**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗРВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

**КАРАГАНДИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

С.М. Бельский, И.П. Мазур, С.Н. Лежнев, Е.А. Панин

ФОРМОИЗМЕНЕНИЕ ПОЛОСЫ ПРИ ТОНКОЛИСТОВОЙ ПРОКАТКЕ

Монография

Темиртау
2016

УДК 621.771
ББК 30.121

Рекомендовано к изданию Ученым Советом Карагандинского государственного индустриального университета

Рецензенты

Чукин М.В. - Первый проректор – проректор по научной и инновационной работе Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова, д-р. техн. наук, профессор.

Шеркунов В.Г. - Заведующий кафедрой «Процессы и машины обработки металлов давлением» Южно-Уральского государственного университета, д-р. техн. наук, профессор.

Формоизменение полосы при тонколистовой прокатке [Текст]: монография/ **С.М. Бельский, И.П. Мазур, С.Н. Лежнев, Е.А. Панин** – Темиртау: КГИУ, 2016. – 161 с.

ISBN 978-9965-859-36-6

В монографии рассматриваются вопросы пластического формоизменения металлических полос при горячей и холодной прокатке, к числу которых относятся формирование профиля поперечного сечения, плоскостности, уширения, выкатываемости локальных утолщений.

Представлены методики вычисления упругих изгибных деформаций четырехвалковой системы, сплющивания рабочих валков в контакте с полосой, функции распределения погонного давления прокатки по ширине прокатываемой полосы, уширения раскатов при горячей прокатке.

Монография может быть полезна студентам высших учебных заведений, обучающимся по направлению «Металлургия» по специальности «Обработка металлов давлением», а также преподавателям вузов, аспирантам и инженерно-техническим работникам, занимающимся вопросами тонколистовой прокатки.

УДК 621.771
ББК 30.121

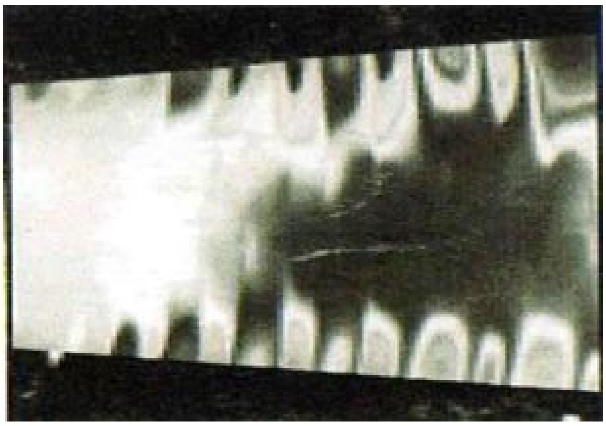
ISBN 978-9965-859-36-6

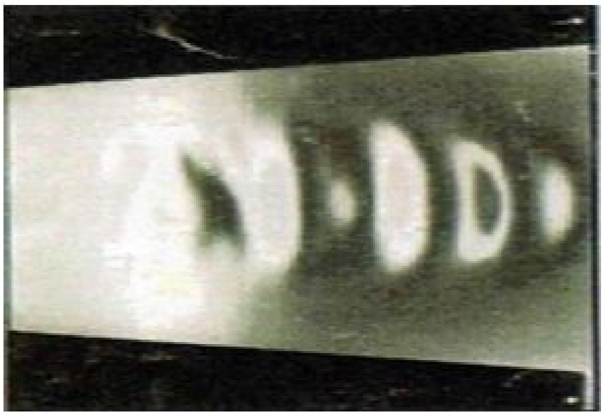
СОДЕРЖАНИЕ

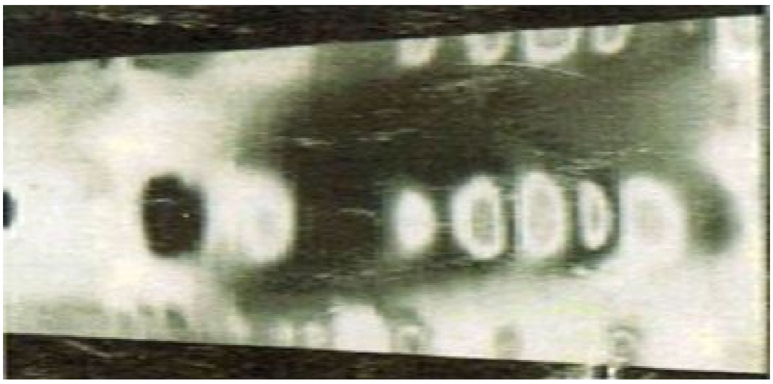
ВВЕДЕНИЕ

Точность размеров стального листового проката определяется соответствием его геометрических параметров требованиям таких нормативных документов, как государственные стандарты по сортаменту металлопродукции (например, ГОСТ 19903-74, ГОСТ 19904-90), стандарты предприятия (СТП) по выпуску металлопродукции, технические условия (ТУ), а также дополнительные требования заказчика.

С точки зрения потребителя к наиболее важным геометрическим параметрам листового горяче- и холоднокатаного проката, кроме точности по толщине (разнотолщинность) и ширине (разноширинность), относится отклонение от плоской формы – неплоскостность готового стального листа, которая проявляется в виде краевой волнистости (рис.1.1,а), центральной коробоватости (рис. 1.1,б) или их комбинаций (рис.1.1,в).

а 

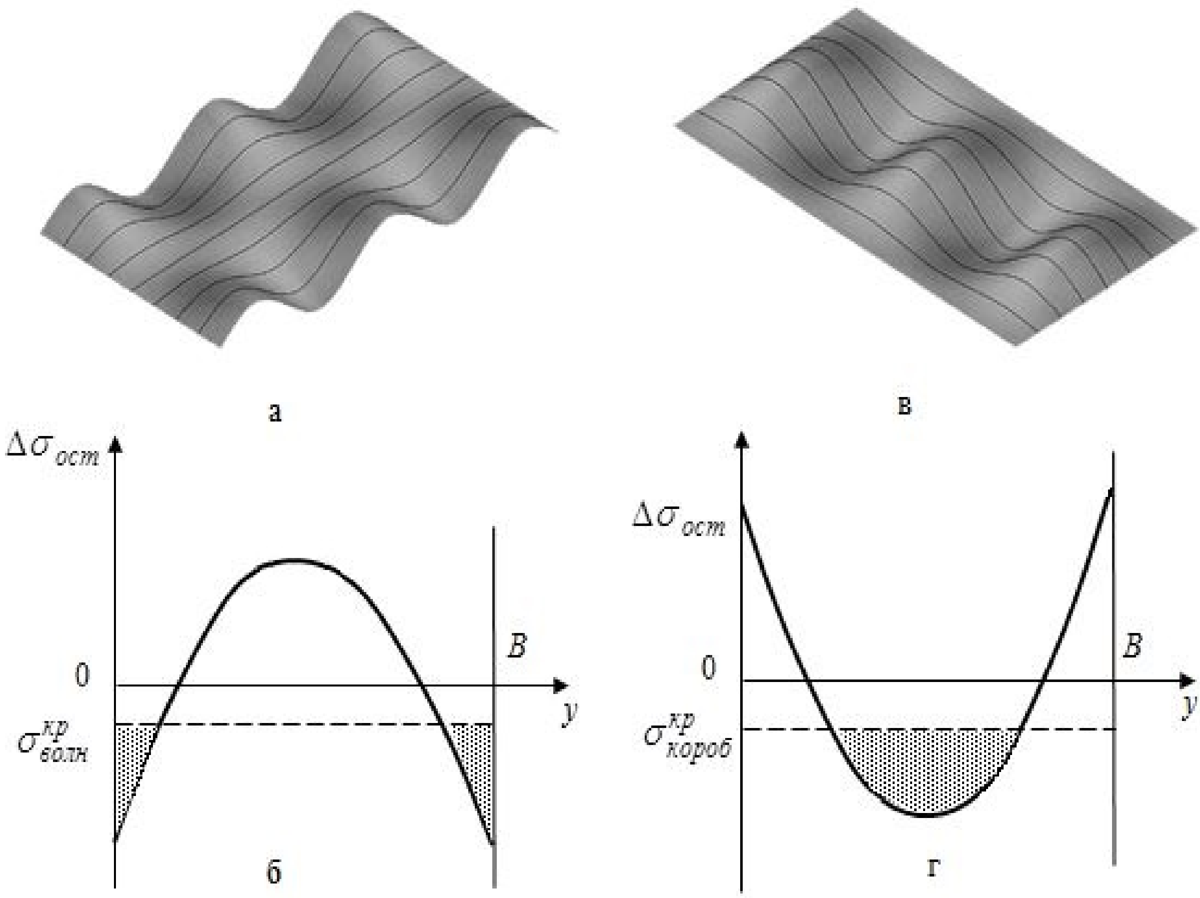
б 


в

а – краевая волнистость; б – центральная коробоватость; в – комбинированная

Рис.1.1. Виды неплоскостности

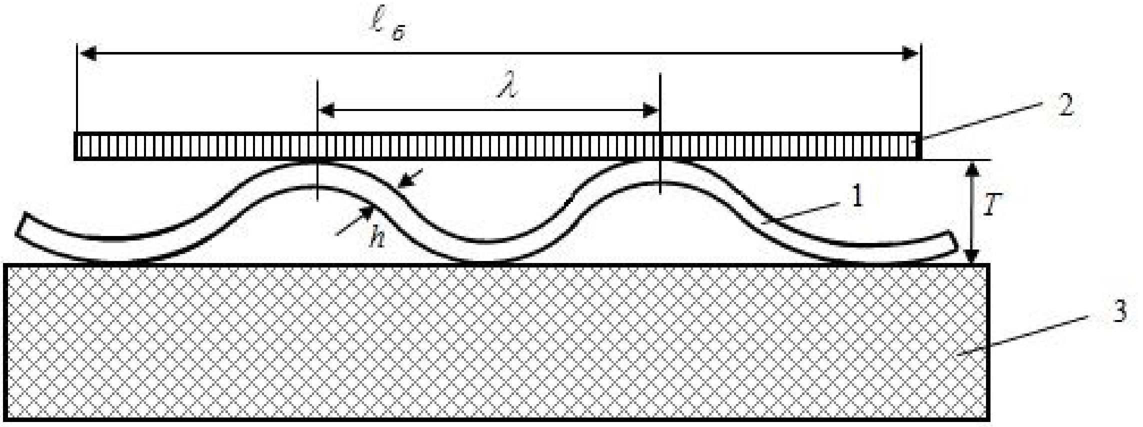
Причиной отклонения формы стального листа от плоской является воздействие распределенных по ширине *B* остаточных напряжений сжатия (отрицательных) $\Delta\sigma_{ост}$, величина которых превышает величину критического напряжения потери плоской формы: для волнистости – $\sigma^{кр}_{волн}$, для коробоватости – $\sigma^{кр}_{короб}$. На рис.2 изображены распределения остаточных напряжений случаев краевой волнистости (рис. 1.2 а,б) и центральной коробоватости (рис. 1.2 в.г), причем области потери стальным листом плоской формы на рис. 1.2 б,г выделены.



а – краевая волнистость: б, г – распределение остаточных напряжений;
в – центральная коробоватость
Рис.1.2. Распределение остаточных напряжений по ширине стального листа

Требования потребителей к плоскостности листового горяче- и холоднокатаного проката имеют тенденцию к постоянному ужесточению, которое обусловлено следующим обстоятельством: отрасли промышленности, потребляющие стальной листовой прокат, такие как машиностроение (производство кузовных деталей автомобилей, элементов различных машин и механизмов и т.д.), производство строительных материалов (кровля, панели, блоки, стенки, ограждения и т.д.), производство труб (от бытовых до магистральных нефте- и газопроводных) для изготовления своей продукции все шире применяют автоматические поточные линии, в которых безаварийная транспортировка и формоизменение поставляемого стального листа определяется уровнем его неплоскостности.

Характеристикой неплоскостности стального листа является максимальное отклонение A_m поверхности измеряемого листа от плоской плиты, на которую он положен, на базе (определенном отрезке длины) $\ell_б$, равной, как правило, 1 или 2 метрам (рис.1.3).



1– измеряемый лист толщиной h; 2 – поверочная линейка; 3 – плоская плита; λ – длина волны неплоскостности

Рис. 1.3. Измерение амплитуды неплоскостности стального листа $A_m = T - h$

Требования к величине максимального отклонения готового горячекатаного проката, изготовляемого в листах, от плоской формы российский ГОСТ 19903-74 устанавливает на базе 1 м только в зависимости от толщины (табл. 1.1).

Таблица 1.1 - ГОСТ 19903-74 «Прокат листовой горячекатаный. Сортамент»

Вид плоскостности	Отклонение от плоскостности при толщине проката, мм, не более		
	0,4-1,4	1,5-3,9	4,0 и более
Особо высокая (ПО)	8	8	5
Высокая (ПВ)	10	10	8
Улучшенная (ПУ)	15	12	10
Нормальная (ПН)	20	15	12

Для холоднокатаных листов предельные отклонения от плоскостности на базе 1 м, в соответствии с российским ГОСТ 19904-90, установлены в только зависимости от ширины и не должны превышать значений, приведенных в табл. 1.2.

Таблица 1.2 - ГОСТ 19904-90 «Прокат листовой холоднокатаный. Сортамент»

Вид плоскостности	Отклонение от плоскостности при ширине проката, мм		
	До 1000	Св. 1000 до 1500	Св. 1500
Особо высокая (ПО)	4	5	6
Высокая (ПВ)	8	8	10
Улучшенная (ПУ)	10	12	15
Нормальная (ПН)	12	15	18

В ГОСТ 19904-90 указано, что для холоднокатаного проката нормальной плоскостности (ПН) шириной свыше 1800 мм отклонения от плоскостности не должны превышать 20 мм.

Отклонения от плоскостности, приведенные в табл. 1.2, распространяются на листы с временным сопротивлением, не превышающим 690 Н/мм^2 (70 кгс/мм^2).

Для листов с временным сопротивлением, превышающим 690 Н/мм^2 (70 кгс/мм^2), ГОСТ 19904-90 предусматривает особенность: допустимые отклонения от плоскостности устанавливаются в нормативно-технической документации для каждого конкретного вида проката.

Зарубежные стандарты на неплоскостность стальных листов (например, табл. 1.3-1.7) используют отличную от российской градацию требований по толщине готовых стальных листов, ширине, пределу текучести. Кроме того, включаются требования к длине поверочной линейки; японский промышленный стандарт JIS G 3141 выделяет в отдельный вид неплоскостности так называемую «волнистую кромку» (в России ее иногда называют «рюшка»)

Таблица 1.3 - JIS G 3193 «Размеры, масса и допустимые отклонения для горячекатаного толстого листа, тонкого листа, полосы»

Толщина листа, мм	Длина поверочной линейки, мм			
	2000			4000
	Ширина, мм			Ширина, мм
	менее 1250	1250 - 1600	1600 - 2000	менее 2000
менее 1,60	18	20	-	-
1,60 – 3,15	16	18	20	-
3,15 – 4,00	16			-
4,00 – 5,00	14			26
5,00 – 8,00	13			22
8,0 – 25,0	12			12

Таблица 1.4 - JIS G 3141 «Лист и полоса из холоднокатаной углеродистой стали» Максимальная неплоскостность, класс А, мм

Ширина, мм	Тип неплоскостности		
	Волна	Волнистая кромка	Коробоватость по центру
До 1000	12	8	6
1000 или более до 1250	15	9	8
1250 или более до 1600	15	11	8
1600 или более	20	13	9

Японский промышленный стандарт JIS G 3141 «Лист и полоса из холоднокатаной углеродистой стали» оперирует следующими видами неплоскостности:

волна – стальной лист имеет волнистость в направлении прокатки;

волнистая кромка – лист имеет волнистость по кромке;

коробоватость по центру – стальной лист имеет волнистость в центральной части.

Табл. 1.4 устанавливает допустимые величины неплоскостности для стальных листов, не подвергнутых правке в правильно-растяжной машине.

Таблица 1.5 - EN 10029 «Горячекатаные стальные листы толщиной 3 мм и выше. Допуски на размеры, форму и массу»

Толщина листа, мм	Предел текучести < 460 МПа		Предел текучести ≥ 460 МПа	
	Длина поверочной линейки		Длина поверочной линейки	
	1000 мм	2000 мм	1000 мм	2000 мм
3,0 – 5,0	9	14	12	17
5,0 – 8,0	8	12	11	15
8,0 – 15,0	7	11	10	14
15,0 – 25,0	7	10	10	13

Таблица 6. EN 10131 «Холоднокатаные плоские изделия без покрытия и с электролитическим цинковым или цинк-никелевым покрытием из мягких сталей, а также из сталей с более высоким пределом текучести для холодной обработки давлением» Допуски по плоскостности для листов из мягких сталей, мм

Класс допуска	Номинальная ширина, *w*, мм	Номинальная толщина, *t*, мм		
		$t < 0{,}7$	$0{,}7 \le t < 1{,}2$	$1{,}2 \le t \le 3{,}0$
Стандартный	w < 600	7	6	5
	600 ≤ w < 1200	10	8	7
	1200 ≤ w < 1500	12	10	8
	w ≥ 1500	17	15	13
Ограниченный (FS)	w < 600	4	3	2
	600 ≤ w < 1200	5	4	3
	1200 ≤ w < 1500	6	5	4
	w ≥ 1500	8	7	6
	w < 1500	Высота волны при длине волны более 200 мм должна быть менее 1 % длины.		
	≥ 1500	Высота волны при длине волны более 200 мм должна быть менее 1,5 % длины.		
	w ≥ 1500	Для длин волны менее 200 мм максимальная высота волны не должна превышать 2 мм.		

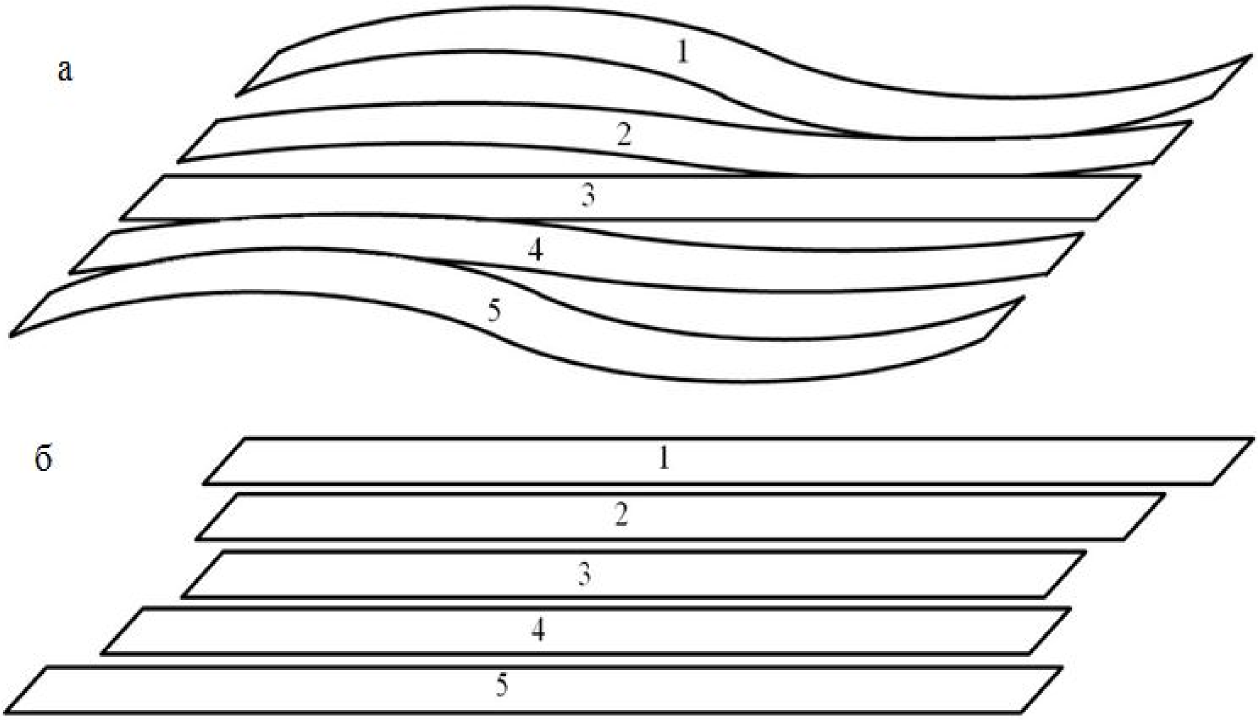
Таблица 7. EN 10131 «Холоднокатаные плоские изделия без покрытия и с электролитическим цинковым или цинк-никелевым покрытием из мягких сталей, а также из сталей с более высоким пределом текучести для холодной обработки давлением» Допуски по плоскостности для листов из сталей с пределом текучести от 260 до 340 МПа, мм

Класс допуска	Номинальная ширина, w, мм	Номинальная толщина, t, мм		
		$0,7 \le t < 1,2$	$0,7 \le t < 1,2$	$0,7 \le t < 1,2$
Стандартный	$600 \le w < 1200$	13	10	8
	$1200 \le w < 1500$	15	13	11
	$w \ge 1500$	20	19	17
Ограниченный (FS)	$600 \le w < 1200$	8	6	5
	$1200 \le w < 1500$	9	8	6
	$w \ge 1500$	12	10	9

1. МЕРА НЕПЛОСКОСТНОСТИ ПРОКАТАННЫХ ЛИСТОВ И ПОЛОС

Остаточные напряжения, распределенные по ширине готового стального листа и являющиеся причиной его неплоскостности, тесно связаны с неравномерностью вытяжек металла по ширине при прокатке.

Разделим стальной лист с неплоскостностью типа «краевая волнистость» на продольные полоски (рис. 1.4,а) и выпрямим их (рис. 1.4,б). После измерения длины каждой полоски отметим тот факт, что наименьшую длину имеет средняя полоска №3, полоски №2,4 длиннее, чем средняя, но короче, чем крайние полоски №1,5, которые имеют наибольшую длину. Когда полоски были единым целым, длинные полоски растягивали короткие, короткие, в свою очередь, подвергали сжатию более длинные. Таким образом и формируются остаточные напряжения, распределенные по ширине листа или полосы, при прокатке.



а – стальной лист с краевой волной, разделенный на продольные полоски;
б – выпрямленные полоски с различной степенью вытяжки
Рис. 1.4 - Длины продольных полосок после разделения стального листа с краевой волнистостью

Рассмотрим связь параметров неплоскостности с распределением продольных вытяжек по ширине полосы, для чего воспользуемся схематичным изображением стального листа с краевой волнистостью (рис. 1.5).

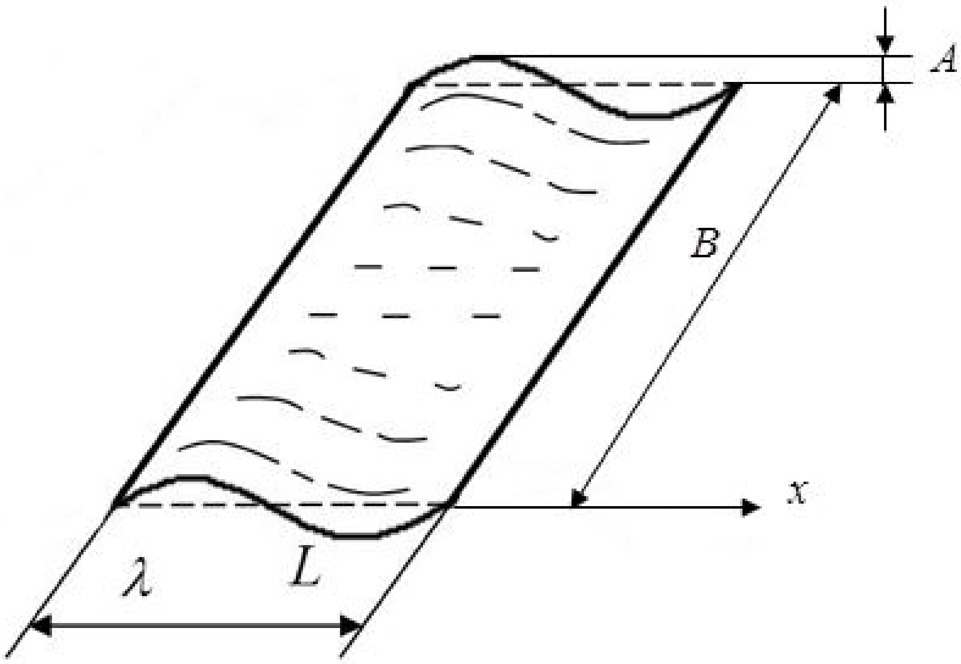


Рис. 1.5 - Волнистая полоса

Длина листа равна длине волны λ неплоскостности, амплитуда неплоскостности $A_m = 2A$, длина деформированной кромки равна L, ширина листа равна B.

Длина деформированной кромки выражается формулой $L = \int_0^{\lambda} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$,

где $y'(x)$ – производная функции, описывающей форму деформированной кромки листа.

Форму деформированной кромки можно аппроксимировать с помощью различных функций. Сначала рассмотрим аппроксимацию отрезками квадратичной параболы. На рис. 1.6 изображена половина волны неплоскостности причем начало координат помещено в середину – длина кромки от этого не изменяется, а выкладки упрощаются.

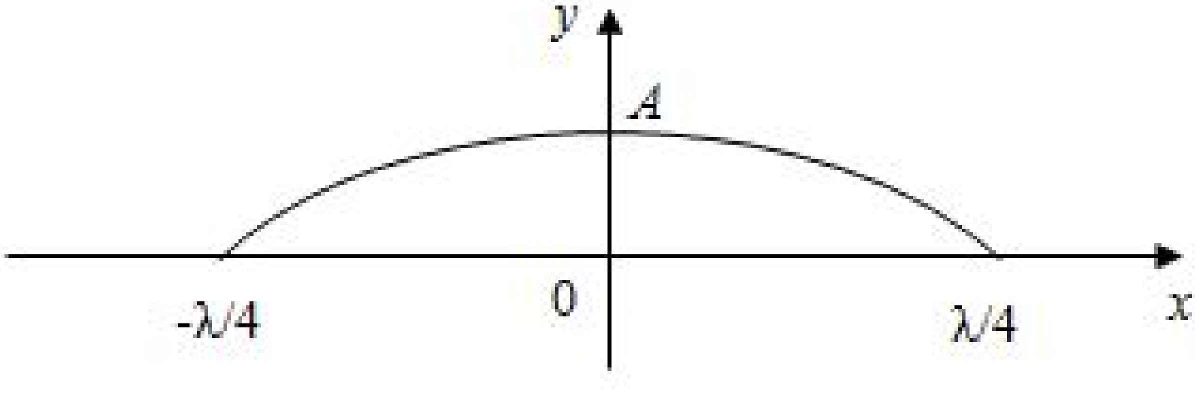


Рис. 1.6 - Половина волны неплоскостности – параболическая аппроксимация

Легко видеть, что функция *y*, изображенная на рис. 6, описывается следующим образом:

$$y = -\frac{16A}{\lambda^2}x^2 + A; \tag{1.1}$$

$$y' = -\frac{32A}{\lambda^2}x. \tag{1.2}$$

Вычислим длину деформированной кромки листа на длине волны λ:

$$L = 4\int_0^{\frac{\lambda}{4}} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 4\int_0^{\frac{\lambda}{4}} \sqrt{1+\left(\frac{32A}{\lambda^2}\right)^2 x^2}\,dx =$$

$$= \frac{\lambda^2}{8A}\left\{\frac{16A}{\lambda^2}x\sqrt{1+\left(\frac{32A}{\lambda^2}\right)^2 x^2} + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{32A}{\lambda^2}x + \sqrt{1+\left(\frac{32A}{\lambda^2}\right)^2 x^2}\right]\right\}\Bigg|_0^{\frac{\lambda}{4}} =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\sqrt{1+\left(\frac{8A}{\lambda}\right)^2} + \frac{\lambda^2}{16A}\ln\left[\frac{8A}{\lambda} + \sqrt{1+\left(\frac{8A}{\lambda}\right)^2}\right]. \tag{1.3}$$

Мерой неплоскостности полосы является относительная разность длин между серединой ℓ_0 и кромкой ℓ_1 измеряемого листа:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} = \frac{\ell_0 - \ell_1}{\ell_0} = -\frac{L-\lambda}{\lambda}. \tag{1.4}$$

Подставляя в формулу (1.4) выражение (1.3), получаем:

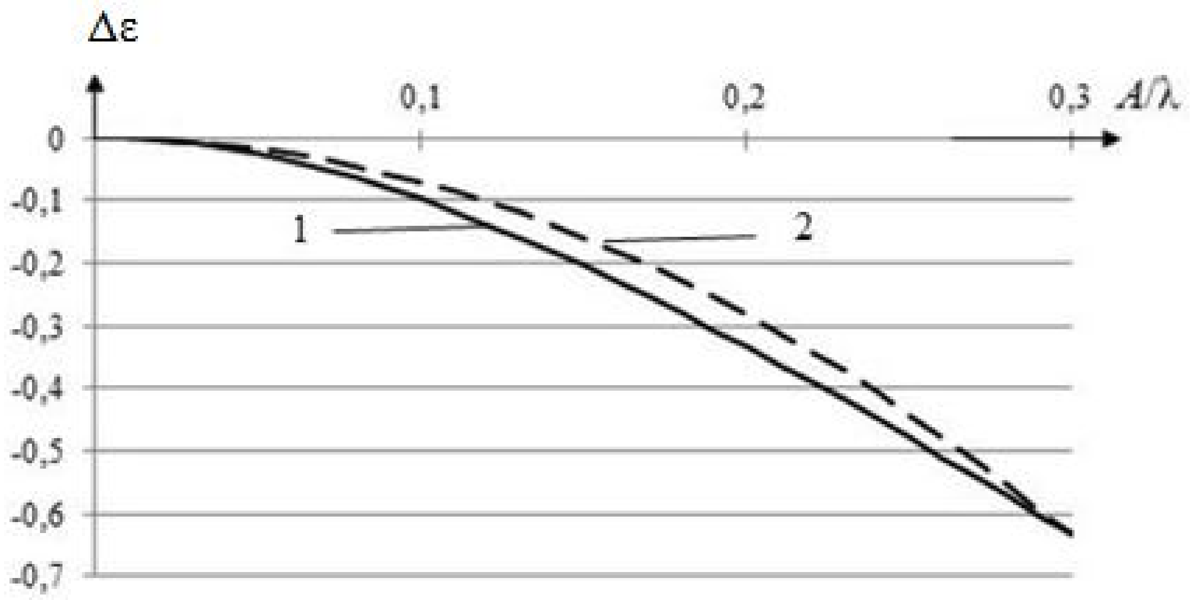
$$\Delta\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{8A}{\lambda}\right)^2} - \frac{\lambda}{16A}\ln\left[\frac{8A}{\lambda} + \sqrt{1+\left(\frac{8A}{\lambda}\right)^2}\right]. \tag{1.5}$$

Отмечаем, что в формулу (1.5) входит отношение амплитуды к длине волны $\left(\frac{A}{\lambda}\right)$.

Формула (1.5) неудобна для инженерных расчетов, поэтому аппроксимируем ее с помощью выражения типа $\Delta\varepsilon = K\left(\frac{A}{\lambda}\right)^2$:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} = \frac{\ell_0 - \ell_1}{\ell_0} = -\frac{L-\lambda}{\lambda} = -7{,}0588\left(\frac{A}{\lambda}\right)^2. \tag{1.6}$$

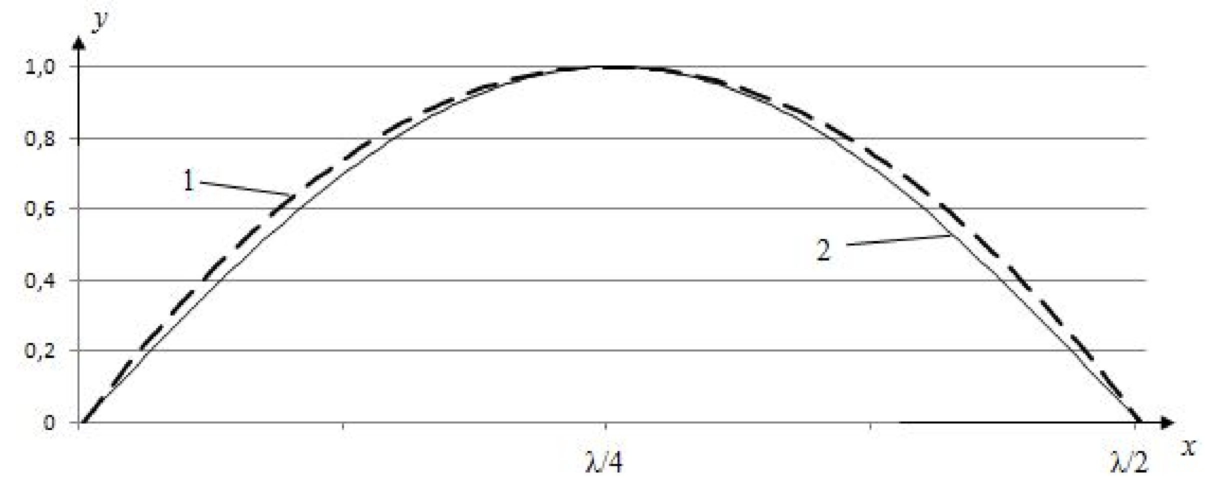
На рис.1.7 показано сравнение зависимостей (1.5) и (1.6) при $0 < \frac{A}{\lambda} \le 0{,}3$; соответствие вполне удовлетворительное.



1 – по выражению (1.5); 2 – по приближенной формуле (1.6)

Рис. 1.7 - Зависимость неплоскостности от отношения A/λ

Форму кромок волнистого листа можно аппроксимировать функцией $y = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$. Сравнение параболической и синусоидальной аппроксимаций при $A = 1{,}0$ представлено на рис. 1.8.



1 – параболическая аппроксимация; 2 – синусоидальная аппроксимация

Рис. 1.8 - Аппроксимация неплоскостности

Имея в виду, что $y' = A\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$, и записывая выражение для вычисления длины синусоиды, приходим к эллиптическому интегралу, который не выражается в элементарных функциях:

$$L = \int_0^{\lambda}\sqrt{1 + A^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{2\pi}{\lambda}x}\,dx\,. \tag{1.7}$$

Вычисляя длину синусоиды непосредственно с помощью численных методов и подставляя ее в формулу (1.4), получаем зависимость относительной разности длин между серединой ℓ_0 и кромкой ℓ_1 измеряемого листа при синусоидальной аппроксимации. На рис. 9 представлено сравнение зависимостей относительной разности длин между серединой ℓ_0 и кромкой ℓ_1 измеряемого листа при синусоидальной (штриховая линия) и параболической (сплошная линия) аппроксимации. Разница практически отсутствует.

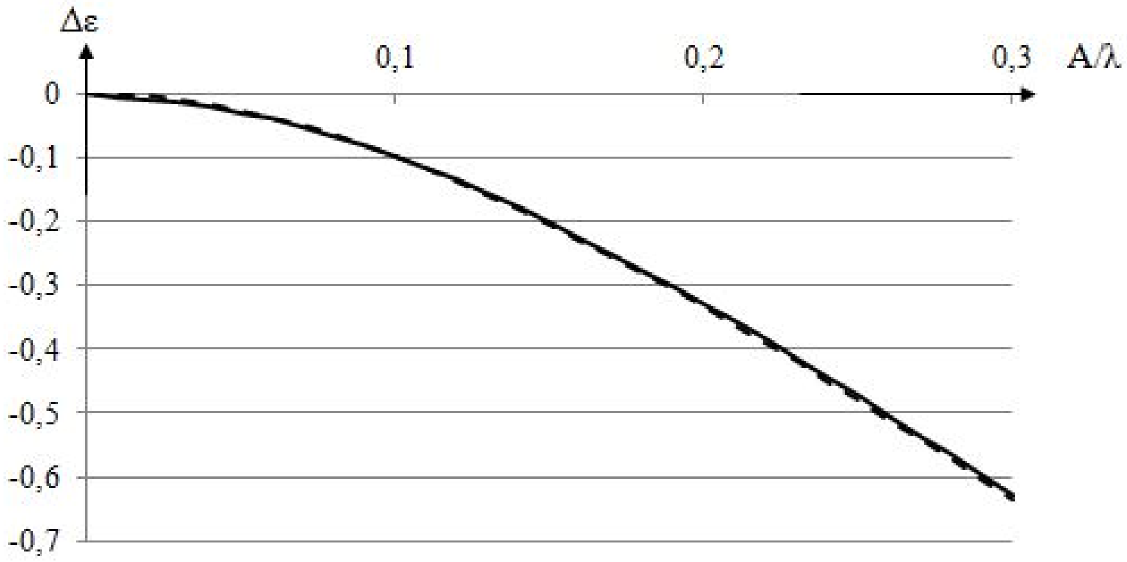
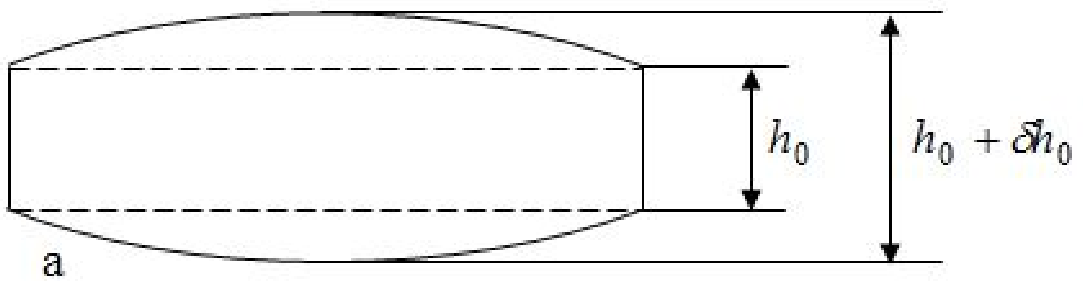
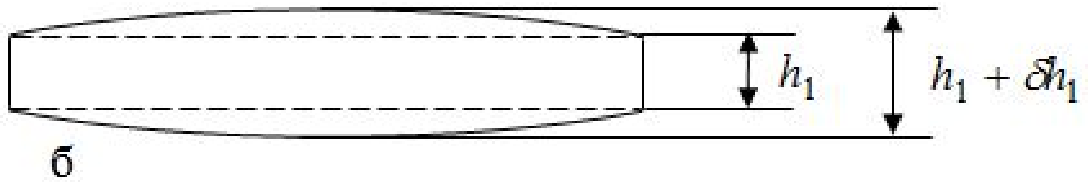


Рис. 1.9 - Зависимость неплоскостности от отношения A/λ при синусоидальной и параболической аппроксимации

К понятию меры неплоскостности стальных листов и полос можно подойти с точки зрения формы профиля поперечного сечения до и после обжатия в прокатной клети без уширения.

На рис. 1.10,а изображено поперечное сечение прокатываемой полосы на входе в очаг деформации, а на рисунке 1.10,б – поперечное сечение на выходе из очага деформации.





а – на входе в очаг деформации; б – на выходе из очага деформации

Рис.1.10 - Профиль поперечного сечения прокатываемой полосы

Примем, что длина прокатываемой полосы до обжатия была L_0. В соответствии с плоской схемой деформации и законом постоянства секундных объемов длина кромки прокатанной полосы стала равной $\ell_1 = L_0 \dfrac{h_0}{h_1}$, а длина её середины: $\ell_0 = L_0 \dfrac{h_0 + \delta h_0}{h_1 + \delta h_1}$. Тогда относительная разность между длинами середины и кромки полосы выразится следующим образом:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} = \frac{\ell_0 - \ell_1}{\ell_0} = \frac{1}{\mu_h}\left(\frac{h_0 + \delta h_0}{h_1 + \delta h_1} - \frac{h_0}{h_1}\right) = \frac{\Delta\mu_h}{\mu_h}, \tag{1.8}$$

где μ_h – коэффициент вытяжки, $\Delta\mu_h$ – разница коэффициентов вытяжки в середине и на кромке полосы.

Коэффициент вытяжки в прокатке для простоты часто называют просто вытяжкой, хотя вытяжкой называется еще и технологическая операция получения полых деталей из плоских заготовок.

Из выражения (1.8) можно легко получить другое выражение для относительной разности в длинах между серединой и кромкой полосы:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\mu_h}{\mu_h} = \frac{1}{\mu_h}\left(\frac{h_0 + \delta h_0}{h_1 + \delta h_1} - \frac{h_0}{h_1}\right) = \frac{1}{\mu_h}\frac{h_1\delta h_0 - h_0\delta h_1}{h_1(h_1 + \delta h_1)} = \frac{\delta h_0}{h_0} - \frac{\delta h_1}{h_1}. \tag{1.9}$$

Величину неравномерности относительных удлинений измеряют в I-UNIT, одна единица которой равна 10 $мкм/м$. Для получения $\Delta\varepsilon$ в I-UNIT перед правой частью (1.8) или (1.9) нужно поставить множитель 10^5.

