналогично, дифференцируя по y, считаем x постоянной величиной, т.е. $x' = 0$. $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2(y+\sqrt{xy})}$.

б) При постоянном y имеем степенную функцию от x. Тогда $z'_x = \sqrt{y} \cdot x^{\sqrt{y}-1}$. При постоянном x имеем показательную функцию от y и $z'_y = x^{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \ln x$.

в) $z'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$;

$$z'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) == \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Пример 2. Дана функция $z = \ln(x+e^{-y})$. Проверить, удовлетворяет ли она данному уравнению:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+e^{-y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-e^{-y}}{x+e^{-y}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^{-y}}{(x+e^{-y})^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+e^{-y})^2}.$$

Подставим найденные частные производные в данное уравнение:

$$\frac{1}{x+e^{-y}} \cdot \frac{e^{-y}}{\left(x+e^{-y}\right)^2} - \frac{-e^{-y}}{x+e^{-y}} \cdot \frac{-1}{\left(x+e^{-y}\right)^2} = 0,$$

$$\frac{e^{-y}}{\left(x+e^{-y}\right)^3} - \frac{e^{-y}}{\left(x+e^{-y}\right)^3} = 0, \qquad 0=0.$$

Геометрический смысл частных производных.

Обозначим через Γ_x плоскую кривую, полученную при пересечении поверхности $z = f(x,y)$ плоскостью $y = const$. Пусть касательная к кривой Γ_x в точке M образует угол α с положительным направлением оси Ox. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Аналогично, обозначим через Γ_y - сечение поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = const$, β - угол, образованный осью Oy и касательной к кривой Γ_y в точке M. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta.$$

Таким образом, частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке M численно равна тангенсу угла наклона касательной в точке M к кривой, полученной при пересечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = const.$ Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке M численно равна тангенсу угла наклона касательной в точке M к кривой, полученной при пересечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = const.$

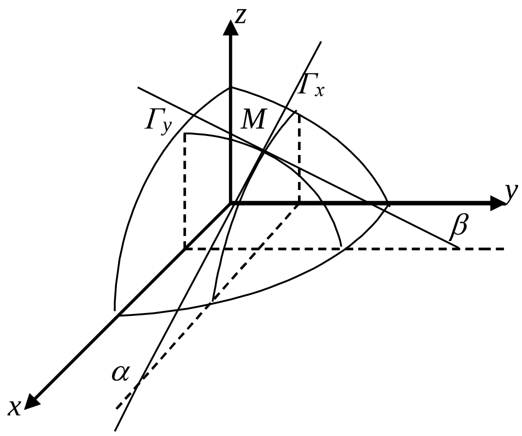

Рисунок 4 – Геометрический смысл частных производных

3.4 Дифференцирование сложных функций

Пусть $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и функции $f(x, y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы. Тогда производная сложной функции $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ равна

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{3.6}$$

Если $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$, то производная от z по x находится по формуле

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad (3.7)$$

Пример 3. $z=arctg\,\frac{y}{x}$, где $x=e^{2t}+1$, $y=e^{2t}-1$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

Решение. Находим производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dx}{dt}=2e^{2t} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt}=2e^{2t}.$$

Подставляем в формулу (3.6):

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{y}{x^2+y^2}\cdot 2e^{2t}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot 2e^{2t}=\frac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}.$$

Выразив x и y через t, получим

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2e^{2t}(e^{2t}+1-e^{2t}+1)}{(e^{2t}+1)^2+(e^{2t}-1)^2}=\frac{2e^{2t}\cdot 2}{2e^{4t}+2}=\frac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}.$$

Пример 4. $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$, где $y=1/3x^3+x$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{dz}{dx}$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y}$, $\frac{dz}{dx}=x^2+1$. Тогда по формуле (3.7) получим

$$\frac{dz}{dx}=\frac{e^x}{e^x+e^y}+\frac{e^y}{e^x+e^y}\cdot(x^2+1)=\frac{e^x+e^y(x^2+1)}{e^x+e^y}.$$

Пример 5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=\arcsin\frac{x}{y}$, где $y=\sqrt{1+x^2}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\arcsin\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\arcsin\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$$

Полная производная

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^2}\sqrt{1+x^2}}.$$

Поскольку $y=\sqrt{1+x^2}$, то $y^2-x^2=1$, тогда

$$\frac{dz}{dx}=1-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

3.5 Дифференцирование неявных функций

Рассмотрим случай неявно заданной функции одной переменной.

Функция $y=f(x)$ называется неявной, если она задаётся уравнением $F(x,y)=0$, неразрешенным относительно y. Найдём производную функции $\frac{dy}{dx}$. Для этого подставим в уравнение $F(x,y)=0$ вместо y функцию $f(x)$ и получим тождество $F(x,f(x))\equiv 0$. Очевидно, что производная функции, тождественно равной нулю, также равна нулю. Следовательно,

$$\frac{d}{dx}F(x,f(x))=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y},\ (F'_y\neq 0). \qquad (3.8)$$

Частные производные функции двух переменных $z=f(x,y)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)$ - дифференцируемая функция переменных x, y и z могут быть вычислены по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0\right). \qquad (3.9)$$

Пример 6. $0{,}5\ln(x^2+y^2)-arctg(y/x)=0$. Найти y'

Решение. Представим функцию в виде $F(x,y)=0{,}5\ln(x^2+y^2)-arctg\frac{y}{x}$. Найдем

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0{,}5\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{x^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y-x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y}{x^2+y^2}:\frac{y-x}{x^2+y^2}=-\frac{x+y}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{y-x}=-\frac{x+y}{x-y}.$$

Пример 7. Найти частные производные функции $z\ln(x+z)-\frac{xy}{z}=0$.

Решение. Здесь $F\left(x,y,z\right)=z\ln(x+z)-\frac{xy}{z}$. Находим

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{z}{x+z}-\frac{y}{z}=\frac{z^2-y(x+z)}{z(x+z)}\ ,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{x}{z},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\ln(x+z)+\frac{z}{x+z}+\frac{xy}{z^2}=\frac{2xy(x+z)+z^3}{z^2(x+z)}.$$

При упрощении последнего выражения воспользовались тем, что $\ln(x+z)=\frac{xy}{z^2}$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z^2-y(x+z)}{z(x+z)}\cdot\frac{z^2(x+z)}{2xy(x+z)+z^3}=\frac{yz(x+z)-z^3}{2xy(x+z)+z^3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}\cdot\frac{z^2(x+z)}{2xy(x+z)+z^3}=\frac{xz(x+z)}{2xy(x+z)+z^3}.$$

4 Полный дифференциал функции

4.1 Полный дифференциал функции нескольких переменных

Определение. Функция $z=f\left(x,y\right)$, полное приращение которой в данной точке (x,y) может быть представлено в виде суммы выражения, линейного относительно $\Delta x,\Delta y$ и величины бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta\rho$, называется дифференцируемой в данной точке. Главная часть полного приращения функции, линейная относительно $\Delta x,\Delta y$, называется полным дифференциалом функции и обозначается dz или df.

Если функция $z=f\left(x,y\right)$ имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в этой точке и имеет полный дифференциал:

$$dz=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y. \qquad (4.1)$$

Приращения $\Delta x,\Delta y$ будем называть дифференциалами независимых переменных x,y и обозначать dx,dy, тогда

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy. \qquad (4.2)$$

Определение. Дифференциалом функции называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных.

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz. \qquad (4.3)$$

Теорема. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x, y), если его полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta z = dz + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \qquad (4.4)$$

где dz - дифференциал функции, $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ - бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Отсюда следует, что $\Delta z \approx dz$.

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $z = x^2 \cdot ar\sin\frac{y}{x}$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\arcsin\frac{y}{x} + x^2\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = 2x\arcsin\frac{y}{x} + \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} =$$

$$= 2x\arcsin\frac{y}{x} - \frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Тогда:

$$dz = \left(2x\arcsin\frac{y}{x} - \frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)dx + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}dy.$$

4.2 Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть $\Delta z \approx dz$, тогда

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y ,$$

следовательно,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y . \qquad (4.5)$$

Пример 2. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$.