Если относительная разность в длинах между серединой и кромкой $\Delta\varepsilon = 0$ – полоса имеет абсолютно плоскую форму. Из (1.9) естественным образом вытекает условие равенства нулю относительной разности в длинах между серединой и кромкой полосы [1]:

$$\frac{\delta h_0}{h_0} = \frac{\delta h_1}{h_1}. \tag{1.10}$$

В случае $\Delta\varepsilon \neq 0$ в полосе возникают остаточные напряжения, величина которых вычисляется следующим образом:

$$\Delta\sigma_{ocm} = -E\Delta\varepsilon, \tag{1.11}$$

где E - модуль упругости материала полосы.

Следует отметить, что для потери полосой плоской формы величина $\Delta\sigma_{ocm}$ должна превысить некоторую критическую величину напряжений сжатия $\sigma_{кр}$. Этой величине соответствует неравномерность относительных удлинений $I_{кр} = 10^5 \frac{\sigma_{кр}}{E}$ [I-UNIT]. Случай $|\Delta\varepsilon| > I_{кр}$, $\Delta\varepsilon > 0$ соответствует полосе с центральной коробоватостью, а случай $|\Delta\varepsilon| > I_{кр}$, $\Delta\varepsilon < 0$ соответствует полосе с краевой волнистостью.

В общем случае критическая величина напряжений сжатия при краевой волнистости не совпадает с аналогичной при центральной коробоватости. Неплоскостность горячекатаной полосы величиной 25-100 I-IUNT считается удовлетворительной для последующей холодной прокатки [2].

На основании вышеприведенных рассуждений Ю.Д. Железнов [3] формулирует деформационный критерий оценки величины остаточных напряжений и устойчивости полосы:

$$\Delta\sigma_{ocm} = E\left(\frac{\delta h_0}{h_0} - \frac{\delta h_1}{h_1}\right) < \sigma_{кр}. \tag{1.12}$$

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МЕЖВАЛКОВОГО ДАВЛЕНИЯ И ИЗГИБНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРОКАТНЫХ ВАЛКОВ ЧЕТЫРЕХВАЛКОВОЙ СИСТЕМЫ

В соответствии с выражением (1.11-1.12) величина выходных (остаточных) напряжений зависит от соотношения выпуклостей входного δh_0 и выходного δh_1 профиля поперечного сечения прокатываемых полос.

Форма профиля поперечного сечения прокатываемых полос определяется формой активной образующей рабочих валков, которая зависит от упругих деформаций валковой системы, сопровождающих прокатку стальных полос на непрерывных широкополосных станах. Наиболее значимыми упругими деформациями валковой системы с точки зрения формы профиля поперечного сечения прокатываемых полос являются изгиб осей прокатных валков, а также неравномерное сплющивание поверхности рабочих валков в контакте с полосой (рис. 2.1).

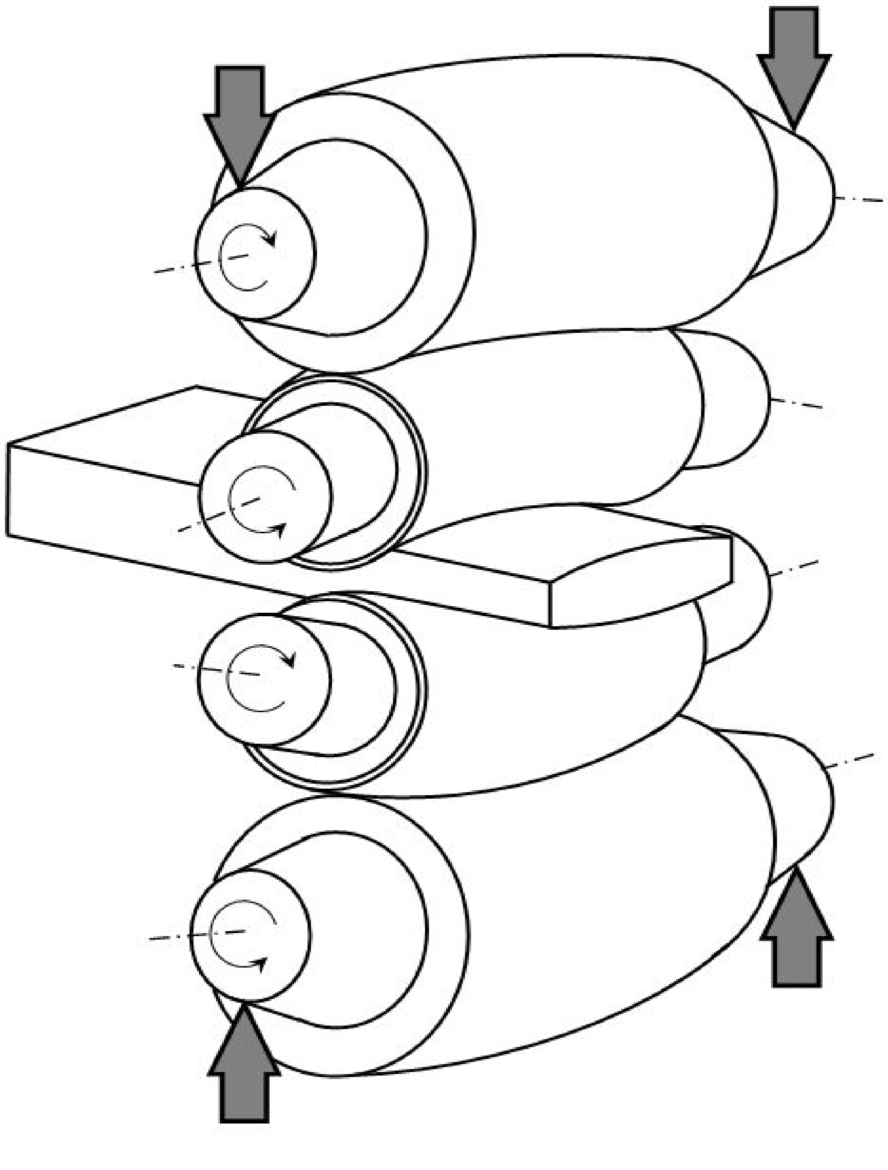


Рис.2.1 - Упругие деформации четырехвалковой системы

2.1.Матричный метод определения межвалкового давления и прогибов четырехвалковой системы

В работах В.В. Мельцера, И.А. Пыженкова, В.М. Салганика, В.И.Пыженкова [4-6] разработан матричный метод расчета упругих прогибов четырехвалковой системы на основе прямого вариационного метода Ритца. Применим этот метод для разработки инженерной методики вычисления межвалкового давления и прогибов прокатных валков, для чего введем в математическую модель некоторые упрощения, которые оказывают несущественное влияние на точность расчетов, но сильно усложняют математические выкладки:

а) распределение давления прокатки по ширине полосы равномерное;

б) рабочий и опорный валок в процессе упругого изгиба проскальзывают вдоль образующих без трения.

На рис. 2.2а изображены нижние рабочий и опорный валки с действующими на них силами и нагрузками. Расположим начало координат в середине бочек валков и, так как задача симметричная, рассмотрим только одну их половину (правую), как представлено на рис.2.2б.

На рис.2.2. используются следующие обозначения:

$2b$ – ширина прокатываемой полосы;

p –равномерное погонное давление прокатки, $p=\frac{P}{b}$, где $2P$ – усилие прокатки;

F – усилие противоизгиба;

2ℓ – длина бочки рабочего и опорного валков;

$2\ell_1$ – расстояние между точками приложения усилий противоизгиба;

e_1 – расстояние между краем бочки рабочего валка и точкой приложения усилия противоизгиба;

q – межвалковое давление на расстоянии x от середины валков;

q_0 – межвалковое давление в середине бочки валка;

z_1 – профилировка рабочего валка – расстояние между образующей ненагруженного рабочего валка и горизонталью к его середине (положительная при выпуклом валке, отрицательная при вогнутом валке) на расстоянии x от середины валков;

w_1 – прогиб рабочего валка - расстояние между осью нагруженного рабочего валка и касательной к ней в середине на расстоянии x от середины валков;

Q – усилие на нажимное устройство;

e_2 – расстояние между краем бочки опорного валка и точкой приложения усилия на нажимное устройство;

z_2 – профилировка опорного валка – расстояние между образующей ненагруженного опорного валка и горизонталью к его середине (положительная при выпуклом валке, отрицательная при вогнутом валке) на расстоянии x от середины валков;

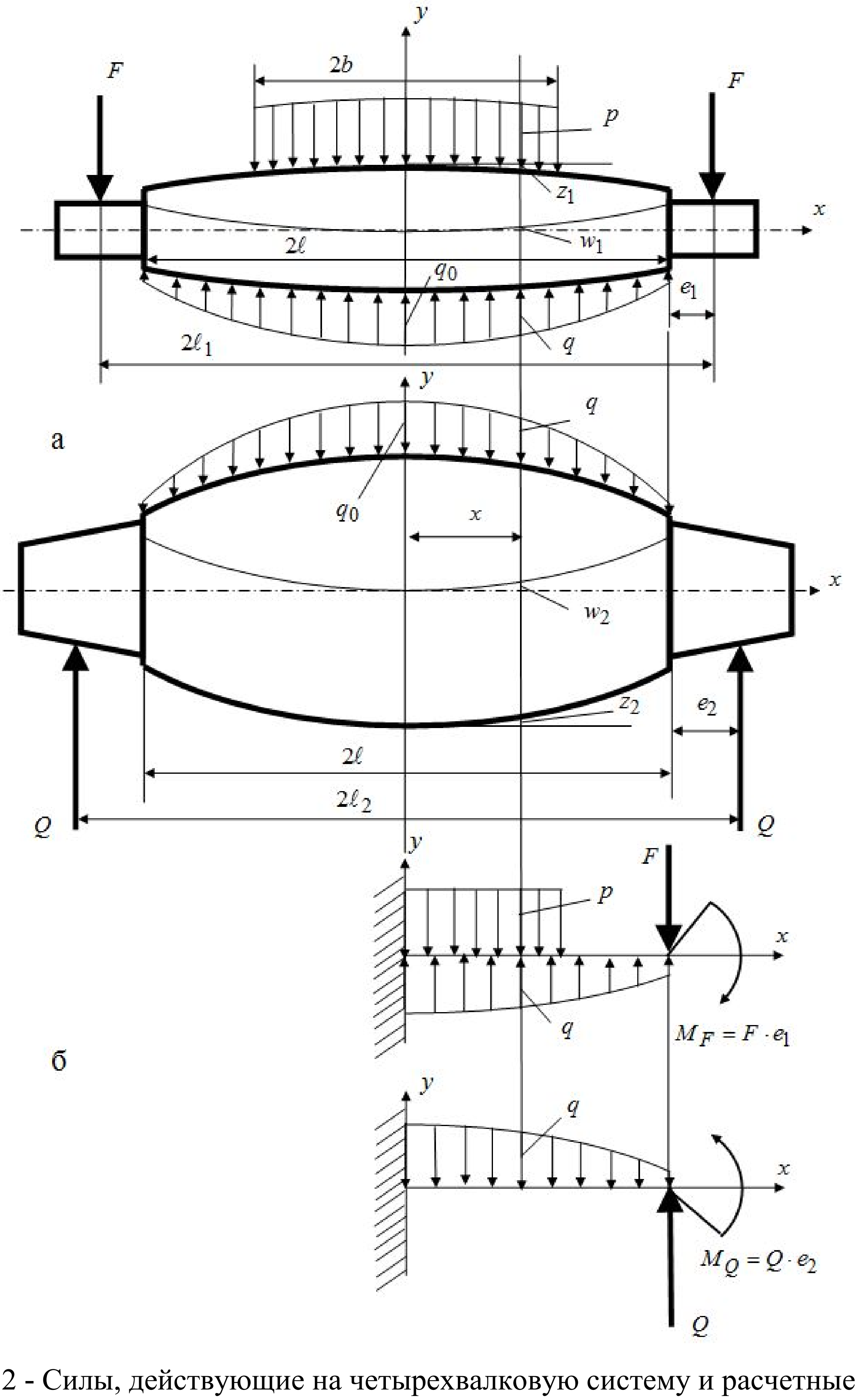


Рис. 2.2 - Силы, действующие на четырехвалковую систему и расчетные схемы рабочего и опорного валков

w_2 – прогиб опорного валка - расстояние между осью нагруженного опорного валка и касательной к ней в середине на расстоянии x от середины валков.

Для удобства вычислений выполним эквивалентный перенос сил Q и F, действующих на шейки валков, на край бочек. Для этого приложим к краям бочек кроме сил Q и F изгибающие моменты $M_F = F \cdot e_1$ для рабочего валка и $M_Q = Q \cdot e_2$, как это изображено на рис. 2.2б.

Параметры, характеризующие физические свойства валков:

$E_1,\ E_2$ – модули упругости I рода материала рабочего и опорного валков;

$G_1,\ G_2$ – модули упругости II рода материала рабочего и опорного валков;

$\nu_1,\ \nu_2$ – коэффициенты Пуассона материала рабочего и опорного валков;

$D_1,\ D_2$ – диаметры рабочего и опорного валков;

$I_1,\ I_2$ – моменты инерции сечения рабочего и опорного валков;

$S_1,\ S_2$ – площади сечения рабочего и опорного валков.

Прогиб валка будем искать в следующем виде:

$$w = a_1\varphi_1 + a_3\varphi_3 + a_5\varphi_5\,, \tag{2.1.1}$$

где $\varphi_1 = 1 - \cos\frac{\pi x}{2\ell}$, $\varphi_3 = 1 - \cos\frac{3\pi x}{2\ell}$, $\varphi_5 = 1 - \cos\frac{5\pi x}{2\ell}$, a_i – неизвестные (варьируемые) коэффициенты.

Базисные функции φ_1. φ_3, φ_5 имеют следующие свойства: они линейно независимы и удовлетворяют граничным условиям $\varphi_i(0) = 0$ и $\varphi_i^{'}(0) = 0$ (рис. 2.3).

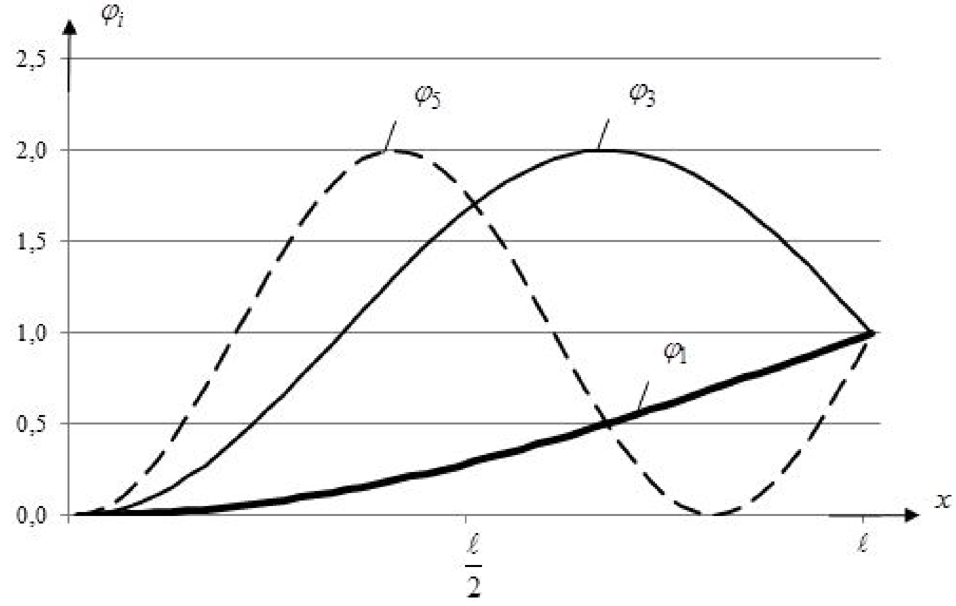


Рис. 2.3 - Базисные функции

В матричной форме выражение (2.1.1) записывается в следующем виде:

$$\overline{w} = \Phi^T \cdot \overline{a} = a^T \cdot \overline{\Phi}\,, \qquad (2.1.1а)$$

где

$\overline{\Phi} = \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \\ \varphi_5 \end{Vmatrix}$ и $\overline{a} = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \end{Vmatrix}$ – матрицы-столбцы (векторы), состоящие из φ_i и a_i;

$\Phi^T = \begin{Vmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \end{Vmatrix}$ $a^T = \begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \end{Vmatrix}$ – матрицы-строки (транспонированные столбцы).

Межвалковое давление аппроксимируем с помощью тех же базисных функций в следующем виде:

$$q(x) = q_0 + c_1\varphi_1 + c_3\varphi_3 + c_5\varphi_5 = q_0 + \Phi^T\overline{c}\,. \qquad (2.1.2)$$

Или

$$q(x) = q_0 + c_1\varphi_1 + c_3\varphi_3 + c_5\varphi_5 = \frac{Q}{\ell} + c_1\left[\varphi_1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\right] + $$
$$+ c_3\left[\varphi_3 - \left(1 + \frac{2}{3\pi}\right)\right] + c_5\left[\varphi_5 - \left(1 - \frac{2}{5\pi}\right)\right], \qquad (2.1.3)$$

где q_0 – межвалковое давление в середине бочки валка.

В матричной форме выражение (2.1.3) запишется следующим образом:

$$q = \frac{Q}{\ell} + \left(\Phi^T - \Phi_0^T\right)\cdot\overline{c}\,, \qquad (2.1.3а)$$

где $\Phi_0^T = \int\limits_0^\ell \Phi^T dx = \frac{1}{\pi}\begin{Vmatrix} \pi - 2 & \pi + \frac{2}{3} & \pi - \frac{2}{5} \end{Vmatrix}$, $\overline{c} = \begin{Vmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_5 \end{Vmatrix}$ – вектор аппроксимирующих коэффициентов.

Выражения (2.1..3) и (2.1.3а) вытекают из очевидного условия равновесия опорного валка:

$$Q = \int\limits_0^\ell q(x)dx:$$

$$Q = \int\limits_0^\ell \left[q_0 + c_1\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2\ell}\right) + c_3\left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2\ell}\right) + c_5\left(1 - \cos\frac{5\pi x}{2\ell}\right)\right]dx =$$
$$= q_0\ell + c_1\ell\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + c_3\ell\left(1 + \frac{2}{3\pi}\right) + c_5\ell\left(1 - \frac{2}{5\pi}\right).$$

Отсюда получаем выражение для межвалкового давления q_0 в середине бочки валков:

$$q_0 = \frac{Q}{\ell} - c_1 \frac{1}{\pi}(\pi - 2) - c_3 \frac{1}{\pi}\left(\pi + \frac{2}{3}\right) - c_5 \frac{1}{\pi}\left(\pi - \frac{2}{5}\right). \qquad (2.1.4)$$

Подставляя выражение (2.1.4) в (2.1.2), получаем (2.1.3).

Принимаем, что погонное давление прокатываемой полосы на рабочий валок распределено равномерно:

$$p(x) = \frac{P}{b}, \qquad (2.1.5)$$

где $2P = 2(Q - F)$ - полное усилие прокатки.

Форму ненагруженного зазора между рабочим и опорным валком аппроксимируем с помощью тех же базисных функций следующим образом:

$$z = z_2 - z_1 = g_1 \cdot \varphi_1 + g_2 \cdot \varphi_3 + g_5 \cdot \varphi_5 \qquad (2.1.6)$$

Или в матричной форме:

$$z = \Phi^T \cdot \bar{g} , \qquad (2.1.6а)$$

где z – зазор между рабочим и опорным валками, соприкасающимися в середине бочки,

$\bar{g} = \begin{Vmatrix} g_1 \\ g_3 \\ g_5 \end{Vmatrix}$ - вектор аппроксимирующих коэффициентов функции зазора.

Пример вычисления аппроксимирующих коэффициентов для функции зазора между рабочим и опорным валками

Предположим, что зазор между рабочим и опорным валками, соприкасающимися в середине бочки, задан функцией $z = f(x)$. Поставлена задача: функцию $z = f(x)$, удовлетворяющую начальным условиям $f(0) = f'(0) = 0$, аппроксимировать методом наименьших квадратов обобщенным трехчленом $\psi(x) = \Phi^T \cdot \bar{g} = g_1\varphi_1 + g_3\varphi_3 + g_5\varphi_5$, где $\varphi_1 = 1 - \cos\frac{\pi x}{2\ell}$, $\varphi_3 = 1 - \cos\frac{3\pi x}{2\ell}$, $\varphi_5 = 1 - \cos\frac{5\pi x}{2\ell}$, при этом сумма квадратов отклонений аппроксимирующего трехчлена $\psi(x)$ от функции $z = f(x)$ будет минимальной. Отклонения определяем в m равноотстоящих точках; причем при $x = 0$, $\psi(0) = 0$,

$f(0)=0$. Задача сводится к решению следующего матричного уравнения линейной алгебры (основное уравнение метода наименьших квадратов):

$$AA^T\bar{g}=A\bar{f}\ ,$$

где

$$A=\begin{Vmatrix}\varphi_1\left(\frac{\ell}{m}\right) & \varphi_1\left(\frac{2\ell}{m}\right) & \varphi_1\left(\frac{3\ell}{m}\right) & \varphi_1(\ell)\\ \varphi_3\left(\frac{\ell}{m}\right) & \varphi_3\left(\frac{2\ell}{m}\right) & \varphi_3\left(\frac{3\ell}{m}\right) & \varphi_3(\ell)\\ \varphi_5\left(\frac{\ell}{m}\right) & \varphi_5\left(\frac{2\ell}{m}\right) & \varphi_5\left(\frac{3\ell}{m}\right) & \varphi_5(\ell)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\varphi_1\left(\frac{\ell}{m}\right) & \varphi_1\left(\frac{2\ell}{m}\right) & \varphi_1\left(\frac{3\ell}{m}\right) & 1\\ \varphi_3\left(\frac{\ell}{m}\right) & \varphi_3\left(\frac{2\ell}{m}\right) & \varphi_3\left(\frac{3\ell}{m}\right) & 1\\ \varphi_5\left(\frac{\ell}{m}\right) & \varphi_5\left(\frac{2\ell}{m}\right) & \varphi_5\left(\frac{3\ell}{m}\right) & 1\end{Vmatrix},\quad \bar{f}=\begin{Vmatrix}f\left(\frac{\ell}{m}\right)\\ f\left(\frac{2\ell}{m}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\\ f(\ell)\end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует решение, т.е. значения коэффициентов $\bar{g}$:

$$\bar{g}=\Pi\cdot\bar{f}\ ,\ \text{где}\ \Pi=\left(AA^T\right)^{-1}A.$$

Допустим, что межвалковый зазор описывается функцией $z=Z_{max}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$, $m=4$, $\ell=4$ (рис. 2.4).

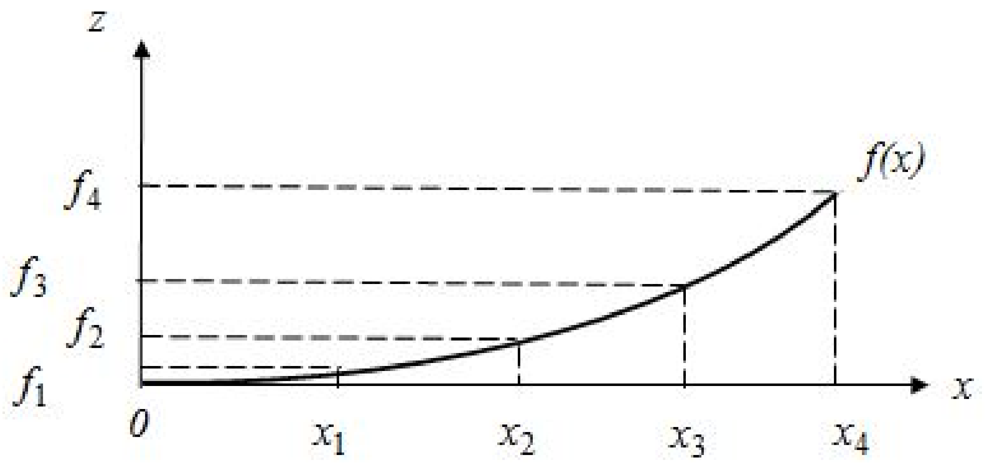


Рис. 2.4 - Схема аппроксимации

В этом случае $x_0=0$, $x_1=\frac{\ell}{4}=1$, $x_2=\frac{\ell}{2}=2$, $x_3=\frac{3\ell}{4}=3$, $x_4=\ell=4$,

$f_0=f(0)=0$; $f_1=f(x_1)=Z_{max}\cdot\frac{1}{16}$; $f_2=Z_{\max}\cdot\frac{1}{4}$; $f_3=Z_{\max}\cdot\frac{9}{16}$; $f_4=Z_{\max}$.

Матрица A имеет следующий вид:

$$A=\begin{Vmatrix}1-\cos\frac{\pi}{8} & 1-\cos\frac{\pi}{4} & 1-\cos\frac{3\pi}{8} & 1\\ 1-\cos\frac{3\pi}{8} & 1-\cos\frac{3\pi}{4} & 1-\cos\frac{9\pi}{8} & 1\\ 1-\cos\frac{5\pi}{8} & 1-\cos\frac{5\pi}{4} & 1-\cos\frac{15\pi}{8} & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0{,}07612 & 0{,}29289 & 0{,}61732 & 1{,}0\\ 0{,}61732 & 1{,}70711 & 1{,}92388 & 1{,}0\\ 1{,}38268 & 1{,}70711 & 0{,}07612 & 1{,}0\end{Vmatrix}.$$

Матрицы $\bar{f}$ и A^T имеют следующий вид:

$$\bar{f} = Z_{\max}\begin{Vmatrix} 0{,}0625 \\ 0{,}25 \\ 0{,}5625 \\ 1{,}0 \end{Vmatrix}, \qquad A^T = \begin{Vmatrix} 0{,}07612 & 0{,}61732 & 1{,}38268 \\ 0{,}29289 & 1{,}70711 & 1{,}70711 \\ 0{,}61732 & 1{,}92388 & 0{,}07612 \\ 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 \end{Vmatrix}.$$

Результат перемножения матриц A и A^T:

$$AA^T = \begin{Vmatrix} 0{,}07612 & 0{,}29289 & 0{,}61732 & 1{,}0 \\ 0{,}61732 & 1{,}70711 & 1{,}92388 & 1{,}0 \\ 1{,}38268 & 1{,}70711 & 0{,}07612 & 1{,}0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0{,}07612 & 0{,}61732 & 1{,}38268 \\ 0{,}29289 & 1{,}70711 & 1{,}70711 \\ 0{,}61732 & 1{,}92388 & 0{,}07612 \\ 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1{,}47266 & 2{,}73464 & 1{,}65224 \\ 2{,}73464 & 7{,}99662 & 4{,}91423 \\ 1{,}65224 & 4{,}91423 & 5{,}83182 \end{Vmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу:

$$\left(AA^T\right)^{-1} = \begin{Vmatrix} 1{,}86151 & -0{,}64810 & 0{,}01874 \\ -0{,}64810 & 0{,}48501 & -0{,}22508 \\ 0{,}01874 & -0{,}22508 & 0{,}35583 \end{Vmatrix}.$$

Матрица Π:

$$\Pi = \left(AA^T\right)^{-1} A = \begin{Vmatrix} 1{,}86151 & -0{,}64810 & 0{,}01874 \\ -0{,}64810 & 0{,}48501 & -0{,}22508 \\ 0{,}01874 & -0{,}22508 & 0{,}35583 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0{,}07612 & 0{,}29289 & 0{,}61732 & 1{,}0 \\ 0{,}61732 & 1{,}70711 & 1{,}92388 & 1{,}0 \\ 1{,}38268 & 1{,}70711 & 0{,}07612 & 1{,}0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -0{,}23248 & -0{,}52918 & -0{,}09630 & 1{,}23214 \\ -0{,}06114 & 0{,}25390 & 0{,}51587 & -0{,}38817 \\ 0{,}35448 & 0{,}22869 & -0{,}39437 & 0{,}14949 \end{Vmatrix}.$$

Итак, получена матрица Π для числа разбиений $m = 4$. Аналогично вычисляется матрица Π для других значений числа разбиений m.

Теперь вычисляем коэффициенты аппроксимирующего полинома $\bar{g}$:

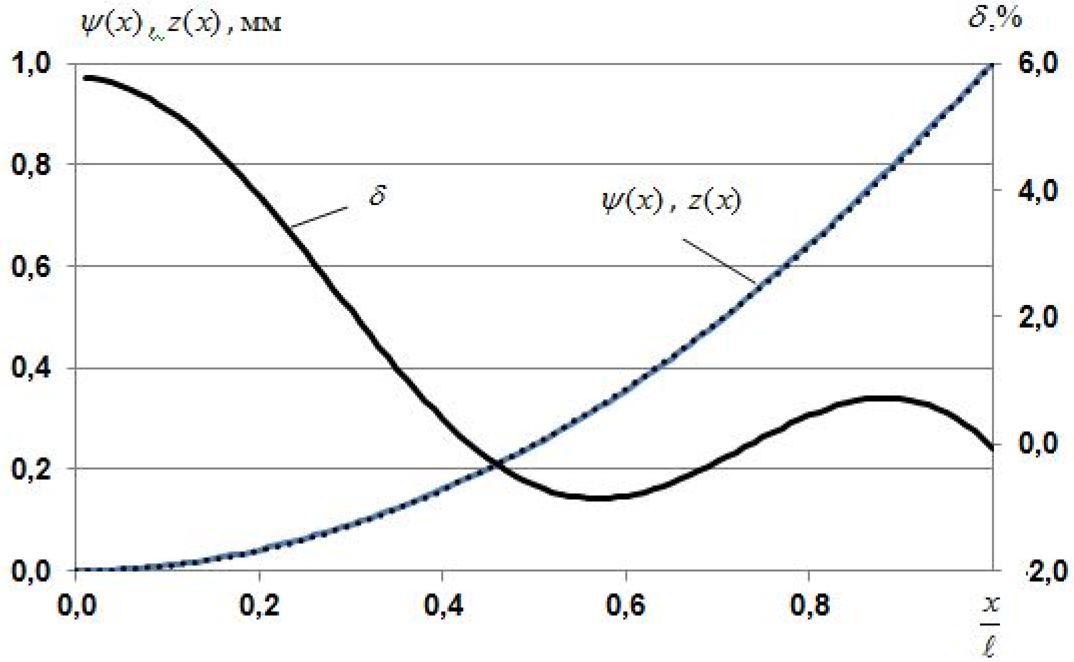
$$\bar{g} = \begin{Vmatrix} -0{,}23248 & -0{,}52918 & -0{,}09630 & 1{,}23214 \\ -0{,}06114 & 0{,}25390 & 0{,}51587 & -0{,}38817 \\ 0{,}35448 & 0{,}22869 & -0{,}39437 & 0{,}14949 \end{Vmatrix} \times Z_{max} \times \begin{Vmatrix} 0{,}0625 \\ 0{,}25 \\ 0{,}5625 \\ 1{,}0 \end{Vmatrix} =$$

$$= Z_{max} \times \begin{Vmatrix} 1{,}0308 \\ -0{,}03834 \\ 0{,}00698 \end{Vmatrix}.$$

Итак, $g_1 = 1{,}0308 \cdot Z_{max}$; $g_3 = -0{,}03834 \cdot Z_{max}$; $g_5 = 0{,}00698 \cdot Z_{max}$; при этом аппроксимирующий полином имеет следующий вид:

$$\psi(x) = g_1\left(1-\cos\frac{\pi x}{2\ell}\right) + g_3\left(1-\cos\frac{3\pi x}{2\ell}\right) + g_5\left(1-\cos\frac{5\pi x}{2\ell}\right).$$

На рис. 2.5 представлены кривые заданного и построенного с помощью базисных функций межвалкового зазора при $Z_{max} = 1{,}0$, а также погрешности δ несовпадения этих кривых.



1 – заданный межвалковый зазор *z(x)*;
2 – аппроксимированный межвалковый зазор $\psi(x)$; 3 – погрешность.
Рис. 2.5 - Аппроксимация подходящими функциями

Как можно видеть, кривые *z(x)* и $\psi(x)$ практически совпадают, а погрешность аппроксимации не превышает 6% при малых величинах *z(x)* – такую погрешность можно считать допустимой.

<u>Потенциальная энергия упруго деформированного рабочего валка</u>

Потенциальная энергия о деформированного рабочего валка выражается следующим образом:

$$Э = \int_0^\ell \frac{M^2}{2E_1 I_1} dx + \int_0^\ell k_\phi \frac{Q_p^2}{2G_1 S_1} dx - \int_0^\ell q w_1 dx + \int_0^b p w_1 dx + F w_1(\ell) + F e_1 w_1'(\ell), \qquad (2.1.7)$$

где M – изгибающий момент, Q_p – перерезывающая сила, G – модуль упругости II рода, S_1 – площадь поперечного сечения валка, k_ϕ – коэффициент формы, равный $\frac{10}{9}$.

Прогиб рабочего валка от действия изгибающего момента

Учитывая, что $M = EI_1 w''$, получаем:

$$Э = \frac{E_1 I_1}{2}\int_0^{\ell}\left(w_1''\right)^2 dx - \int_0^{\ell} q w_1 dx + \int_0^{b} p w_1 dx + F w_1(\ell) + F e_1 w_1'(\ell). \qquad (2.1.8)$$

Подставляя в (2.1.8) значения w_1, q, p по формулам (2.1.1)-(2.1.5) и используя условия минимума потенциальной энергии $\frac{\partial Э}{\partial a_1} = 0$, $\frac{\partial Э}{\partial a_3} = 0$, $\frac{\partial Э}{\partial a_5} = 0$ или

$$\frac{\partial Э}{\partial a_k} = 0, \qquad \text{где} \quad k = 1,3,5 \qquad (2.1.9)$$

определяем параметры a_k:

$$\frac{\partial Э}{\partial a_k} = E_1 I_1 \int_0^{\ell} w_1'' \frac{\partial w''}{\partial a_k} dx - \int_0^{\ell} q \frac{\partial w_1}{\partial a_k} dx + \int_0^{b} p \frac{\partial w_1}{\partial a_k} dx + F \frac{\partial w_1(\ell)}{\partial a_k} + F e_1 \frac{\partial w_1'(\ell)}{\partial a_k}, \qquad (2.1.10)$$

причем

$$w_1' = \sum_i a_i \varphi_i'; \; w_1'' = \sum_i a_i \varphi_i''; \; \frac{\partial w_1}{\partial a_k} = \varphi_k; \; \frac{\partial w_1'}{\partial a_k} = \varphi_k'; \; \frac{\partial w_1''}{\partial a_k} = \varphi_k'' \quad (i = 1,3,5). \qquad (2.1.11)$$

Подставляя (2.1.11) в (2.1.10) и перенося члены, не содержащие a_k, в правую часть, получаем:

$$E_1 I_1 \left[a_1 \int_0^{\ell} \varphi_1'' \varphi_k'' dx + a_3 \int_0^{\ell} \varphi_3'' \varphi_k'' dx + a_5 \int_0^{\ell} \varphi_5'' \varphi_k'' dx \right] =$$

$$= \int_0^{\ell} q \varphi_k dx - \int_0^{b} p \varphi_k dx - F \varphi_k(\ell) - F e_1 \varphi_k'(\ell). \qquad (i = 1,3,5) \qquad (2.1.12)$$

Полученную систему уравнений можно записать в виде

$$\begin{cases} \delta_{11} a_1 + \delta_{13} a_3 + \delta_{15} a_5 = \Delta_{1g} \\ \delta_{31} a_1 + \delta_{33} a_3 + \delta_{35} a_5 = \Delta_{3g} \\ \delta_{51} a_1 + \delta_{53} a_3 + \delta_{55} a_5 = \Delta_{5g} \end{cases}, \qquad (2.1.13)$$

где

$$\delta_{ik} = E_1 I_1 \int_0^{\ell} \varphi_i'' \varphi_k'' dx, \quad \Delta_{ig} = \int_0^{\ell} q \varphi_i dx - \int_0^{b} p \varphi_i dx - F \varphi_i(\ell) - F e_1 \varphi_i'(\ell). \qquad (2.1.14)$$

Коэффициенты δ_{ik} называются единичными коэффициентами, а Δ_{ig} – грузовыми членами. Первые зависят только от выбора подходящих функций, а вторые – от подходящих функций и от действующей нагрузки. Первые индексы этих коэффициентов указывают на номер уравнения в системе (2.1.13) (в нашем случае это номера 1,3,5), второй индекс δ_{ik} указывает на номер искомого параметра a_k, к которому относится коэффициент.

Механический смысл коэффициентов δ_{ik} состоит в том, что δ_{ik} выражает возможную работу внутренних сил (изгибающих моментов), соответствующих единичной подходящей функции φ_i (при $a_i = 1$), на перемещениях, отвечающих единичной функции φ_k.

Значения коэффициентов δ_{ik} вычисляются следующим образом:

$$\delta_{ik} = E_1 I_1 \int_0^{\ell} \varphi_i'' \varphi_k'' dx = \begin{cases} 0, & при \quad i \neq k, \quad i \quad и \quad k - нечетные; \\ E_1 I_1 \dfrac{k^4 \pi^4}{32\ell^3}, & при \quad i = k \quad (k = 1{,}3{,}5) \end{cases}$$

В матричной форме систему уравнений (2.1.13) можно записать следующим образом:

$$\delta \cdot \overline{a} = \overline{\Delta}_g, \qquad (2.1.15)$$

где δ – матрица единичных коэффициентов; $\overline{\Delta}_g$ – вектор грузовых членов.

Решение уравнения (2.1.15) находится так:

$$\overline{a} = \delta^{-1} \cdot \overline{\Delta}_g, \qquad (2.1.16)$$

где δ^{-1} – обратная матрица единичных коэффициентов.

В нашем случае:

$$\delta = \frac{\pi^4 E_1 I_1}{32\ell^3} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 \\ 0 & 0 & 5^4 \end{Vmatrix}; \quad \delta^{-1} = \frac{32\ell^3}{\pi^4 E_1 I_1} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3^4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{5^4} \end{Vmatrix}. \qquad (2.1.17)$$

Подставляя значения $\overline{a}$ из (2.1.16) в (2.1.6а), получаем:

$$w_1 = \Phi^T \cdot \overline{a} = \Phi^T \cdot \delta^{-1} \cdot \overline{\Delta}_g. \qquad (2.1.18)$$

Прогибы рабочего валка в точках 1, 2, 3, …, m с абсциссами $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ определяются следующими уравнениями:

$$\begin{cases} w_1 = a_1\varphi_1(x_1) + a_3\varphi_3(x_1) + a_5\varphi_5(x_1) \\ w_2 = a_1\varphi_1(x_2) + a_3\varphi_3(x_2) + a_5\varphi_5(x_2) \\ w_3 = a_1\varphi_1(x_3) + a_3\varphi_3(x_3) + a_5\varphi_5(x_3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_m = a_1\varphi_1(x_m) + a_3\varphi_3(x_m) + a_5\varphi_5(x_m) \end{cases} \qquad (2.1.19)$$

В матричной форме прогибы рабочего валка в конкретных точках 1, 2, 3, …, m на основании (2.1.16) и (2.1.19) записываются в виде:

$$\overline{w}_1 = \varphi \cdot \overline{a} = \varphi \cdot \delta^{-1} \overline{\Delta}_g, \qquad (2.1.20)$$

где φ – матрица значений подходящих функций в точках $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$;

$$\overline{w}_1 = \begin{Vmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ w(x_3) \\ \ldots\ldots \\ w(x_m) \end{Vmatrix}; \quad \varphi = \begin{Vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_3(x_1) & \varphi_5(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_3(x_2) & \varphi_5(x_2) \\ \varphi_1(x_3) & \varphi_3(x_3) & \varphi_5(x_3) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_1(x_m) & \varphi_3(x_m) & \varphi_5(x_m) \end{Vmatrix}. \qquad (2.1.21)$$

Прогиб от действия перерезывающей силы

Прогиб от действия перерезывающей силы определяется в соответствии со следующим уравнением:

$$\frac{dw_{1Q}}{dx} = -\frac{k_\phi}{G_1F_1} Q_p = -\frac{k_\phi}{G_1F_1} \cdot \frac{dM}{dx} = -\frac{k_\phi}{G_1F_1} \cdot \frac{d}{dx}\left(E_1 I_1 w_1''\right). \qquad (2.1.22)$$

Интегрируя (2.1.22), получаем

$$w_{1Q} = -\frac{k_\phi E_1 I_1}{G_1F_1} \cdot \left\| \varphi_1'' + C_1 \quad \varphi_3'' + C_3 \quad \varphi_5'' + C_5 \right\| \cdot \delta^{-1} \overline{\Delta}_g , \qquad (2.1.23)$$

где C_k, $(k = 1,3,5)$ – произвольные постоянные, значения которых определяются условием равенства нулю прогиба рабочего валка в середине $w_\Sigma(0) = 0$. Суммарный прогиб $w_\Sigma(x)$ определяется суммой прогибов $w_1(x)$ и $w_{1Q}(x)$. Так как $w_1(0) = 0$, то и $w_{1Q}(0)$ так же должен быть равен нулю. Замечаем, что $\varphi_k'' = \left(\frac{k\pi}{2\ell}\right)^2 (1 - \varphi_k)$, тогда значения произвольных постоянных $C_k = -\left(\frac{k\pi}{2\ell}\right)^2$, где $k = 1,3,5$. Подставляя значения C_k в (2.1.23), получаем выражение для прогиба от перерезывающей силы в матричной форме:

$$w_{1Q} = \beta_1 \Phi^T \delta_Q^{-1} \overline{\Delta}_g , \qquad (2.1.24)$$

где $\delta_Q^{-1} = \frac{32\ell^3}{\pi^4 E_1 I_1} \cdot \frac{\pi^2}{4} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5^2} \end{matrix} \right\|$, $\qquad \beta_1 = \frac{k_\phi E_1 I_1}{\ell^2 G_1 F_1}$.

С учетом (2.1.18) и (2.1.24) прогиб от совместного действия изгибающего момента и перерезывающей силы выражается следующим образом:

$$w_1 = \Phi^T \cdot \delta^{-1} \cdot \overline{\Delta}_g + \beta_1 \Phi^T \delta_Q^{-1} \overline{\Delta}_g . \qquad (2.1.25)$$

Грузовые члены

В рассматриваемом случае в соответствии с (2.1.14) грузовые члены вычисляются по формуле:

$$\Delta_{ig} = \int_0^\ell q\varphi_i dx - \int_0^b p\varphi_i dx - F\varphi_i(\ell) - Fe_1\varphi_i'(\ell). \qquad (2.1.26)$$

Вычислим значения грузовых членов от действия межвалкового давления:

$$\Delta_{iq} = \int_0^\ell q\varphi_i dx . \qquad (2.1.27)$$

Подставляя в (2.1.27) значение q из (2.1.2), и учитывая, что

$$\int_0^{\ell}\varphi_i dx=\frac{\ell}{\pi}\left[\pi+\frac{2}{i}(-1)^{\frac{i+1}{2}}\right],\quad \int_0^{\ell}\varphi_i\varphi_i dx=\frac{\ell}{\pi}\left[\frac{3}{2}\pi+\frac{4}{i}(-1)^{\frac{i+1}{2}}\right],$$

$$\int_0^{\ell}\varphi_i\varphi_k dx=\frac{\ell}{\pi}\left[\pi+\frac{2}{i}(-1)^{\frac{i+1}{2}}+\frac{2}{k}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\right],$$

получаем

$$\Delta_{1q}=\int_0^{\ell}q\varphi_1 dx=\frac{q_0\ell}{\pi}(\pi-2)+\frac{\ell}{\pi}\left(\frac{3}{2}\pi-4\right)c_1+\frac{\ell}{\pi}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)c_3+\frac{\ell}{\pi}\left(\pi-\frac{12}{5}\right)c_5;$$

$$\Delta_{3q}=\int_0^{\ell}q\varphi_3 dx=\frac{q_0\ell}{\pi}\left(\pi+\frac{2}{3}\right)+\frac{\ell}{\pi}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)c_1+\frac{\ell}{\pi}\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{4}{3}\right)c_3+\frac{\ell}{\pi}\left(\pi+\frac{4}{15}\right)c_5;$$

$$\Delta_{5q}=\int_0^{\ell}q\varphi_5 dx=\frac{q_0\ell}{\pi}\left(\pi-\frac{2}{5}\right)+\frac{\ell}{\pi}\left(\pi-\frac{12}{5}\right)c_1+\frac{\ell}{\pi}\left(\pi+\frac{4}{15}\right)c_3+\frac{\ell}{\pi}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{4}{5}\right)c_5.$$

В матричной форме вектор грузовых членов от межвалкового давления представляется в следующем виде:

$$\overline{\Delta}_q=\frac{q_0\ell}{\pi}\begin{Vmatrix}\pi-2\\ \pi+\frac{2}{3}\\ \pi-\frac{2}{5}\end{Vmatrix}+\frac{\ell}{\pi}\begin{Vmatrix}\frac{3}{2}\pi-4 & \pi-\frac{4}{3} & \pi-\frac{12}{5}\\ \pi-\frac{4}{3} & \frac{3}{2}\pi+\frac{4}{3} & \pi+\frac{4}{15}\\ \pi-\frac{12}{5} & \pi+\frac{4}{15} & \frac{3}{2}\pi-\frac{4}{5}\end{Vmatrix}\cdot\overline{c}=$$

$$=\frac{q_0\ell}{\pi}\begin{Vmatrix}1.14159\\ 3.80826\\ 2.74159\end{Vmatrix}+\frac{\ell}{\pi}\begin{Vmatrix}0.71239 & 1.80826 & 0.74159\\ 1.80826 & 6.04572 & 3.40826\\ 0.74159 & 3.40826 & 3.91239\end{Vmatrix}\cdot\overline{c}. \tag{2.1.28}$$

Член q_0 можно определить из выражений (2.1.2) и (2.1.3а)

$$q_0=\frac{Q}{\ell}-\Phi_0^T\overline{c}, \tag{2.1.29}$$

где $\Phi_0^T=\int_0^{\ell}\Phi^T dx=\frac{1}{\pi}\begin{Vmatrix}\pi-2 & \pi+\frac{2}{3} & \pi-\frac{2}{5}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0.36338 & 1.21221 & 0.87268\end{Vmatrix}.$

Подставляя значение q_0 из (2.1.29) в (2.1.28), получаем:

$$\overline{\Delta}_q=\frac{Q}{\pi}\begin{Vmatrix}1.14159\\ 3.80826\\ 2.74159\end{Vmatrix}-\frac{\ell}{\pi}\begin{Vmatrix}1.14159\\ 3.80826\\ 2.74159\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0.36338 & 1.21221 & 0.87268\end{Vmatrix}\cdot\overline{c}+$$

$$+\frac{\ell}{\pi}\begin{Vmatrix}0.71239 & 1.80826 & 0.74159\\ 1.80826 & 6.04572 & 3.40826\\ 0.74159 & 3.40826 & 3.91239\end{Vmatrix}\cdot\overline{c}=\frac{Q}{\pi}\begin{Vmatrix}1.14159\\ 3.80826\\ 2.74159\end{Vmatrix}-$$

$$-\frac{\ell}{\pi}\begin{Vmatrix}0.41483 & 1.38385 & 0.99624\\ 1.38385 & 4.61641 & 3.32339\\ 0.99624 & 3.32339 & 2.39253\end{Vmatrix}\cdot\bar{c}+\frac{\ell}{\pi}\begin{Vmatrix}0.71239 & 1.80826 & 0.74159\\ 1.80826 & 6.04572 & 3.40826\\ 0.74159 & 3.40826 & 3.91239\end{Vmatrix}\cdot\bar{c}=$$

$$=\frac{Q}{\pi}\begin{Vmatrix}1.14159\\ 3.80826\\ 2.74159\end{Vmatrix}+\frac{\ell}{\pi}\begin{Vmatrix}0.29756 & 0.42441 & -0.25465\\ 0.42441 & 1.42931 & 0.08487\\ -0.25465 & 0.08487 & 1.51986\end{Vmatrix}\cdot\bar{c}\,. \qquad (2.1.30)$$

Подставляя значения грузовых членов из (2.1.30) в (2.1.25), получаем прогиб рабочего валка от межвалкового давления:

$$w_{1q}=\Phi^T\cdot\left(\delta^{-1}+\beta_1\delta_Q^{-1}\right)\overline{\Delta}_q=\frac{32\ell^4}{\pi^5E_1I_1}\Phi^T\left[\frac{Q}{\ell}\left(H_1+\beta_1H_3\right)+\left(A_1+\beta_1A_3\right)\cdot\bar{c}\right], \qquad (2.1.31)$$

где
$$H_1=\begin{Vmatrix}1.14159\\ 0.04702\\ 0.00439\end{Vmatrix},\quad H_3=\begin{Vmatrix}2.81676\\ 1.04406\\ 0.27058\end{Vmatrix},$$

$$A_1=\begin{Vmatrix}0.29756 & 0.42441 & -0.25465\\ 0.00524 & 0.01765 & 0.001048\\ -0.000407 & 0.000136 & 0.002432\end{Vmatrix},$$

$$A_3=\begin{Vmatrix}0.7342 & 1.04719 & -0.62832\\ 0.11635 & 0.39185 & 0.02327\\ -0.025133 & 0.008376 & 0.15\end{Vmatrix}. \qquad (2.1.32)$$

Аналогично определяется прогиб опорного валка от межвалкового давления:

$$w_{2q}=\Phi^T\cdot\left(\delta^{-1}+\beta_2\delta_Q^{-1}\right)\overline{\Delta}_q=\frac{32\ell^4}{\pi^5E_2I_2}\left[\frac{Q}{\ell}\left(H_1+\beta_2H_3\right)+\left(A_1+\beta_2A_3\right)\cdot\bar{c}\right], \qquad (2.1.33)$$

где
$$\beta_2=\frac{k_{\phi}E_2I_2}{\ell^2G_2F_2}.$$

<u>Грузовые члены и прогибы рабочего валка от давления прокатки</u>

Принимаем, что распределение погонного давления прокатки по ширине равномерное:

$$p=\frac{P}{b}, \qquad (2.1.34)$$

где $2P$ - полное усилие прокатки.

Определим грузовые члены от давления полосы:

$$\Delta_{ip} = \int_0^b p\varphi_i dx = p\int_0^b \varphi_i dx = bp\cdot(1-\lambda_i) = P(1-\lambda_i), \qquad (2.1.35)$$

где $\lambda_i = \dfrac{\sin\dfrac{i\pi b}{2\ell}}{\dfrac{i\pi b}{2\ell}}$.

Подставляя значения грузовых членов из (2.1.35) в (2.1.25), получаем прогиб рабочего валка от давления прокатки:

$$w_{1p} = \Phi^T\cdot\left(\delta^{-1}+\beta_1\delta_Q^{-1}\right)\overline{\Delta}_p = \frac{32\ell^4}{\pi^5 E_1 I_1}\Phi^T\left(\frac{P}{\ell}H_4\right), \qquad (2.1.36)$$

где $H_4 = \delta^*\begin{Vmatrix}1-\lambda_1\\1-\lambda_3\\1-\lambda_5\end{Vmatrix}$, $\delta^* = \begin{Vmatrix}3.14159 & 0 & 0\\0 & 0.038785 & 0\\0 & 0 & 0.005027\end{Vmatrix} + \beta_1\begin{Vmatrix}7.75157 & 0 & 0\\0 & 0.86129 & 0\\0 & 0 & 0.31006\end{Vmatrix}$. (2.1.37)

<u>Грузовые члены и прогибы рабочих валков от силы изгиба и опорных валков от реакции нажимных устройств</u>

Как указывалось выше (рис. 2.2), осуществлен эквивалентный перенос силы изгиба F, действующей на шейку рабочего валка: точка приложения перенесена на край бочки, к этой же точке приложен изгибающий момент $M_F = F\cdot e_1$, компенсирующий перенос. В соответствии с (2.1.26) получаем:

$$\overline{\Delta}_F = F\begin{Vmatrix}\varphi_1(\ell)\\\varphi_3(\ell)\\\varphi_5(\ell)\end{Vmatrix} = F\begin{Vmatrix}1\\1\\1\end{Vmatrix}, \qquad \overline{\Delta}_{Fe_1} = Fe_1\frac{\pi}{2\ell}\begin{Vmatrix}1\\-3\\5\end{Vmatrix}. \qquad (2.1.38)$$

Подставляя значения грузовых членов из (2.1.38) в (2.1.25) и учитывая влияние перерезывающей силы от силы изгиба, получаем прогиб рабочего валка от силы изгиба:

$$w_{1F} = \Phi^T\cdot\left(\delta^{-1}+\beta_1\delta_Q^{-1}\right)\overline{\Delta}_F + \Phi^T\delta^{-1}\overline{\Delta}_{Fe_1}, \qquad (2.1.39)$$

$$w_{1F} = \frac{32\ell^4}{\pi^5 E_1 I_1}\frac{F}{\ell}\Phi^T\left[\delta^*\begin{Vmatrix}1\\1\\1\end{Vmatrix} + \frac{\pi\cdot e_1}{2\ell}\begin{Vmatrix}3.14159 & 0 & 0\\0 & 0.038785 & 0\\0 & 0 & 0.005027\end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix}1\\-3\\5\end{Vmatrix}\right] =$$

$$= \frac{32\ell^4}{\pi^5 E_1 I_1}\frac{F}{\ell}\Phi^T H_5, \qquad (2.1.40)$$

$$
\text{где}\quad H_5 = \begin{Vmatrix} 3.14159 \\ 0.038785 \\ 0.005027 \end{Vmatrix} + \beta_1 \begin{Vmatrix} 7.75157 \\ 0.86129 \\ 0.31006 \end{Vmatrix} + \frac{\pi \cdot e_1}{2\ell} \begin{Vmatrix} 3.14159 \\ -0.116355 \\ 0.025135 \end{Vmatrix}.
$$

Аналогично определяется прогиб опорного валка от силы реакции нажимных устройств Q:

$$
w_{2Q} = \frac{32\ell^4}{\pi^5 E_2 I_2} \frac{Q}{\ell} \Phi^T H_6 , \tag{2.1.41}
$$

$$
\text{где}\quad H_6 = \begin{Vmatrix} 3.14159 \\ 0.038785 \\ 0.005027 \end{Vmatrix} + \beta_2 \begin{Vmatrix} 7.75157 \\ 0.86129 \\ 0.31006 \end{Vmatrix} + \frac{\pi \cdot e_2}{2\ell} \begin{Vmatrix} 3.14159 \\ -0.116355 \\ 0.025135 \end{Vmatrix}, \quad \beta_2 = \frac{k_\phi E_2 I_2}{\ell^2 G_2 F_2}.
$$

<u>Определение прогибов осей рабочего и опорного валков</u>

С учетом направления сил и того факта, что $P = Q - F$, прогиб рабочего валка определяется выражениями (2.1.31),(2.1.36) и (2.1.40):

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{32\ell^4}{\pi^5 E_1 I_1} \Phi^T \left[\frac{Q}{\ell}\left(H_1 + \beta_1 H_3\right) + \left(A_1 + \beta_1 A_3\right) \cdot \bar{c} - \frac{Q - F}{\ell} H_4 - \frac{F}{\ell} H_5 \right] = \\
&= \frac{32\ell^4}{\pi^5 E_1 I_1} \Phi^T \left[\frac{Q}{\ell}\left(H_1 + \beta_1 H_3 - H_4\right) + \left(A_1 + \beta_1 A_3\right) \cdot \bar{c} + \frac{F}{\ell}\left(H_4 - H_5\right) \right].
\end{aligned} \tag{2.1.42}
$$

Прогиб опорного валка выражается следующим образом:

$$
w_2 = \frac{32\ell^4}{\pi^5 E_2 I_2} \Phi^T \left[-\frac{Q}{\ell}\left(H_1 + \beta_2 H_3 - H_6\right) - \left(A_1 + \beta_2 A_3\right) \cdot \bar{c} \right]. \tag{2.1.43}
$$

Сближение осей рабочего и опорного валков за счет их упругой деформации определяется следующим образом:

$$
u(x) = u_0 + \left[w_1(x) - w_2(x)\right] - z(x), \tag{2.1.44}
$$

где u_0 – сближение в середине бочек валков, $z(x)$ – зазор между рабочим и опорным валками, соприкасающимися в середине бочки.

Учитывая формулы (2.1.6а) и (2.1.42)-(2.1.43), получаем в матричной форме:

$$
\bar{u} = u_0 - \frac{32\ell^4}{\pi^5 E_1 I_1} \Phi^T \left[\frac{Q}{\ell} H + A\bar{c} + \frac{F}{\ell}\left(H_4 - H_5\right) + \frac{\pi^5 E_1 I_1}{32\ell^4} \bar{g} \right], \tag{2.1.45}
$$

где $H = m_1 H_1 + m_3 H_3 - H_4 - n_1 H_6$; $A = m_1 A_1 + m_3 A_3$; $n_1 = \dfrac{E_1 I_1}{E_2 I_2}$; $n_2 = \dfrac{G_1 S_1}{G_2 S_2}$; $m_1 = 1 + n_1$; $m_3 = \beta_1 (1 + n_2)$, $\bar{u}$ – матрица-столбец (вектор), состоящая из величин сближения осей u_i в конкретных точках 1, 2, 3, …, m точках.

Полагаем справедливой гипотезу Винклера о пропорциональности сближения осей валков и межвалкового давления:

$$q(x) = K \cdot u(x), \tag{2.1.46}$$

где K – коэффициент пропорциональности, который вычисляется по формуле, полученной Л.И. Боровиком [7]:

$$K = \frac{1}{\dfrac{1-\nu^2}{\pi} \cdot \left(\dfrac{1}{E_1} + \dfrac{1}{E_2} \right) \cdot \ln \left[\dfrac{0{,}97 (D_1 + D_2)}{\dfrac{1-\nu^2}{\pi} \cdot \left(\dfrac{1}{E_1} + \dfrac{1}{E_2} \right) \cdot q_{cp}} \right]}, \tag{2.1.47}$$

где D_1, D_2, E_1, E_2 – диаметр и модуль упругости соответственно рабочего и опорного валка; ν – коэффициент Пуассона для материала валков; $q_{cp} = \dfrac{P+F}{\ell}$ – среднее погонное межвалковое давление.

В матричной форме выражение (2.1.46) запишется следующим образом:

$$\bar{q} = K \cdot \bar{u}, \tag{2.1.48}$$

где $\bar{q}$ – матрица-столбец (вектор), состоящая из величин межвалкового давления q_i в конкретных точках 1, 2, 3, …, m точках.

Теперь подставим (2.1.2) и (2.1.45) в (2.1.48):

$$q_0 + \Phi^T \bar{c} = K u_0 - \frac{32 \ell^4 K}{\pi^5 E_1 I_1} \Phi^T \left[\frac{Q}{\ell} H + A \bar{c} + \frac{F}{\ell} (H_4 - H_5) + \frac{\pi^5 E_1 I_1}{32 \ell^4} \bar{g} \right].$$

Учитывая, что $q_0 = K u_0$, получаем:

$$\left(\frac{32 \ell^4 K}{\pi^5 E_1 I_1} A + E \right) \bar{c} = -\frac{32 \ell^4 K}{\pi^5 E_1 I_1} \left[\frac{Q}{\ell} H + \frac{F}{\ell} (H_4 - H_5) + \frac{\pi^5 E_1 I_1}{32 \ell^4} \bar{g} \right],$$

где $E = \begin{Vmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{Vmatrix}$ - единичная матрица.

Для определения коэффициентов $\bar{c}$ окончательно получаем:

$$\bar{c} = -\gamma^{-1}\left[\frac{Q}{\ell}H + \frac{F}{\ell}(H_4 - H_5) + \frac{\pi^5 E_1 I_1}{32\ell^4}\bar{g}\right], \qquad (2.1.49)$$

где $\gamma = A + \dfrac{\pi^5 E_1 I_1}{32\ell^4 K}E$.

Итак, прямым вариационным методом Ритца в матричной форме определен вектор аппроксимирующих коэффициентов $\bar{c}$, а, следовательно, и распределение межвалкового давления $q(x)$. Далее, по формулам (2.1.42)-(2.1.43) вычисляем векторы прогибов рабочего $w_1(x)$ и опорного валков $w_2(x)$ – задача решена.

Достоинствами описанного метода являются простая формализация и безытерационность процесса вычислений. Однако безытерационность относится только к случаю, когда точно известна длина межвалкового контакта, а это возможно только, когда длина контакта совпадает с длиной бочки рабочего валка ℓ. Если же профилировки валков и/или усилие прокатки не обеспечивают равенство длины межвалкового контакта и длины бочки рабочего валка, длину контакта приходится искать итерационно. При этом в расчетах необходимо учитывать изменение длин e_1 и e_2. Признаком того, что длина межвалкового контакта меньше длины бочки рабочего валка, являются отрицательные величины межвалкового давления.

К недостаткам описанного метода также можно отнести его применимость только к симметричным функциям профилировок прокатных валков и схемам их нагружения.

Пример расчета межвалкового давления и прогиба оси рабочего валка четырехвалковой системы

В качестве примера выполним расчет межвалкового давления и прогибов рабочих валков при следующих условиях:

- длина бочки рабочего и опорного валков 2ℓ = 2000 мм;
- диаметр рабочего валка D_1 = 800 мм;
- диаметр опорного валка D_2 = 1600 мм;
- расстояние от точки приложения усилия нажимного устройства до края бочки опорного валка e_2 = 450 мм;
- модуль упругости материала рабочего валка (чугун) $E_1 = 1{,}8 \cdot 10^5$ $МПа$;
- модуль упругости материала опорного валка (сталь) $E_2 = 2{,}2 \cdot 10^5$ $МПа$;
- коэффициент Пуассона для материала валков $\nu = 0{,}3$;
- усилие прокатки и межвалковое $2P = 2Q$=10 МН (1000 тонн);
- ширина полосы $2b$ =1200 мм;

- усилия противоизгиба рабочих валков отсутствуют.
- выпуклость опорных валков нулевая $Z_{2\_\max} = 0$;

Для профилировок рабочих валков рассмотрим два случая:

<u>случай 1</u>: выпуклость рабочих валков $Z_{1\_max} = 0$;

<u>случай 2</u>: выпуклость рабочих валков на радиусе $Z_{1\_\max} = 0{,}1$ мм.

<u>Межвалковое давление</u>

1. Вычисление модулей упругости II рода G_1, G_2 материала рабочего и опорного валков, моментов инерции I_1, I_2 и площадей сечения S_1, S_2 рабочего и опорного валков:

$$I = \frac{\pi \cdot D^4}{64}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad S = \frac{\pi \cdot D^2}{4};$$

$$I_1 = 0{,}0201 \ м^4; \ I_2 = 0{,}3217 \ м^4; \ S_1 = 0{,}5027 \ м^2; \ S_2 = 2{,}0106 \ м^2;$$

$$G_1 = 0{,}6923 \cdot 10^5 \ МПа; \ G_2 = 0{,}8462 \cdot 10^5 \ МПа.$$

2. Вычисление констант:

$$n_1 = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} = \frac{1{,}8 \cdot 10^5}{2{,}2 \cdot 10^5} \cdot \frac{0{,}0201}{0{,}3217} = 0{,}05112;$$

$$n_2 = \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} = \frac{0{,}6923 \cdot 10^5}{0{,}8462 \cdot 10^5} \cdot \frac{0{,}5027}{2{,}0106} = 0{,}2046;$$

$$m_1 = 1 + n_1 = 1{,}05112;$$

$$\beta_1 = \frac{k_\phi E_1 I_1}{\ell^2 G_1 F_1} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0201}{1{,}0^2 \cdot 0{,}6923 \cdot 10^5 \cdot 0{,}5027} = 0{,}1155;$$

$$m_3 = \beta_1 (1 + n_2) = 0{,}1155 \cdot 1{,}2046 = 0{,}1391;$$

$$\beta_2 = \frac{k_\phi E_2 I_2}{\ell^2 G_2 F_2} = \frac{10}{9} \cdot \frac{2{,}2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}3217}{1{,}0^2 \cdot 0{,}8462 \cdot 10^5 \cdot 2{,}0106} = 0{,}4622;$$

$$\lambda_1 = \frac{\sin \frac{\pi b}{2\ell}}{\frac{\pi b}{2\ell}} = \frac{\sin \frac{\pi \cdot 0{,}6}{2{,}0}}{\frac{\pi \cdot 0{,}6}{2{,}0}} = \frac{0{,}809}{0{,}9425} = 0{,}8584;$$

$$\lambda_3 = \frac{\sin \frac{3\pi b}{2\ell}}{\frac{3\pi b}{2\ell}} = \frac{0{,}309}{2{,}8274} = 0{,}1093;$$

$$\lambda_5 = \frac{\sin \frac{5\pi b}{2\ell}}{\frac{5\pi b}{2\ell}} = \frac{-1{,}0}{4{,}7124} = -0{,}2122;$$

$$q_{ср} = \frac{P + F}{\ell} = \frac{5{,}0}{1{,}0} = 5{,}0 \ \frac{МН}{м};$$

$$K=\frac{1}{\frac{1-\nu^2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)\cdot\ln\left[\frac{0{,}97(D_1+D_2)}{\frac{1-\nu^2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)\cdot q_{cp}}\right]}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1-0{,}3^2}{3{,}14159}\cdot\left(\frac{1}{1{,}8\cdot10^5}+\frac{1}{2{,}2\cdot10^5}\right)\cdot\ln\left[\frac{0{,}97\cdot2{,}4}{\frac{1-0{,}3^2}{3{,}14159}\cdot\left(\frac{1}{1{,}8\cdot10^5}+\frac{1}{2{,}2\cdot10^5}\right)\cdot5{,}0}\right]}=$$

$$=0{,}2853\cdot10^5\ \ \text{МПа}.$$

3. Выражение (2.1.49), определяющее величины коэффициентов разложения межвалкового давления (2.1.7), для нашего случая запишется следующим образом:

$$\bar{c}=-\gamma^{-1}\left(\frac{Q}{\ell}H+\frac{\pi^5E_1I_1}{32\ell^4}\bar{g}\right). \qquad (2.1.49а)$$

4. Вычисление вектора аппроксимирующих коэффициентов функции зазора $\bar{g}=\begin{Vmatrix}g_1\\g_3\\g_5\end{Vmatrix}$.

Для <u>случая 1</u> $g_1=0$, $g_3=0$, $g_5=0$.

Для <u>случая 2</u> функция межвалкового зазора:

$$z=z_1+z_2=z_1+0=z_1=Z_{1\_\max}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2=0{,}1\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\ [\text{мм}].$$

В точках $x_0=0$, $x_1=\frac{\ell}{4}=0{,}25$, $x_2=\frac{\ell}{2}=0{,}5$, $x_3=\frac{3\ell}{4}=0{,}75$, $x_4=\ell=1{,}0$ значения межвалкового зазора принимают следующие значения:

$z(0)=0$, $z(x_1)=0{,}00625$, $z(x_2)=0{,}025$, $z(x_3)=0{,}05625$, $z(x_4)=0{,}1$.

Действуя по аналогии с рассмотренным примером, получаем коэффициенты разложения функции межвалкового зазора по базисным функциям:

$$\bar{g}=\begin{Vmatrix}-0{,}23248 & -0{,}52918 & -0{,}09630 & 1{,}23214\\ -0{,}06114 & 0{,}25390 & 0{,}51587 & -0{,}38817\\ 0{,}35448 & 0{,}22869 & -0{,}39437 & 0{,}14949\end{Vmatrix}\cdot(0{,}1)\cdot\begin{Vmatrix}0{,}0625\\0{,}25\\0{,}5625\\1{,}0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}+0{,}103115\\-0{,}003834\\+0{,}0006984\end{Vmatrix}.$$

5. Вычисление матриц:

Так как $F=0$ (усилия противоизгиба рабочих валков отсутствует), то $Q=P$.

В выражении (2.1.49а), как и в (2.1.49), $\gamma = A + \dfrac{\pi^5 E_1 I_1}{32\ell^4 K} E$, где $A = m_1 A_1 + m_3 A_3$.

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 0{,}29756 & 0{,}42441 & -0{,}25465 \\ 0{,}00524 & 0{,}01765 & 0{,}001048 \\ -0{,}000407 & 0{,}000136 & 0{,}002432 \end{Vmatrix};$$

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 0{,}7342 & 1{,}04719 & -0{,}62832 \\ 0{,}11635 & 0{,}39185 & 0{,}02327 \\ -0{,}025133 & 0{,}008376 & 0{,}15 \end{Vmatrix};$$

$$E = \begin{Vmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{Vmatrix}$$ - единичная матрица;

$$H = m_1 H_1 + m_3 H_3 - H_4 - n_1 H_6;$$

$$H_1 = \begin{Vmatrix} 1{,}14159 \\ 0{,}04702 \\ 0{,}00439 \end{Vmatrix}; \quad H_3 = \begin{Vmatrix} 2{,}81676 \\ 1{,}04406 \\ 0{,}27058 \end{Vmatrix}; \quad H_4 = \delta^* \begin{Vmatrix} 1-\lambda_1 \\ 1-\lambda_3 \\ 1-\lambda_5 \end{Vmatrix},$$

$$\delta^* = \begin{Vmatrix} 3{,}14159 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}038785 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}005027 \end{Vmatrix} + \beta_1 \begin{Vmatrix} 7{,}75157 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}86129 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}31006 \end{Vmatrix};$$

$$H_6 = \begin{Vmatrix} 3{,}14159 \\ 0{,}038785 \\ 0{,}005027 \end{Vmatrix} + \beta_2 \begin{Vmatrix} 7{,}75157 \\ 0{,}86129 \\ 0{,}31006 \end{Vmatrix} + \frac{\pi \cdot e_2}{2\ell} \begin{Vmatrix} 3{,}14159 \\ -0{,}116355 \\ 0{,}025135 \end{Vmatrix}.$$

$$H_6 = \begin{Vmatrix} 3{,}14159 \\ 0{,}038785 \\ 0{,}005027 \end{Vmatrix} + 0.4622 \begin{Vmatrix} 7{,}75157 \\ 0{,}86129 \\ 0{,}31006 \end{Vmatrix} + \frac{3{,}14159 \cdot 0{,}45}{2{,}0} \begin{Vmatrix} 3{,}14159 \\ -0{,}116355 \\ 0{,}025135 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 3{,}14159 \\ 0{,}038785 \\ 0{,}005027 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 3{,}5828 \\ 0{,}3981 \\ 0{,}1433 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2{,}2208 \\ -0{,}0823 \\ 0{,}0178 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8{,}9452 \\ 0{,}3546 \\ 0{,}1661 \end{Vmatrix};$$

$$\delta^* = \begin{Vmatrix} 3{,}14159 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}038785 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}005027 \end{Vmatrix} + 0.1155 \begin{Vmatrix} 7{,}75157 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}86129 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}31006 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 3{,}14159 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}038785 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}005027 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0{,}8953 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0995 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0358 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 4{,}0369 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1383 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0408 \end{Vmatrix};$$

$$H_4 = \delta^* \begin{Vmatrix} 1-\lambda_1 \\ 1-\lambda_3 \\ 1-\lambda_5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4{,}0369 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1383 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0408 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1-0{,}8584 \\ 1-0{,}1093 \\ 1+0{,}2122 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 4{,}0369 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1383 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0408 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0{,}1416 \\ 0{,}8907 \\ 1{,}2122 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}5716 \\ 0{,}1232 \\ 0{,}0495 \end{Vmatrix};$$

$$H = 1{,}05112 \cdot \begin{Vmatrix} 1{,}14159 \\ 0{,}04702 \\ 0{,}00439 \end{Vmatrix} + 0{,}1391 \cdot \begin{Vmatrix} 2{,}81676 \\ 1{,}04406 \\ 0{,}27058 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0{,}5716 \\ 0{,}1232 \\ 0{,}0495 \end{Vmatrix} - 0{,}05112 \cdot \begin{Vmatrix} 8{,}9452 \\ 0{,}3546 \\ 0{,}1661 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1{,}200 \\ 0{,}0494 \\ 0{,}00461 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0{,}3918 \\ 0{,}1452 \\ 0{,}0376 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0{,}5716 \\ 0{,}1232 \\ 0{,}0495 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0{,}4573 \\ 0{,}0181 \\ 0{,}0085 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}5629 \\ 0{,}0533 \\ -0{,}0158 \end{Vmatrix};$$

$$A = m_1 A_1 + m_3 A_3 = 1.05112 \cdot \begin{Vmatrix} 0{,}29756 & 0{,}42441 & -0{,}25465 \\ 0{,}00524 & 0{,}01765 & 0{,}001048 \\ -0{,}000407 & 0{,}000136 & 0{,}002432 \end{Vmatrix} +$$

$$+ 0{,}1391 \cdot \begin{Vmatrix} 0{,}7342 & 1{,}04719 & -0{,}62832 \\ 0{,}11635 & 0{,}39185 & 0{,}02327 \\ -0{,}025133 & 0{,}008376 & 0{,}15 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0{,}3128 & 0{,}4461 & -0{,}2677 \\ 0{,}00551 & 0{,}01855 & 0{,}0011 \\ -0{,}000428 & 0{,}000143 & 0{,}00256 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0{,}1021 & 0{,}1457 & -0{,}0874 \\ 0{,}01618 & 0{,}0545 & 0{,}003237 \\ -0{,}00350 & 0{,}001165 & 0{,}0209 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0{,}4149 & 0{,}5918 & -0{,}3551 \\ 0{,}02169 & 0{,}07305 & 0{,}004337 \\ -0{,}003928 & 0{,}001308 & 0{,}02346 \end{Vmatrix};$$

$$\gamma = A + \frac{\pi^5 E_1 I_1}{32\ell^4 K} E = \begin{Vmatrix} 0{,}4149 & 0{,}5918 & -0{,}3551 \\ 0{,}02169 & 0{,}07305 & 0{,}004337 \\ -0{,}003928 & 0{,}001308 & 0{,}02346 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \frac{3{,}14159^5 \cdot 1{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0201}{32 \cdot 0{,}2853 \cdot 10^5} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0{,}4149 & 0{,}5918 & -0{,}3551 \\ 0{,}02169 & 0{,}07305 & 0{,}004337 \\ -0{,}003928 & 0{,}001308 & 0{,}02346 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1{,}2128 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}2128 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}2128 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1{,}6277 & 0{,}5918 & -0{,}3551 \\ 0{,}02169 & 1{,}28585 & 0{,}004337 \\ -0{,}003928 & 0{,}001308 & 1{,}23626 \end{Vmatrix};$$

$$\gamma^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}6186 & -0{,}2849 & 0{,}1777 \\ -0{,}0104 & 0{,}7825 & -0{,}00573 \\ 0{,}00198 & -0{,}00173 & 0{,}8095 \end{Vmatrix}.$$

5. Вычисление коэффициентов $\bar{c}$:

Для случая 1:

$$\bar{c} = -\gamma^{-1}\left(\frac{Q}{\ell}H\right);$$

$$\bar{c} = -\gamma^{-1}\left(\frac{Q}{\ell}H\right) = -\begin{Vmatrix} 0{,}6186 & -0{,}2849 & 0{,}1777 \\ -0{,}0104 & 0{,}7825 & -0{,}00573 \\ 0{,}00198 & -0{,}00173 & 0{,}8095 \end{Vmatrix} \times 5 \cdot \begin{Vmatrix} 0{,}5629 \\ 0{,}0533 \\ -0{,}0158 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1{,}6511 \\ -0{,}1797 \\ +0{,}0588 \end{Vmatrix}.$$

Для случая 2:

$$\bar{c} = -\gamma^{-1}\left(\frac{Q}{\ell}H + \frac{\pi^5 E_1 I_1}{32\ell^4}\bar{g}\right);$$

$$\frac{Q}{\ell}H + \frac{\pi^5 E_1 I_1}{32\ell^4}\bar{g} = 5{,}0 \cdot \begin{Vmatrix} 0{,}5629 \\ 0{,}0533 \\ -0{,}0158 \end{Vmatrix} + \frac{\pi^5 \cdot 1{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0201}{32 \cdot 1{,}0^4} \cdot 10^{-3} \begin{Vmatrix} +0{,}103115 \\ -0{,}003778 \\ +0{,}045065 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2{,}8145 \\ 0{,}2665 \\ -0{,}079 \end{Vmatrix} +$$

$$+34{,}599 \cdot \begin{Vmatrix} +0{,}103115 \\ -0{,}003834 \\ +0{,}0006984 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2{,}8145 \\ 0{,}2665 \\ -0{,}079 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} +3{,}5676 \\ -0{,}13265 \\ +0{,}02416 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +6{,}3821 \\ +0{,}13385 \\ -0{,}05484 \end{Vmatrix};$$

$$\bar{c} = -\gamma^{-1}\left(\frac{Q}{\ell}H + \frac{\pi^5 E_1 I_1}{32\ell^4}\bar{g}\right) = -\begin{Vmatrix} 0{,}6186 & -0{,}2849 & 0{,}1777 \\ -0{,}0104 & 0{,}7825 & -0{,}00573 \\ 0{,}00198 & -0{,}00173 & 0{,}8095 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} +6{,}3821 \\ +0{,}13385 \\ -0{,}05484 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -3{,}90 \\ -0{,}03868 \\ +0{,}032 \end{Vmatrix}.$$

6. Вычисление распределения межвалкового давления в соответствии с выражением (2.1.3):

Для случая 1:

$$q(x) = \frac{Q}{\ell} + c_1\left[\varphi_1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\right] + c_3\left[\varphi_3 - \left(1 + \frac{2}{3\pi}\right)\right] + c_5\left[\varphi_5 - \left(1 - \frac{2}{5\pi}\right)\right] =$$

$$= 5{,}0 - 1{,}6511 \cdot \left(0{,}6366 - \cos\frac{\pi x}{2}\right) - 0{,}1797 \cdot \left(-0{,}2122 - \cos\frac{3\pi x}{2}\right) +$$

$$+0{,}0588 \cdot \left(0{,}1273 - \cos\frac{5\pi x}{2}\right). \quad (2.1.50)$$

Для случая 2:

$$q(x) = \frac{Q}{\ell} + c_1\left[\varphi_1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\right] + c_3\left[\varphi_3 - \left(1 + \frac{2}{3\pi}\right)\right] + c_5\left[\varphi_5 - \left(1 - \frac{2}{5\pi}\right)\right] =$$

$$= 5{,}0 - 3{,}90 \cdot \left(0{,}6366 - \cos\frac{\pi x}{2\ell}\right) - 0{,}03868 \cdot \left(-0{,}2122 - \cos\frac{3\pi x}{2\ell}\right) +$$

$$+ 0{,}032 \cdot \left(0{,}1273 - \cos\frac{5\pi x}{2\ell}\right). \qquad (2.1.50а)$$

На рис. 2.6 сплошной линией изображена кривая распределения межвалкового погонного давления для случая 1 (2.1.50), а штриховой – кривая распределения межвалкового погонного давления для случая 2 (2.1.50а).

Отмечаем, что кривая межвалкового давления для выпуклых рабочих валков имеет более выраженную неравномерность: по сравнению с цилиндрическими валками величина межвалкового давления в середине бочки увеличилась на 0,6 МН/м, а на краях – уменьшилась на 0,5 МН/м.

Так как кривые симметричны относительно середины бочки, то на рис. 2.6 изображена только одна ветвь кривой распределения межвалкового давления – от середины до правого края бочки валка по ходу прокатки.