Решение. Данное выражение можно рассматривать как функцию двух переменных вида $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$. Тогда искомое число есть наращенное значение функции при $x_0 = 1, \Delta x = 0{,}02, y_0 = 0, \Delta y = 0{,}05$. Находим значение функции при $x_0 = 1,\ y_0 = 0$: $z = \sqrt[3]{1+0} = 1$. Найдем частные производные функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} , \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1;0) = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1;0) = 0 ,$$

$$dz = \frac{2}{3}\cdot 0{,}02 + 0\cdot 0{,}05 \approx 0{,}013 .$$

Тогда по формуле (4.5) имеем:

$$\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2} \approx 1 + 0{,}013 = 1{,}013 .$$

5 Производные и дифференциалы высших порядков

5.1 Производные высшего порядка

Пусть задана функция двух переменных $z = f(x,y)$, непрерывная и имеющая непрерывные частные производные в области D:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y).$$

Производные представляют собой некоторые непрерывные функции двух аргументов, их можно продифференцировать по переменными x и y. Таких производных второго порядка будет четыре:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$ - вторая производная по x

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=f''_{yx}(x,y)$$ - сначала по x, потом по y

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f''_{xy}(x,y)$$ - сначала по y, затем по x

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$$ - вторая производная по y.

Второе и третье производные второго порядка отличается только порядком дифференцирования по переменным. Такие производные называют смешанными производными.

Теорема. Пусть задана функция $z=f(x,y)$, непрерывная и имеющая непрерывные смешанные производные второго порядка, тогда они равны между собой:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \tag{5.1}$$

Пример 1. Найти производные второго порядка $z=xe^{-xy}$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-xy}+xe^{-xy}(-y)=e^{-xy}(1-xy)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-x^2e^{-xy}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-ye^{-xy}(1-xy)-ye^{-xy}=-ye^{-xy}(2-xy) ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(-x^2e^{-xy}\right)'_y=-x^2e^{-xy}(-x)=x^3e^{-xy} ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\left(e^{-xy}(1-xy)\right)'_y=-xe^{-xy}(1-xy)+e^{-xy}(-x)=-xe^{-xy}(2-xy) ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\left(-x^2e^{-xy}\right)'_x=-2xe^{-xy}+x^2ye^{-xy}=-xe^{-xy}(2-xy) .$$

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и n-порядка:

$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ - производная дважды по y, затем по x

$\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}$ - производная по y, потом трижды по x,

$\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k} \partial y^k}$ - производная k раз по y, затем $(n-k)$ раз по x.

Пример 2. Найти производные третьего порядка $z = x^4 + xy^4 + x^2 y + 2$.

Решение.

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + y^4 + 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4xy^3 + x^2$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4y^3 + 2x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4y^3 + 2x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12xy^2$,

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \left(4y^3 + 2x\right)'_x = 2$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \left(12x^2 + 2y\right)'_y = 2$,

$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \left(12xy^2\right)'_x = 12y^2$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \left(4y^3 + 2x\right)'_y = 12y^2$,

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \left(12x^2 + 2y\right)'_x = 24x$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \left(12xy^2\right)'_y = 24xy$.

Пример 3. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, если $z = \sin xy$.

Решение. Дифференцируем данную функцию дважды по x и затем ещё раз по y:

$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sin xy\right)'_x = \cos xy \cdot \left(xy\right)'_x = y \cos xy$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y \sin xy \cdot \left(xy\right)'_x = -y^2 \sin xy$

$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \left(-y^2 \sin xy\right)'_y = -2y \sin xy - xy^2 \cos xy$.

5.2 Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим полный дифференциал функции двух переменных

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Полный дифференциал дифференциала первого порядка называется дифференциалом второго порядка:

$$d(dz) = d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2 \qquad (5.2)$$

Найдем третий дифференциал:

$$d^3 z = d\left(d^2 z\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3 \qquad (5.3)$$

Перепишем дифференциал третьего порядка в виде

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3\cdot z\,.$$

Здесь под степенью при раскрытии скобки подразумевается порядок производной и под произведением различных степеней подразумевается смешанная производная различных порядков функции. Дифференциалы высших порядков для функции двух переменных символически напоминают бином.

Таким образом, по аналогии

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n\cdot z \qquad (5.4)$$

Пример 4. Найти дифференциал второго порядка $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$.

Решение. Находим все производные второго порядка:

$$z'_x=-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{y}=-\frac{x^2+y^2}{x^2y}, \qquad z'_y=\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}=\frac{x^2+y^2}{xy^2},$$

$$z''_{xx}=\left(-\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)'_x=-\frac{2x^3y-2x^3y-2xy^3}{x^4y^2}=\frac{2y}{x^3},$$

$$z''_{xy}=\left(-\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)'_y=-\frac{2y\cdot x^2y-x^2(x^2+y^2)}{\left(x^2y\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2y^2},$$

$$z''_{yy}=\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)'_y=\frac{2xy^3-2x^3y-2xy^3}{x^2y^4}=-\frac{2x}{y^3}\,.$$

Тогда по формуле имеем

$$d^2z=\frac{2y}{x^3}dx^2+2\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}dxdy-\frac{2x}{y^3}dy^2\,.$$

6 Производная по направлению. Градиент функции

Определение. Производной функции $z=f\left(x,y\right)$ в точке $M(x,y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине Δa при стремлении последней к нулю, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\Delta_a z}{\Delta\vec{a}}\,.$$

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в данном направлении.

Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема, то производная в данном направлении можно вычислить по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\Big|_M = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M \cdot \cos\alpha, \qquad (6.1)$$

где α - угол, образованный вектором $\vec{a}$ с осью Ox.

В случае функции трех переменных $u = f(x,y,z)$ формула (6.1) принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}\Big|_M = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M \cdot \cos\gamma, \qquad (6.2)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{a}$, которых можно найти по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|},$$

где $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, a_x, a_y, a_z - координаты вектора $\vec{a}$.

Определение. Градиентом функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ называется вектор, выходящий из точки $M(x,y)$ и имеющий своими координатами частные производные функции $z = f(x,y)$:

$$grad\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M \cdot \vec{j}. \qquad (6.3)$$

Градиент функции и производная в направлении вектора $\vec{a}$ связаны формулой

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = np_{\vec{a}}\, grad\, z. \qquad (6.4)$$

Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке. Производная $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{a}}\right)_{наиб} = \left| grad\, z \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \qquad (6.5)$$

В случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ градиент равен:

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M \cdot \vec{k} \tag{6.6}$$

Пример 1. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(1,1)$ в направлении вектора $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

Решение. Найдем значения частных производных в точке $M(1,1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y, \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y. \quad \text{Тогда}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2 - 1 = 1, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = -1 + 2 = 1.$$

Вычислим направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{36+64}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{8}{\sqrt{36+64}} = \frac{4}{5}. \text{ Тогда}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}\Big|_M = 1\cdot\frac{3}{5} + 1\cdot\frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

Пример 2. Найти производную функции $u = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ в точке $M(1,1,1)$ в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$, где $N(3,2,3)$.

Решение. Найдем вектор $\overrightarrow{MN}$ и его направляющие косинусы:

$\overrightarrow{MN} = \{3-1; 2-1; 3-1\} = \{2; 1; 2\}$, $\quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{3}$,

$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{3}$, $\quad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{3}$.

Вычисляем значения частных производных в точке $M(1,1,1)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{-xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-z^2}}\Big|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{-yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-z^2}}\Big|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_{(1,1,1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{MN}}\Big|_M = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

Пример 3. Найти величину и направление градиента функции $u = xyz$ в точке $M(2;1;1)$.

Решение. Найдем частные производные в точке M:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = yz\big|_{(2,1,1)} = 1\cdot 1 = 1,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = xz\big|_{(2,1,1)} = 2\cdot 1 = 2,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = xy\big|_{(2,1,1)} = 2\cdot 1 = 2.$$

Следовательно,

$$grad u\big|_M = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},\qquad |\,grad u\,|_M = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

7 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть имеем поверхность, заданную уравнением вида $F(x, y, z) = 0$.

Определение. Прямая линия называется касательной к поверхности в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку M_0. Через точку M_0 проходит бесконечное число различных кривых, лежащих на поверхности, то и касательных к поверхности, проходящих через эту точку будет бесконечное множество.

Все касательные прямые к поверхности в точке M_0 лежат в одной плоскости. Эту плоскость называют касательной плоскостью.

Определение. Прямая, проведенная через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности перпендикулярно касательной плоскости, называется нормалью к этой плоскости.