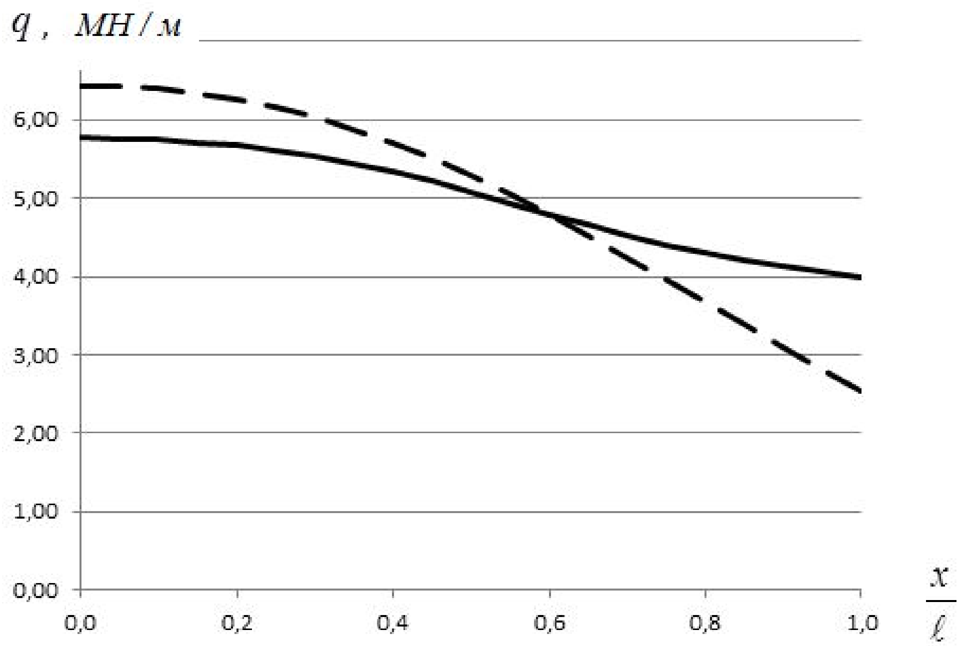


Рис. 2.6 - Эпюра распределения межвалкового погонного давления

Прогиб оси рабочего валка

1. Выражение (2.1.42), определяющее прогиб рабочего валка, для нашего случая запишется следующим образом:

$$w_1 = \frac{32\ell^4}{\pi^5 E_1 I_1} \Phi^T \left[\frac{Q}{\ell}\left(H_1 + \beta_1 H_3 - H_4\right) + \left(A_1 + \beta_1 A_3\right) \cdot \bar{c}\right].$$

2. Вычисление выражения в круглых скобках:

$$H_1+\beta_1 H_3-H_4=\begin{Vmatrix}1{,}14159\\0{,}04702\\0{,}00439\end{Vmatrix}+0{,}1155\cdot\begin{Vmatrix}2{,}81676\\1{,}04406\\0{,}27058\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}0{,}5716\\0{,}1232\\0{,}0495\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}1{,}14159\\0{,}04702\\0{,}00439\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0{,}32534\\0{,}12059\\0{,}03125\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}0{,}5716\\0{,}1232\\0{,}0495\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0{,}89533\\0{,}04441\\-0{,}01386\end{Vmatrix}.$$

$$A_1+\beta_1 A_3=\begin{Vmatrix}0{,}29756 & 0{,}42441 & -0{,}25465\\0{,}00524 & 0{,}01765 & 0{,}001048\\-0{,}000407 & 0{,}000136 & 0{,}002432\end{Vmatrix}+$$

$$+0.1155\cdot\begin{Vmatrix}0{,}7342 & 1{,}04719 & -0{,}62832\\0{,}11635 & 0{,}39185 & 0{,}02327\\-0{,}025133 & 0{,}008376 & 0{,}1500\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}0{,}29756 & 0{,}42441 & -0{,}25465\\0{,}00524 & 0{,}01765 & 0{,}001048\\-0{,}000407 & 0{,}000136 & 0{,}002432\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0{,}08480 & 0{,}12095 & -0{,}07257\\0{,}01344 & 0{,}04526 & 0{,}00269\\-0{,}00290 & 0{,}00097 & 0{,}01733\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}0{,}38236 & 0{,}54536 & -0{,}32722\\0{,}01868 & 0{,}06291 & 0{,}003738\\-0{,}003307 & 0{,}001106 & 0{,}019762\end{Vmatrix}.$$

3. Вычисление выражения в квадратных скобках:

$$\frac{Q}{\ell}\left(H_1+\beta_1 H_3-H_4\right)=5{,}0\times\begin{Vmatrix}0{,}89533\\0{,}04441\\-0{,}01386\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}4{,}47665\\0{,}22205\\-0{,}0693\end{Vmatrix};$$

Для <u>случая 1</u>:

$$\left(A_1+\beta_1 A_3\right)\cdot\bar{c}=\begin{Vmatrix}0{,}38236 & 0{,}54536 & -0{,}32722\\0{,}01868 & 0{,}06291 & 0{,}003738\\-0{,}003307 & 0{,}001106 & 0{,}019762\end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix}-1{,}6511\\-0{,}1797\\+0{,}0588\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-0{,}7486\\-0{,}04193\\+0{,}00642\end{Vmatrix};$$

$$\frac{Q}{\ell}\left(H_1+\beta_1 H_3-H_4\right)+\left(A_1+\beta_1 A_3\right)\cdot\bar{c}=\begin{Vmatrix}4{,}47665\\0{,}22205\\-0{,}0693\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}-0{,}7486\\-0{,}04193\\+0{,}00642\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}+3{,}72805\\+0{,}18012\\-0{,}06288\end{Vmatrix};$$

Для <u>случая 2</u>:

$$\left(A_1+\beta_1 A_3\right)\cdot\bar{c}=\begin{Vmatrix}0{,}38236 & 0{,}54536 & -0{,}32722\\0{,}01868 & 0{,}06291 & 0{,}003738\\-0{,}003307 & 0{,}001106 & 0{,}019762\end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix}-3{,}90\\-0{,}03868\\+0{,}032\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-1{,}52277\\-0{,}07517\\+0{,}01346\end{Vmatrix}$$

$$\frac{Q}{\ell}\left(H_1+\beta_1 H_3-H_4\right)+\left(A_1+\beta_1 A_3\right)\cdot\bar{c}=\begin{Vmatrix}4{,}47665\\0{,}22205\\-0{,}0693\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}-1{,}52277\\-0{,}07517\\+0{,}01346\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}+2{,}95388\\+0{,}14688\\-0{,}05584\end{Vmatrix}.$$

4. Вычисление прогиба оси рабочего валка:

Для <u>случая 1</u>:

$$w_1 = \frac{32\ell^4}{\pi^5 E_1 I_1}\Phi^T\left[\frac{Q}{\ell}\left(H_1+\beta_1 H_3 - H_4\right)+\left(A_1+\beta_1 A_3\right)\cdot \bar{c}\right];$$

$$w_1 = \frac{32\cdot 1{,}0}{3{,}14159^5\cdot 1{,}8\cdot 10^5\cdot 0{,}0201}\times\left\|\varphi_1\ \ \varphi_3\ \ \varphi_5\right\|\times\left\|\begin{matrix}+3{,}72805\\ +0{,}18012\\ -0{,}06288\end{matrix}\right\| =$$

$$=\left\|1-\cos\frac{\pi x}{2\ell}\ \ 1-\cos\frac{3\pi x}{2\ell}\ \ 1-\cos\frac{5\pi x}{2\ell}\right\|\times\left\|\begin{matrix}+10{,}7740\cdot 10^{-5}\\ +0{,}5205\cdot 10^{-5}\\ -0{,}1817\cdot 10^{-5}\end{matrix}\right\| =$$

$$=10{,}7740\cdot 10^{-5}\left(1-\cos\frac{\pi x}{2\ell}\right)+0{,}5205\cdot 10^{-5}\left(1-\cos\frac{3\pi x}{2\ell}\right)-0{,}1817\cdot 10^{-5}\left(1-\cos\frac{5\pi x}{2\ell}\right)\ [м]. \quad (2.1.51)$$

Чтобы величины прогиба оси рабочего валка имели размерность [мм], нужно выражение (2.1.51) умножить на 10^3:

$$w_1=10{,}7740\cdot 10^{-2}\left(1-\cos\frac{\pi x}{2\ell}\right)+0{,}5205\cdot 10^{-2}\left(1-\cos\frac{3\pi x}{2\ell}\right)-0{,}1817\cdot 10^{-2}\left(1-\cos\frac{5\pi x}{2\ell}\right)\ [мм] \quad (2.1.52)$$

Для <u>случая 2</u>:

$$w_1 = \frac{32\ell^4}{\pi^5 E_1 I_1}\Phi^T\left[\frac{Q}{\ell}\left(H_1+\beta_1 H_3 - H_4\right)+\left(A_1+\beta_1 A_3\right)\cdot \bar{c}\right];$$

$$w_1 = \frac{32\cdot 1{,}0}{3{,}14159^5\cdot 1{,}8\cdot 10^5\cdot 0{,}0201}\times\left\|\varphi_1\ \ \varphi_3\ \ \varphi_5\right\|\times\left\|\begin{matrix}+2{,}95388\\ +0{,}14688\\ -0{,}05584\end{matrix}\right\| =$$

$$=\left\|1-\cos\frac{\pi x}{2\ell}\ \ 1-\cos\frac{3\pi x}{2\ell}\ \ 1-\cos\frac{5\pi x}{2\ell}\right\|\times\left\|\begin{matrix}+8{,}5367\cdot 10^{-5}\\ +0{,}4245\cdot 10^{-5}\\ -0{,}1614\cdot 10^{-5}\end{matrix}\right\| =$$

$$=8{,}5367\cdot 10^{-5}\left(1-\cos\frac{\pi x}{2\ell}\right)+0{,}4245\cdot 10^{-5}\left(1-\cos\frac{3\pi x}{2\ell}\right)-0{,}1614\cdot 10^{-5}\left(1-\cos\frac{5\pi x}{2\ell}\right)\ [м]. \quad (2.1.53)$$

Чтобы величины прогиба оси рабочего валка имели размерность [мм], нужно выражение (2.1.51) умножить на 10^3:

$$w_1=8{,}5367\cdot 10^{-2}\left(1-\cos\frac{\pi x}{2\ell}\right)+0{,}4245\cdot 10^{-2}\left(1-\cos\frac{3\pi x}{2\ell}\right)-0{,}1614\cdot 10^{-2}\left(1-\cos\frac{5\pi x}{2\ell}\right)\ [мм]. \quad (2.1.54)$$

На рис. 2.7 сплошной линией изображена кривая прогиба нижнего рабочего валка для <u>случая 1</u> (2.1.52), а штриховой – кривая прогиба оси нижнего рабочего валка, построенная для <u>случая 2</u> (2.1.54).

Отмечаем, что стрела прогиба выпуклых рабочих валков меньше по сравнению с цилиндрическими валками; это объясняется тем, что для выпуклых валков межвалковое давление более сосредоточенное, и рабочие валки оказывают большее сопротивление усилию прокатки.

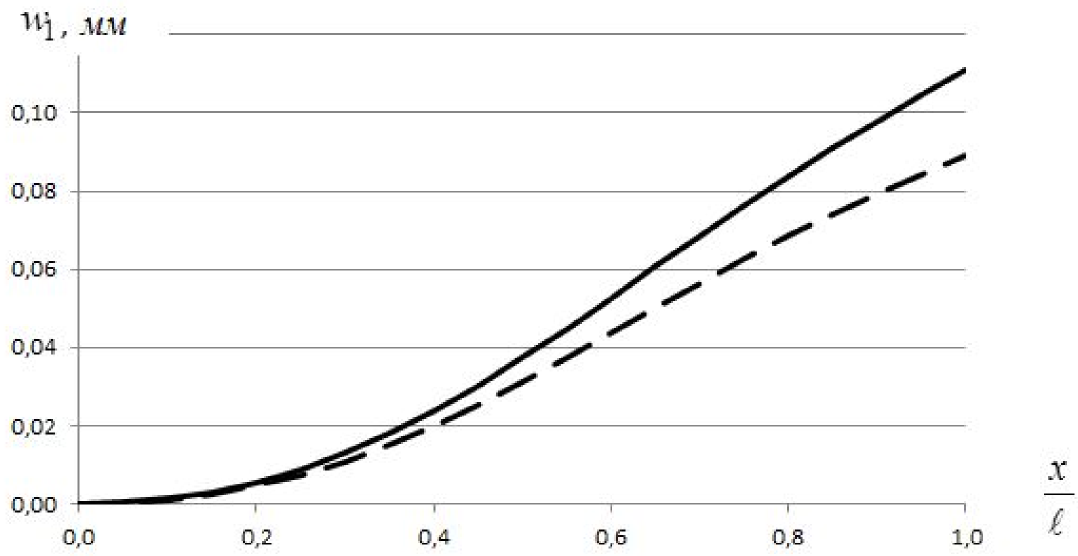


Рис. 2.7 - Прогиб оси нижнего рабочего валка

Достоинства матричной методики вычисления межвалкового давления и прогибов прокатных валков

1. Вычисления упругих прогибов прокатных валков по приведенной методике проводятся без применения итераций.
2. Методика легко формализуется и программируется с помощью правил линейной алгебры (операций с матрицами).

Недостатки матричной методики вычисления межвалкового давления и прогибов прокатных валков

1. Безытерационность вычислений достигается только в случае контакта рабочего и опорного валков по всей длине бочки.
2. Невозможность применения методики при разрыве контакта между валками на два и больше участков (в случае применения при профилировании валков выгнутых участков на образующей).
2. Методика не учитывает реальную геометрию прокатных валков: валок рассматривается как балка постоянного диаметра – без учета изменения диаметра на шейках валков.

2.2 Итерационный метод определения межвалкового давления и прогибов прокатных валков четырехвалковой системы

2.2.1 Постановка задачи

Итерационный метод вычисления межвалкового давления и прогибов четырехвалковой системы [8] основывается на численном интегрировании дифференциального уравнения упругой линии валка $y(x)$, рассматриваемого как балка [9-10]:

$$y_M''(x) = -\frac{M(x)}{EJ}, \tag{2.2.1}$$

$$y_{Q_s}'(x) = \frac{k_1}{GS} Q_s(x) = \frac{k_1}{GS} M'(x), \tag{2.2.2}$$

где $y_M(x)$ - прогиб валка от действия изгибающего момента $M(x)$,

$y_{Q_s}(x)$ - прогиб валка от действия перерезывающей силы $Q_s(x)$,

E, G - модули упругости первого и второго рода материала валка,

J, S - осевой момент инерции и площадь поперечного сечения валка,

k_1 - коэффициент формы поперечного сечения, равный $10/9$.

Учитывая, что $Q_s'(x) = -q_\Sigma(x)$, где $q_\Sigma(x)$ - суммарная распределенная нагрузка, действующая на валок (для опорного валка это межвалковое давление, для рабочего – сумма межвалкового давления и давления со стороны прокатываемой полосы), объединяем уравнения (2.2.1) и (2.2.2):

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{EJ} - \frac{k_1}{GS} q_\Sigma(x) = f(x). \tag{2.2.3}$$

Рассмотрим расчетную схему взаимодействия верхних рабочего и опорного валков изображенную на рис. 2.8. На схеме следующие обозначения:

Q – усилие, приложенное нажимным устройством к шейке опорного валка;

F – усилие противоизгиба, приложенное к шейке рабочего валка;

z_{on}, y_{on} – профилировка и прогиб опорного валка;

z_p, y_p – профилировка и прогиб рабочего валка;

$q(x)$, $p(x)$ – распределение межвалкового давления и давления прокатки;

B – ширина полосы;

L_Q – расстояние между точками приложения усилий нажимных устройств;

L_q – длина бочки прокатных валков;

L_F – расстояние между точками приложения усилий противоизгиба.

Очевидно, что в случае воздействия усилий дополнительного изгиба рабочих валков, знак усилий *F* поменяется с «+» на «–».

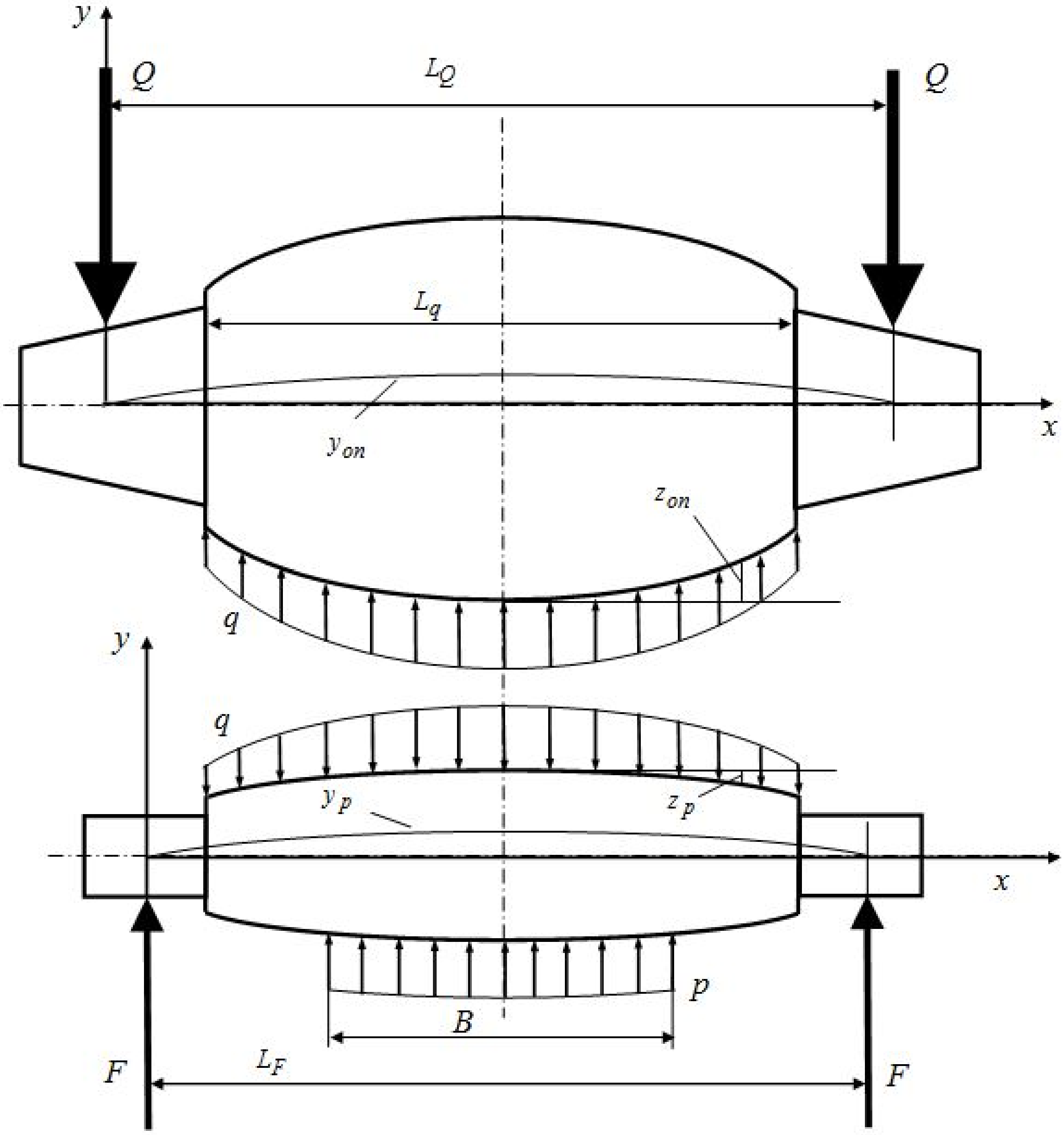


Рис.2.8 - Расчетная схема

Межвалковое давление определяется методом последовательных приближений из условия совместности деформаций рабочего и опорного валков, давление полосы на валок принимается равномерным: $p = const$.

Уравнение (2.2.3) имеет следующее решение (рис. 2.9):

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \int f(x)dx + C_1 = F(x) + C_1, \\
y'_0(x) &= F(x) - C_1^0 = F_C(x), \\
y(x) &= \int F_C(x)dx + C_2 = \Psi(x) + C_2,
\end{aligned}
\tag{2.2.4}
$$

где $F(x)$ – первообразная $f(x)$, $\left.F(x)\right|_{x=0}=0$; $\Psi(x)$ – первообразная $F(x)$, $\left.\Psi(x)\right|_{x=0}=0$; C_1 и C_2 – произвольные константы; C_1^0, $F_C(x)$– константа и функция, удовлетворяющие начальному условию $y_0'\left(\frac{L}{2}\right)=0$.

Графическая интерпретация процесса интегрирования уравнения (2.2.3) представлена на рис. 2.9; L – расстояние между точками приложения усилий: для опорного валка –нажимных устройств; для рабочего валка – усилий противоизгиба.

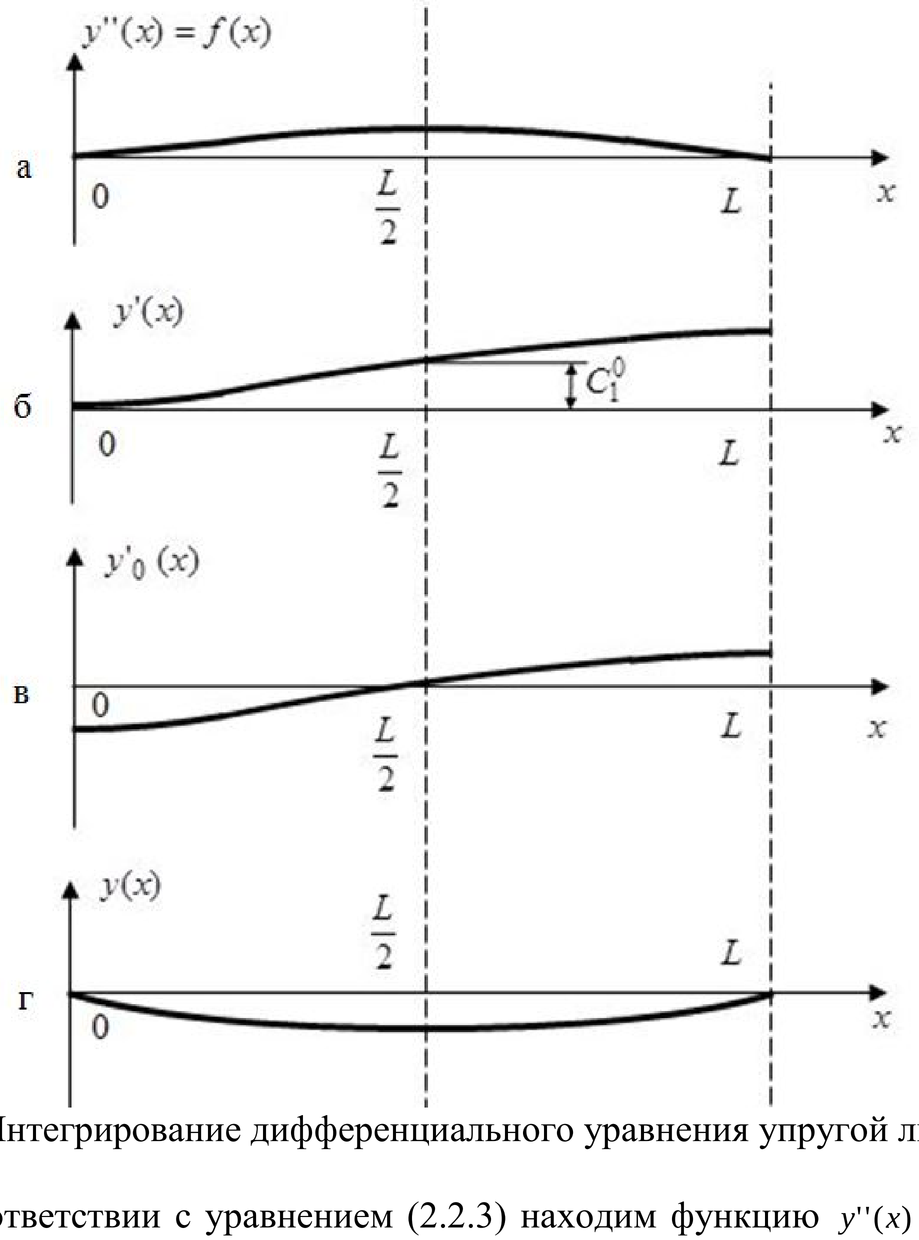


Рис. 2.9 - Интегрирование дифференциального уравнения упругой линии валка

В соответствии с уравнением (2.2.3) находим функцию $y''(x)=f(x)$ (рис. 2.9 а). Так как задача симметричная, то функция $f(x)$ также симметрична относительно оси, проведенной перпендикулярно к оси валка через его середину.

Интегрируя функцию $f(x)$, получаем функцию $y'(x)$ распределения тангенса угла наклона касательной к функции $y(x)$ прогиба оси прокатного валка (рис. 2.9 б). Так задача симметрична, то угол наклона касательной к функции $y(x)$ в середине валка равен нулю. Из этого условия определяем значение константы C_1, которое должно быть равно C_1^0 (рис. 2.9 б). С учетом константы C_1^0 получаем функцию $y'_0(x)$ (рис. 2.9 в).

Интегрируя функцию $y'_0(x)$, получаем функцию $y(x)$ прогиба оси прокатного валка; при этом значение константы C_2 автоматически становится равной нулю, и начальная и конечная точки рассматриваемого участка изогнутой оси валка принимают нулевые значения (рис. 2.9 г).

2.2.2. Межвалковое давление и совместная деформация рабочего и опорного валков

Воспользуемся гипотезой Винклера о пропорциональности величин сближения осей рабочего и опорного валков и межвалкового давления (2.1.46-2.1.47).

Сближение осей рабочего и опорного валков за счет их упругой деформации определяется следующим образом (рис. 2.8):

$$u(x) = \Delta + \lfloor y_p(x) - y_{on}(x) \rfloor - z(x), \tag{2.2.5}$$

где Δ – сближение валков в точке соприкосновения, $y_{on}(x)$ – прогиб опорного валка, $y_p(x)$ – прогиб рабочего валка, $z(x) = (z_{on} - z_p)$ – зазор между соприкасающимися в рабочим и опорным валками, имеющими профилировки (на радиусе) z_p и z_{on} соответственно.

Распределение давления прокатки $p(x)$ принимаем равномерным.

Итак, опорный валок рассматриваем как балку на двух опорах, нагруженную со стороны рабочего валка межвалковым давлением $q(x)$ и силами Q со стороны нажимных устройств.

Рабочий валок рассматриваем как балку, находящуюся в состоянии равновесия под действием межвалкового давления $q(x)$ со стороны опорного валка, равномерно распределенного по ширине полосы погонного давления прокатки $p(x)$ со стороны полосы и усилий противоизгиба F.

На первом этапе оси рабочего и опорного валков не деформированы (прямолинейны).

Валки приводятся в соприкосновение, и вычисляется функция зазора между бочками рабочего и опорного валков $z(x) = z_{on} - z_p$ (рис. 2.10).

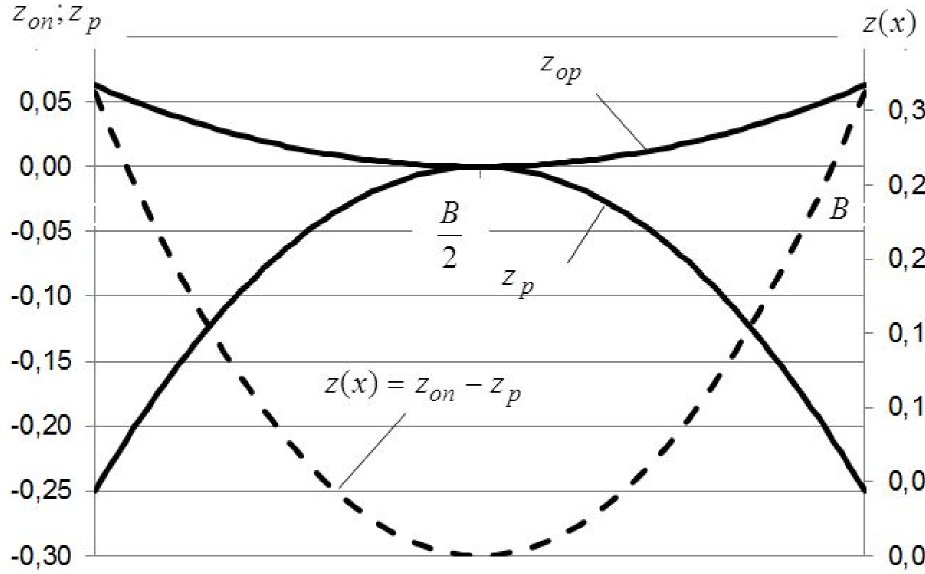


Рис. 2.10 - Функция зазора между опорным и рабочим валками

Характерной особенностью представленной методики является то, что соприкосновение между прокатными валками может происходить в нескольких точках; главное, чтобы функция зазора была симметрична относительно середины бочек валков, как это изображено на рис. 2.11.

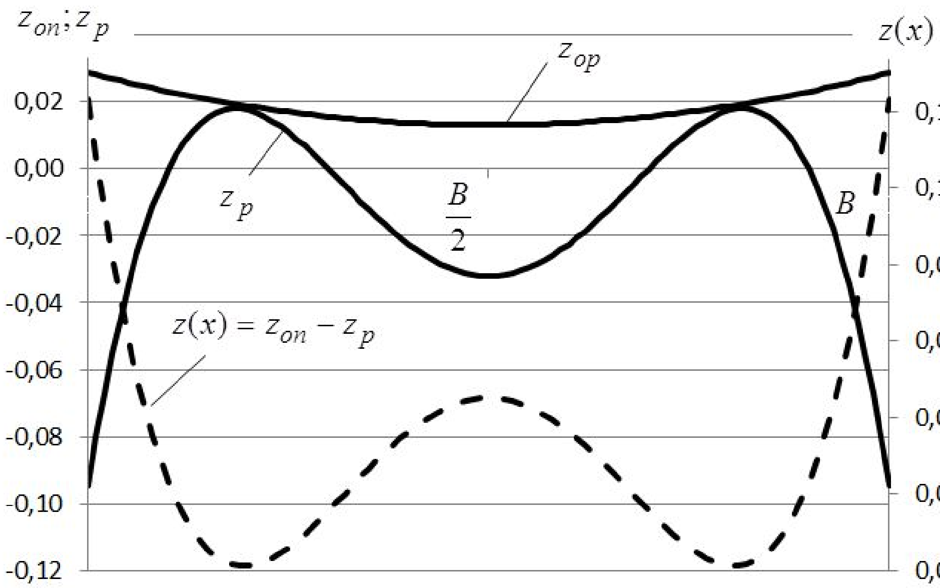
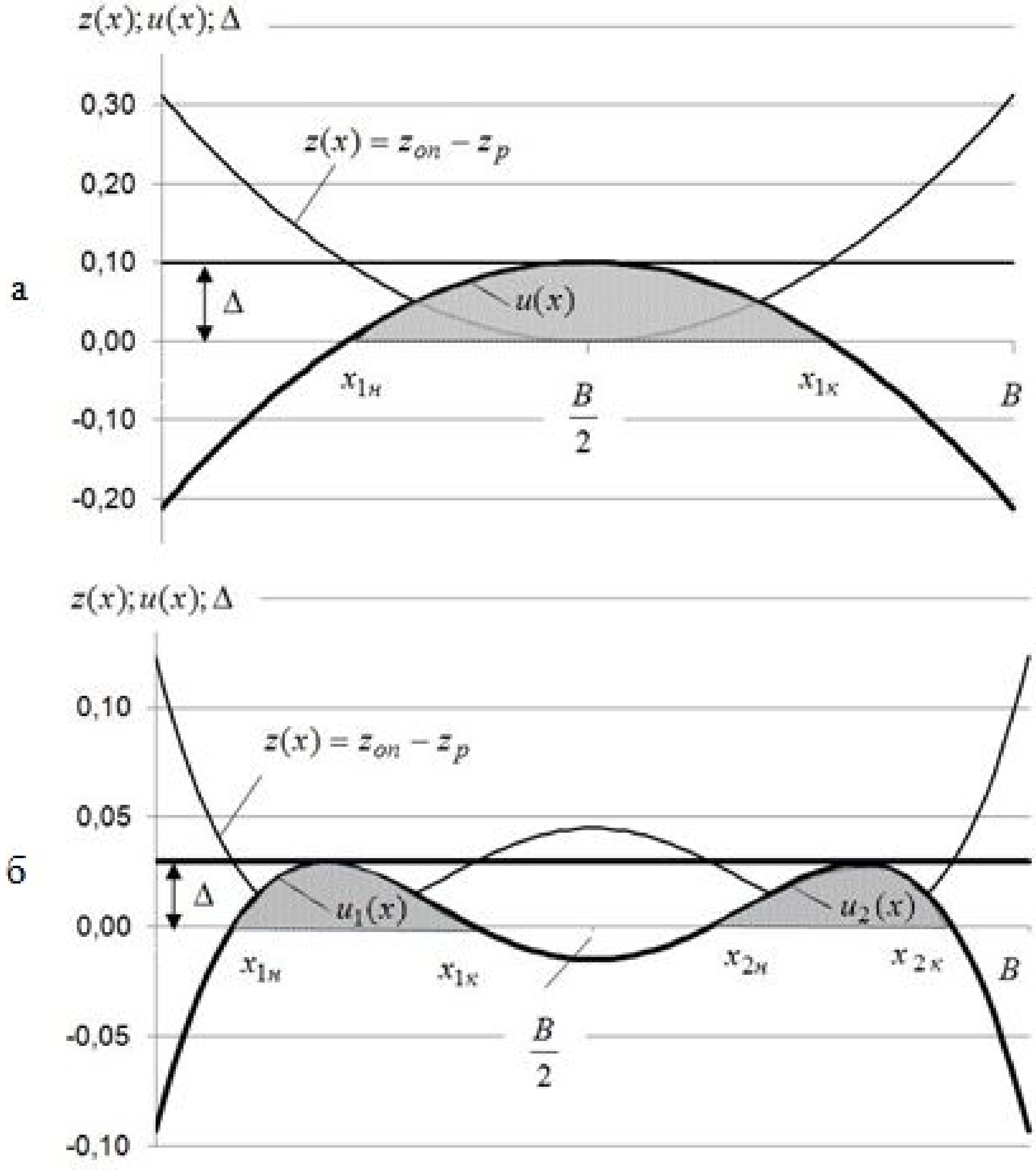


Рис. 2.11 - Функция зазора между опорным и рабочим валками
с двумя точками соприкосновения

Далее следует итерационный процесс 1, на первом шаге которого вычисляется эпюра межвалкового давления.

Для ее вычисления недеформированные оси валков сближаются на величину Δ, вычисляется функция $u(x)$ в соответствии с формулой (2.2.5), и определяются начальные $x_{iн}$ и конечные $x_{iк}$ точки ее положительных значений, где i – номер участка с положительными значениями $u(x)$ (рис. 2.12).



а – для одной точки соприкосновения: б – для двух точек соприкосновения

Рис. 2.12 - Функция сближения осей рабочего и опорного валков

Далее по формуле (2.1.47) вычисляется коэффициент K с учетом того, что $q_{ср} = \dfrac{2Q + 2F}{L_q}$ – среднее погонное межвалковое давление, затем и по формуле (2.1.46) вычисляется эпюра межвалкового давления.

Если интеграл функции межвалкового давления не равен сумме заданных величин усилий прокатки и противоизгиба

$$\int_{L_q} q(x)dx = 2(Q + F), \tag{2.2.6}$$

величина сближения Δ увеличивается или уменьшается на Δ/2:

$$\Delta^* = \Delta \pm \Delta/2, \tag{2.2.7}$$

выполняется переобозначение Δ = Δ*, и расчет повторяется.

Как только уравнение (2.2.6) выполнится с заданной точностью, расчет эпюры межвалкового давления прекращается (итерационный процесс 1 завершается).

Далее следует вычисление изгибающих моментов рабочего $M_{раб}$ и опорного $M_{оп}$ валков и перерезывающей силы рабочего $Q_{раб}$ и опорного $Q_{оп}$ валков. Вычисление изгибающих моментов и перерезывающих сил выполняется по правилам Сопромата, причем их числовые значения вычисляются по длине валков с дискретностью для опорного валка $\Delta x_{оп} = \frac{L_Q}{N}$, а для рабочего валка $\Delta x_{раб} = \frac{L_F}{N}$, где N – число разбиения; как правило, число N не превышает 200.

Для примера рассмотрим вычисление изгибающего момента рабочего валка для двух участков:

1. $M_{раб1}$ – изгибающий момент от точки приложения усилия противоизгиба F до левого края бочки валка (рис. 2.13);
2. $M_{раб2}$ – изгибающий момент от левого края бочки до левой кромки прокатываемой полосы (рис.2.14).

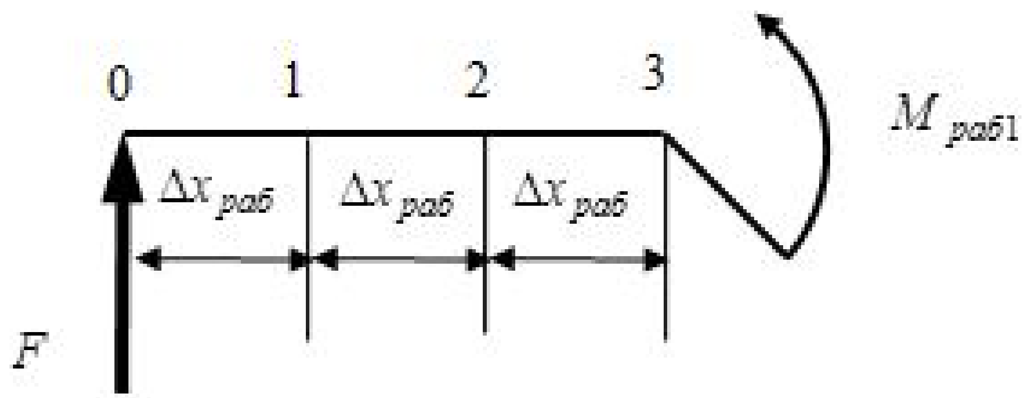


Рис. 2.13 - Расчет величины изгибающего момента на первом участке рабочего валка

Участок 1.

Изгибающий момент равен моменту от усилия противоизгиба $M_{раб1} = M_F$:

Точка 0: $M_F = 0$;

Точка 1: $M_F = F \cdot \Delta x_{раб}$;

Точка 2: $M_F = F \cdot (2 \cdot \Delta x_{раб})$;

Точка 3: $M_F = F \cdot (3 \cdot \Delta x_{раб})$.

Участок 2.

Для схемы, изображенной на рис. 2.14, изгибающий момент рабочего валка вычисляется как сумма двух моментов: $M_{раб2} = M_F + M_q$, где M_F – изгибающий момент от усилия противоизгиба F, M_q – изгибающий момент от распределенного межвалкового давления *q(x)*, $a = \dfrac{L_F - L_q}{2}$.

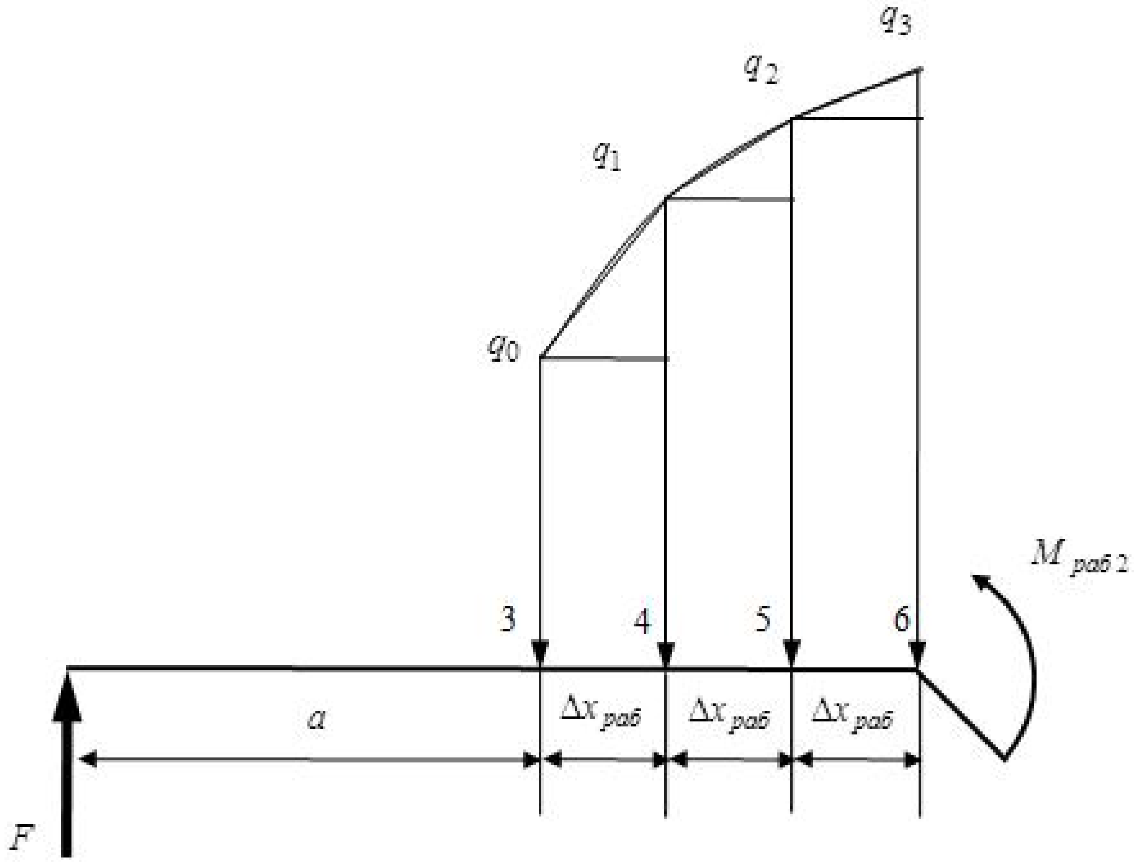


Рис. 2.14 - Расчет величины изгибающего момента на втором участке рабочего валка

Эпюру распределения межвалкового давления *q(x)* аппроксимируем ломаной линией путем замены кривых хордами на участках разбиения (рис. 2.14).

Тогда изгибающий момент от распределенного межвалкового давления *q(x)* представим в виде суммы

$$M_q = M_{q1} + M_{q2},$$

где M_{q1} – изгибающий момент от равномерной составляющей эпюры межвалкового давления *q(x)*;

M_{q2} – изгибающий момент от «треугольной верхушки» эпюры межвалкового давления *q(x)*.

В итоге для схемы, изображенной на рис. 2.14, изгибающий момент рабочего валка вычисляется как алгебраическую сумма трех моментов:

$$M_{раб2} = M_F - M_{q1} - M_{q2}. \tag{2.2.8}$$

Величины изгибающего момента в точках 3-6 вычисляются следующим образом.

Точка 3:

$M_F = Fa$;

$M_{q1} = 0$;

$M_{q2} = 0$;

Точка 4:

$$M_{q1} = q_0 \cdot \Delta x_{раб} \cdot \left(\frac{\Delta x_{раб}}{2} \right);$$

$$M_{q2} = \frac{(q_1 - q_0) \cdot \Delta x_{раб}}{2} \cdot \left(\frac{\Delta x_{раб}}{3} \right);$$

$$M_F = F \cdot (a + \Delta x_{раб});$$

Точка 5:

$$M_{q1} = q_0 \cdot \Delta x_{раб} \cdot \left(\Delta x_{раб} + \frac{\Delta x_{раб}}{2} \right) + q_1 \cdot \Delta x_{раб} \cdot \left(\frac{\Delta x_{раб}}{2} \right);$$

$$M_{q2} = \frac{(q_1 - q_0) \cdot \Delta x_{раб}}{2} \cdot \left(\Delta x_{раб} + \frac{\Delta x_{раб}}{3} \right) + \frac{(q_2 - q_1) \cdot \Delta x_{раб}}{2} \cdot \left(\frac{\Delta x_{раб}}{3} \right);$$

$$M_F = F \cdot (a + 2 \cdot \Delta x_{раб});$$

Точка 6:

$$M_{q1} = q_0 \cdot \Delta x_{раб} \cdot \left(2\Delta x_{раб} + \frac{\Delta x_{раб}}{2} \right) + q_1 \cdot \Delta x_{раб} \cdot \left(\Delta x_{раб} + \frac{\Delta x_{раб}}{2} \right) + q_2 \cdot \Delta x_{раб} \cdot \left(\frac{\Delta x_{раб}}{2} \right);$$

$$M_{q2} = \frac{(q_1 - q_0) \cdot \Delta x_{раб}}{2} \cdot \left(2\Delta x_{раб} + \frac{\Delta x_{раб}}{3} \right) +$$

$$+ \frac{(q_2 - q_1) \cdot \Delta x_{раб}}{2} \cdot \left(\Delta x_{раб} + \frac{\Delta x_{раб}}{3} \right) + \frac{(q_3 - q_2) \cdot \Delta x_{раб}}{2} \cdot \left(\frac{\Delta x_{раб}}{3} \right);$$

$$M_F = F \cdot (a + 3 \cdot \Delta x_{раб}).$$

Распределение перерезывающей силы $Q_s(x)$.