Если уравнение поверхности задано в форме $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}\cdot(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}\cdot(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}\cdot(z-z_0) = 0. \tag{7.1}$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}. \qquad (7.2)$$

Если уравнение поверхности задано в форме $z=f(x,y)$, то уравнения (7.1) и (7.2) примут вид соответственно:

$$z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}\cdot(x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}\cdot(y-y_0), \qquad (7.3)$$

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (7.4)$$

Пример 1. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $z=x^2+xy-y^2$ в точке $M_0(1;2)$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x-2y,$$

и вычислим их значение в точке $M_0(1;2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=4, \ \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=-3.$$

Найдем значение функции в точке M_0: $z_0(1,2)=1^2+1\cdot2-2^2=-1$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z+1=4\cdot(x-1)-3\cdot(y-2) \qquad \text{или} \qquad 4x-3y-z+1=0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{-1}.$$

Пример 2. Написать уравнения касательных плоскостей к эллипсоиду $x^2+2y^2+3z^2=21$, параллельных плоскости $x+4y+6z=0$

Решение. Находим частные производные функции $F(x;y;z)=x^2+2y^2+3z^2-21$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=4y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}=6z.$$

Так как из условия параллельности касательной плоскости и данной плоскости следует, что

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{4} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{6},$$

где $N(1;4;6)$ - нормаль плоскости $x+4y+6z=0$. Получим

$$\frac{2x}{1} = \frac{4y}{4} = \frac{6z}{6} \quad \text{или} \quad \frac{2x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Теперь решим вместе данное уравнение и уравнение эллипсоида:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21 \\ 2x = y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21 \\ y = 2x \\ z = 2x \end{cases}$$

и найдем две точки $M_1(1;2;2)$ и $M_2(-1;-2;-2)$.

Следовательно, уравнения касательных плоскостей имеет вид:

$$1\cdot(x\pm1)+4(y\pm2)+6(z\pm2)=0 \quad \text{или} \quad x+4y+6z\pm21=0.$$

8 Экстремум функции двух переменных

8.1 Экстремум функции

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x,y)$.

Определение. Если в достаточно малой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ выполняется неравенство $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$, то в этой точке функция принимает локальный максимум.

Определение. Если в достаточно малой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ выполняется неравенство $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$, то в этой точке функция принимает локальный минимум.

Точки, в которых достигается максимум или минимум будем называть точками экстремума.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). Если $M_0(x_0,y_0)$ - точка локального экстремума функции $z = f(x,y)$, имеющей непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ в этой точке, то

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0\ , \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0. \qquad (8.1)$$

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными точками. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Теорема 2 (достаточное условие экстремума). Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, пусть, кроме того, точка $M_0(x_0, y_0)$ - стационарная, то есть $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$ Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \quad , \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

и $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

1) если $\Delta = AC - B^2 > 0$, $A > 0$ $(C > 0)$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет минимум;

2) если $\Delta = AC - B^2 > 0$, $A < 0$ $(C < 0)$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет максимум;

3) если $\Delta = AC - B^2 < 0$, то экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ нет;

4) если $\Delta = AC - B^2 = 0$, то экстремум в этой точке может быть и может не быть (требуется дальнейшее исследование).

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

Решение. 1) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6.$$

Решим систему уравнений и найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = 1 \end{cases}.$$

Тогда $M\ (-4;1)$ - стационарная точка.

2) Найдем частные производные второго порядка и определим характер критической точки:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

3) Вычисляем дискриминант: $\Delta = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3$. Так как $\Delta > 0$ и $A = 2 > 0$ $(C = 2 > 0)$, то функция в точке $M_0(-4;1)$ имеет минимум. Находим значение функции в данной точке:

$$z_{\min} = (-4)^2 + 4\cdot 1 + 1^2 + 9\cdot(-4) - 6\cdot 1 + 20 = -1 \ .$$

Пример 2. Найти экстремумы функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y .$$

Приравнивая их к нулю, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, получим $x^3 + y^3 = 0$, т.е. $x^3 = -y^3$ или $x = -y$.

Тогда имеем $x^3 - 2x = 0$, откуда $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{2}$, следовательно, $y = 0$ и $y = \mp\sqrt{2}$. Таким образом, имеются три стационарные точки $M_1(0{,}0)$, $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ и $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Найдем частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4 .$$

Для каждой стационарной точки вычисляем значения этих производных. Для первой точки $M_1(0{,}0)$ имеем:

$A = \left(12x^2 - 4\right)\big|_{M_1} = -4$, $B = 4$, $C = \left(12y^2 - 4\right)\big|_{M_1} = -4$.

Тогда $\Delta = AC - B^2 = 16 - 16 = 0$, следовательно, достаточный признак ответа не дает, нужно дополнительное исследование.

Для точки $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ имеем:

$A = \left(12x^2 - 4\right)\big|_{M_2} = 24 - 4 = 20$, $B = 4$, $C = \left(12y^2 - 4\right)\big|_{M_2} = 20$.

$\Delta = AC - B^2 = 400 - 16 = 384 > 0$, следовательно, так как $A = 20 > 0$, то функция в этой точке имеет минимум.

Для точки $M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ имеем:

$A = \left(12x^2 - 4\right)\big|_{M_3} = 24 - 4 = 20$, $B = 4$, $C = \left(12y^2 - 4\right)\big|_{M_3} = 20$.

$\Delta = AC - B^2 = 400 - 16 = 384 > 0$, и так как $A = 20 > 0$, то функция в этой точке так же имеет минимум.

В этих точках значения функции равны:

$$z_{\min} = 4 + 4 - 2\cdot 2 + 4\cdot(-2) - 2\cdot 2 = -8 .$$

8.2 Условный экстремум

Определение. Условным экстремумом функции $z = f\left(x, y\right)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$, которое называют уравнением связи.

Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на обычный экстремум так называемой функции Лагранжа $u = f\left(x, y\right) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$, где λ – неопределенный постоянный множитель.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

Из этой системы определяют неизвестные x, y и λ.

Пример 3. Найти условный экстремум функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при условии, что x и y связаны уравнением $x + y + 3 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x; y; \lambda) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 + \lambda(x + y + 3).$$

Имеем $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - y + 1 + \lambda$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - x + 1 + \lambda$.

Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 + \lambda = 0 \\ 2y - x + 1 + \lambda = 0 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 + \lambda \\ x = 2y + 1 + \lambda \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{4 + \lambda}{3} \\ x = -\dfrac{4 + \lambda}{3} \\ \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{3}{2} \\ \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Так как $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1$, то функция в данной точке $(-3/2; -3/2)$ достигает наименьшего значения:

$$z_{\min} = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 4 = -\frac{19}{4}.$$

Пример 4. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

Решение. Пусть x и y - катеты треугольника, а z - гипотенуза. Так как $z^2 = x^2 + y^2$, то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $\frac{xy}{2} = S$, т.е. $xy - 2S = 0$. Тогда в качестве функции Лагранжа можно рассмотреть функцию $u = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$. Найдем частные производные и составим систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \lambda \cdot y = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \lambda \cdot x = 0 \\ \frac{xy}{2} = S \end{cases}$$

Так как $x > 0$, $y > 0$, то из системы уравнений получаем решение $\lambda = -2$, $x = y = \sqrt{2S}$. Тогда гипотенуза равна $z = \sqrt{2S + 2S} = 2\sqrt{S}$.

Таким образом, гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой.

8.3. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции в замкнутой области можно предложить следующий алгоритм:

а) найти стационарные точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;

б) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границах области;

в) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее значения функции.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$ (прямоугольнике).

Решение. 1) Найдем стационарные точки функции из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Получаем две стационарных точки $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$. Значения функции в этих точках $z(M_1) = 0$, $z(M_2) = -1$.

2) Исследуем функцию на границах области:

а) При $x = 0$ имеем $z = y^3$. Эта функция монотонно возрастает и на концах отрезка [-1,2] принимает значения $z|_{y=-1} = -1$, $z|_{y=2} = 8$;

б) при $x=2$ имеем $z=8+y^3-6y$. Найдем значения этой функции в стационарной точке и на концах отрезка [-1,2]. Имеем $z'=3y^2-6;\ z'=0$ при $y^2=2$, или в данной области, при $y=\sqrt{2}$ $z\big|_{y=\sqrt{2}}=8-4\sqrt{2};\ z\big|_{y=-1}=13;\ z\big|_{y=-2}=4$.

в) При $y=-1$ имеем $z=x^3-1+3x$ и $z'=3x^2+3>0$. Функция монотонно возрастает от $z|_{x=0}=-1$ до $z|_{x=2}=13$.

г) При $y=2$ имеем $z=x^3+8-6x$ и $z'=3x^2-6$, $z'=0$ при $x=\sqrt{2}$; $z\big|_{x=\sqrt{2}}=8-4\sqrt{2};\ z\big|_{x=0}=8;\ z\big|_{x=2}=4$.

3) Сравнивая все найденные значения функции, заключаем, что $z_{наиб}=13$ в точке (2,-1); $z_{наим}=-1$ в точках (1,1) и (0,-1).

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2y+xy^2+xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями: $y=\dfrac{1}{x}$, $x=1$, $x=2$, $y=-1{,}5$.

Решение. Построим данную область:

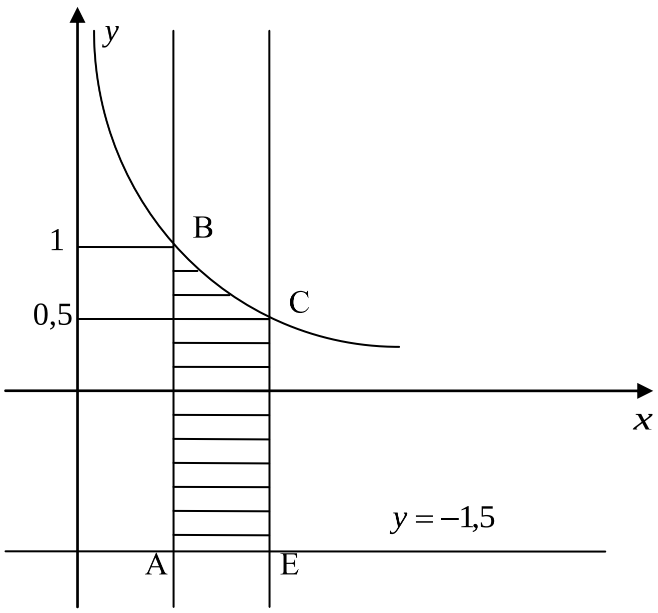

Рисунок 5 –Область определения функции

Находим частные производные $z'_x=2xy+y^2+y$, $z'_x=x^2+2xy+x$.

1. Найдем все критические точки:

$$\begin{cases} y(2x+y+1)=0 \\ x(x+2y+1)=0 \end{cases}$$

Решением системы являются точки $(0,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.

Ни одна из критических точек не принадлежит заданной области.

2. Исследуем на границе области, состоящей из участков AB, BC, CE и EA.

На AB: $x=1,\ z=y^2+2y,\ y\in\left[-\frac{3}{2},1\right]$, $z'_y=2y+2=0\Rightarrow y=-1$. Значения функции: $z(-1)=-1,\ z\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4},\ z(1)=3$.

На BC: $y=\frac{1}{x},\ z=x+\frac{1}{x}+1,\ x\in[1,2]$, $z'_x=1-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1\notin[1{,}2]$. Значения функции: $z(1)=3$, $z(2)=3{,}5$.

На CE: $x=2,\ z=2y^2+6y,\ y\in\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$, $z'_y=4y+6=0\Rightarrow y=-\frac{3}{2}$. Значения функции: $z\left(\frac{1}{2}\right)=3{,}5$, $z\left(-\frac{3}{2}\right)=-4{,}5$.

На AE: $y=-\frac{3}{2},\ z=-\frac{3x^2}{2}+\frac{3x}{4},\ x\in[1,2]$, $z'_x=-3x+\frac{3}{4}=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}\notin[1{,}2]$. Значения функции: $z(1)=-\frac{3}{4}$, $z(2)=-4{,}5$.

3. Сравнивая полученные результаты, имеем:
$z_{наиб}=3{,}5$ и $z_{наим}=-4{,}5$.

9 Метод наименьших квадратов

Пусть в результате опыта получена таблица значений функции y для ряда значений независимой переменной x:

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Предположим, что точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и т.д., примерно располагаются на одной прямой. Это означает, что зависимость между x и y близка к линейной $Y=ax+b$. Подберем неизвестные коэффициенты a и b так, чтобы прямая $Y=ax+b$ лежала по возможности ближе к каждой точке из нанесенных точек. Назовем отклонением в точке x_i разность Y_i-y_i, где $Y_i=ax_i+b$, а y_i - значение функции в точке x_i, полученное из опыта. Сущность метода наименьших квадратов заключается в том, что искомую прямую $Y=ax+b$ выбирают таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений Y_i-y_i была бы наименьшей. Таким образом, неизвестные коэффициенты a и b находят из условия, что сумма $\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$ имела бы наименьшее значение. Поскольку x_i и y_i - постоянные (данные опыта), то указанная сумма есть функция параметров a и b: $\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2=F(a,b)$.

Чтобы найти эти значения параметров a и b, воспользуется необходимыми условиями экстремума функций нескольких переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)\cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right) = 0 \end{cases} \qquad (9.1)$$

Следовательно, параметы a и b, для которых осуществляется наилучшее приближение, определяются из системы уравнений (9.1), которую можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (9.2)$$

Для определения чисел a и b мы получили систему двух уравнений первой степени. Можно доказать, что эта система имеет единственное решение и что для найденных чисел a и b функция $F(a,b)$ достигает минимума.

Подставляя найденные значения a и b в уравнение $Y = ax + b$, получим линейную функцию, наилучшим образом отражающую зависимость между величинами x и y, полученную из опыта.

Если опытные данные таковы, что при построении графика они примерно располагаются по квадратной параболе, то можно искать приближенную зависимость в форме $Y = ax^2 + bx + c$. Для нахождения значений коэффициентов a, b и c нужно найти минимум

$$\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2 = F(a,b,c).$$

Нахождение минимума функции трех переменных сводится к решению системы трех уравнений:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x^4{}_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,3} + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\cdot y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum x_i \cdot y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (9.3)$$

из которых определяются неизвестные параметры a, b и c.

Пример 1. Полученные из опыта значения функции при различных значениях независимой переменной x приведены в таблице:

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

Построив соответствующие точки, убеждаемся, что они расположены примерно на одной прямой. Это значит, что зависимость между x и y близка к линейной $y = ax + b$. Применяя метод наименьших квадратов, найдем неизвестные параметры a и b. Составим расчетную таблицу:

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	0	2,9	0,00	0,00
2	1	6,3	1,00	6,30
3	1,5	7,9	2,25	11,85
4	2,1	10,0	4,41	21,00
5	3	13,2	9,00	39,60
$\sum$	7,6	40,3	16,66	78,75

Составим систему уравнений вида (9.2):

$$\begin{cases} 16{,}66a + 7{,}6b = 78{,}75 \\ 7{,}6a \quad + 5b \quad = 40{,}3 \end{cases}$$

решая которую, находим $a = 3{,}42$ и $b = 2{,}86$.

Таким образом, $y = 3{,}42x + 2{,}86$

10 Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение функции двух переменных.
2. Что называется областью определения функции нескольких переменных?
3. Что называется линией уровня, поверхностью уровня?
4. Что является графиком функции двух переменных?
5. Что называется пределом функций двух переменных?
6. Что называется частными приращениями функции двух переменных. Полное приращение функции двух переменных.
7. Дайте определение частных производных и сформулируйте правила их вычисления.
8. Геометрический смысл частных производных.
9. Частные дифференциалы функции двух переменных. Геометрический смысл.
10. Как найти полный дифференциал функции двух переменных. Геометрический смысл.
11. Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных.
12. В чем состоит правило применения полного дифференциала для вычисления приблизительного значения функции?
13. Как найти производную функции одной переменной, заданной неявно?
14. Как найти производные функции двух переменных, заданной неявно?
15. Что называется производной функции $z = f(x, y)$ по направлению вектора $\bar{\ell}$?
16. Запишите формулу для вычисления производной по направлению вектора.
17. В чем состоит физический смысл производной по направлению вектора?
18. Что называется градиентом функции $z = f(x, y)$ в данной точке?
19. Связь между производной по направлению вектора и градиентом?
20. Производные высших порядков.
21. Касательная плоскость к поверхности.
22. Уравнение нормали к поверхности.
23. Определение экстремума функции двух переменных.
24. Необходимое условие экстремума функции двух переменных. Стационарные точки.
25. Достаточное условие экстремума.
26. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.
27. Дайте определение условного экстремума.