Точка 0: $Q_s(x) = F$;

Точка 1: $Q_s(x) = F$;

Точка 2: $Q_s(x) = F$;

Точка 3: $Q_s(x) = F$;

Точка 4: $Q_s(x) = F - q_0 \cdot \Delta x_{раб} - (q_1 - q_0) \cdot \dfrac{\Delta x_{раб}}{2}$;

Точка 5: $Q_s(x) = F - (q_0 + q_1) \cdot \Delta x_{раб} - (q_1 - q_0) \cdot \frac{\Delta x_{раб}}{2} - (q_2 - q_1) \cdot \frac{\Delta x_{раб}}{2}$;

Точка 6:

$$Q_s(x) = F - (q_0 + q_1 + q_3) \cdot \Delta x_{раб} - (q_1 - q_0) \cdot \frac{\Delta x_{раб}}{2} - (q_2 - q_1) \cdot \frac{\Delta x_{раб}}{2} - (q_3 - q_2) \cdot \frac{\Delta x_{раб}}{2}.$$

Аналогично вычисляется распределение изгибающего момента и перерезывающих сил на всех участках рабочего и опорного валков.

Затем вычисляется функция *f(x)* (2.2.3) и дважды осуществляется ее численное интегрирование в соответствии с (2.2.4) и учетом граничных условий.

Таким образом, получаем функции прогиба рабочего $y_p(x)$ и опорного $y_{оп}(x)$ валков.

На втором этапе вычисляется сближение осей рабочего и опорного валков $u(x)$ с учетом полученных функций прогиба рабочего $y_p(x)$ и опорного $y_{оп}(x)$ валков по выражению (2.2.5), и повторяется процесс вычислений, описанный для первого этапа.

<u>Важное замечание к организации итерационного цикла.</u>

Если для очередного цикла использовать полученные на предыдущем этапе прогибы, итерационный процесс становится неустойчивым.

Для обеспечения сходимости итерационного процесса применяется сглаживание: в качестве функции прогиба опорного и рабочего валков при выполнении следующего цикла берется следующая функция:

$$\begin{aligned} y_{оп}^{(i+1)} &= k \cdot y_{оп}^{(i)} + (1-k) \cdot y_{оп}^{(i-1)}; \\ y_{p}^{(i+1)} &= k \cdot y_{p}^{(i)} + (1-k) \cdot y_{p}^{(i-1)}, \end{aligned} \qquad (2.2.9)$$

где $y_{оп}^{(i+1)}, y_{оп}^{(i)}, y_{оп}^{(i-1)}$, $y_{p}^{(i+1)}, y_{p}^{(i)}, y_{p}^{(i-1)}$ – прогибы опорного и рабочего валков на следующей, только что завершенной и предыдущей итерациях; k – коэффициент сглаживания.

Величину коэффициента сглаживания следует брать равной 0,3-0,5.

Укрупненная блок-схема расчета межвалкового давления и совместной деформации рабочего и опорного валков представлена на рис. 2.15.

Исходными данными алгоритма являются: усилие прокатки P, ширина полосы B, усилия противоизгиба F, точность расчета усилия прокатки ε_1, точность расчета прогибов ε_2, дискретность сближения осей валков Δ, а также данные валков: профилировки, геометрические размеры и физические константы материала валков и полосы E, G, ν – модули упругости I и II рода, коэффициент Пуассона.

В блоке 2 рассчитываются эпюры изгибающих моментов от равномерно распределенного по ширине полосы давления прокатки $p(x)$ и усилия изгиба F. В блоке 3 вычисляется зазор $z(x)$ между соприкасающимися без нагрузки рабочим и опорным валком.

В блоке 4 рабочий и опорный валок сближаются в точке касания на расстояние Δ, и рассчитывается сближение осей по формуле (2.2.5).

В блоке 5 рассчитывается эпюра межвалкового давления $q(x)$ по формулам (2.1.46-2.1.47).

В блоке 6 численным интегрированием эпюры межвалкового давления $q(x)$ определяется полное усилие нажимных устройств $Q_\Sigma = 2Q$.

В блоке 7 вычисляется невязка $R = Q_\Sigma - P - 2F$.

В блоке 8 производится сравнение невязки $R = |Q_\Sigma - P - 2F|$ с ε_1. Если невязка R меньше ε_1, то следует переход к блоку 12.

В блоке 9 сравнивается Q_Σ и $P + 2F$; в зависимости от их соотношения методом половинного деления корректируется Δ (блоки 10 и 11), и осуществляется возврат к блоку 4.

В этой части алгоритма реализуется выполнение условия равновесия по силам.

В блоке 12 вычисляется эпюра изгибающего момента от $q(x)$.

В блоке 13 вычисляются эпюры изгибающих моментов опорного и рабочего валков.

В блоке 14 вычисляются функции второй производной прогибов опорного и рабочего валков по формуле (2.2.3).

В блоке 15 осуществляется первое численное интегрирование вторых производных прогибов.

В блоке 16 вычисляется постоянная интегрирования C_1^0 и с учетом ее величины - функция первой производной прогибов, удовлетворяющая условию равенство нулю первой производной прогибов в середине бочки прокатных валков (рис. 2.2 б,в).

В блоке 17 осуществляется численное интегрирование функций первой производной прогибов, полученных в блоке 16.

В блоке 18 вычисляются максимальные величины относительной разности прогибов рабочего и опорного валков, полученных на предыдущей и текущей итерациях.

Если эти величины больше заданной погрешности, по формулам (2.2.9) вычисляются прогибы следующей итерации, и идет переход в начало расчета в блок 4.

Если эти величины меньше заданной погрешности, происходит вывод результатов расчета и останов.

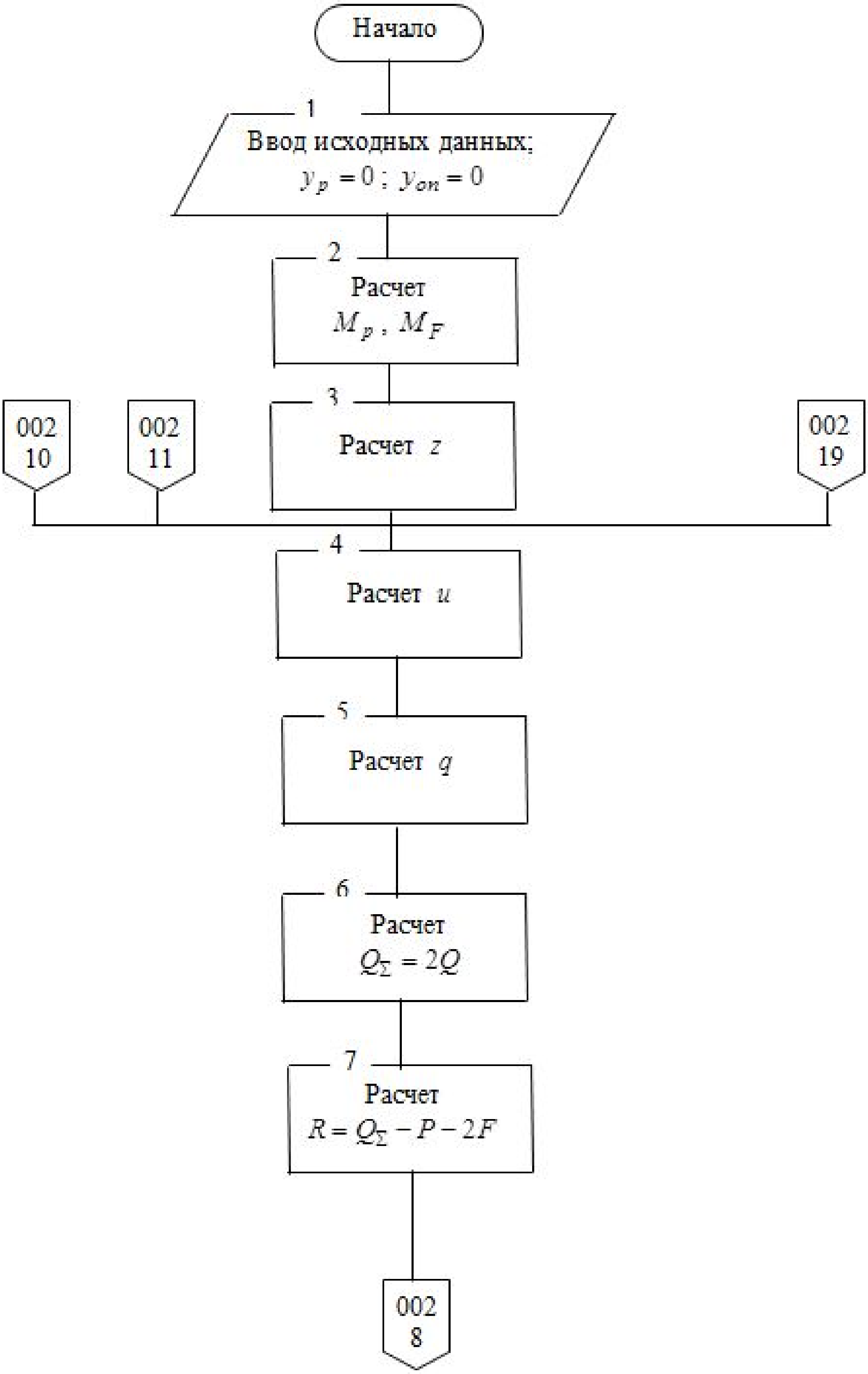
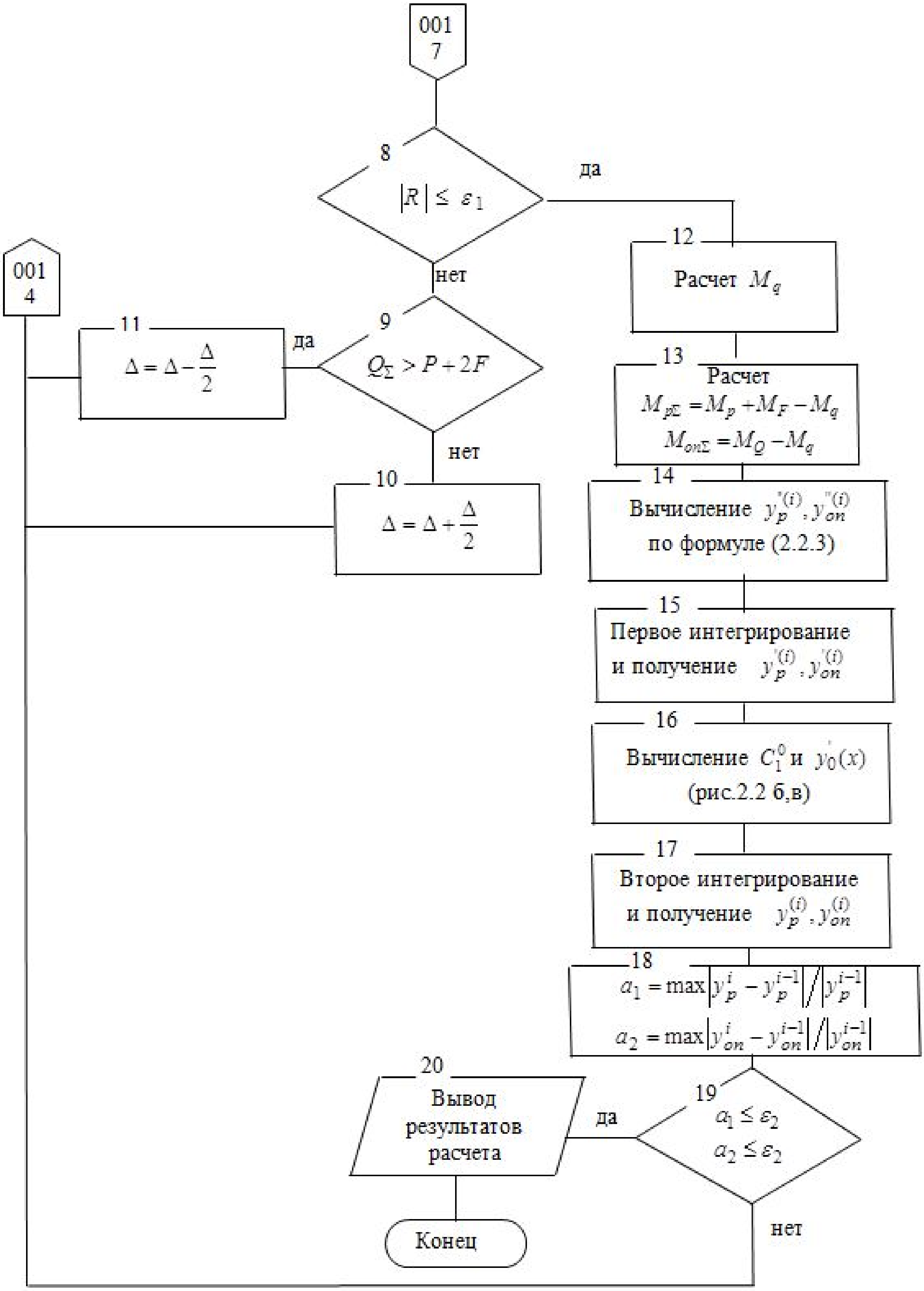


Рис. 2.15 - Блок-схема расчета упругих деформаций рабочих валков четырехвалковой системы



Продолжение рис. 2.15 - Блок-схема расчета упругих деформаций рабочих валков четырехвалковой системы

Пример расчета межвалкового давления и прогибов рабочего валка

По разработанной методике были вычислены распределения межвалкового давления и прогибов рабочего валка для случаев, которые были просчитаны с помощью методики В.И. Пыженкова в п.2.1.

На рис. 2.16 изображены результаты расчета для рабочих валков с нулевой профилировкой, а на рис. 2.17 – для рабочих валков с параболической профилировкой +0,1 мм на радиусе; штриховая линия – расчет по В.И. Пыженкову, сплошная – по разработанной итерационной методике.

Как можно видеть, итерационная методика дает более сосредоточенное распределение межвалкового давления, т.е. с более выраженным максимумом в середине бочки. Этот отразился на результатах расчета прогибов: по итерационному методу прогибы немного меньше – на 2-3 сотых миллиметра. Это различие связано с аппроксимацией функции межвалкового давления тригонометрическими функциями.

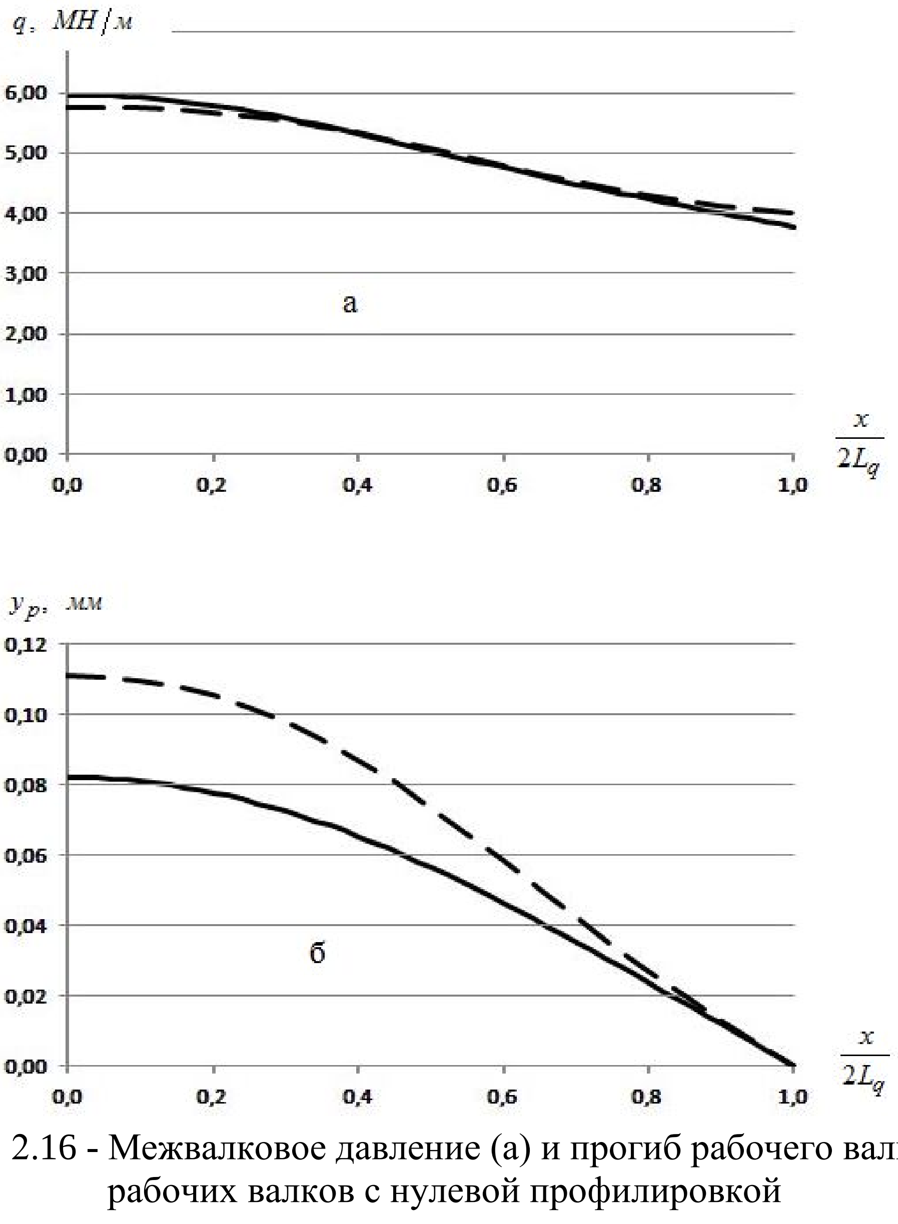
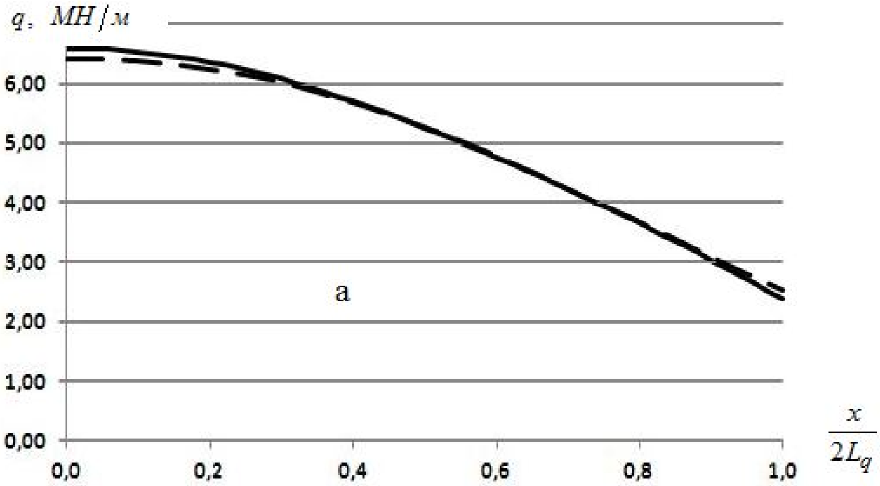


Рис. 2.16 - Межвалковое давление (а) и прогиб рабочего валка (б) для рабочих валков с нулевой профилировкой



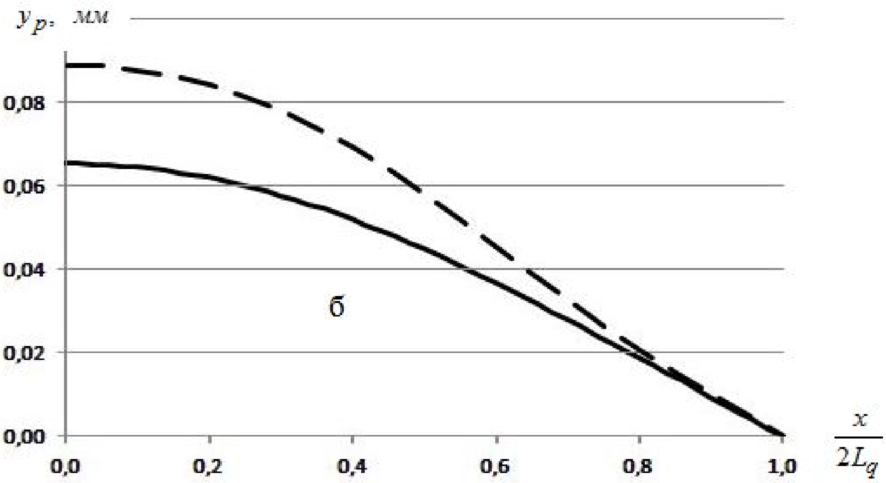


Рис. 2.17 - Межвалковое давление (а) и прогиб рабочего валка (б) для рабочих валков с профилировкой +0,1 мм на радиусе

К достоинствам разработанной итерационной методики относится отсутствие ограничений на вид профилировок прокатных валков: наличие скосов на краях бочки; контакт между опорным и рабочим валком может включать несколько изолированных областей.

К недостаткам методики можно отнести выполнение обязательного условия симметричности профилировок относительно линии, проходящей через центры бочек опорного и рабочего валков.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГОННОГО ДАВЛЕНИЯ ПРОКАТКИ И ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО ШИРИНЕ ПОЛОСЫ

Явление поперечного перемещения металла в очаге деформации при тонколистовой прокатке получило многочисленное экспериментальное подтверждение. Это явление проявляется в том, что неравномерность остаточных напряжений в полосе после прокатки оказывается меньше рассчитанной в предположении плоской схемы деформации.

3.1. Уменьшение неравномерности распределения вытяжек и остаточных напряжений по ширине полосы за счет поперечного перемещения металла в очаге пластической деформации

Распределение остаточных напряжений по ширине полосы определяется условиями формирования профиля поперечного сечения полосы, в том числе величиной сплющивания рабочих валков на контакте с полосой. Величина сплющивания непосредственно связана с распределением погонного давления прокатки по ширине полосы.

Поперечное перемещение металла в очаге пластической деформации уменьшает неравномерность распределения вытяжек и остаточных напряжений (остаточными условимся называть напряжения на выходе очага деформации). Этот эффект в работах С.Л. Коцаря, Ю.Д. Железнова и др. [11] было предложено учитывать коэффициентом ρ:

$$\frac{\Delta\lambda(y)}{\lambda} = \rho\left(\frac{\delta h_0(y)}{h_0} - \frac{\delta h_1(y)}{h_1}\right), \tag{3.1}$$

где $\Delta\lambda(y)$ и λ - величина текущей неравномерности вытяжек и величина средней вытяжки по ширине полосы, $\delta h_0(y)$ и h_0 - величина текущей поперечной разнотолщинности и величина средней толщины подката, $\delta h_1(y)$ и h_1 - величина текущей поперечной разнотолщинности и величина средней толщины полосы, $0 < \rho < 1$ - коэффициент, учитывающий влияние поперечного перемещения металла в очаге пластической деформации.

Выражение для продольных напряжений на выходе из очага деформации при прокатке без натяжения запишется следующим образом:

$$\Delta\sigma_{вых}(y) = -E\,\frac{\Delta\lambda(y)}{\lambda}, \tag{3.2}$$

где E - модуль упругости материала полосы.

Знак “–” перед модулем упругости означает, что вытянутые волокна испытывают напряжения сжатия.

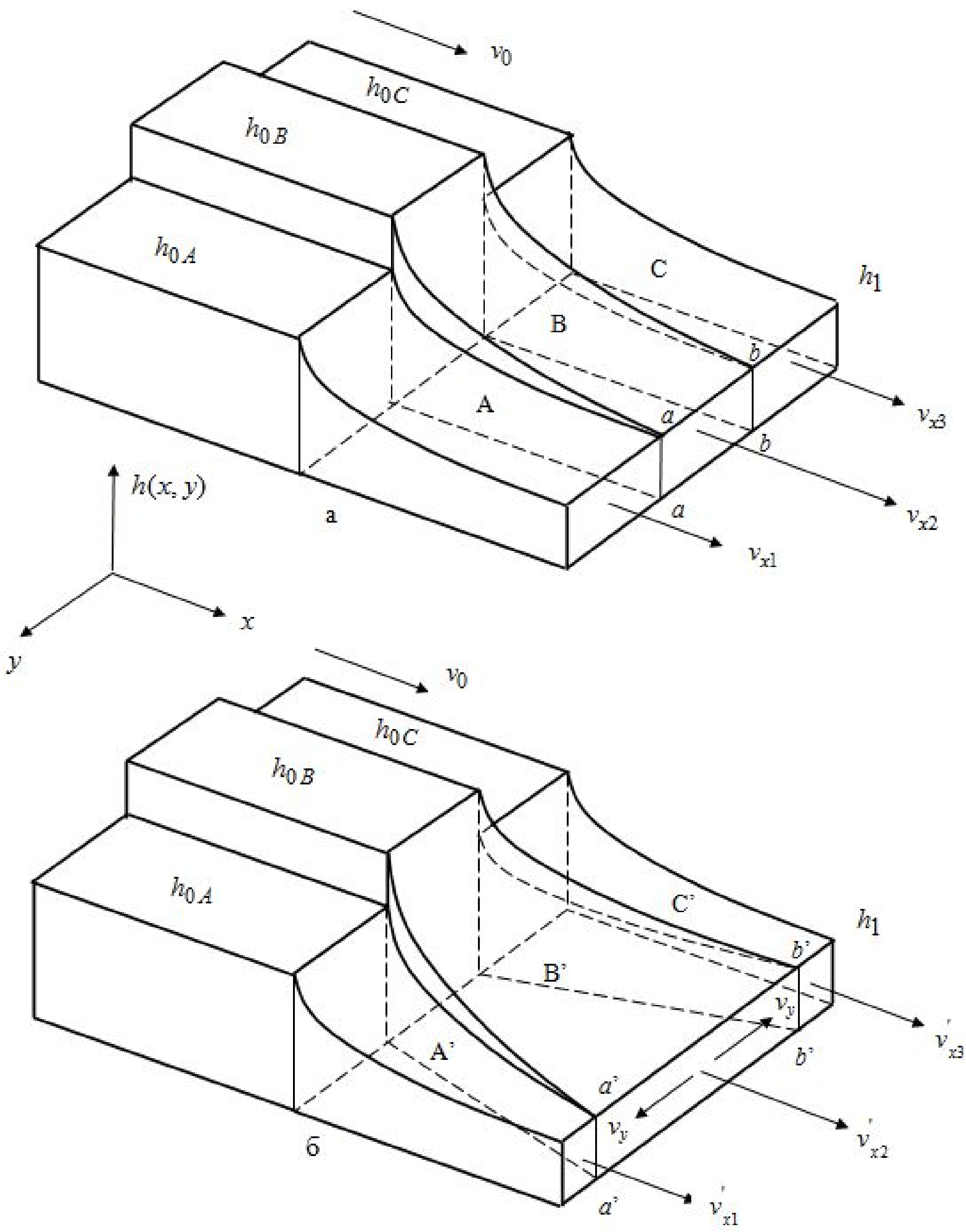


Рис.3.1 - Схема уменьшения неравномерности вытяжек по ширине полосы из-за поперечного перемещения металла в очаге деформации

Методы расчета остаточных напряжений, основанные на классической теореме Генки о разгрузке (1924 г.), предполагают, что из компонент тензора напряжений, вычисленных в ходе решения пластической задачи, вычитаются напряжения, вычисленные в ходе решения упругой задачи [12]. Отличие разработанного метода от классического заключается в том, что процесс разгрузки (т.е. решение упругой задачи) не рассматривается, а определяется только коэффициент ρ, характеризующий уменьшение неравномерности напряжений по ширине полосы на выходе очага деформации по сравнению с рассчитанной в предположении плоской схемы деформации. При больших обжатиях, особенно при горячей прокатке, упругая составляющая деформации полосы практически отсутствует, поэтому допустимо считать, что выходные напряжения, рассчитываемые по формуле (3.1), переходят в остаточные практически без изменения величины.

Схема влияния поперечного перемещения металла в очаге пластической деформации на уменьшение неравномерности вытяжек по ширине полосы при листовой прокатке без уширения изображена на рисунке 3.1.

Подкат с шириной *2B*, профиль поперечного сечения которого состоит из трех областей А, В и С, имеющих толщины h_{0A}, h_{0B} и h_{0C}, входит в очаг пластической деформации со скоростью v_0, и на выходе из очага деформации прокатанная полоса имеет одинаковую толщину h_1.

Если бы прокатка осуществлялась по схеме плоской деформации, то вытяжка и выходная скорость областей металла в областях А, В и С определялась следующими соотношениями:

$$\lambda_A = \lambda_C = \frac{h_{0A}}{h_1} = \frac{h_{0C}}{h_1};\ v_{x1} = v_{x3} = v_0 \frac{h_{0A}}{h_1} = v_0 \frac{h_{0C}}{h_1};$$

$$\lambda_B = \frac{h_{0B}}{h_1};\ v_{x2} = v_0 \frac{h_{0B}}{h_1}.$$

Границы областей А, В и С в этом случае определяются параллельными боковым кромкам плоскостями, проходящими через отрезки прямых *aa* и *bb* (рис. 3.1 а).

На рис. 3.2 распределение скоростей металла по ширине полосы в случае плоской схемы деформации показано ломаной штрихпунктирной линией с амплитудой $\Delta v_x = A$.

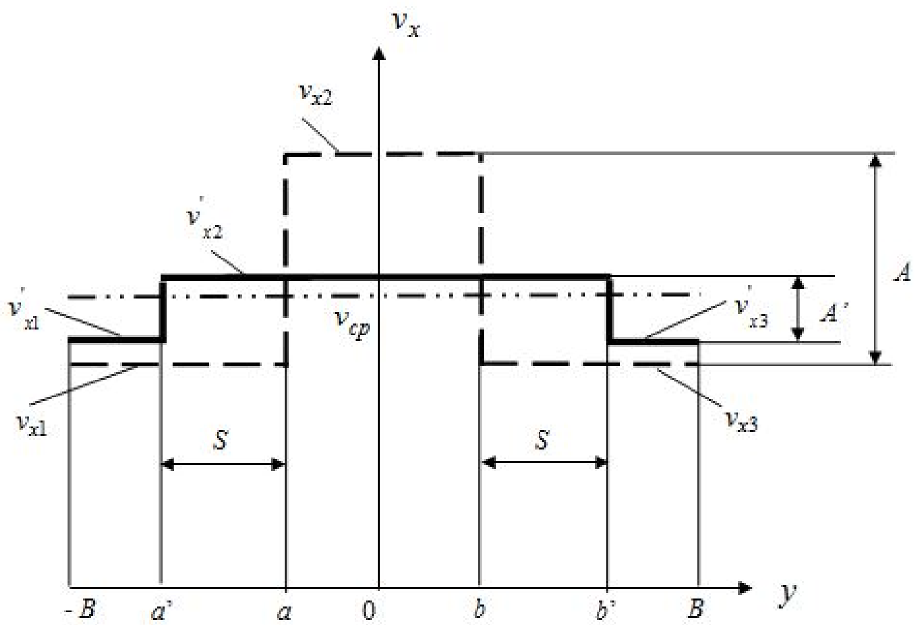


Рис.3.2 - Диаграмма распределения скоростей металла по ширине полосы в очаге пластической деформации

Поперечное перемещение металла со скоростью v_y в очаге пластической деформации на величину S изменяет границы областей, и области А, В и С переходят в области А', В' и С', причем плоскости, их разграничивающие, проходят через отрезки прямых *a'a'* и *b'b'* (рис. 3.1 б).

При наличии поперечного перемещения металла в очаге деформации продольные скорости металла в областях А v'_{x1} и С v'_{x3} увеличиваются, а области В v'_{x2} – уменьшается по отношению к скоростям в случае плоской схемы деформации:

$$v'_{x1} > v_{x1}; \quad v'_{x3} > v_{x3}; \quad v'_{x2} < v_{x2}.$$

На рис. 3.2 распределение продольных скоростей металла по ширине полосы при наличии поперечного перемещения металла в очаге деформации показано сплошной линией с амплитудой $\Delta v'_x = A'$; при этом коэффициенты вытяжки металла в соответствующих областях, вычисляемые как отношение входной и выходной толщин, остаются неизменными.

Коэффициент, учитывающий влияние поперечного перемещения металла в очаге пластической деформации, вычисляется в этом случае следующим образом:

$$\rho = \frac{A'}{A}.$$

3.2. Вариационный метод определения функции распределения погонного усилия прокатки по ширине полосы

3.2.1. Элементы вариационного исчисления, функционал, уравнение Эйлера-Лагранжа

Допустим, что задан некоторый функционал $L = \int_a^b F[x, f(x), f'(x)]dx$, причем подынтегральная функция имеет непрерывную первую производную. Если функционал L принимает на некоторой функции $f(x)$ экстремальное значение (максимум или минимум), то тогда для функции $f(x)$ выполняется следующее обыкновенное дифференциальное уравнение[13],

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0.$$

Вышеприведенное уравнение называется уравнением Эйлера-Лагранжа, а функция $f(x)$, удовлетворяющая ему – экстремалью функционала L.

Пример.

Найти кратчайший путь от точки 1 с координатами *f(a) = c* до точки 2 с координатами *f(b) = d* (рис. 3.3).

Из точки 1 в точку 2 можно попасть различными путями, которые определяются функциями *f(x)* различных классов, например α, β, γ. Но нам известно, что кратчайший путь из одной точки в другую – это отрезок прямой линии. Постараемся получить этот результат с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа.

В качестве функционала выберем длину пути между точками 1 и 2:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,dx.$$

Запишем для этого функционала уравнение Эйлера-Лагранжа, учитывая, что $F=\sqrt{1+(f')^2}$ не зависит от *f(x)* и $\frac{\partial F}{\partial f}=0$:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}=0.$$

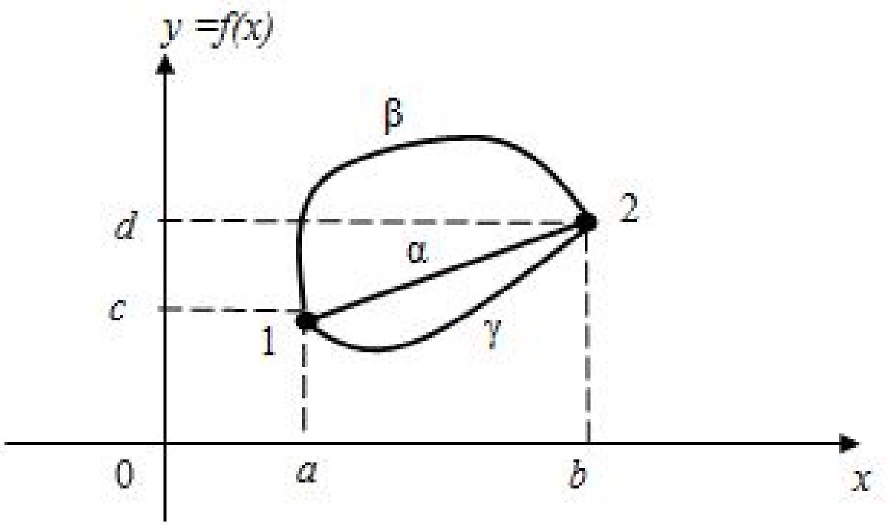


Рис.3.3 - К определению понятий функционала и экстремали

Учитывая, что $\frac{d}{dx}=\frac{d}{df'}\frac{df'}{dx}$, получаем

$$\frac{d}{df'}\frac{df'}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}=\frac{\partial^2 F}{\partial (f')^2}\,f''=0.$$

Для выполнения уравнения Эйлера-Лагранжа необходимо, чтобы:

$f''=0 \quad \Rightarrow \quad f=C_1x+C_2.$

С учетом граничных значений получаем:

$$C_1 a + C_2 = c\,;$$
$$C_1 b + C_2 = d\,.$$

Откуда:

$$C_1 = \frac{d-c}{b-a};$$
$$C_2 = \frac{cb-da}{b-a}.$$

Итак, экстремалью функционала $L = \int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'\right)^2}\,dx$ является функция $f(x) = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{cb-da}{b-a}$, описывающая отрезок прямой, проходящей через точки 1 и 2; при этом $L = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$ - длина гипотенузы треугольника с катетами *(b - a)* и *(d - c).*

3.2.2. Функционал с несколькими экстремалями

В случае, если функционал *L* зависит от *n* экстремалей $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$, $L = \int\limits_a^b F[x, f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), f_1{}'(x), f_2{}'(x), \ldots f_n{}'(x)]dx$, уравнение Эйлера-Лагранжа превращается в систему уравнений и записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial f_1} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial f_1{}'} = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial f_2} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial f_2{}'} = 0; \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F}{\partial f_n} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial f_n{}'} = 0. \end{cases}.$$

3.3. Функция распределения погонного усилия прокатки по ширине полосы с учетом поперечного перемещения металла в очаге пластической деформации

3.3.1. Расчетная схема и мощность прокатки

Для разработки математической модели распределения погонного усилия прокатки по ширине полосы была использована идея поперечного перемещения металла в очаге деформации и вариационного принципа возможного изменения деформированного состояния (принцип Журдена). При этом был применен метод определения реакции связи на основе отбрасывания связи, т.е. перевода функции из разряда заданных в разряд варьируемых. Следуя этому методу, рабочим валкам придали малую вертикальную поступательную скорость. В дальнейшем восстановим связь устремлением скорости сближения рабочих валков к нулю [14].

При входе в очаг пластической деформации имеет место неравномерность высотной деформации, продольных напряжений и скоростей перемещения (течения) металла по ширине полосы. По сравнению со среднеинтегральными величинами деформаций и скоростей величины их неравномерностей существенно малы, поэтому обобщенно эти неравномерности можно выразить через неравномерность скоростей входа металла в очаг деформации.

Опишем входную неравномерность скоростей функцией $f'(y) << 1$, а выходную – функцией $\varphi'(y) << 1$; в частном случае при плоской схеме деформации $f'(y) = \varphi'(y)$. Предположим, что рабочие валки в процессе прокатки сближаются с пренебрежимо малой скоростью $W'(y) << 1$, как изображено на рис. 3.4.

Для очага исследования процесса пластической деформации выбираем модель жёстко-пластической среды с упругими внешними зонами. Принимаем, что металл, не обладая упругостью в очаге деформации (при достаточно больших пластических деформациях упругими можно пренебречь), сразу же приобретает ее на выходе из очага деформации.

Прокатка ведется без уширения, т.е. $f(0) = f(B) = 0$ и $\varphi(0) = \varphi(B) = 0$, где B - полуширина полосы.

Применяем вариационный принцип Журдена к жёстко-пластическому очагу деформации с упругими внешними зонами:

$$\delta\left(\iiint\limits_{\Omega} \Pi_v d\Omega - \iint\limits_{S} \vec{\sigma}^n \vec{v} ds + \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{S_i} \tau_s |\Delta v_i| ds\right) = 0,$$

где $\Pi_v = \int\limits_0^{\mathrm{H}} \mathrm{T} d\mathrm{H}$ - скоростной потенциал,

T и H - интенсивности касательных напряжений и скоростей сдвиговых деформации,

τ_s - предел текучести деформируемого материала на сдвиг;

Ω – объем ½ очага деформации, т.к. задача симметричная;

$\vec{\sigma}^n$, $\vec{v}$ - полное напряжение на поверхности S с единичной внешней нормалью $\vec{n}$ и соответствующая скорость перемещения;

Δv_i - скачок скоростей на i – ой поверхности среза S_i;

δ - символ варьирования.