11 Задания для самостоятельной работы

1 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня данной функции $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$

2. Показать, что $x^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, если $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$

3. Найти полный дифференциал функции $z = y \cdot x^y$

4. Вычислить приближенно с применением полного дифференциала $\arcsin \dfrac{0,02}{1,01^{20}}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 + 3xy + y^2$ в точке A (1; 2)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 10 + 2xy - x^2$ в области, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 0$

7. Найти проекции градиента функции $z = x^2 - 2xy + 3y - 1$ в точке A (1; 2). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$ в точке M (1; 1) в направлении, идущем от этой точки к точке N (6; 5)

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = \dfrac{1}{ax + в}$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	4,2	3,7	3,5	2,9	1,1

10. Доказать, что выражение $3x^2 e^y\, dx + (x^3 e^y - 1)\, dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

2 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня данной функции $z = \ln(x^2 + y)$

2. Дана функция $z = \dfrac{y}{(x^2 - y^2)^5}$. Показать, что $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$

3. Найти полный дифференциал функции $z = x \cdot y^x$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $tg\,(1{,}05^3 - \dfrac{1}{0{,}99})$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = xy + y^2 - 2x$ в точке $A\,(2;\,1)$

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $y = 1$; $y = -1$; $x = 0$; $x = 2$

7. Найти проекции градиента функции $z = 5x^2 y - 3xy^3 + y^4$ в точке A (1; 0). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = arctg\, xy$ в точке M (1; 1) в направлении биссектрисы первого координатного угла

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = ax + в$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8

10. Доказать, что выражение $\left(3x^2 + \dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx - \dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

3 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня данной функции $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

2. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$

3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln tg \frac{y}{x}$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $e^{\sqrt[3]{1,06} - \sqrt[4]{0,96}}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 + y^2 - x + y$ в точке A (-2; 2)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$; $y = 0$; $x + y = -3$

7. $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ Найти проекции *grad z* в точке A (2; 1). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = x^2 y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке (2; 1) в направлении, идущем от этой точки к началу координат

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = e^{ax+в}$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6

10. Доказать, что выражение $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

4 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня данной функции $\boldsymbol{z = \ln(y^2 + x)}$

2. Дана функция $z = \ln(e^{-y} + x)$. Показать, что $e^{-y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(tg \frac{x}{y})$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $\sqrt{3{,}1^2 + 3{,}99^2}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = 2xy - y^2 + 2x^2$ в точке A (1; 3)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 8y + 2xy - 4x$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $y = 0$; $y = 2$; $x = 0$; $x = 1$

7. Найти проекции градиента функции $z = x^2 + y^2$ в точке A (3; 2). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = arctg\,\frac{x}{y}$ в точке $M\,(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$ в направлении биссектрисы первого координатного угла

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = \ln(ax + в)$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	4,4	5,4	3,9	1,9	2,4

10. Доказать, что выражение $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

5 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня данной функции $z = arc\sin\,(xy)$

2. Показать, что $y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\,\ln\,x)\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = x^y$

3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\,(1 + \frac{x}{y})$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала
$1{,}04^{\,2{,}02} + 2{,}02^{\,1{,}04}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 + 3xy - y^2$ в точке A (1; 3)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x + y - xy$ в квадрате $0 \le x \le 4 \quad 0 \le y \le 4$

7. $z = arctg\,\frac{y}{x}$. Найти $grad\ z$ в точке (1; 1). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = \ln(e^x + e^y)$ в начале координат, в направлении биссектрисы второго координатного угла

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = ax^2 + вx + c$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	2,8	3,8	2,3	0,3	0,8

10. Доказать, что выражение $\left(y^2 + \frac{y}{cos^2 x}\right)dx + (2xy + tgx)\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

6 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня данной функции $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

2. Показать, что $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = x \cdot e^{\frac{y}{x}}$

3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $e^{(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = xy + 2x - y$ в точке A (2; 2)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \frac{1}{2} - xy$ в области, ограниченной параболой $y = \frac{1}{3} \cdot x^2$ и прямой $y = 3$

7. $z = arctg\dfrac{x}{x+y}$ Найти $grad\ z$ в точке A (1; 1). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = \dfrac{y^2}{x}$ в точке A $(\dfrac{1}{\sqrt{2}};0)$, по направлению оси ox

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = \dfrac{1}{\sin(ax+в)}$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1

10. Доказать, что выражение $\left(3x^2y+2y+3\right)dx+(x^3+2x+3y^2)\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

7 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции $z = \sqrt{xy}$. Построить линии уровня данной функции

2. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z = \sin(x+ay)$

3. Найти полный дифференциал функции $z = arctg\dfrac{y}{x} + arctg\dfrac{x}{y}$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $1{,}03^{2{,}99}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = 3y^2 - 9xy + y$ в точке A (1; 3)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - 2x - y$ в квадрате $0 \le x \le 3 \quad 0 \le y \le 3$

7. $z = arc\cos\dfrac{x}{x+y}$ Найти $grad\,z$ в точке A (3; 4). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z=\ln(x+y)$ в точке A (1; 2), по направлению, составляющем угол 30^0 с осью ox

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y=e^{ax+в}$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	4	5	3,5	1,5	2

10. Доказать, что выражение $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

8 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции $z=\arcsin\frac{y}{x}$. Построить линии уровня

2. Показать, что $(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=cos\,y+(y-x)\sin y$

3. Найти полный дифференциал функции $z=\arcsin\frac{y}{x}+\arcsin\frac{x}{y}$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $\sqrt{4{,}05^2+2{,}93^2}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z=xy+x-y$ в точке A (1; 2)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$; $y = 0$; $x + y = -3$

7. $z=x-3y+\sqrt{3xy}$. Найти $grad\ z$ в точке A (3; 4). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z=x^2y^2$ в точке M (2; 1), по направлению оси oy

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = ax^2 + вx + c$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	3,8	4,8	3,3	1,3	1,8

10. Доказать, что выражение $(\sin 2x - 2\cos(x+y))\,dx - 2\cos(x+y)\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

9 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня $z = \dfrac{y}{x^2}$

2. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$

3. Найти полный дифференциал функции $z = \sin^2\dfrac{y}{x} + \cos^2\dfrac{x}{y}$

4. Вычислить приближенное $1{,}05^3 \cdot 0{,}98^2$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = y^2 - xy - x^2$ в точке A (-4; 5)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2 \quad 0 \le y \le 3$

7. $z = x\sin y - y\cos x$. Найти $grad\ z$ в точке O (0; 0). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x}$ в точке M (1; 2), в направлении вектора $\bar{a} = (3; 4)$.

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = ax + в$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	3,6	4,6	3,1	1,1	1,6

10. Доказать, что выражение $\left(xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx+(x^2y-\frac{x^2}{y^3})\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

10 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня $z=\arcsin\frac{x}{y}$

2. Показать, что $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$, если $z=xy+x\cdot e^{\frac{y}{x}}$

3. Найти полный дифференциал функции $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $0{,}97^{2{,}02}$.

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z=x^2+y^2-x-y$ в точке A (1; -3).

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+3y^2+x-y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 1$; $y = 1$; $x + y = 1$.

7. $z=\ln\frac{xy+1}{y}$. Найти $grad\ z$ в точке (0; 1). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z=\frac{x^2+y^2}{y}$ в точке M (3; 1), в направлении биссектрисы третьего координатного угла.

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y=\frac{1}{ax+в}$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	3,4	4,4	2,9	0,9	1,4

10. Доказать, что выражение $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

11 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня $z=\frac{y}{\sqrt{x}}$.

2. Показать, что $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2$, если $z=\ln(x^2+xy+y^2)$.

3. Найти полный дифференциал функции $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $1{,}02^{2,99}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z=3x^2-y^2+x$ в точке A (1; 2)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-xy+y^2-4x$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$; $y = 0$; $2x+3y-12=0$

7. Найти *grad* z в точке A (3; 4) для функции $z=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$. Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z=arctg\,\frac{x+y}{y}$ в точке (1; 0), в направлении, составляющем с осью OY угол 30^0

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y=\ln(ax+в)$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	3,2	4,2	2,7	0,7	1,2

10. Доказать, что выражение $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y)\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

12 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня данной функции $z=\sqrt{400-x^2-y^2}$

2. Дана функция $z=\dfrac{y}{(x^2-y^2)^5}$. Показать, что $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$

3. Найти полный дифференциал функции $z=\ln tg\,\dfrac{y}{x}$.

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $\sqrt{3{,}1^2+3{,}99^2}$.

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z=x^2+3xy-y^2$ в точке A (1; 3)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=\dfrac{1}{2}x^2-xy$ в области, ограниченной параболой $y=\dfrac{1}{3}\cdot x^2$ и прямой y = 3.

7. $z=arccos\dfrac{x}{x+y}$. Найти *grad* z в точке A (3; 4). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z=x^2y^2$ в точке M (2; 1), по направлению оси OY.

9. Методом наименьших квадратов найти формулу y = ax+$в$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	3,6	4,6	3,1	1,1	1,6

10. Доказать, что выражение $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

13 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции $z = \ln(x^2 + y)$. Построить линии уровня.

2. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$.

3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln tg\,\frac{x}{y}$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $1{,}04^{2{,}02} + 2{,}02^{1{,}04}$.