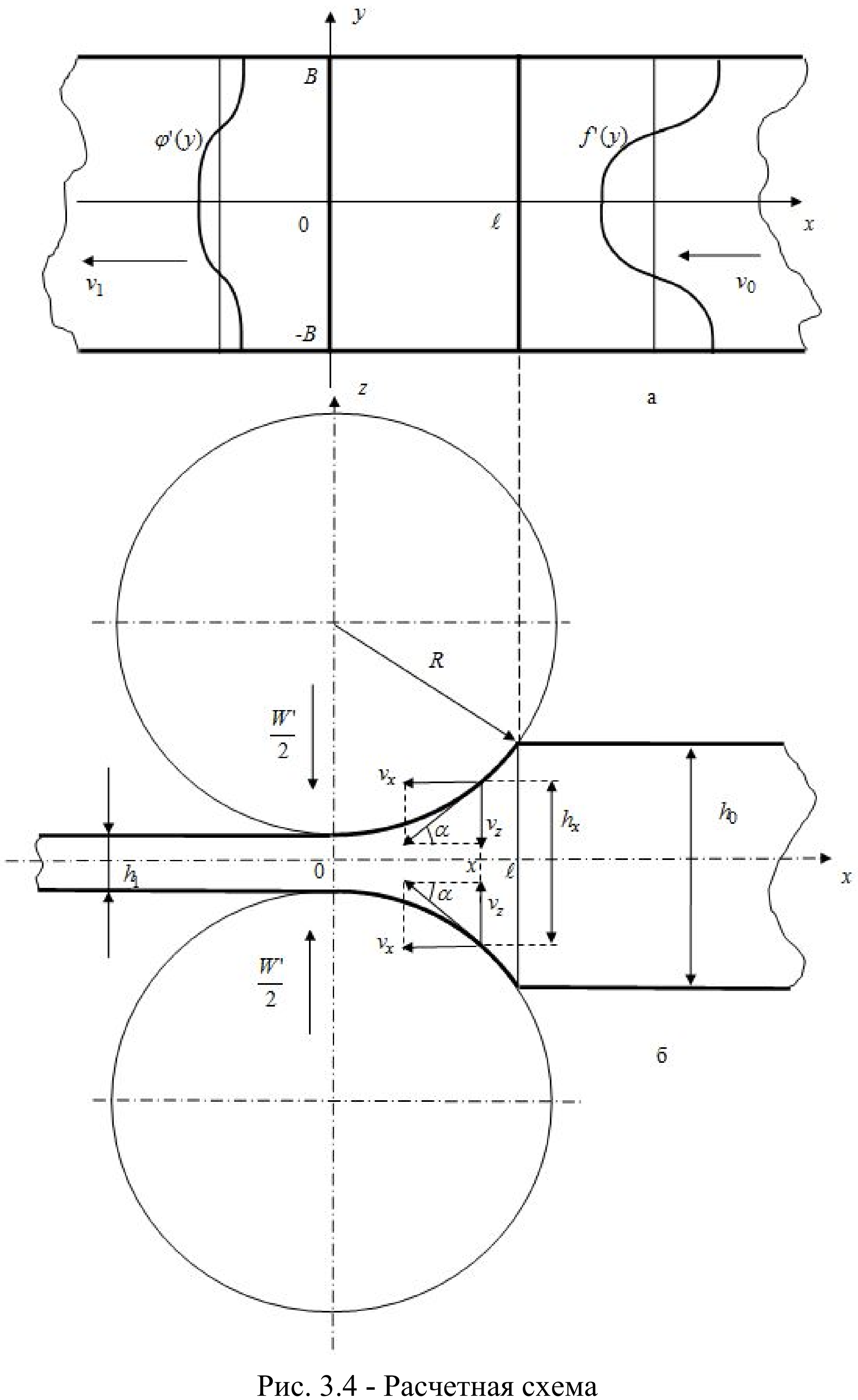


Рис. 3.4 - Расчетная схема

Для жесткопластической среды принцип Журдена запишется следующим образом [14-15]:

$$\delta(\iiint_{\Omega}\tau_s \mathrm{H} d\Omega - \iint_{S}\vec{\sigma}^{n}\vec{v}ds + \sum_{i=1}^{n}\iint_{S_i}\tau_s\left|\Delta v_i\right|ds) = 0 . \qquad (3.3)$$

Выражение, заключенное в круглых скобках, является функционалом и представляет собой мощность прокатки.

Первый интеграл представляет собой мощность внутренних сопротивлений, второй - мощность внешних сил на границах очага деформации - сил трения скольжения между валками и полосой, переднего и заднего натяжения, усилия сближающихся со скоростью W' рабочих валков, третий - мощности среза. Одну из составляющих мощности переднего натяжения назовем мощностью, расходуемой на накопление полосой потенциальной энергии.

Выражение для распределения продольных скоростей по ширине полосы запишем в предположении, что входная неравномерность скоростей $f'(y)$ переходит в выходную пропорционально обжатию:

$$v_x(y) = \overline{v_x}\left[1 + f'(y)\frac{h_x - h_1}{\Delta h} + \varphi'(y)\frac{h_0 - h_x}{\Delta h}\right], \qquad (3.4)$$

где $\Delta h = h_0 - h_1$ - абсолютное обжатие; $h_x = h_1 + \Delta h\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$ - текущая толщина полосы в очаге деформации, аппроксимированная квадратичной параболой; $v_x(y)$ - распределение продольных скоростей металла по ширине полосы в сечении x, отнесенное к окружной скорости валка $v_{валка}$; $\bar{v}_x$ - среднее по ширине значение скорости металла в сечении x, отнесенное к окружной скорости валка $v_{валка}$; $\bar{v}_0$ - средняя по ширине величина входной скорости полосы, отнесенная к окружной скорости валка $v_{валка}$; $\bar{v}_1$ - средняя по ширине величина выходной скорости полосы, отнесенная к окружной скорости валка $v_{валка}$.

В соответствии с расчетной схемой закон постоянства секундных объемов с учетом поступательного движения рабочих валков запишется следующим образом [14]:

$$h_1\bar{v}_1 = h_x\bar{v}_x + \overline{W}'x ,$$

где $\overline{W}'$ - среднее по ширине значение вертикальной скорости валков, отнесенное к окружной скорости валка $v_{валка}$.

Средняя по ширине полосы величина скорости деформации в сечении x:

$$\bar{\xi}_x = \frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} = -\frac{h_1 v_1}{h^2}h' - \left(\frac{\overline{W}'}{h} - \frac{\overline{W}'x}{h^2}h'\right) = -\left(\frac{\bar{v}_x h'}{h} + \frac{\overline{W}'}{h}\right). \qquad (3.5)$$

Отсюда:

$$\bar{v}_x = -\left(\bar{\xi}_x\frac{h}{h'} + \frac{\overline{W}'}{h'}\right). \qquad (3.6)$$

На основании (3.4)-(3.6) получим выражение для скорости деформации ξ_x:

$$\xi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \overline{\xi_x}\left[1 + \frac{\varphi' h_0 - f' h_1}{\Delta h}\right] + \overline{W'}\left(\frac{\varphi' - f'}{\Delta h}\right),$$

где $\overline{\xi}_x = \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x}$ - средняя по ширине полосы величина скорости деформации в сечении x.

Исходя из кинематической допустимости поля скоростей на поверхности валка, получим $\frac{v_z}{v_x} = tg\alpha = \frac{1}{2}\frac{dh}{dx} = \frac{h'}{2}$. Принимая высотную деформацию постоянной по высоте, получим $\xi_z = \frac{v_z}{z}$. На поверхности полосы $\xi_z = v_x \frac{h'}{h} + \frac{W'}{h}$.

Имея в виду (3.4) и (3.6), получим:

$$\xi_z = -\left(\overline{\xi}_x + \frac{\overline{W}'}{h}\right)\left[1 + f'\frac{h - h_1}{\Delta h} + \varphi'\frac{h_0 - h}{\Delta h}\right] + \frac{W'}{h}. \tag{3.7}$$

Из условия несжимаемости среды получим выражение для скорости деформации по оси y:

$$\xi_y = \overline{\xi_x}(f' - \varphi')\frac{h}{\Delta h} + \frac{\overline{W}'}{h}\left[1 + f'\frac{2h - h_1}{\Delta h} - \varphi'\frac{2h - h_0}{\Delta h}\right] - \frac{W'}{h}. \tag{3.8}$$

Выражение для скорости перемещения металла по ширине получим, проинтегрировав (3.8) по переменной y:

$$v_y = \frac{-\overline{v}_x h' + \overline{W}'}{\Delta h}(f - \varphi) - \frac{\overline{W}'}{h}\left(f\frac{h_1}{\Delta h} - \varphi\frac{h_0}{\Delta h} - y + C_y\right) - \frac{W}{h},$$

где $C_y = 0$ в силу граничных условий $v_y\big|_{y=0} = 0$ и $W\big|_{y=0} = 0$.

Интенсивность скоростей деформаций вычислим, пренебрегая влиянием сдвиговых деформаций, используя выражения (3.5), (3.7) и (3.8):

$$\mathrm{H} = 2\sqrt{\xi_x^2 - \xi_y \xi_z} = 2\left|\overline{\xi}_x\right| - \overline{W}'\frac{1}{h} + \left(\overline{W}'\right)^2 \frac{1}{\left|\overline{\xi}_x\right|}\frac{1}{h^2} +$$

$$+ f'\left[\left|\overline{\xi}_x\right|\frac{h - 2h_1}{\Delta h} - \overline{W}'\frac{2h - 2h_1}{h\Delta h} + \left(\overline{W}'\right)^2 \frac{1}{\left|\overline{\xi}_x\right|}\frac{3h - 2h_1}{h^2 \Delta h}\right] +$$

$$+ \varphi'\left[\left|\overline{\xi}_x\right|\frac{2h_0 - h}{\Delta h} - \overline{W}'\frac{2h_0 - 2h}{h\Delta h} + \left(\overline{W}'\right)^2 \frac{1}{\left|\overline{\xi}_x\right|}\frac{2h_0 - 3h}{h^2 \Delta h}\right] +$$

$$+ (f')^2\left[\left|\overline{\xi}_x\right|\frac{h_1^2 - hh_1 + h^2}{(\Delta h)^2} - \overline{W}'\frac{3h^2 + h_1^2 - 2hh_1}{h(\Delta h)^2} + \left(\overline{W}'\right)^2 \frac{1}{\left|\overline{\xi}_x\right|}\frac{3h^2 - 3hh_1 + h_1^2}{h^2(\Delta h)^2}\right] +$$

$$
+(\varphi')^2\left[\left|\overline{\xi}_x\right|\frac{h_0^2-hh_0+h^2}{(\Delta h)^2}-\overline{W}'\frac{3h^2+h_0^2-2hh_0}{h(\Delta h)^2}+\left(\overline{W}'\right)^2\frac{1}{\left|\overline{\xi}_x\right|}\frac{3h^2-3hh_0+h_0^2}{h^2(\Delta h)^2}\right]+
$$
$$
+f'\varphi'\left[\left|\overline{\xi}_x\right|\frac{-2h_1h_0+h_0h+h_1h-2h^2}{(\Delta h)^2}-\left(\overline{W}'\right)\frac{-6h^2+2h_0h+2h_1h-2h_0h_1}{h(\Delta h)^2}+\right.
$$
$$
\left.+\left(\overline{W}'\right)^2\frac{1}{\left|\overline{\xi}_x\right|}\frac{-6h^2+3h_1h+3h_0h-2h_1h_0}{h^2(\Delta h)^2}\right]+W'\left(\frac{1}{h}-2\overline{W}'\frac{1}{\left|\overline{\xi}_x\right|}\frac{1}{h^2}\right)+
$$
$$
+W'f'\left(-\frac{h_1-2h}{h\Delta h}+\overline{W}'\frac{1}{\left|\overline{\xi}_x\right|}\frac{2h_1-3h}{h^2\Delta h}\right)+W'\varphi'\left(-\frac{2h-h_0}{h\Delta h}+\overline{W}'\frac{1}{\left|\overline{\xi}_x\right|}\frac{3h-2h_0}{h^2\Delta h}\right)+\ +(W')^2\frac{1}{\left|\overline{\xi}_x\right|}\frac{1}{h^2}.
$$
(3.9)

Для вычисления мощности внутренних сопротивлений необходимо проинтегрировать выражение (3.9) в соответствии с уравнением (3.3) и спецификой выбранной модели среды:

$$
\frac{N_{внут}}{\tau_s}=\int_0^B\int_0^l\int_0^h \mathrm{H}\,dydxdz\,. \qquad (3.10)
$$

Нет никакой необходимости вычислять все компоненты функционала (3.3), необходимо вычислить те члены, которые войдут в уравнения Эйлера-Лагранжа после дифференцирования по φ, φ', W и W' [13]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial \varphi}-\dfrac{d}{dy}\left[\dfrac{\partial F}{\partial \varphi'}\right]=0 \\
\dfrac{\partial F}{\partial W}-\dfrac{d}{dy}\left[\dfrac{\partial F}{\partial W'}\right]=0\,.
\end{cases} \qquad (3.11)
$$

Сначала о дифференцировании по φ' выражения (3.9): те слагаемые, которые не содержат φ', при записи уравнения Эйлера-Лагранжа для экстремали φ исчезнут; исчезнут и те слагаемые, которые содержат W' и $\overline{W}'$ при устремлении последних к нулю. Слагаемые, содержащие $\frac{1}{\left|\overline{\xi}_x\right|}$, после интегрирования и устремления W' к нулю, также обращаются в нуль.

Теперь о дифференцировании по W' компоненты функционала, содержащей интенсивность скоростей деформаций H. Применяя аналогичные рассуждения, оставляем только слагаемые, содержащие W'.

Таким образом, с точки зрения записи уравнений Эйлера-Лагранжа нас интересует следующая часть выражения (3.9), а именно:

$$
\mathrm{H}=\ldots+(\varphi')^2\left[\left|\overline{\xi}_x\right|\frac{h_0^2-h_0h+h^2}{(\Delta h)^2}\right]+f'\varphi'\left[\left|\overline{\xi}_x\right|\frac{-2h_1h_0+h_1h+h_0h-2h^2}{(\Delta h)^2}\right]+
$$
$$
+W'\frac{1}{h}+W'f'\left[-\frac{h_1-2h}{h\Delta h}\right]+W'\varphi'\left[-\frac{2h-h_0}{h\Delta h}\right];
$$

После интегрирования по объему получим:

$$\int_0^B\int_0^\ell\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mathrm{H}dzdxdy = \ldots + \int_0^B\left\langle\int_0^\ell\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{(\varphi')^2\left[\left|\bar{\xi}_x\right|\frac{h_0^2 - h_0 h + h^2}{(\Delta h)^2}\right] + \right.\right.$$

$$\left. + f'\varphi'\left[\left|\bar{\xi}_x\right|\frac{-2h_1h_0 + h_1h + h_0h - 2h^2}{(\Delta h)^2}\right]\right\}dzdx + \qquad (3.12)$$

$$\left. + \ell W'\left(1 + f'\frac{h_1}{\Delta h} + \frac{2}{3}f' - \varphi'\frac{h_0}{\Delta h} - \frac{2}{3}\varphi'\right)\right\rangle dy\,.$$

Теперь рассмотрим мощность сил трения скольжения между валками и полосой:

$$\frac{N_{ск}}{\tau_S} = 4\mu\int_0^B dy\int_0^\ell\left|\Delta v_{ск}\right|dx = 4\mu\int_0^B dy\int_0^\ell\sqrt{\left|\Delta v_\tau^2 + v_y^2\right|}dx\,,$$

где $\Delta v_{ск}$ - скорость скольжения металла по поверхности валка, $\Delta v_\tau = v_x - 1$ - скорость скольжения металла по поверхности валка в направлении прокатки, отнесенная к окружной скорости валка, μ - коэффициент трения.

После несложных преобразований получим:

$$\frac{N_{ск}}{\tau_S} = 4\mu\ell\int_0^B dy\int_0^1\frac{\Delta h}{h}\sqrt{\left[\left(t^2 - t_н^2\right) + \frac{\overline{W}'\ell}{\Delta h}\left(t - t_н\right)\right]^2 + \left\{\left[-\frac{3\overline{W}'}{\Delta h}t^2 + \frac{2\bar{v}_1 h_1}{\ell\Delta h}t - \frac{\overline{W}'h_1}{(\Delta h)^2}\right](\varphi - f) - \right.}$$

$$\ldots\ldots\overline{\left.-\frac{\overline{W}'}{\Delta h}\left(f\frac{h_1}{\Delta h} - \varphi\frac{h_0}{\Delta h} - y\right) - \frac{W}{\Delta h}\right\}^2}\quad dt\,.$$

Рассмотрим мощности переднего и заднего натяжения.

В плоскости входа в очаг пластической деформации неравномерность скоростей определяется неварьируемой функцией $f'(y)$, поэтому мощность сил заднего натяжения с точки зрения записи уравнений Эйлера-Лагранжа нас не интересует, и она не рассматривается. Обратимся к той части второго слагаемого уравнения (3.3), которая относится к переднему натяжению:

$$\iint_S \sigma_x\delta v_x dS = -\iint_S\frac{\sigma_x\delta\sigma_x}{E}\bar{v}_x dS = -\delta\iint_S\frac{\sigma_x^2}{2E}\bar{v}_x dS\,, \qquad (3.13)$$

где σ_x - напряжения в полосе на выходе из очага деформации, v_x - выходные скорости металла по ширине полосы, S - сечение полосы на выходе из очага деформации.

Интеграл под знаком вариации в выражении (3.13) назван мощностью, расходуемой на накопление полосой потенциальной энергии. Поясним вывод выражения (3.13):

$$\sigma_x(y) = \sigma_1 - \varphi'(y)E\,, \tag{3.14}$$

где σ_1 - среднее по ширине переднее удельное натяжение; модуль упругости E и σ_1 отнесены к пределу текучести на сдвиг τ_S.

Выходные скорости металла по ширине полосы:

$$v_1(y) = \bar{v}_1\left[1 + \varphi'(y)\right]. \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15) следует:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_x(y)}{E} = \frac{v_1(y)}{\bar{v}_1} - 1. \tag{3.16}$$

Проварьируем (3.16):

$$\delta v_x = -\delta\sigma_x \frac{\bar{v}_1}{E}.$$

Если полоса не теряет плоской формы, разность скоростей на выходе из очага деформации $\varphi'(y)$ переходит в разность деформаций $\varepsilon_x(y)$, а значит и в разность напряжений $\varphi' E$. В самом деле, на выходе из очага деформации скорость полосы равна $v_1(y)$, а на некотором расстоянии от него - $\bar{v}_1$. Тогда при линейном напряженном и объемном деформированном состоянии полосы за очагом деформации получим:

$$v_1(y)\times h_1(y)\times B(y)\times d(y) = \bar{v}_1 \times h_1(y)\times\left[1-\varepsilon_z(y)\right]\times B\times\left[1-\varepsilon_y(y)\right]\times d(y)\times\left[1+e(y)\right],$$

где $d(y)$ - плотность материала полосы, $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

Полагая, что $d(y) = const$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$, $e = \varepsilon_x(1-2\nu)$, где ν - коэффициент Пуассона, получаем:

$$v_1(y) = \bar{v}_1\left[1+\nu\varepsilon_x\right]\times\left[1+\nu\varepsilon_x\right]\times\left[1+\varepsilon_x(1-2\nu)\right]. \tag{3.17}$$

Пренебрегая в выражении (3.17) степенями, выше первой, получаем $\frac{v_1(y)}{\bar{v}_1} = 1 + \varepsilon_x(y)$, откуда и следует, что разность скоростей на выходе из очага деформации $\varphi'(y)$ переходит в разность деформаций $\varepsilon_x(y)$:

$$\varepsilon_x(y) = \frac{\Delta\lambda(y)}{\lambda} = \frac{v_1(y) - \bar{v}_1}{\bar{v}_1} = \varphi'(y).$$

Итак, мощность, расходуемая на накопление полосой потенциальной энергии, выражается следующим образом:

$$\frac{N_{пот}}{\tau_S} = \bar{v}_1 h_1 \int_0^B \frac{\sigma_x^2}{2E} dy = \bar{v}_1 h_1 \int_0^B \frac{\sigma_1^2 - 2\varphi'(y)E\sigma_1 + [\varphi'(y)E]^2}{2E} dy =$$

$$= \frac{\bar{v}_1 h_1 \sigma_1^2}{2E} B + \bar{v}_1 h_1 \int_0^B \frac{(\varphi')^2 E}{2} dy .$$

Мощность распределенного по ширине полосы усилия прокатки:

$$\frac{N_p}{\tau_S} = \int_0^B W' \, p(y) dy ,$$

где $p(y)$ - искомая функция распределения давления прокатки по ширине полосы, приведенная к τ_S.

Рассмотрим выражение для мощности среза:

$$\frac{N_{срез}}{\tau_S} = \iint_{S_{срез}} |\Delta v| dS_{срез} ,$$

где $S_{срез}$ - поверхность среза, $|\Delta v|$ - абсолютная величина разности скоростей течения металла на разных сторонах поверхности среза.

Рассмотрим выражения для скоростей течения металла в очаге деформации:

$$v_x(y) = \overline{v_x} \left[1 + f'(y) \frac{h_x - h_1}{\Delta h} + \varphi'(y) \frac{h_0 - h_x}{\Delta h} \right],$$

$$v_y = \frac{-\bar{v}_x h' + \overline{W}'}{\Delta h} [f(y) - \varphi(y)] - \frac{\overline{W}'}{h} \left[f(y) \frac{h_1}{\Delta h} - \varphi(y) \frac{h_0}{\Delta h} - y \right] - \frac{W}{h} ,$$

$$v_z = \left\{ h' \overline{v_x} \left[1 + f'(y) \frac{h_x - h_1}{\Delta h} + \varphi'(y) \frac{h_0 - h_x}{\Delta h} \right] + W' \right\} \frac{z}{h} .$$

Так как v_y и v_z вне очага деформации равны нулю, то $|\Delta v_y| = |v_y|$ и $|\Delta v_z| = |v_z|$. Далее замечаем, что $v_y \Big|_{x=0} = 0$ и $v_z \Big|_{x=0} = 0$ в силу того, что $h' \Big|_{x=0} = 0$. В сечении входа v_z не зависит от $\varphi'(y)$, и производные мощности среза по экстремалям не попадут в уравнения Эйлера-Лагранжа. Остается рассмотреть мощность среза от v_y во входном сечении. Ее величина относится к величине мощности сил трения, как $h_0 / 2\ell$; при тонколистовой прокатке это отношение мало, поэтому мощность среза исключаем из рассмотрения.

Запишем выражение для функционала уравнения (3.3):

$$\frac{1}{\tau_S}\left(N_{внут}+N_{ск}+N_{пот}-N_p\right)= \;\ldots\; +\int_0^{В} F(\varphi,\varphi',W,W')dy\,,$$

где

$$F=\int_0^{\ell}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{(\varphi')^2\left[\left|\bar{\xi}_x\right|\frac{h_0^2-h_0h+h^2}{(\Delta h)^2}\right]+f'\varphi'\left[\left|\bar{\xi}_x\right|\frac{-2h_1h_0+h_1h+h_0h-2h^2}{(\Delta h)^2}\right]\right\}dzdx+$$

$$+\ell W'\left(1+f'\frac{h_1}{\Delta h}+\frac{2}{3}f'-\varphi'\frac{h_0}{\Delta h}-\frac{2}{3}\varphi'\right)\Bigg\rangle dy+$$

$$+4\mu\ell\int_0^1\frac{\Delta h}{h}\sqrt{\left[\left(t^2-t_н^2\right)+\frac{\overline{W}'\ell}{\Delta h}(t-t_н)\right]^2+\left\{\left[-\frac{3\overline{W}'}{\Delta h}t^2+\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t-\frac{\overline{W}'h_1}{(\Delta h)^2}\right](\varphi-f)-\right.}$$

$$\overline{\left.-\frac{\overline{W}'}{\Delta h}\left(f\frac{h_1}{\Delta h}-\varphi\frac{h_0}{\Delta h}-y\right)-\frac{W}{\Delta h}\right\}^2}\,dt+\bar{v}_1h_1(\varphi')^2\frac{E}{2}-W'p\,. \qquad (3.18)$$

В выражении (3.18) опущены члены, которые не влияют на запись уравнений Эйлера-Лагранжа. Для определения экстремалей $\varphi'(y)$ и $W'(y)$ нужно найти минимум подынтегральной функции (3.18), а для этого решить систему уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}-\dfrac{d}{dy}\left[\dfrac{\partial F}{\partial\varphi'}\right]=0\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial W}-\dfrac{d}{dy}\left[\dfrac{\partial F}{\partial W'}\right]=0\,.\end{cases} \qquad (3.19)$$

Вычислим производные функции F:

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=4\mu\ell\int_0^1\frac{\frac{\Delta h}{h}\left\{\left[-\frac{3\overline{W}'}{\Delta h}t^2+\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t-\frac{\overline{W}'h_1}{(\Delta h)^2}\right](\varphi-f)-\frac{\overline{W}'}{\Delta h}\left(f\frac{h_1}{\Delta h}-\right.\right.}{\sqrt{\left[\left(t^2-t_н^2\right)+\frac{\overline{W}'\ell}{\Delta h}(t-t_н)\right]^2+\left\{\left[-\frac{3\overline{W}'}{\Delta h}t^2+\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t-\right.\right.}}$$

$$\frac{\left.\left.-\varphi\frac{h_0}{\Delta h}-y\right)-\frac{W}{\Delta h}\right\}\times\left[-\frac{3\overline{W}'}{\Delta h}t^2+\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t+\frac{\overline{W}'}{\Delta h}\right]}{\ldots\ldots\overline{\left.\left.-\frac{\overline{W}'h_1}{(\Delta h)^2}\right](\varphi-f)-\frac{\overline{W}'}{\Delta h}\left(f\frac{h_1}{\Delta h}-\varphi\frac{h_0}{\Delta h}-y\right)-\frac{W}{\Delta h}\right\}^2}}dt\,.$$

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi'}=\int_0^{\ell}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{2\varphi'\left[\left|\bar{\xi}_x\right|\frac{h_0^2-hh_0+h^2}{(\Delta h)^2}\right]+f'\left[\left|\bar{\xi}_x\right|\frac{hh_0+hh_1-2h_0h_1-2h^2}{(\Delta h)^2}\right]\right\}dzdx-$$

$$-\ell W'\left(\frac{h_0}{\Delta h}+\frac{2}{3}\right)+\bar{v}_1 h_1 \varphi' E\,;$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'}\right)=\int_0^{\ell}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{2\varphi''\left[\left|\bar{\xi}_x\right|\frac{h_0^2-hh_0+h^2}{(\Delta h)^2}\right]+f''\left[\left|\bar{\xi}_x\right|\frac{hh_0+hh_1-2h_0h_1-2h^2}{(\Delta h)^2}\right]\right\}dzdx-$$

$$-\ell W''\left(\frac{h_0}{\Delta h}+\frac{2}{3}\right)+\bar{v}_1 h_1 \varphi'' E\,;$$

$$\frac{\partial F}{\partial W}=4\mu\ell\int_0^1\frac{\frac{\Delta h}{h}\left\{\left[-\frac{3\overline{W}'}{\Delta h}t^2+\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t-\frac{\overline{W}'h_1}{(\Delta h)^2}\right](\varphi-f)-\right.}{\sqrt{\left[\left(t^2-t_н^2\right)+\frac{\overline{W}'\ell}{\Delta h}(t-t_н)\right]^2+\left\{\left[-\frac{3\overline{W}'}{\Delta h}t^2+\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t-\frac{\overline{W}'h_1}{(\Delta h)^2}\right](\varphi-f)-\right.}}\ldots$$

$$\ldots\frac{\left.-\frac{\overline{W}'}{\Delta h}\left(f\frac{h_1}{\Delta h}-\varphi\frac{h_0}{\Delta h}-y\right)-\frac{W}{\Delta h}\right\}\left(-\frac{1}{\Delta h}\right)}{\ldots\ldots\left.-\frac{\overline{W}'}{\Delta h}\left(f\frac{h_1}{\Delta h}-\varphi\frac{h_0}{\Delta h}-y\right)-\frac{W}{\Delta h}\right\}^2}dt\,;$$

$$\frac{\partial F}{\partial W'}=\ell\left(1+f'\frac{h_1}{\Delta h}+\frac{2}{3}f'-\varphi'\frac{h_0}{\Delta h}-\frac{2}{3}\varphi'\right)-p(y);$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial W'}\right)=\ell f''\left(\frac{h_1}{\Delta h}+\frac{2}{3}\right)-\ell\varphi''\left(\frac{h_0}{\Delta h}+\frac{2}{3}\right)-p'(y);$$

Устремим W' к нулю и проанализируем первое уравнение системы (3.19):

$$4\mu\ell\int_0^1\frac{\frac{\Delta h}{h}\left(\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}\right)^2t^2(\varphi-f)}{\sqrt{\left[\left(t^2-t_н^2\right)\right]^2+\left[\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t(\varphi-f)\right]^2}}dt-\int_0^{\ell}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left\{2\varphi''\left[\left|\bar{\xi}_x\right|\frac{h_0^2-hh_0+h^2}{(\Delta h)^2}\right]+\right.$$

$$\left.+f''\left[\left|\bar{\xi}_x\right|\frac{hh_0+hh_1-2h_0h_1-2h^2}{(\Delta h)^2}\right]\right\}dzdx-\bar{v}_1h_1\varphi''E=0\,. \qquad (3.20)$$

Легко показать, что второе слагаемое левой части уравнения (3.20) по крайней мере на 2-3 порядка меньше третьего слагаемого из-за множителя E, поэтому без ущерба для точности им можно пренебречь. Значение подынтегральной функции первого слагаемого (3.20) всегда определено - когда знаменатель обращается в нуль, числитель также обращается в нуль, и величина предела подинтегральной функции конечна. Для оценки величины первого слагаемого вынесем медленно меняющийся сомножитель $\frac{\Delta h}{h}$ за знак интеграла:

$$4\mu\ell\int_0^1 \frac{\frac{\Delta h}{h}\left(\frac{2\bar{v}_1 h_1}{\ell\Delta h}\right)^2 t^2(\varphi - f)}{\sqrt{\left[\left(t^2 - t_н^2\right)\right]^2 + \left[\frac{2\bar{v}_1 h_1}{\ell\Delta h}t(\varphi - f)\right]^2}}dt \approx$$

$$\approx 4\mu\ell a^2 \frac{\Delta h}{h_{ср}}(\varphi - f)\int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{\left[\left(t^2 - t_н^2\right)\right]^2 + a^2 t^2 (\varphi - f)^2}} = 4\mu\ell a^2 \frac{\Delta h}{h_{ср}}(\varphi - f)J,$$

где $a = \frac{2\bar{v}_1 h_1}{\ell\Delta h}$, $h_{ср} = \left(\frac{h_0 + h_1}{2}\right)$, $J = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{\left[\left(t^2 - t_н^2\right)\right]^2 + a^2 t^2 (\varphi - f)^2}}dt$.

Значение определенного интеграла J для условий тонколистовой прокатки можно приближенно считать равным единице. После линеаризации получили следующее уравнение:

$$4\mu\ell a^2 \frac{\Delta h}{h_{ср}}(\varphi - f) - \bar{v}_1 h_1 \varphi'' E = 0.$$

Перенеся функцию $f(y)$ в правую часть, получим дифференциальное уравнение, связывающее неравномерность скоростей металла на входе в очаг пластической деформации с неравномерностью скоростей металла на выходе:

$$-\frac{\varphi''}{K^2} + \varphi = f, \quad \text{где} \quad K^2 = \frac{16\mu\tau_s h_1}{h_{ср}\Delta h \ell E}. \tag{3.21}$$

Если представить входную неравномерность скоростей металла в виде суммы ряда $f'(y) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cos\left(i\pi\frac{y}{B}\right)$, то $\varphi'(y) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{1}{1+\left(\frac{i\pi}{KB}\right)^2}\cos\left(i\pi\frac{y}{B}\right)$.

Выражение для коэффициента ρ, учитывающего влияние поперечного перемещения металла в очаге пластической деформации:

$$\rho = \frac{\varphi'(0) - \varphi'(B)}{f'(0) - f'(B)} = \frac{1}{1+\left(\frac{i\pi}{KB}\right)^2}. \tag{3.22}$$

Выражение (3.22) показывает, что с увеличением номера гармоники коэффициент ρ уменьшается, т.е. высокочастотные составляющие входной неравномерности скоростей металла сглаживаются лучше.

Коэффициент поперечного течения металла в очаге деформации учитывается в моделях управления плоскостностью и профилем поперечного сечения полосы в станах, оборудованных специальными механизмами, например, осевой сдвижки или скрещивания рабочих валков.

Теперь обратимся ко второму уравнению системы (3.19): при $W' \to 0$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial W}\right|_{W'\to 0}=4\mu\ell\int_0^1\frac{\left(-\frac{1}{h}\right)\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t(\varphi-f)}{\sqrt{\left(t^2-t_н^2\right)^2+\left[\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t(\varphi-f)\right]^2}}dt\,.$$

Вынеся из-под знака интеграла среднее значение мало меняющегося сомножителя $\frac{1}{h}$, получим:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial W}\right|_{W'\to 0}=-\frac{4\mu\ell}{h_{cp}}\int_0^1\frac{\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t(\varphi-f)}{\sqrt{\left(t^2-t_н^2\right)^2+\left[\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t(\varphi-f)\right]^2}}dt\,.$$

Второе уравнение системы (3.19) запишется следующим образом:

$$-\frac{4\mu\ell}{h_{cp}}\int_0^1\frac{\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t(\varphi-f)}{\sqrt{\left(t^2-t_н^2\right)^2+\left[\frac{2\bar{v}_1h_1}{\ell\Delta h}t(\varphi-f)\right]^2}}dt-\ell f''\left(\frac{h_1}{\Delta h}+\frac{2}{3}\right)+\ell\varphi''\left(\frac{h_0}{\Delta h}+\frac{2}{3}\right)+p'(y)=0\,.$$

В итоге, после взятия интеграла получим дифференциальное уравнение для функции распределения погонного давления:

$$p'(y)=\frac{4\mu\overline{v_1}h_1}{h_c\Delta h}(\varphi-f)\ln\left|\frac{2\sqrt{(1-t_н^2)^2+a^2(\varphi-f)^2}-2t_н^2+2+a^2(\varphi-f)^2}{a^2(\varphi-f)}\right|+$$
$$+f''\ell\left(\frac{h_1}{\Delta h}+\frac{2}{3}\right)-\varphi''\ell\left(\frac{h_0}{\Delta h}+\frac{2}{3}\right). \qquad (3.23)$$

Для определения граничного условия воспользуемся приемом интегрирования по частям:

$$\frac{P}{2}=\int_0^B p(y)dy=yp(y)\Big|_0^B-\int_0^B yp'(y)dy=Bp(B)-\int_0^B yp'(y)dy\,,$$

где P - усилие прокатки.

Тогда граничное условие будет выглядеть следующим образом:

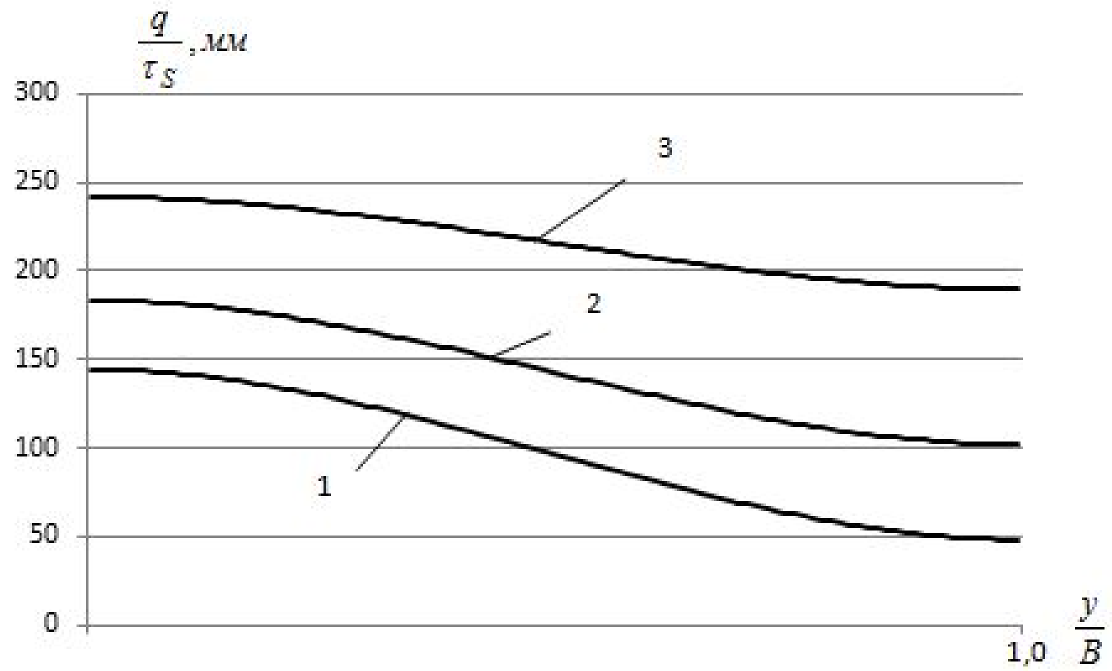
$$p(B)=\frac{\frac{P}{2}+\int_0^B yp'(y)dy}{B}\,. \qquad (3.24)$$

Попытка проинтегрировать в явном виде уравнение (3.23) с граничным условием (3.24) наталкивается на непреодолимые трудности, поэтому расчет нужно вести одним из численных методов, например, методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Усилие прокатки P можно вычислить любым известным методом, например, интегрированием уравнения равновесия или вариационным методом.

3.4. Распределение погонного усилия прокатки по ширине полосы

По разработанной методике были исследованы функции распределения погонного давления по ширине полосы при следующих условиях:

радиус рабочих валков $R = 300,450,600 \quad мм$;
входная толщина $h_0 = 4,0 \quad мм$;
сопротивление пластической деформации $\tau_s = 50 \quad Н/мм^2$;
модуль упругости материала полосы $E = 10^5 \quad МПа$;
относительное обжатие $\varepsilon = 40;60;80 \quad \%$;
коэффициент трения $\mu = 0,1;0,2;0,3$;
полуширина полосы $B = 500;700;900 \quad мм$;
неравномерность входных скоростей $f'(y) = A\cos\left(k\pi \frac{y}{B}\right), \ k = 1;2;3$;
амплитуда неравномерности $A = -0,0005 \div +0,0005$;
упругое контактное сплющивание и прогиб валков отсутствует.



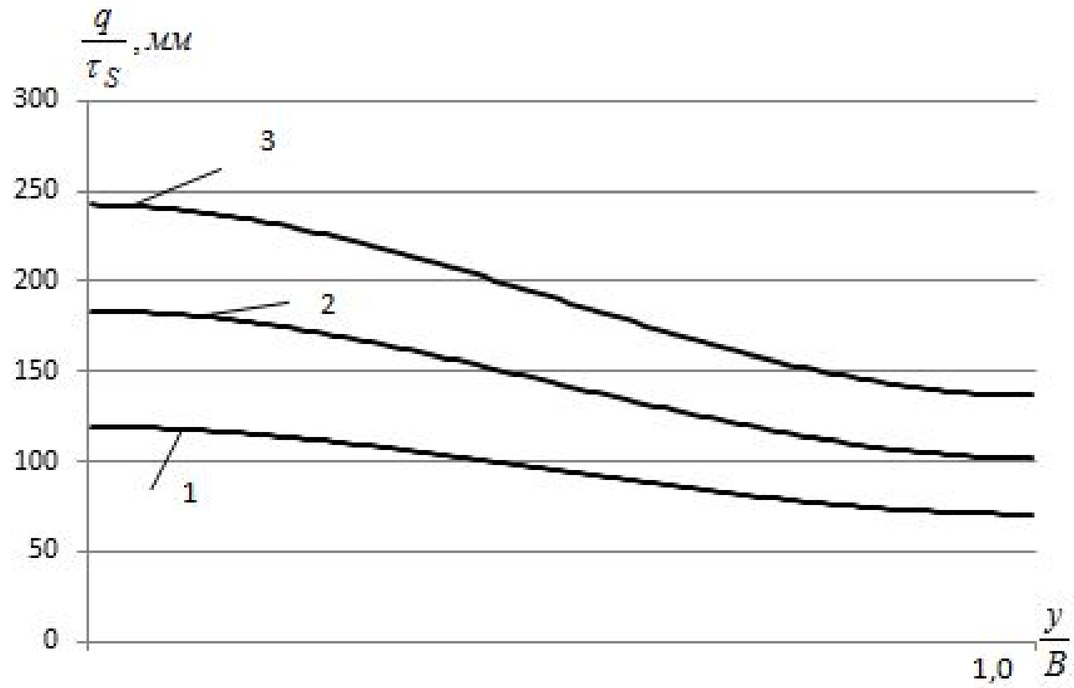
1 - ε = 40%; 2 - ε = 60%; 3 - ε = 80%

Рис. 3.5 - Влияние относительного обжатия на погонное давление

На рис. 3.5 представлена зависимость распределения по ширине полосы погонного давления, отнесенной к пределу текучести, от величины относительного обжатия. Расчеты проводились при следующих условиях: R = 450 мм; μ = 0,2; B = 700 мм; k = 1; A = 0,0005. Видно, что с ростом относительного обжатия усилие прокатки растет, как это и должно быть, а неравномерность распределения погонного давления уменьшается. Это связано с тем, что с увеличением обжатия условия для поперечного течения металла в очаге пластической деформации становятся более благоприятными.

Результаты расчета влияния коэффициента трения на распределение погонного давления для условий R = 450 мм; ε = 60%; B = 700 мм; k = 1; A = 0,0005 представлены на рис. 3.6.

С увеличением коэффициента трения условия для поперечного перемещения металла ухудшаются, и, как следствие, увеличивается степень неравномерности распределения погонного давления по ширине полосы.

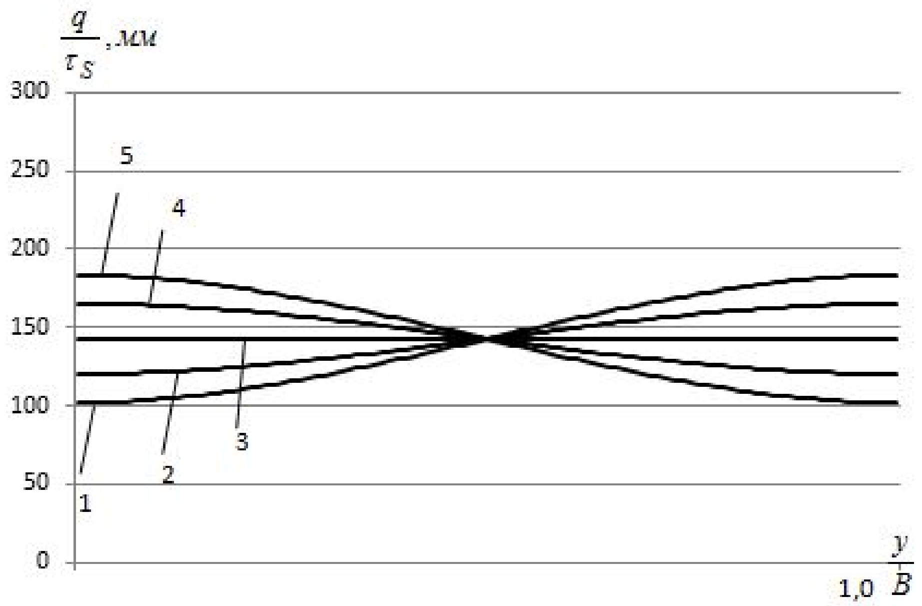


1 - μ = 0.1; 2 - μ = 0.2; 3 - μ = 0.3

Рис. 3.6 - Влияние коэффициента трения на погонное давление

На рис. 3.7 изображена зависимость распределения по ширине полосы погонного давления от величины неравномерности скоростей металла на входе в очаг пластической деформации. Расчеты проводились при следующих условиях: R = 450 мм; ε = 60%; μ = 0,2; k = 1; B = 700 мм.

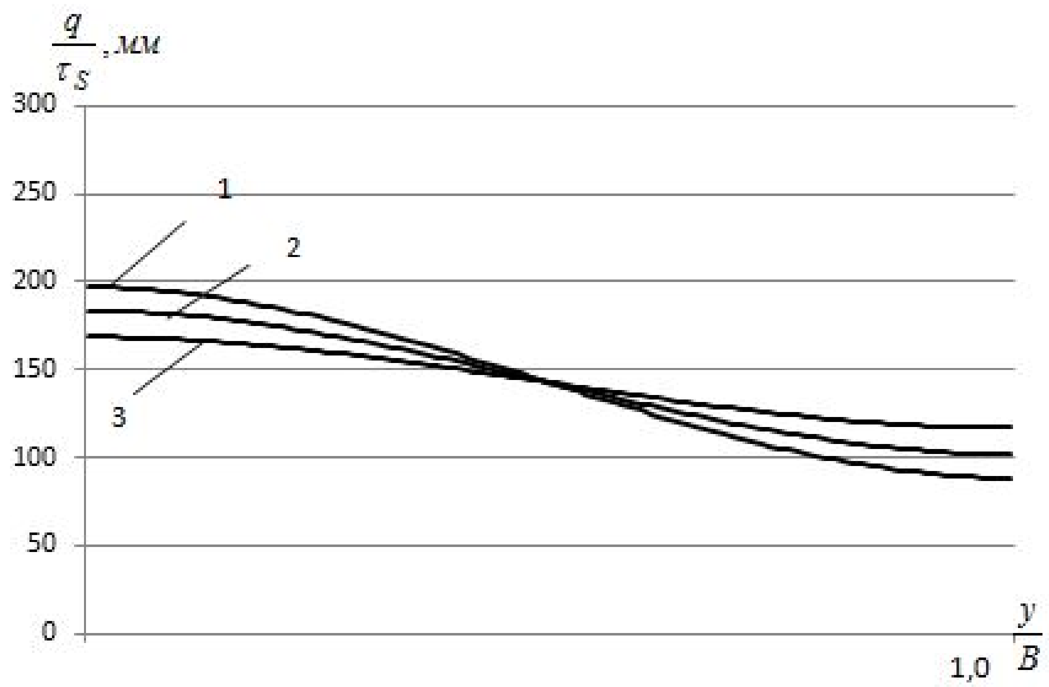
На участках полосы, где металл в направлении прокатки течет со скоростями, превышающими среднюю по ширине, действуют продольные напряжения сжатия; соответственно на этих участках погонное давление более высокая по сравнению с участками полосы, где металл течет со скоростями ниже средней по ширине. Все кривые пересекаются в точке, соответствующей нулю функции $f'(y) = A\cos\left(\pi \frac{y}{B}\right)$. Распределение погонного давления при $A = 0$, равномерно, что полностью соответствует физическому смыслу.



1 - A = -0.0005; 2 - A = - 0.00025; 3 - A = 0;
4 - A = +0.00025; 5 - A = +0.0005

Рис. 3.7 - Влияние амплитуды неравномерности на погонное давление

Зависимость распределения по ширине полосы погонного давления от ширины полосы показана на рис.3.8.

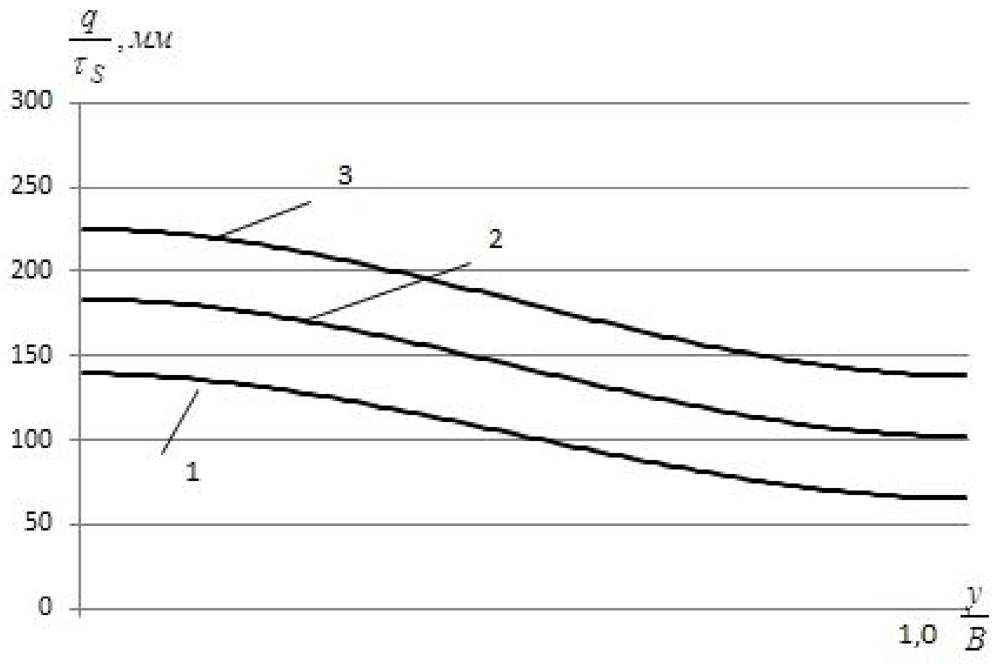


1 - B = 500 мм; 2 - B = 700 мм; 3 - B = 900 мм

Рис. 3.8 - Влияние ширины полосы на погонное давление

Чем шире полоса, тем менее благоприятны условия для поперечного перемещения металла в ее средней части, соответственно, тем больше неравномерность распределения погонного давления, и наоборот: чем уже полоса, тем лучше условия для поперечного перемещения металла, и тем меньше неравномерность распределения погонного давления. Расчеты проводились при следующих условиях: R = 450 мм; ε = 60%; μ = 0,2; k = 1; A = +0,0005. Все кривые также пересекаются в точке, соответствующей нулю функции неравномерности входных скоростей металла.

На рис. 3.9 изображена зависимость распределения по ширине полосы погонного давления от величины радиуса рабочего валка. Расчеты проводились при следующих условиях: B = 700 мм; ε = 60%; μ = 0,2; k = 1; A = +0,0005.

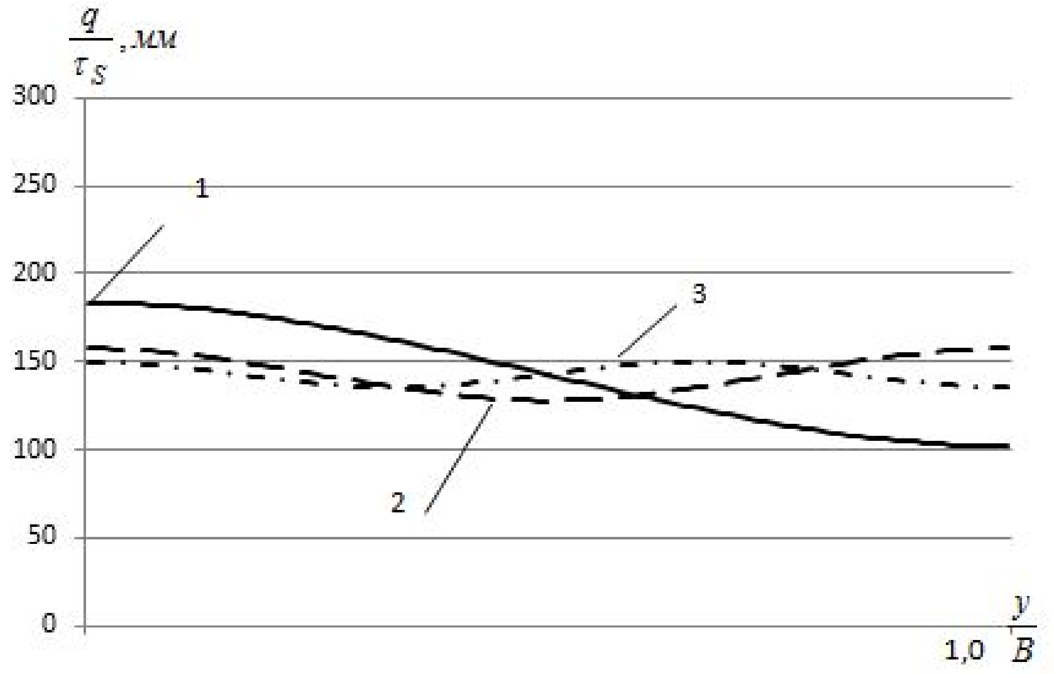


1 - R = 500 мм; 2 - R = 700 мм; 3 - R = 900 мм

Рис. 3.9 - Влияние радиуса рабочего валка на погонное давление

С увеличением радиуса рабочего валка амплитуда неравномерности распределения слабо снижается (в соответствии с увеличением длины очага деформации). Расчеты проводились при следующих условиях: B = 700 мм; ε = 60%; μ = 0,2; k = 1; A = +0,0005.

На рис. 3.10 изображена зависимость распределения по ширине полосы погонного давления от периодичности функции неравномерности входных скоростей течения металла. Расчеты проводились при следующих условиях: R = 450 мм; B = 700 мм; ε = 60%; μ = 0,2; A = +0,0005.



1 - k = 1; 2 - k = 2; 3 - k = 3

Рис. 3.10 - Влияние периода изменения неравномерности скоростей течения металла на погонное давление

С увеличением частоты изменения неравномерности скоростей течения металла в очаге деформации амплитуда неравномерности распределения погонного давления уменьшается. Расчеты проводились при следующих условиях: R = 450 мм; B = 700 мм; ε = 60%; μ = 0,2; A = +0,0005.

Итак, в результате теоретических выкладок в явном виде получена производная функции распределения погонного давления прокатки по ширине полосы; с помощью численных методов исследовано поведение функции распределения погонного давления прокатки по ширине полосы в зависимости от различных факторов.

4. ВЫКАТЫВАЕМОСТЬ ЛОКАЛЬНЫХ УТОЛЩЕНИЙ

В процессе тонколистовой горячей прокатки на рабочих валках клетей чистовой группы часто образуется кольцевой износ, который является причиной появления на горячекатаных полосах местных (локальных) продольных утолщений. Такие утолщения становятся причиной появления дефекта «локальная неплоскостность», которую прокатчики называют «желоб», на полосах при последующей холодной прокатке.

Дефекты, формоизменение которых не зависит от наличия соседних дефектов, и они сами существенно не изменяют условия течения металла в очаге деформации, Ю.В. Зильберг называет единичными [16]. В упомянутой работе установлено, что условие единичности дефекта выполняется при $\frac{\ell_{\partial}}{\ell_{деф}}, \frac{\ell}{\ell_{деф}} \geq 3 \div 5$, где ℓ_{∂} - длина очага деформации, $\ell_{деф}$ - минимальная контактная протяженность дефекта, ℓ - расстояние между соседними дефектами.

В работе [17] на модели упрочняющейся упругопластической среды рассматривается сглаживание при прокатке широких полос поперечной микронеровности, форма которой описывается уравнением $y = h\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 1\right]^2$, где h и 2ℓ - высота и протяженность микронеровности. Теоретические исследования показали уменьшение высоты микронеровности и образование небольшого углубления вокруг нее.

Комплексные исследования выкатываемости локальных утолщений при горячей тонколистовой прокатке, а также их влияния на форму и профиль холоднокатаной полосы проводились на Карагандинском металлургическом комбинате (ныне «АрселорМиттал Темиртау»), причем локальные утолщения исследователи моделировали искусственными кольцевыми проточками рабочих валков чистовой группы клетей различной глубины [18]. Эксперименты проводили в три этапа.

На первом этапе экспериментов опытный рабочий валок с тремя кольцевыми проточками глубиной 1,1; 0,8 и 0,3 мм при ширине каждой 80 мм устанавливали на месте верхнего рабочего валка клети №7 НШСГП 1700. Полосы прокатывали на толщины 6, 5, 4 и 2,5 мм, причем полосы толщиной 2,5 мм прокатывали из подката толщиной 30 и 35 мм.

На втором этапе опытный валок с двумя кольцевыми проточками глубиной 0,4 и 0.2 мм устанавливали на место верхнего рабочего валка клети №9. Прокатку вели по трем вариантам: по первому варианту суммарное обжатие после клети №9 составляло 41,5%, по второму – 44,2%, по третьему – 57,1%.

На третьем этапе рабочий валок с одной кольцевой проточкой глубиной 0,1 мм устанавливали в клети №11, горячую прокатку полос толщиной 2,4 мм вели по обычному режиму обжатий.

По результатам проведенных экспериментов были построены зависимости коэффициента v переноса выработки на валке Δh^* в местное утолщение готовой горячекатаной полосы Δh $\left(v = \dfrac{\Delta h}{\Delta h^*} \right)$[18] (рис. 4.1).

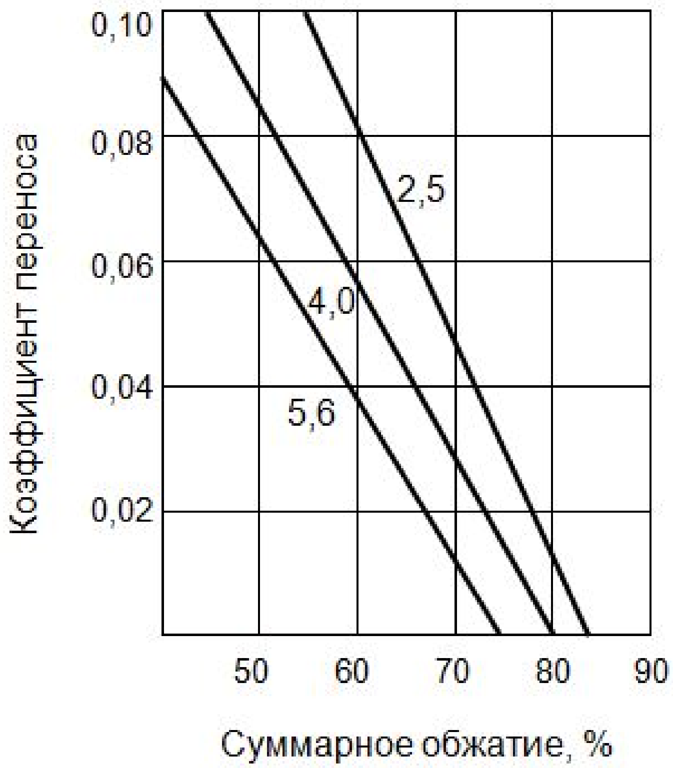
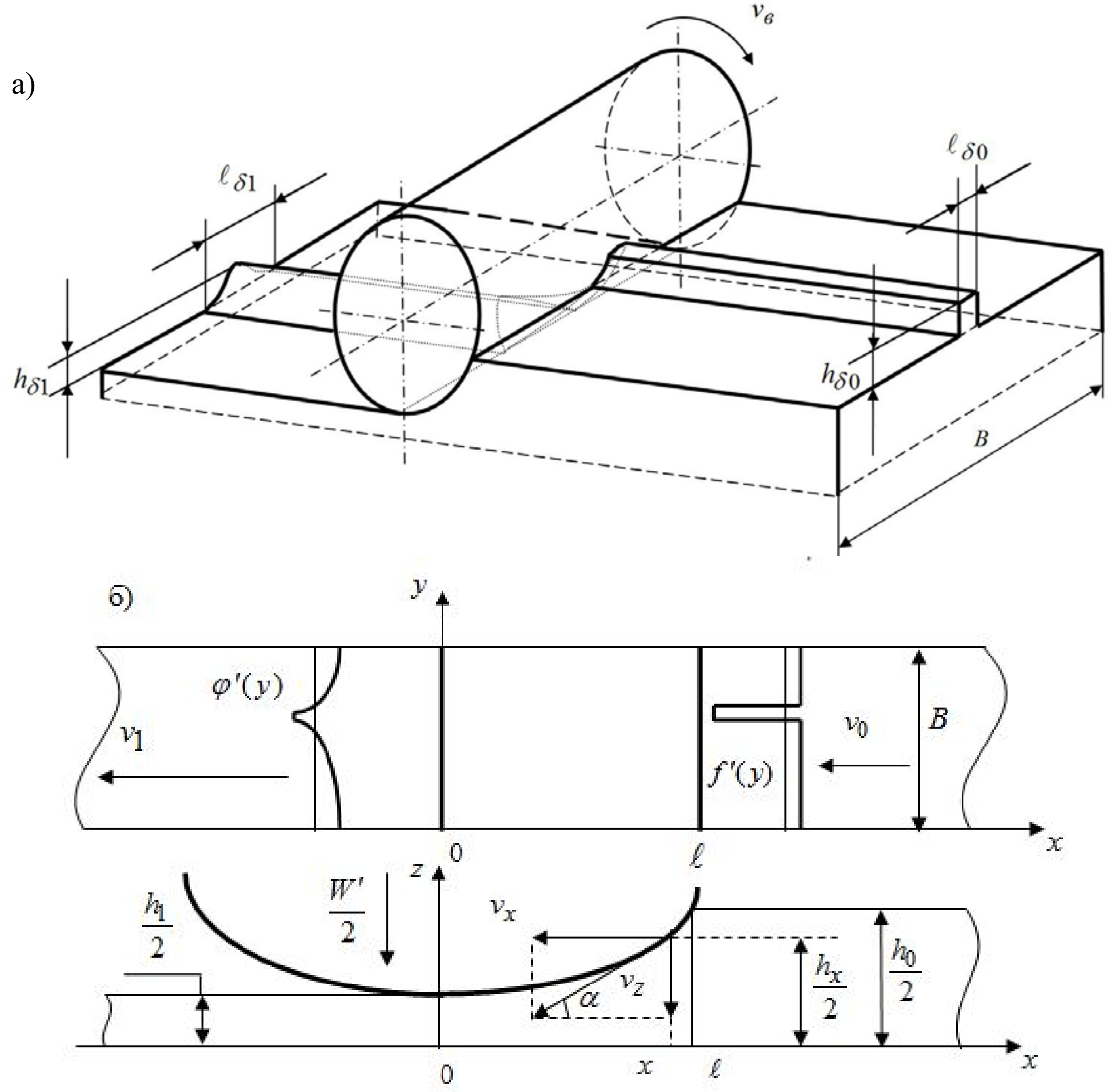


Рис. 4.1 - Зависимость коэффициента переноса на полосу кольцевой выработки валка от последующего суммарного обжатия и конечной толщины полосы (обозначена цифрами)

С целью разработки методики количественной оценки влияния параметров прокатки и полосы на выкатываемость локального утолщения и формообразование полосы воспользуемся методикой вычисления распределения погонного давления прокатки по ширине полосы (рис.4.2).

Неравномерность по ширине полосы обжатия, продольных напряжений, скоростей течения металла, вызванную локальным утолщением, выразим как неравномерность скоростей металла на входе в очаг пластической деформации и опишем самоуравновешенной функцией $f'(y) << 1$; а выходную неравномерность скоростей металла опишем самоуравновешенной функцией $\varphi'(y) << 1$.

Так как величина неравномерности распределения давления прокатки по ширине полосы влияет на величину упругого сплющивания рабочего валка в контакте с полосой значительно больше, чем на величину его прогиба [19-20], то для анализа влияния локальных утолщений прокатываемых полос на величину сплющивания рабочего валка вычисление стрелы прогиба не проводим. Это вполне обосновано, т.к. на длине локального утолщения ось нагруженного рабочего валка практически прямолинейна.



а) параметры локального утолщения; б) расчетная схема

Рис. 4.2. К расчету выкатываемости локальных утолщений

Функция неравномерности скоростей металла при входе полосы в очаг деформации $f'(y)$ вычисляется по следующей формуле:

$$f'(y) = \frac{\delta h_0(y)}{h_0} - \frac{\delta h_1(y)}{h_1}. \tag{4.1}$$

При исследовании выкатываемости локального утолщения функция $\delta h_0(y)$ и величины h_0 и h_1 задаются. Функция поперечной разнотолщинности $\delta h_0(y)$ определяется следующим образом: задаемся высотой локальной разнотолщинности $h_{\delta 0}$, ее шириной $\ell_{\delta 0}$ и положением на полосе (рис. 4.2а), и затем, вычитая из этой функции постоянную составляющую, делаем ее самоуравновешенной (рис. 4.2б).

Функцию $\delta h_1(y)$ необходимо найти. Эта функция определяется упругим сплющиванием рабочего валка в контакте с полосой в месте расположения локального утолщения.

Обычно величину упругого сплющивания рабочего валка в контакте с полосой (рис. 4.3) вычисляют двумя способами. Первый способ заключается в использовании формулы Герца [21]:

$$\Delta R = 0{,}566\frac{p}{E}\ln\frac{4.8E}{pR}, \tag{4.2}$$

где ΔR – величина упругого сплющивания рабочего валка, E – модуль упругости материала рабочего валка, p – давление прокатки на единицу длины контакта (погонное давление), R – радиус рабочего валка.

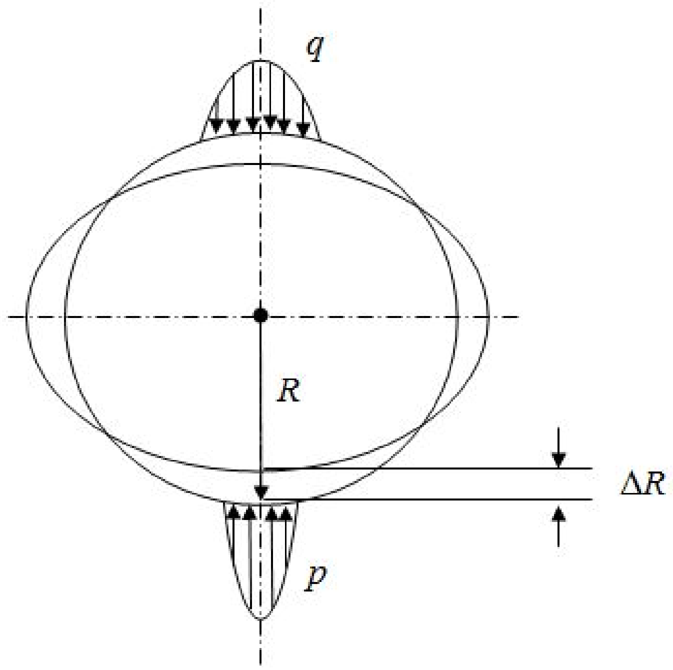


Рис. 4.3 - Упругое сжатие рабочего валка

Второй способ предполагает использование формулы Б.С. Ковальского [22]:

$$\Delta R = 2p\frac{1-\nu^2}{\pi E}\left(\ln\frac{2R}{b} + 0.407\right), \tag{4.3}$$

где ν – коэффициент Пуассона, b – полуширина площадки контакта валка с полосой.

Коэффициент 0,566 в формуле (4.2) представляет собой численное значение выражения $2\frac{1-\nu^2}{\pi}$ при $\nu = 0{,}33$.

В работе [19] на основании решения задачи Фламана для упругой полуплоскости получены общие выражения для величины радиального сжатия рабочего валка в контакте с полосой при различных эпюрах контактного давления. Для параболического распределения величина упругого сжатия радиуса рабочего валка (рис. 4.3) вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta R = 2q\frac{1-\nu^2}{\pi E}\left(\ln\frac{2R}{b}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1-4\nu}{1-\nu}\right)+2p\frac{1-\nu^2}{\pi E}\left(0{,}318+\frac{1}{8}\cdot\frac{\nu}{1-\nu}\right), \tag{4.4}$$

где q – межвалковое давление на единицу длины контакта.

При условиях $\nu = 0{,}3$ и $p = q$ выражение (4.4) превращается в формулу Б.С. Ковальского (4.3).

Вычисление величины сокращения радиусов рабочего валка в середине площадки контакта с полосой и на её краю позволило получить выражение для упругого сплющивания рабочего валка на выходе очага деформации [19]:

$$\Delta R = 2p\frac{1-\nu^2}{\pi E}\left(\ln\frac{2R}{b}+\frac{0.026-0.153\nu}{1-\nu}\right)-1.208\frac{2p}{\pi}\cdot\frac{1-\nu^2}{E}. \tag{4.5}$$

Величина полуширины площадки контакта b в формуле (4.5) представляет собой половину длины дуги контакта рабочего валка с полосой ℓ_∂, определяемую по формуле [23] $\ell_\partial = \sqrt{R\Delta h + x_2^2} + x_2$, где величина x_2 вычисляется по формуле Хичкока: $x_2 = 8\frac{1-\nu^2}{\pi E}Rp_{cp}$, p_{cp} – среднее контактное давление.

Так как функция поперечной разнотолщинности полосы на выходе из очага деформации $\delta h_1(y)$ заранее неизвестна, расчет производится итерационно методом последовательных приближений.

В начале итерационного процесса полагаем, что полоса выходит из очага деформации с поперечной разнотолщинностью $\delta h_1^{(0)}(y) = 0$, т.е. сплющивание рабочего валка в контакте с полосой равномерно по длине бочки рабочего валка, и входная неравномерность скоростей металла определяется как $f'^{(0)}(y) = \frac{\delta h_0(y)}{h_0}$. Решая уравнение (3.21): $-\frac{\varphi''}{K^2}+\varphi = f$, где $K^2 = \frac{16\mu\tau_s h_1}{h_{cp}\Delta h \ell E}$, методом прогонки, находим функцию неравномерности выходных скоростей металла $\varphi'^{(0)}(y)$. Подставляя её в уравнение (3.23)

$$p'(y) = \frac{4\mu \overline{v_1} h_1}{h_c \Delta h}(\varphi - f)\ln\left|\frac{2\sqrt{(1-t_н^2)^2 + a^2(\varphi - f)^2} - 2t_н^2 + 2 + a^2(\varphi - f)^2}{a^2(\varphi - f)}\right| +$$

$$+ f''\ell\left(\frac{h_1}{\Delta h} + \frac{2}{3}\right) - \varphi''\ell\left(\frac{h_0}{\Delta h} + \frac{2}{3}\right),$$

и решая его методом Рунге-Кутта четвертого порядка, определяем распределение погонной нагрузки $p^{(0)}(y)$ и затем, в соответствии с уравнением (4.5), вычисляем сплющивание рабочего валка под полосой $\Delta R^{(0)}(y)$. Вычитая из функции $\Delta R^{(0)}(y)$ постоянную составляющую, находим самоуравновешенную функцию поперечной разнотолщинности полосы $\delta h_1^{(1)}(y)$. Зацикливаем итерационный процесс в соответствии с выражением $f'^{(i)} = K_{it} f'^{(i-1)} + (1 - K_{it})\left(\frac{\delta h_0(y)}{\bar{h}_0} - \frac{\delta h_1^{(i)}(y)}{\bar{h}_1}\right)$, где K_{it} - коэффициент итераций, i - номер итерации, равный $1, 2, \ldots, n$.

Необходимо отметить, что расчет очень чувствителен к изменению функции $f'(y)$, поэтому итерационный процесс уверенно сходится при значениях коэффициента итераций $0.97 \geq K_{it} \geq 0.9$.

В этом же расчете вычисляется функция распределения выходных скоростей металла $\varphi'(y)$ с учетом поперечного перемещения металла в очаге пластической деформации.

Вычисления продолжаются до тех пор, пока не выполнится следующее условие: $\max\left\{\left|\frac{p^{(i)}(y) - p^{(i-1)}(y)}{p^{(i-1)}(y)}\right|\right\} \leq \varepsilon_p$, где ε_p - допустимая погрешность вычисления распределения давления прокатки.

Для теоретического исследования горячей прокатки полос с локальным продольным утолщением и влияния его исходной высоты и ширины на поперечную разнотолщинность готовой полосы введем понятие коэффициента выкатываемости:

$$K_\delta = \frac{h_{\delta 1}}{h_{\delta 0}}, \qquad (4.6)$$

где $h_{\delta 0}$ и $h_{\delta 1}$ - исходная и конечная высота локального утолщения (рис.4.2а). Очевидно, что чем меньше этот коэффициент, тем лучше выкатываемость.

Разработанную методику применили к условиям горячей прокатки на НШСГП 2000 ОАО «НЛМК»: ширина полосы 1500 мм, радиус рабочих валков 400 мм, предел текучести материала полосы τ_S = 5,0 МПа. Варьировали следующие параметры: толщина готовой полосы h_1 = 1,5 мм; 2,0 мм; 2,5 мм; исходная высота локального утолщения $h_{\delta 0}$ = 0,1 мм; 0,125 мм; 0,15 мм; ширина локального утолщения ℓ_{δ} = 30 мм; 60 мм; 90 мм. Кроме того в первом случае варьировали относительное обжатие после клети: ε = 75%; 50%; 25%, а во втором случае – абсолютное обжатие после клети: Δh = 6 мм; 4 мм; 2 мм;

На рис. 4.4 для примера изображен вид расчетного выходного локального утолщения при h_1 = 2,5 мм; Δh = 6 мм; ℓ_{δ} =30 мм; $h_{\delta 0}$ = 0,15 мм.

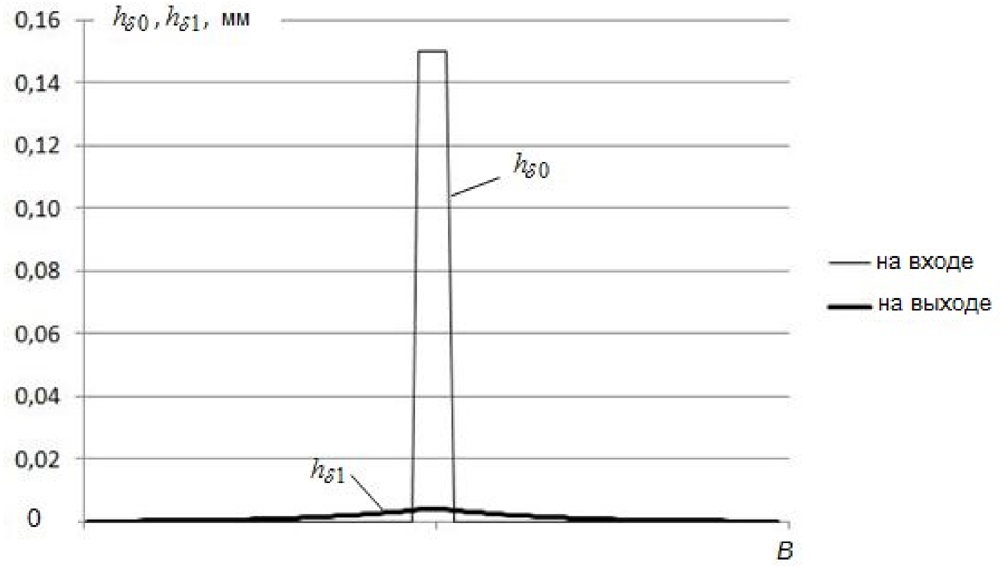


Рис. 4.4 - Локальное (местное) утолщение до и после прокатки

На рис. 4.5 изображен вид выходных локальных утолщений при h_1 = 2,5 мм; Δh = = 6 мм; ℓ_{δ} =30 мм; $h_{\delta 0}$ = 0,1 мм; 0,125 мм; 0,15 мм.

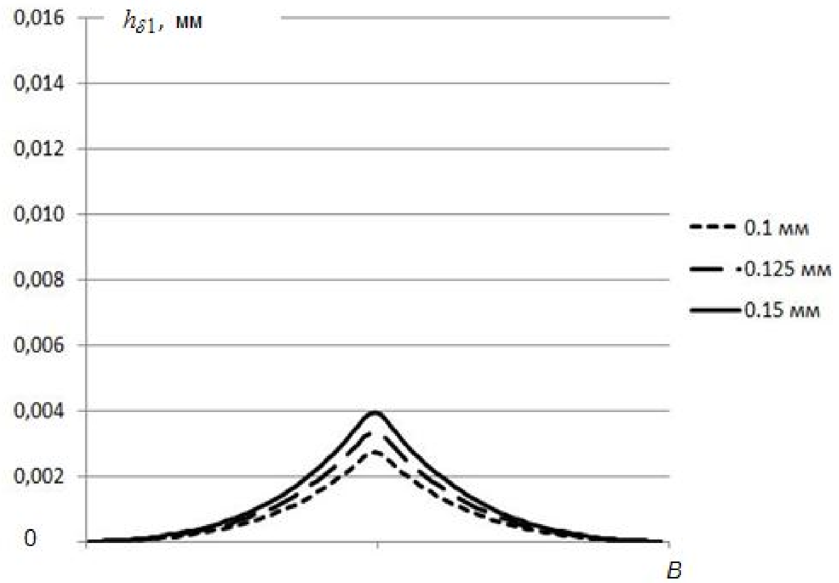


Рис. 4.5 - Локальные утолщения после прокатки

На рис. 4.6 изображены распределения погонного давления прокатки по ширине полосы при h_1 = 2,5 мм; Δh = 6 мм; ℓ_δ =30 мм; $h_{\delta 0}$ = 0,1 мм; 0,125 мм; 0,15 мм.

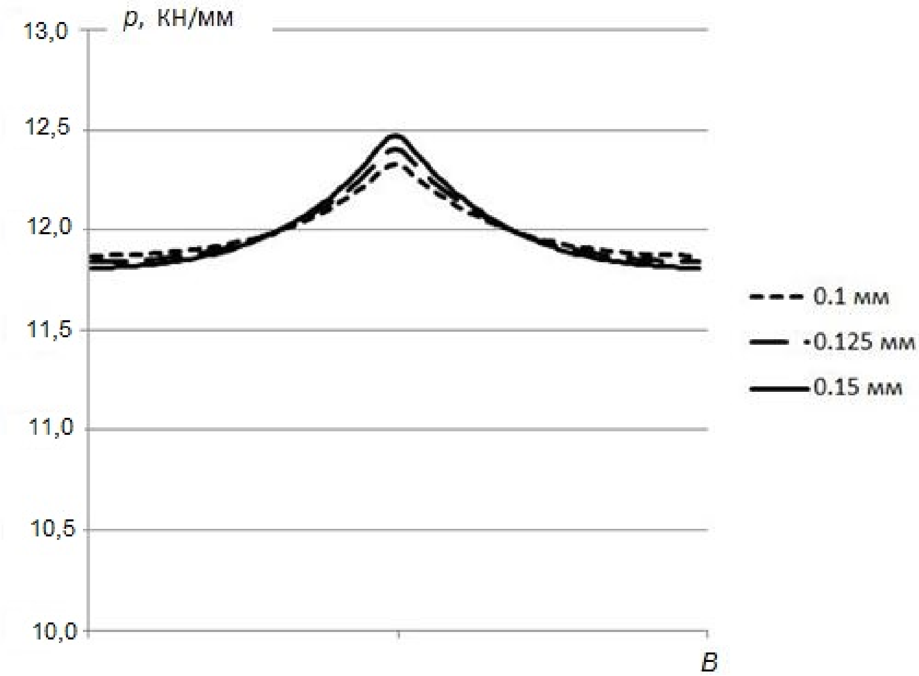


Рис. 4.6 - Распределение погонного давления прокатки по ширине полосы

На рис. 4.7 изображены распределения остаточных напряжений по ширине полосы при h_1 = 2,5 мм; Δh = 6 мм; ℓ_δ =30 мм; $h_{\delta 0}$ = 0,1 мм; 0,125 мм; 0,15 мм.

Распределение остаточных напряжений вычисляли в соответствии с выражением

$$\Delta\sigma_{ocm}(y) = -E \cdot \varphi'(y), \tag{4.7}$$

где E - модуль упругости материала полосы.

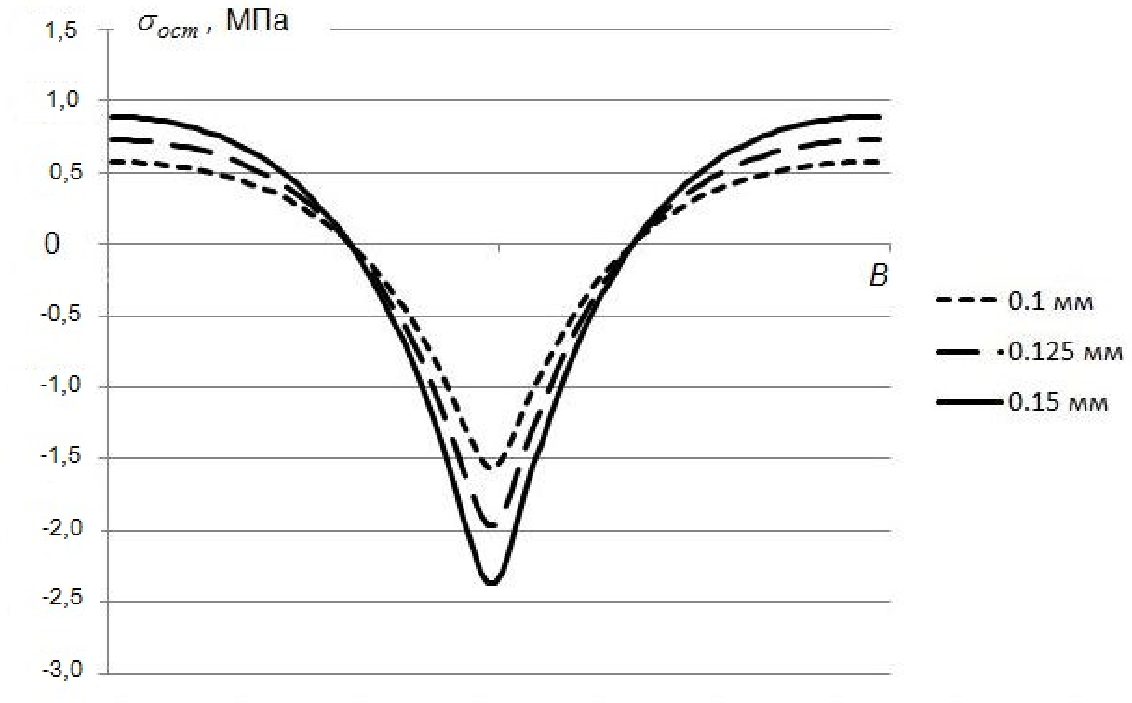


Рис. 4.7 - Распределение остаточных напряжений по ширине полосы

В таблицах 4.1-4.4 представлены результаты расчетов коэффициентов выкатываемости и величин максимальных напряжений сжатия для указанных условий, сгруппированные по величине длина локальных утолщений.