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = xy + 2x - y$ в точке A (2; 2).

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - 2x - y$ в прямоугольнике $0 \le x \le 3 \quad 0 \le y \le 3$.

7. $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Найти *grad z* в точке A (3; 4). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = \frac{x^2 + y^2}{x}$ в точке M (1; 2) в направлении вектора $\bar{a} = (3; 4)$.

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = \frac{1}{ax + в}$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	4,8	3,1	2,1	1,7	1,1

10. Доказать, что выражение $\frac{1 + xy}{x^2 y} dx + \frac{1 - xy}{xy^2} dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

14 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$. Построить линии уровня данной функции.

2. Дана функция $z=\ln(x+e^{-y})$. Показать, что $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$

3. Найти полный дифференциал функции $z=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1)$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z=3y^2-9xy+y$ в точке A (1; 3)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$; $y=0$; $x+y=-3$

7. $z=x\sin y-y\cos x$. Найти $grad\ z$ в точке O (0; 0). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z=\frac{x^2+y^2}{y}$ в точке M (3; 1) в направлении биссектрисы третьего координатного угла.

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y=\ln(ax+в)$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	3,2	3,6	2,9	2,5	0,2

10. Доказать, что выражение $\frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

15 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня данной функции $z=\ln(2x+y^2)$

2. Показать, что $y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z=x^y$

3. Найти полный дифференциал функции $z = arctg\sqrt{\frac{x}{y}}$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $1{,}02^{2{,}98}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = xy + x - y$ в точке A (1; 2)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2 \quad 0 \le y \le 3$

7. $z = \ln\frac{xy+1}{y}$. Найти $grad\, z$ в точке (0; 1). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = arcin\frac{x+y}{y}$ в точке (1; 0), в направлении, составляющем с осью ox угол α = -45^0

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = \frac{1}{ax + в}$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	8,1	3,9	2,5	1,9	1,4

10. Доказать, что выражение $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

16 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции $z = \arcsin(xy)$. Построить линии уровня.

2. Показать, что $x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = x \cdot e^{\frac{y}{x}}$

3. Найти полный дифференциал функции $z = arctg\frac{y}{x} + arctg\frac{x}{y}$

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $\sqrt{3{,}96^2 + 3{,}05^2}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = y^2 - xy - x^2$ в точке A (-3; 2)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 1$; $y = 1$; $x + y = 1$

7. Найти $grad\ z$ в точке A (3;4) для функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$. Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. $z = y \cdot x^y$. Найти производную функции в точке M (1; 1), в направлении, идущем от этой точки к точке N (6; 5)

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = ax + в$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	5,4	4,8	4,1	2,9	2,6

10. Доказать, что выражение $(xe^x + \frac{y}{x^2})\, dx - \frac{1}{x} dx$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

17 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции $z = \ln(y^2 - 4x)$. Построить линии уровня функции.

2. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ если $z = \sin(x + ay)$

3. Найти полный дифференциал функции $z = arctg\,\frac{y}{x} + arctg\,\frac{x}{y}$

4. Вычислить приближенное $1{,}05^{20} + 0{,}98^{10}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 + y^2 - x - y$ в точке A (1; -1).

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$; $y = 0$; $2x + 3y - 12 = 0$

7. $z = x^2 - 2xy + 3y - 1$. Найти $grad\ z$ в точке A (1; 2). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = arctg\, xy$ в точке M $(1; \sqrt{3})$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = e^{ax+в}$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	5,3	4,3	3,9	2,5	2,4

10. Доказать, что выражение $(10xy - \dfrac{1}{\sin y})\, dx + (5x^2 + \dfrac{x \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3)\, dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

18 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции. Построить линии уровня данной функции $z = \sqrt{4 - xy}$

2. Показать, что $(x - y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = cos\, y + (y - x)\sin y$.

3. Найти полный дифференциал функции $z = \sin^2 \dfrac{x}{y} + \cos^2 \dfrac{y}{x}$.

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $0{,}97^5 + 2{,}01^4$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = 3x^2 - y^2 + x$ в точке A (1; 2)

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 10 + 2xy - x$ в области, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 0$.

7. $z = x \cdot y^x$. Найти проекции градиента в точке A (2; 1). Найти максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$в точке (2; 1) в направлении, идущем от этой точки к началу координат.

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = \ln(ax + в)$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	4,4	5,1	3,9	2,9	1,9

10. Доказать, что выражение $(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x)\, dx - \frac{xdy}{x^2 + y^2}$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

19 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции $z = \sqrt{x^2 - 4y}$. Построить линии уровня данной функции.

2. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = arctg\,\frac{y}{x}$.

3. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\,(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $1{,}01^{10} + 0{,}98^{5}$

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 + 3xy + y$ в точке A (-1; 2).

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $y = 1$; $y = -1$; $x = 0$; $x = 2$

7. Для функции $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ Найти проекции градиента в точке A (2; 1) и максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную $z = arctg\frac{y}{x}$ в точке M $(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = ax^2 + вx + c$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	3,1	2,7	2,5	1,5	0,5

10. Доказать, что выражение $e^{y}dx + (\cos y + xe^{y})dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

20 ВАРИАНТ

1. Найти и изобразить область существования функции $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y}$. Построить линии уровня данной функции

2. Проверить, что $\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$, для $s = \ln(\frac{1}{x} - \frac{1}{t})$.

3. Найти полный дифференциал функции $z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $\frac{0.05}{1.02^{10}}$.

5. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = xy + x^2 - 2y$ в точке A (1; -3).

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$; $y = 0$; $x + y = -3$.

7. Для функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$. Найти проекции градиента в точке M (3; 2) и максимальную скорость изменения функции в этой точке.

8. Найти производную функции $z = \ln(e^{-x} + e^{-y})$ в начале координат, в направлении биссектрисы второго координатного угла.

9. Методом наименьших квадратов найти формулу $y = \frac{1}{\sin(ax + в)}$ по данным опыта

x	1	2	3	4	5
y	5,4	4,1	2,9	2,4	1,4

10. Доказать, что выражение $(y^3 + \cos x)\,dx + (3xy^2 + e^{y})\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции z и найти ее.

12 Тесты для проверки знаний

Вариант 1

1. Дано $z = \frac{x^2}{y}$. Найти $z_y^{/}$.

а) x^2

в) $\frac{x^2}{2y^2}$

с) $\frac{2x^2}{y^2}$

d) $\frac{x^2}{y^2}$

е) $-x^2 \cdot y^{-2}$

f) $-\frac{1}{x^{-2}y^2}$

g) $\frac{2x^2}{y}$

2. Дано $z = \left(x^2 + y^2\right)^3$. Найти $z_x^{/}$

А) $6xy\left(x^2 + y^2\right)^2$

в) $2\sqrt{9}x\left(x^2 + y^2\right)^2$

с) $2\left(x^2 + y^2\right)^3$

d) $3xy\left(x^2 + y^2\right)^2$

е) $3\sqrt{4}x\left(x^2 + y^2\right)^2$

f) $6y\left(x^2 + y^2\right)^3$

g) $3x\left(x^2 + y^2\right)^2$

3. Значение полного дифференциала функции $z = x^3 + y^4$ в точке Р(1;-2), если $\Delta x = -0{,}01$, $\Delta y = 0{,}02$, принадлежит промежутку:

а) (0;3)

в) (3;6)

с) (-4;-1)

d) (1;4)

е) (-1;2)

f) (-3;0)

g) (-2;1)

4. Для функции $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 + 1$ верны утверждения:
а) (-1;-1)-точка максимума
в) (2;2)-точка минимума
с) (-1;2)- экстремума нет
d) (1;1) -точка минимума
е) (0;0)-точка минимума
f) (-5/3;0)-точка максимума

5. Одно из значений частных производных первого порядка функции $u = \ln(xy - z)$ в точке А(2,1,0) равна:
А) 0,5
в) -2
с) 1
d) 2
е) 2,5
f) -0,5

6. Приближенное значение числа $1{,}03^{2{,}04}$ принадлежит промежутку:
А) $(2;5)$
В) $(1;4)$
С) $(-4;-1)$
D) $(-1;2)$
Е) $(-3;0)$
F) $(3;6)$

7. Дана функция $u\ (x,\ y,\ z) = \ x^2\ +\ y^2\ + z^2$ и точка $M\,(1,1,1)$. Тогда:
А) $(grad\,u)_M = 2\vec{i} - 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$
В) $(grad\,u)_M = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
С) $|gradu|_M = 2\sqrt{3}$
D) $gradu = 2x\vec{i} - 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$
Е) $(grad\,u)_M = 2\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$

8. Если $f\,(x;y) = x^2 y + y^3$, то частная производная имеет вид:
А) $f''_{xx} = 2x$
в) $f''_{xy} = 2y + 6y^2$
с) $f'_x = 2xy + 3y^2$
d) $f''_{xy} = 6y$
е) $f'_y = xy + 3y^2$
f) $f'_y = x^2 + 3y^2$

g) $f'_x = 2xy$

9. Значение максимума функции $z = x + 3y - x^2 - xy - y^2$ принадлежит промежутку:
A) $(4;7)$
B) $(-2;1)$
C) $(-3;0)$
D) $(2;5)$
E) $(3;6)$
f) (-1;2)

10. Дана неявная функция $e^y - e^x + xy = 0$. Тогда верной является частная производная
A) $\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y - x}$
B) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{e^y + x}$
C) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x + y}{e^y + x}$
D) $\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x}$
E) $\frac{dx}{dy} = \frac{e^y - x}{e^x + y}$
F) $\frac{dx}{dy} = -\frac{e^y + x}{e^x - y}$
g) $\frac{dy}{dx} = \frac{-e^x + y}{e^y + x}$

11. Дана функция $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$. Тогда вторая производная равна:
A) $z''_{xx} = 6x - 3x^2 + 6y + 4$
в) $z''_{yy} = 6y + 4$
c) $z''_{xx} = 6x - 3x^2 + 3y^2 + 4y$
d) $z''_{xx} = 6x - 6$
e) $z''_{xy} = 0$
f) $z''_{yy} = 6x - 3x^2 + 6y + 4$
g) $z''_{xy} = 6$

12. Одна из стационарных точек функции $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 + 1$ имеет координаты;
a) (2;-1)
в) (1;1)

c) (-1;-1)
d) (-1;2)
e)(2;2)

13. Дана поверхность $z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ и точка М(-1;0;1). Тогда:
а) $z'_y(M) = 1$
в) $\frac{x+1}{6} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке М
c) $z'_y(M) = -1$
d) $6x + y + z + 5 = 0$ уравнение нормали к данной поверхности в точке М
e) $6x + y + z + 5 = 0$ уравнение касательной к данной поверхности в точке М

14. Дана функция $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ и точка $M(1,1,1)$. Тогда:
A) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2$
B) $gradu = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$
C) $(grad\,u)_M = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$
D) $(grad\,u)_M = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
E) $gradu = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$
f) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = -2$

15. Дана функции $u(x; y; z) = ze^{-xy}$ и точка М(0;1;1). Тогда:
A) $u'_y(M) = 1$
в) $u'_z(M) = 2$
c) $u'_y(M) = -1$
d) $u'_y(M) = 0$
e) $u'_x(M) = -1$

16. Для функции $f(x, y) = x^2y + 2x + 3y - 1$ производная $f''_{xy}(1;0)$ равна
а) -1
в) 10
c) $10/5$
d) $-2/1$
e) $2/1$
f) 0
g) $5/2$

17. Если $u = x^2y + y^2z - z^2x$, то:
A) $u'_y = 2xy + 2yz$

B) $u'_x = 2xy - z^2$

C) $u'_x = 2xy - 2zx$

D) $u'_z = y^2 z - 2xz$

E) $u'_z = 2zy - 2xz$

F) $u'_x = 2x - 2z + 2y$

18. Дана функция $z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Тогда:

A) $(0; 1)$ критическая точка данной функции

B) $(0; 0)$ точка минимума данной функции

C) $(-1; -1)$ критическая точка данной функции

D) $(0; 0)$ точка максимума данной функции

E) $(0; 0)$ критическая точка данной функции

19. Дана функция $z(x, y) = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$. Тогда:

A) $z_{min} = z(0; -2/3) = 4/3$

B) $z'_y = 6x - 3x^2 + 6y + 4$

C) $z''_{yy} = 6y + 4$

D) $z_{max} = z(0; -2/3) = -4/3$

E) $z''_{xx} = 6 - 6x$

20. Для функции $f(x, y) = x^2 y + 2x + 3y - 1$ производная $f'_y(0;0)$ равна

a) $3\sqrt{1}$

в) $8\sqrt{4}$

c) $14\sqrt{9}$

d) 9

e) $\sqrt{9}$

f) 5

G) 0

Вариант 2

1. Если $u = x^2 y + y^2 z - z^2 x$, то:

A) $u'_y = 2xy + 2yz$

B) $u'_x = 2xy - z^2$

C) $u'_x = 2xy - 2zx$

D) $u'_z = y^2 z - 2xz$

E) $u'_z = 2zy - 2xz$

F) $u'_x = 2x - 2z + 2y$

2. Для функции $z = tgxy$ справедливы соотношения:

A) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y}{cos^2 xy} = 0$

B) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{cos^2 xy}$

C) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{cos^2 xy}$

D) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{cos^2 xy}$

E) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{cos^2 y}$

F) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{cos^2 x}$

3. Для функции $z = x^2 y + x\sin y$ справедливы соотношения:

A) $\frac{\partial z}{\partial x} = cos\, y$

B) $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + \cos y$

C) $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + x cos\, y$

D) $\frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = x cos\, y$

E) $\frac{\partial z}{\partial x} = y - 1$

4. Найти для функции $Z = 7x^3 y - \sqrt{xy}$ значение выражения Z'_y в точке A(1;1):

A) 6,5
B) 14
C) 13/2
D) 39/3
E) 1,3

5. Дано: $z = (x^2 + y^2)^3$. Найти: Z'_x:

A) $2(x^2 + y^2)^3$

B) $2\sqrt{9}x(x^2 + y^2)^2$

C) $3x(x^2 + y^2)^2$

D) $6xy(x^2 + y^2)^2$

E) $3\sqrt{4}x(x^2+y^2)^2$
F) $6y(x^2+y^2)^3$
G) $3xy(x^2+y^2)^2$

6.Дана функция $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и точка M(0;-1;1). Тогда значение частной производной в точке M равно:
A) $u'_x(M)=2$
B) $u'_x(M)=0$
C) $u'_z(M)=1$
d) $u'_z(M)=0$
e) $u'_y(M)=0$
f) $u'_z(M)=2$
g) $u'_y(M)=2$

7. Производная $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;1;1)}$ неявной функции $x^2-2y^2+2z-5=0$ равна:
A) $\sqrt{4}$
B) $\sqrt[3]{4}$
C) $\sqrt[3]{8}$
D) -2
E) -1
F) $1\sqrt{2}$
g) 8

8. Значение производной функции $z=x^2y^3$ в точке M(-1;1) в направлении вектора $\vec{a}(4;3)$ принадлежит интервалу:
A) (-3;0)
B) (-4;-1)
C) (3;6)
D) (-2;1)
E) (-1;2)
F) (2;5)

9. Дана функция $z=5xy-y^2$, найти значение выражения z'_x в точке M(-2;1)
A) $5\le z'_x<6$
B) $5\le z'_x\le 6$
C) $5<z'_x<6$
d) $5<z'_x\le 6$

e) $4 < z'_x < 5$
f) $0 < z'_x \le 5$
g) $0 < z'_x < 5$

10. Для функции $f(x, y) = x^2 y + 2x + 3y - 1$ производная $f''_{xx}(3;2)$ равна:
A) $\ln^2 2$
B) $2\ln 2$
C) $\ln 2$
d) $2\ln^2 1$
e) $\ln 1$
f) $2\ln 0$
g) $\ln^2 1$

11. Одна из стационарных точек функции $z = x^3 + y^3 - 15xy$ имеет координаты;
а) (0;-5)
в) (0;0)
с) (-5;5)
d) (5;0)
e) (5;5)

12. Приближенное значение числа $1{,}02^{4,05}$ принадлежит промежутку:
A) $(-4;-1)$
B) $(1;4)$
C) $(-3;0)$
D) $(-1;2)$
E) $(2;5)$
F) $(3;6)$

13. Дана функция $z = e^{x^2+y^2}$. Тогда
A) $z''_{xx} = (1+2x^2)e^{2x+y^2}$
в) $z''_{yy} = 2(1+2y^2)e^{x^2+y^2}$
c) $z'_x = 2(1+2x^2)e^{x^2+y^2}$
d) $z''_{xx} = e^{2x+y^2}$
e) $z''_{xy} = 4xye^{x^2+y^2}$
f) $z''_{yy} = e^{x^2+y^2}$
g) $z''_{xy} = 4xy$

14. Если $z = x^2 + 2xy - 6x + 1$, то значение $z'_x + z'_y$ в точке M(1;2) лежит в промежутке:

A) [0;1)
b) (-8;8)
c) (-10;2)
d) (-8;0]
e) (7;15)
f) (-4;0)

15. Для функции $f(x,y)=\dfrac{x}{x-y}$ производная $f'_x(1;0)$ равна:

A) $\ln e^2$
B) $\ln 1$
C) $2\ln e$
d) $2\ln 1$
e) 2

16. Для функции $z=2x^3y+xe^y$ верны утверждения:

A) $z''_{xx}=12xy+e^y$
в) $z''_{yy}=3x^2+xe^y$
c) $z'_x=6x^2y+e^y$
d) $z'_y=x^3+xe^y$
e) $z''_{xy}=6x^2+e^y$

17. Для функции $z=5x^2-3y^2x+8y-2$ найдите значение выражения z'_x в точке A(1;1):

A) $22\cdot 10^{-1}$
B) 22
C) $2{,}2\cdot 10^{-1}$
D) $2{,}2\cdot 10^{2}$
E) $0{,}22\cdot 10^{2}$
F) $0{,}22\cdot 10$
G) 2,2

18. Для функции $f(x,y)=x^2y+2x+3y-1$ производная $f'_y(0;0)$ равна:

A) $3\ln e$
B) $\sqrt{3}$
C) $3\ln e^2$
D) $\sqrt{9}\ln\sqrt{e}$
E) $\sqrt{9}$
F) $3\sqrt{2}$
G) $\sqrt{9}\ln e^2$

19. Для функции $z = 4x^2 - 2y^2x + 6y - 5$ найти значение выражения z'_y в точке A(1;1)

A) $2 < z'_y \le 3$

B) $2 \le z'_y < 3$

C) $1 < z'_y \le 2$

d) $1 < z'_y < 2$

e) $0 \le z'_y < 1$

f) $2 < z'_y < 3$

g) $0 < z'_y \le 3$

20. Если $z = x^2 - xy$, то значение $z'_x + z'_y$ в точке M(-1;2) лежит в промежутке:

A) [0;1)
b) (-8;8)
c) (-10;-2)
d) (-8;0]
e) (7;15)
f) (-4;0)

Ответы:

Вариант 1

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
e f	b e	e f g	c e f	a c f	b d	c e	f g	d	b d
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
e	d	c e	a b	d e	c e	b	e	e	a e

Вариант 2

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
b	acd	dc	ac	be	bcg	ac	de	abf	c
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
b e	b d	b e	b	ace	ce	b	ae	bcg	abf

13 Глоссарий

№ п/п	Новые понятия	Содержание
1	Функция нескольких переменных $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$	Вполне определенное значение переменной z, которое соответствует каждому набору n переменных $x_1,x_2,\cdots,x_n$ из некоторого множества X
2	Область определения функции нескольких переменных	Множество значений $x_1,x_2,\cdots,x_n$, для которых функция $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ определена.
	График функции двух переменных, заданной уравнением $z=f(x;y)$	Поверхность в пространстве, проектирующаяся в область определения D функции z на плоскости Oxy.
3	Линия уровня функции двух переменных $z=f(x,y)$	Множество точек на плоскости, таких, что во всех точках значение функции одно и то же и равно С. Число С в этом случае называется уровнем
4	Поверхностью уровня функции $u=f(x;y;z)$	Множество всех точек пространства $Oxyz$, для которых данная функция имеет одно и то же значение С.
5	Полное приращение функции нескольких переменных	$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$
6	Частные приращения функции $z=f(x,y)$	$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$ $\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$
7	Частные производные функции $z=f(x,y)$	$z'_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$ $z'_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta x}$
8	Предел функции нескольких переменных	Число A называется пределом функции $f(x,y)$ при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $M_0(x_0,y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $r>0$, что для всех точек $M(x,y)$ из окрестности радиуса r точки $M_0(x_0,y_0)$ выполняется неравенство $\lvert f(x,y)-A\rvert<\varepsilon.$
9	Непрерывность функции нескольких переменных	Если имеет место равенство $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$ причем точка $M(x,y)$ стремится к точке $M_0(x_0,y_0)$ произвольным

		образом, оставаясь в области определения функции.
10	Полный дифференциал функции $z=f(x,y)$	Главная часть полного приращения функции, линейная относительно $\Delta x, \Delta y$,
11	Формула нахождения полного дифференциала	$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy$
12	Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях	$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$
13	Производная по направлению вектора $\vec{a}$ функции $z=f(x,y)$	$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta$, где $\cos\alpha=\frac{a_x}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\beta=\frac{a_y}{\lvert\vec{a}\rvert}$.
14	Градиент функции $z=f(x,y)$	Вектор, определяемый равенством $grad\, z=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}$
15	Касательная плоскость к поверхности $z=f(x,y)$	Плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку $z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}\cdot(x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}\cdot(y-y_0)$
16	Нормаль к поверхности $z=f(x,y)$	Прямая, проведенная через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ поверхности перпендикулярно касательной плоскости $\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{-1}$
17	Необходимое условие экстремума	Если $M_0(x_0,y_0)$ - точка локального экстремума функции $z=f(x,y)$, имеющей непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ в этой точке, то $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$.
18	Достаточное условие экстремума	$\Delta=AC-B^2$, где $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ Если $\Delta>0$, то при $A>0(C>0)$ имеем минимум, а при $A<0(C<0)$ имеем

		максимум.
19	Уравнение связи	Уравнение, определяемое равенством $g(x,y)=0$.
19	Условный экстремум функции $z=f(x,y)$	Экстремум функции $z=f(x,y)$ при условии $g(x,y)=0$.
20	Функция Лагранжа	Функция, определяемая равенством $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(g(x,y)-C)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, Т. 1, 2: учеб. пособие для втузов / Н.С.Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 456с.

2. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие / Я.С.Бугров, С.М. Никольский – М.: Наука, 1985. – 432с.

3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1, 2: учеб. пособие / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980. – 326 с.

4. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А.Путко – ЮНИТИ, 2006. – 479с.

5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П.Минорский – М.: Высшая школа, 2004. – 304 с.

6. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): учеб. пособие для втузов / Л.А. Кузнецов. - М.: Высш. Школа, 1983. – 175с.

7. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. Специальные курсы: учебник / А.Д Мышкис – СПб: Лань, 2002. – 235с.

8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие для вузов / Г.Н. Берман. – СПб.: Лань, 2006. – 384с.

9. Виленкин И.В. Высшая математика: учеб. пособие/ И.В. Виленкин, В.М. Гробер. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. - 416 с.

10. Гусак А.А. Высшая математика. Учебник / А.А.Гусак. – Минск: ТетраСистем, 2003. – 189с.

11. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс/ Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 608с.

12. Ильин В.А. Основы математического анализа: / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк – М.: Наука, 1982. – 324с.

13. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов./ А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович – М.: «Наука», 1971. – 173 с.

14. Хасеинов К.А. Каноны математики: учебник/ К.А.Хасеинов. – Алматы.: ММШ, 2003. – 686с.

15. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.1-3/ Под общ.ред. А.П. Рябушко. – Минск: Вышейшая школа, 2001. –304 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Рудненский индустриальный институт

Рассмотрено на заседании кафедры ИиСГД
Протокол № ____ от ___________ 2018г.
Заведующий кафедрой ____________ Б.А. Шалдыкова

Одобрено на заседании МК ФЭиС
Протокол № _____ от ___________ 2018г.
Председатель МКФ ___________ О.А. Акмалова

Одобрено на заседании МК ФЭиИС
Протокол № _____ от ___________ 2018г.
Председатель МКФ ___________ И.В. Штыкова

Одобрено на заседании МК ГМФ
Протокол № _____ от ___________ 2018г.
Председатель МКФ ___________ Г.В. Скалозубова

Утверждено и рекомендовано к изданию на заседании УМС
Протокол № _____ от____________ 2018г.
Председатель УМС ____________ Л.Л. Божко

Кафедра инженерных и социально-гуманитарных дисциплин

Шалдыкова Б.А.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ISBN 978-601-7554-63-7

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рудный 2018

Св. план 2017 - 2018 уч. год.

Багит Абитовна Шалдыкова

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Подписано в печать
Тираж 8 экз. Формат 21х30/2. Бумага листовая для ксероксной техники.
Печать ксероксная. Объем 4,3 уч.-изд.л. Заказ №

Издание Рудненского индустриального института
Редакционно-издательский центр РИИ
г. Рудный, ул. 50 лет Октября, 58