Таблица 4.1 - Коэффициенты выкатываемости при постоянном абсолютном обжатии

Δh, мм	h_1, мм	ℓ_δ = 15,0 мм			ℓ_δ = 30,0 мм			ℓ_δ = 60,0 мм		
		$h_{\delta 0}$, мм			$h_{\delta 0}$, мм			$h_{\delta 0}$, мм		
		0,1	0,125	0,15	0,1	0,125	0,15	0,1	0,125	0,15
6,0	1,5	0,0137	0,0135	0,0134	0,0212	0,0209	0,0207	0,0344	0,0339	0,0335
	2,0	0,0159	0,0157	0,0155	0,0246	0,0243	0,0240	0,0399	0,0393	0,0388
	2,5	0,0175	0,0172	0,0170	0,0271	0,0267	0,0263	0,0439	0,0431	0,0425
4,0	1,5	0,0245	0,0242	0,0239	0,0377	0,0372	0,0368	0,0600	0,0593	0,0587
	2,0	0,0278	0,0274	0,0272	0,0429	0,0424	0,0419	0,0688	0,0679	0,0672
	2,5	0,0301	0,0297	0,0294	0,0466	0,0459	0,0454	0,0748	0,0738	0,0729
2,0	1,5	0,0585	0,0576	0,0569	0,0876	0,0863	0,0851	0,1324	0,1305	0,1290
	2,0	0,0619	0,0609	0,0601	0,0931	0,0916	0,0903	0,1422	0,1380	0,1390
	2,5	0,0633	0,0622	0,0613	0,0955	0,0939	0,0925	0,1469	0,1444	0,1423

Таблица 4.2 - Максимальные напряжения сжатия при постоянном абсолютном обжатии, МПа

Δh, мм	h_1, мм	ℓ_δ = 15,0 мм			ℓ_δ = 30,0 мм			ℓ_δ = 60,0 мм		
		$h_{\delta 0}$, мм			$h_{\delta 0}$, мм			$h_{\delta 0}$, мм		
		0,1	0,125	0,15	0,1	0,125	0,15	0,1	0,125	0,15
6,0	1,5	-0,7	-0,9	-1,1	-1,2	-1,5	-1,8	-2,0	-2,5	-3,0
	2,0	-0,9	-1,1	-1,3	-1,4	-1,8	-2,1	-2,3	-3,0	-3,6
	2,5	-1,0	-1,2	-1,5	-1,6	-2,0	-2,4	-2,6	-3,3	-4,0
4,0	1,5	-1,8	-2,2	-2,7	-2,8	-3,6	-4,4	-4,7	-5,9	-7,2
	2,0	-2,0	-2,6	-3,1	-3,3	-4,1	-5,0	-5,4	-6,9	-8,3
	2,5	-2,2	-2,8	-3,4	-3,6	-4,5	-5,5	-5,9	-7,5	-9,1
2,0	1,5	-6,7	-8,5	-10.4	-10,6	-13,5	-16,4	-16,6	-21,1	-25,8
	2,0	-7,2	-9,2	-11,2	-11,5	-14,6	-17,8	-18,2	-23,3	-28,4
	2,5	-7,5	-9,5	-4,5	-11.9	-15,2	-18,5	-19,2	-24,4	-29,8

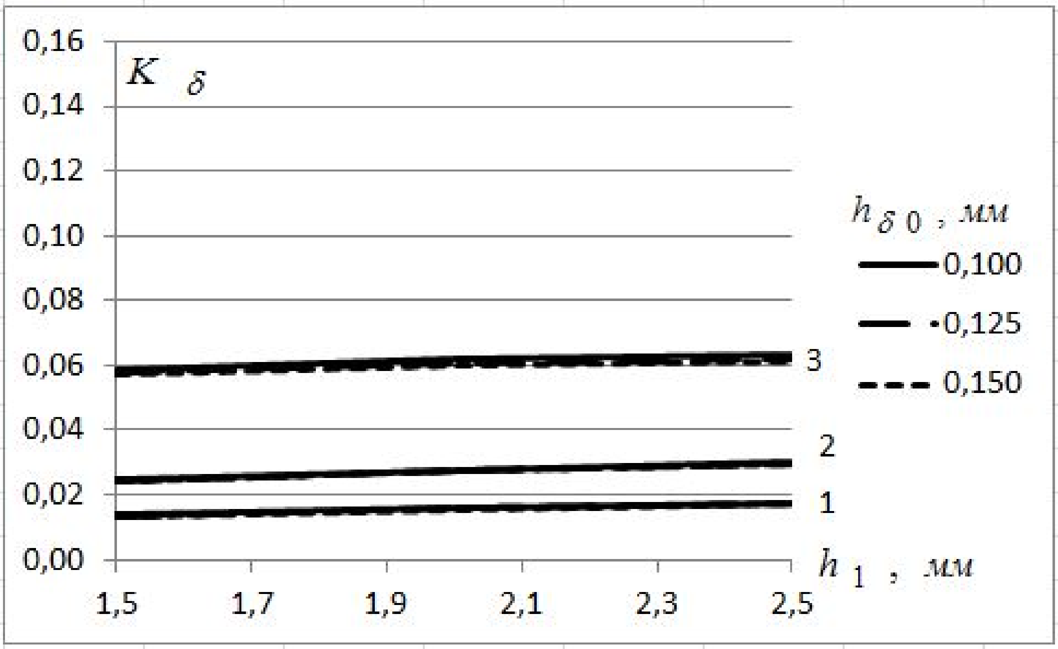
Таблица 4.3 – Коэффициенты выкатываемости при постоянном относительном обжатии

ε, %	h_1, мм	ℓ_δ = 15,0 мм			ℓ_δ = 30,0 мм			ℓ_δ = 60,0 мм		
		$h_{\delta 0}$, мм			$h_{\delta 0}$, мм			$h_{\delta 0}$, мм		
		0,1	0,125	0,15	0,1	0,125	0,15	0,1	0,125	0,15
75	1,5	0,0208	0,0206	0,0204	0,0322	0,0319	0,0315	0,0518	0,0511	0,0506
	2,0	0,0159	0,0157	0,0155	0,0246	0,0243	0,0240	0,0399	0,0393	0,0388
	2,5	0,0122	0,0120	0,0118	0,0188	0,0185	0,0182	0,0305	0,0299	0,0295
50	1,5	0,0791	0,0778	0,0767	0,1169	0,1150	0,1134	0,1724	0,1699	0,1677
	2,0	0,0619	0,0609	0,0601	0,0931	0,0916	0,0903	0,1422	0,1399	0,1380
	2,5	0,0507	0,0499	0,0492	0,0771	0,0759	0,0748	0,1204	0,1185	0,1169
25	1,5	0,1826	0,1784	0,1748	0,2537	0,2482	0,2435	0,3361	0,3306	0,3258
	2,0	0,1480	0,1446	0,1418	0,2123	0,2066	0,2025	0,2949	0,2893	0,2843
	2,5	0,1244	0,1217	0,1194	0,1813	0,1772	0,1738	0,2607	0,2553	0,2506

Таблица 4.4 - Максимальные напряжения сжатия при постоянном относительном обжатии, МПа

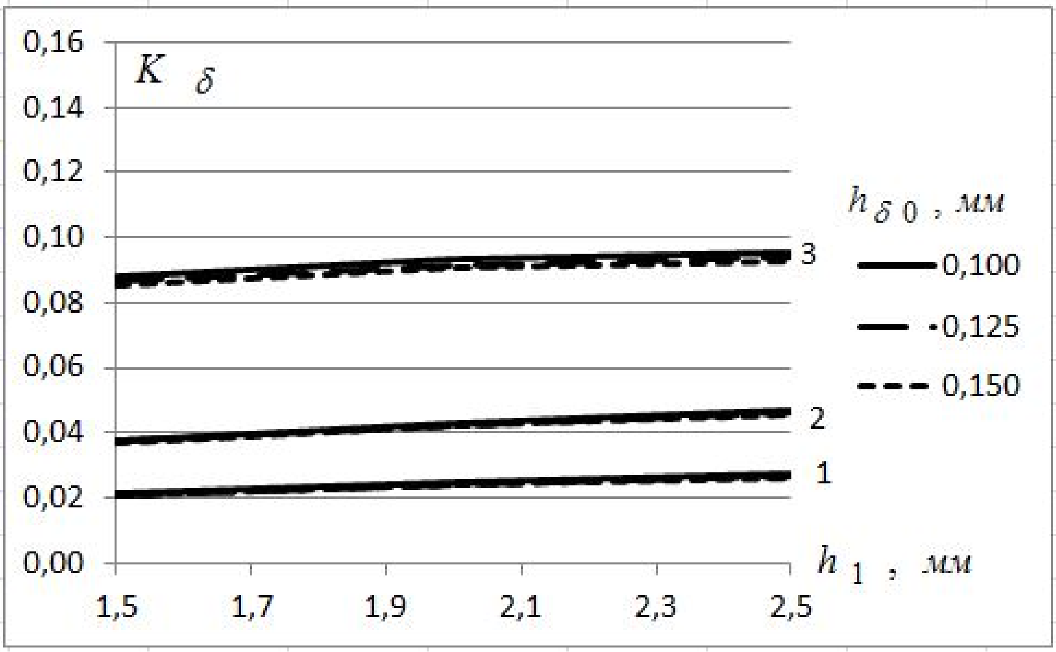
ε, %	h_1, мм	ℓ_δ = 15,0 мм			ℓ_δ = 30,0 мм			ℓ_δ = 60,0 мм		
		$h_{\delta 0}$, мм			$h_{\delta 0}$, мм			$h_{\delta 0}$, мм		
		0,1	0,125	0,15	0,1	0,125	0,15	0,1	0,125	0,15
75	1,5	-1,4	-1,7	-2,1	-2,2	-2,8	-3,4	-3,7	-4,7	-5,7
	2,0	-0,9	-1,1	-1,3	-1,4	-1,8	-2,1	-2,3	-3,0	-3,6
	2,5	-0,6	-0,7	-0,9	-0.9	-1,2	-1,4	-1,6	-2,0	-2,4
50	1,5	-11,0	-14,0	-17,1	-17,1	-21,9	-26,7	-26,1	-33,4	-41,0
	2,0	-7,2	-9,2	-11,2	-11,5	-14,6	-17,8	-18,2	-23,3	-28,4
	2,5	-5,2	-6,5	-7,9	-8.3	-10,5	-12,8	-13,5	-17,1	-20,9
25	1,5	-53,9	-69,3	-85,1	-78,9	-107,0	-125,9	-104,9	-132,0	-170,7
	2,0	-36,5	-46,7	-57,2	-55,3	-71,1	-87,4	-79,3	-102,7	-127,0
	2,5	-26,6	-34,0	-41,5	-41,4	-53,0	-65,0	-61,7	-79,5	-97,9

На рис. 4.8 - 4.10 представлены графические изображения зависимостей коэффициентов выкатываемости локальных утолщений от параметров прокатываемых полос и утолщений по результатам расчета, приведенного в табл. 4.1, при постоянном абсолютном обжатии.



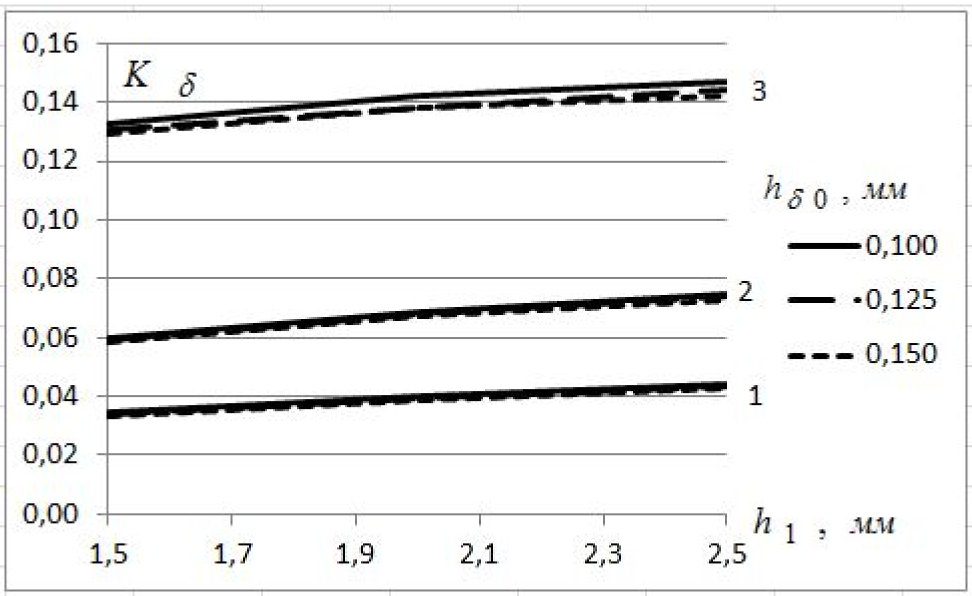
1 - Δh = 6,0 мм; 2 - Δh = 4,0 мм; 3 - Δh = 2,0 мм

Рис. 4.8 - Зависимость выкатываемости локальных утолщений при ℓ_δ = 15,0 мм



1 - Δh = 6,0 мм; 2 - Δh = 4,0 мм; 3 - Δh = 2,0 мм

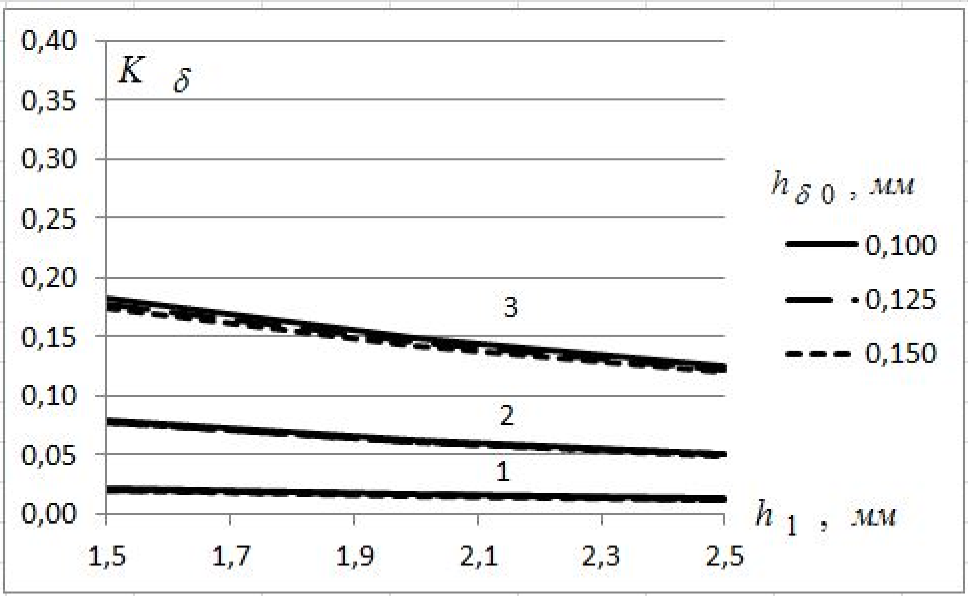
Рис. 4.9 - Зависимость выкатываемости локальных утолщений при ℓ_δ = 30,0 мм



1 - Δh = 6,0 мм; 2 - Δh = 4,0 мм; 3 - Δh = 2,0 мм

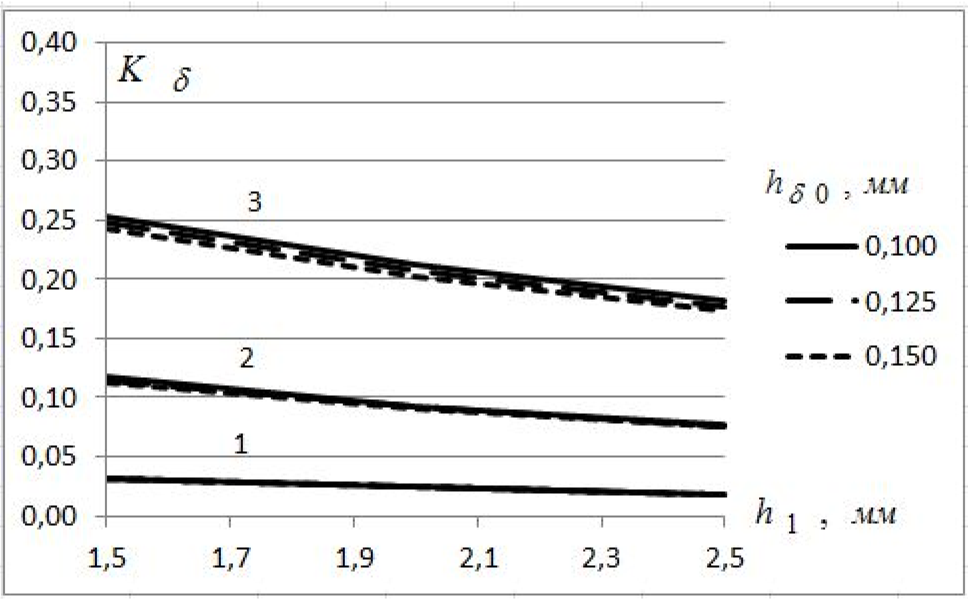
Рис. 4.10 - Зависимость выкатываемости локальных утолщений при ℓ_δ = 60 мм

На рис. 4.11-4.13 представлены графические изображения зависимостей коэффициентов выкатываемости локальных утолщений от параметров прокатываемых полос и утолщений по результатам расчета, приведенного в табл. 4.3, при постоянном относительном обжатии.



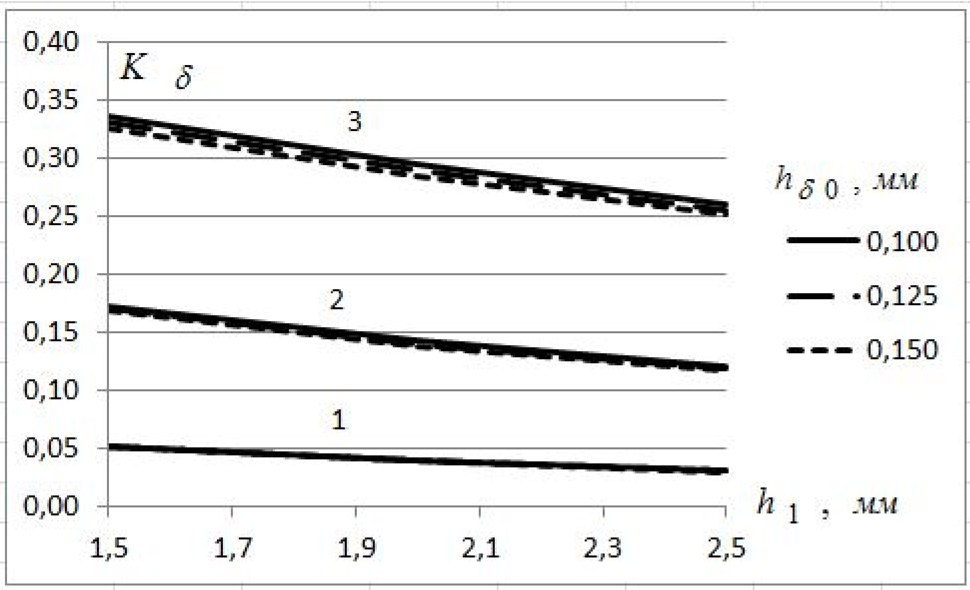
1 - ε = 75 %; 2 - ε = 50 %; 3 - ε = 25 %

Рис. 4.11. Зависимость выкатываемости локальных утолщений при ℓ_δ= 15 мм



1 - ε = 75 %; 2 - ε = 50 %; 3 - ε = 25 %

Рис. 4.12. Зависимость выкатываемости локальных утолщений при ℓ_δ= 30 мм



1 - ε = 75 %; 2 - ε = 50 %; 3 - ε = 25 %

Рис. 4.13. Зависимость выкатываемости локальных утолщений при ℓ_δ = 60 мм

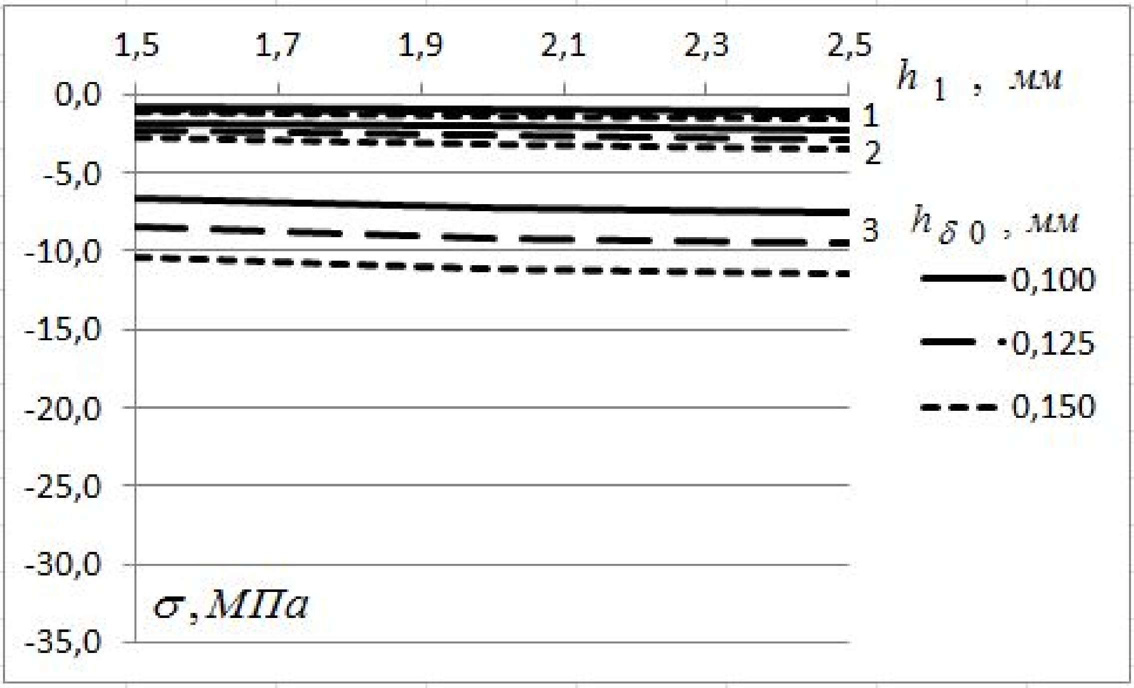
Анализ зависимостей, приведенных на рис.4.8 - 4.13 показывает, что коэффициент выкатываемости слабо зависит от высоты локального утолщения при его постоянной ширине; практически линейно, но незначительно, коэффициент выкатываемости возрастает в зависимости от величины выходной толщины при постоянном абсолютном обжатии, и так же линейно убывает с увеличением выходной толщины при постоянном относительном обжатии. Сильнее всего величина коэффициента выкатываемости зависит от величины обжатия, абсолютного или относительного, причем с увеличением обжатия выкатываемость улучшается. С увеличением ширины локального утолщения выкатываемость ухудшается, а коэффициент выкатываемости увеличивается.

Таким образом, ширина локального утолщения и величина обжатия полосы влияют на его выкатываемость разнонаправленно: для того, чтобы выкатываемость локального утолщения не ухудшалась, необходимо увеличивать обжатие с ростом его ширины. Этот вывод вполне согласуется с экспериментальными данными, изображенными на рис. 4.1.

Для грубой оценки величины коэффициента выкатываемости при горячей прокатке может служить следующее положение: отношение высот локального утолщения шириной до 5% ширины полосы примерно на порядок меньше величины, обратной коэффициенту вытяжки:

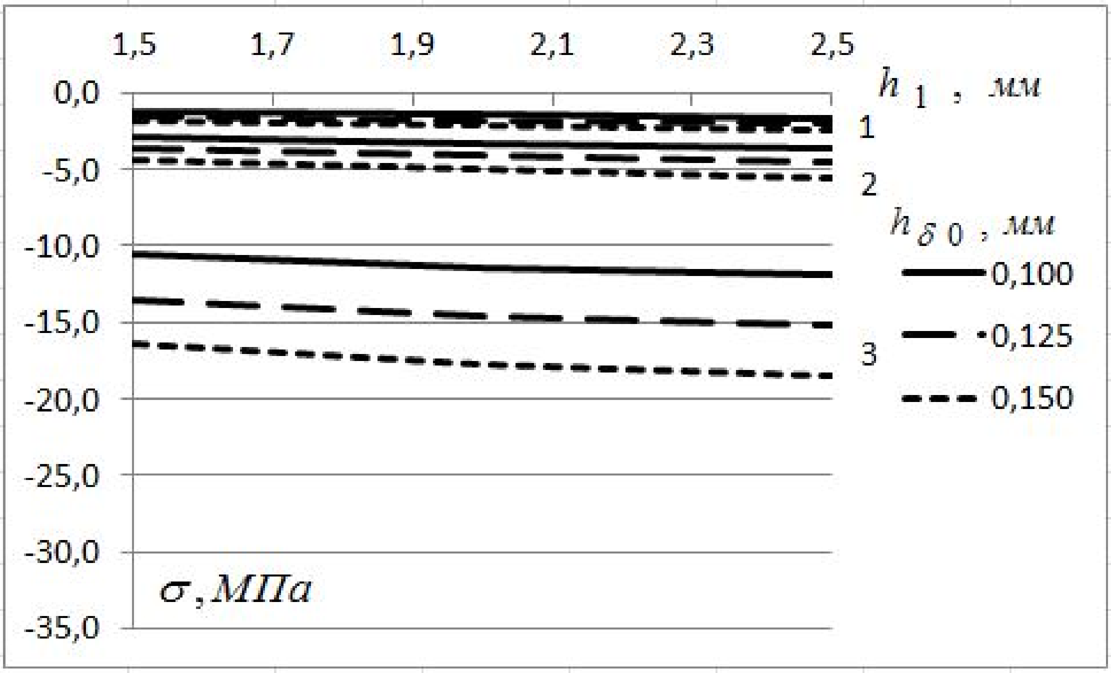
$$K_\delta = \frac{h_{\delta 1}}{h_{\delta 0}} \approx 0{,}1\frac{h_1}{h_0}. \qquad (4.8)$$

На рис. 4.14-4.16 представлены графические изображения зависимостей величин сжимающих напряжений от параметров прокатываемых полос и утолщений по результатам расчета, приведенного в табл. 4.2, при постоянном относительном обжатии.



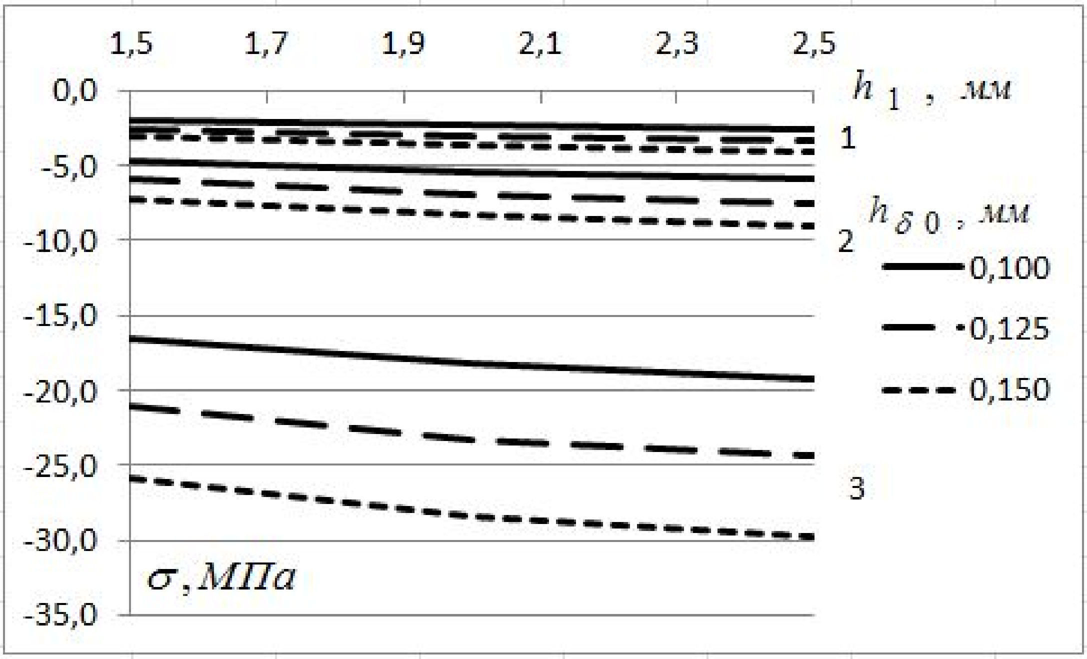
1 - Δh = 6,0 мм; 2 - Δh = 4,0 мм; 3 - Δh = 2,0 мм

Рис. 4.14 - Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос с локальными утолщениями шириной ℓ_δ= 15,0 мм



1 - Δh = 6,0 мм; 2 - Δh = 4,0 мм; 3 - Δh = 2,0 мм

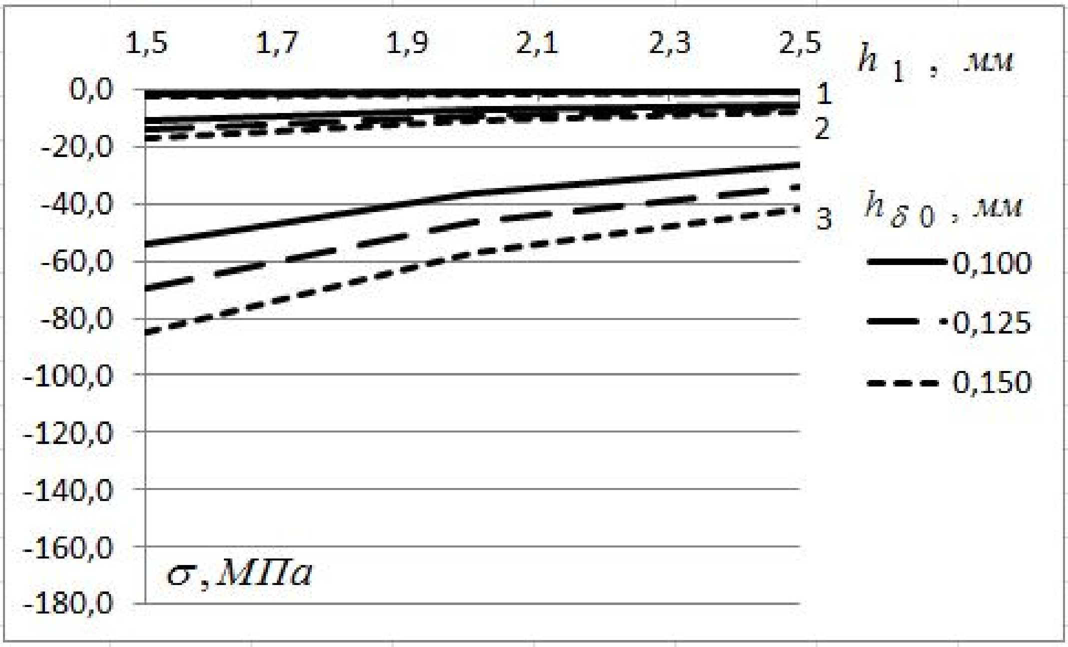
Рис. 4.15 - Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос с локальными утолщениями шириной ℓ_δ= 30,0 мм



1 - Δh = 6,0 мм; 2 - Δh = 4,0 мм; 3 - Δh = 2,0 мм

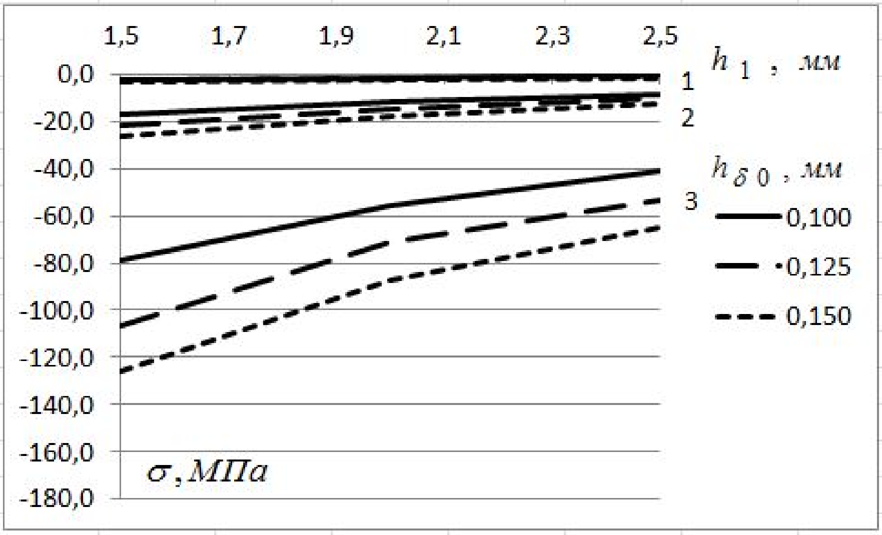
Рис. 4.16 - Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос с локальными утолщениями шириной ℓ_δ= 30,0 мм

На рис. 4.17-4.19 представлены графические изображения зависимостей величин сжимающих напряжений от параметров прокатываемых полос и утолщений по результатам расчета, приведенного в табл. 4.4, при постоянном относительном обжатии.



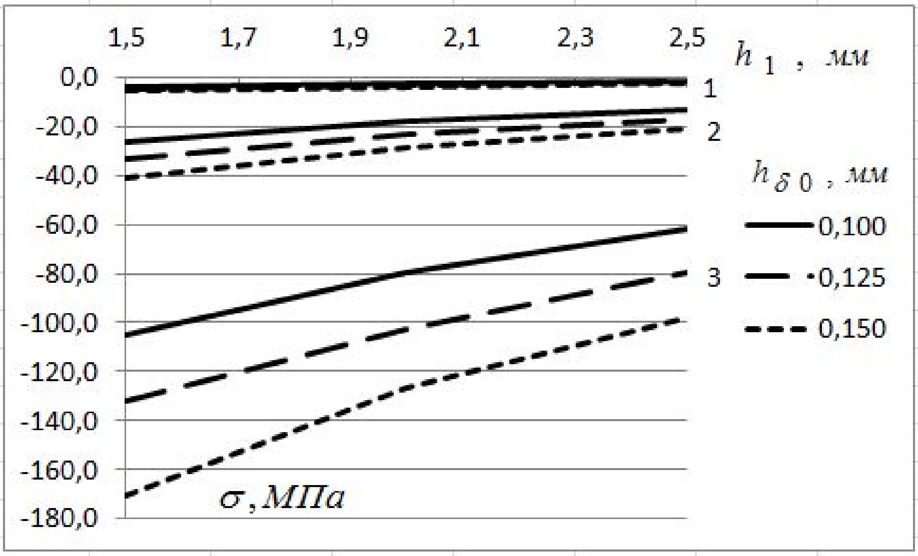
1 - ε = 75 %; 2 - ε = 50 %; 3 - ε = 25 %

Рис. 4.17 - Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос с локальными утолщениями шириной ℓ_δ= 15,0 мм



1 - ε = 75 %; 2 - ε = 50 %; 3 - ε = 25 %

Рис. 4.18 - Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос с локальными утолщениями шириной ℓ_δ= 30,0 мм



1 - ε = 75 %; 2 - ε = 50 %; 3 - ε = 25 %

Рис. 4.19 - Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос с локальными утолщениями шириной ℓ_δ= 60,0 мм

Анализ зависимостей, приведенных на рис.4.14-4.19 показывает, что при больших обжатиях сжимающие напряжения в полосе на месте прокатанного утолщения слабо зависят от высоты локального утолщения; с увеличением ширины локального утолщения эта зависимость становится сильнее. Больше всего зависимость сжимающих напряжений от высоты локального утолщения проявляется с увеличением его ширины и уменьшением обжатия.

Зависимость величины сжимающего напряжения практически линейно увеличивается с ростом выходной толщины при постоянном абсолютном обжатии; при постоянном относительном обжатии сжимающие напряжения уменьшаются с увеличением выходной толщины полосы.

Теперь выполним анализ зависимостей коэффициентов выкатываемости и максимальных сжимающих напряжений от длины локальных утолщений.

Для этого представим результаты расчетов в несколько измененной форме, как показано в табл. 4.5-4.8, т.е. сгруппированные по величине высоты локальных утолщений.

Таблица 4.5 - Коэффициенты выкатываемости при постоянном абсолютном обжатии

Δh, мм	h_1, мм	$h_{\delta 0}$ = 0,1 мм			$h_{\delta 0}$ = 0,125 мм			$h_{\delta 0}$ = 0,15 мм		
		ℓ_δ, мм			ℓ_δ, мм			ℓ_δ, мм		
		15,0	30,0	60,0	15,0	30,0	60,0	15,0	30,0	60,0
6,0	1,5	0,0137	0,0212	0,0344	0,0135	0,0209	0,0339	0,0134	0,0207	0,0335
	2,0	0,0159	0,0246	0,0399	0,0157	0,0243	0,0393	0,0155	0,0240	0,0388
	2,5	0,0175	0,0271	0,0439	0,0172	0,0267	0,0431	0,0170	0,0263	0,0425
4,0	1,5	0,0245	0,0377	0,0600	0,0242	0,0372	0,0593	0,0239	0,0368	0,0587
	2,0	0,0278	0,0429	0,0688	0,0274	0,0424	0,0679	0,0272	0,0419	0,0672
	2,5	0,0301	0,0466	0,0748	0,0297	0,0459	0,0738	0,0294	0,0454	0,0729
2,0	1,5	0,0585	0,0876	0,1324	0,0576	0,0863	0,1305	0,0569	0,0851	0,1290
	2,0	0,0619	0,0931	0,1422	0,0609	0,0916	0,1380	0,0601	0,0903	0,0619
	2,5	0,0633	0,0955	0,1469	0,0622	0,0939	0,1444	0,0613	0,0925	0,1423

Таблица 4.6 - Максимальные напряжения сжатия при постоянном абсолютном обжатии, МПа

Δh, мм	h_1, мм	$h_{\delta 0}$ = 0,1 мм			$h_{\delta 0}$ = 0,125 мм			$h_{\delta 0}$ = 0,15 мм		
		ℓ_δ, мм			ℓ_δ, мм			ℓ_δ, мм		
		15,0	30,0	60,0	15,0	30,0	60,0	15,0	30,0	60,0
6,0	1,5	-0,7	-1,2	-2,0	-0,9	-1,5	-2,5	-1,1	-1,8	-3,0
	2,0	-0,9	-1,4	-2,3	-1,1	-1,8	-3,0	-1,3	-2,1	-3,6
	2,5	-1,0	-1,6	-2,6	-1,2	-2,0	-3,3	-1,5	-2,4	-4,0
4,0	1,5	-1,8	-2,8	-4,7	-2,2	-3,6	-5,9	-2,7	-4,4	-7,2
	2,0	-2,0	-3,3	-5,4	-2,6	-4,1	-6,9	-3,1	-5,0	-8,3
	2,5	-2,2	-3,6	-5,9	-2,8	-4,5	-7,5	-3,4	-5,5	-9,1
2,0	1,5	-6,7	-10,6	-16,6	-8,5	-13,5	-21,1	-10.4	-16,4	-25,8
	2,0	-7,2	-11,5	-18,2	-9,2	-14,6	-23,3	-11,2	-17,8	-28,4
	2,5	-7,5	-11.9	-19,2	-9,5	-15,2	-24,4	-11,5	-18,5	-29,8

Таблица 4.7 – Коэффициенты выкатываемости при постоянном относительном обжатии

ε, %	h_1, мм	$h_{\delta 0}$ = 0,1 мм			$h_{\delta 0}$ = 0,125 мм			$h_{\delta 0}$ = 0,15 мм		
		ℓ_δ, мм			ℓ_δ, мм			ℓ_δ, мм		
		15,0	30,0	60,0	15,0	30,0	60,0	15,0	30,0	60,0
75	1,5	0,0208	0,0322	0,0518	0,0206	0,0319	0,0511	0,0204	0,0315	0,0506
	2,0	0,0159	0,0246	0,0399	0,0157	0,0243	0,0393	0,0155	0,0240	0,0388
	2,5	0,0122	0,0188	0,0305	0,0120	0,0185	0,0299	0,0118	0,0182	0,0295
50	1,5	0,0791	0,1169	0,1724	0,0778	0,1150	0,1699	0,0767	0,1134	0,1677
	2,0	0,0619	0,0931	0,1422	0,0609	0,0916	0,1399	0,0601	0,0903	0,1380
	2,5	0,0507	0,0771	0,1204	0,0499	0,0759	0,1185	0,0492	0,0748	0,1169
25	1,5	0,1826	0,2537	0,3361	0,1784	0,2482	0,3306	0,1748	0,2435	0,3258
	2,0	0,1480	0,2123	0,2949	0,1446	0,2066	0,2893	0,1418	0,2025	0,2843
	2,5	0,1244	0,1813	0,2607	0,1217	0,1772	0,2553	0,1194	0,1738	0,2506

Таблица 4.8. Максимальные напряжения сжатия при постоянном относительном обжатии, МПа

ε, %	h_1, мм	$h_{\delta 0}$ = 0,1 мм			$h_{\delta 0}$ = 0,125 мм			$h_{\delta 0}$ = 0,15 мм		
		ℓ_δ, мм			ℓ_δ, мм			ℓ_δ, мм		
		15,0	30,0	60,0	15,0	30,0	60,0	15,0	30,0	60,0
75	1,5	-1,4	-2,2	-3,7	-1,7	-2,8	-4,7	-2,1	-3,4	-5,7
	2,0	-0,9	-1,4	-2,3	-1,1	-1,8	-3,0	-1,3	-2,1	-3,6
	2,5	-0,6	-0.9	-1,6	-0,7	-1,2	-2,0	-0,9	-1,4	-2,4
50	1,5	-11,0	-17,1	-26,1	-14,0	-21,9	-33,4	-17,1	-26,7	-41,0
	2,0	-7,2	-11,5	-18,2	-9,2	-14,6	-23,3	-11,2	-17,8	-28,4
	2,5	-5,2	-8.3	-13,5	-6,5	-10,5	-17,1	-7,9	-12,8	-20,9
25	1,5	-53,9	-78,9	-104,9	-69,3	-107,0	-132,0	-85,1	-125,9	-170,7
	2,0	-36,5	-55,3	-79,3	-46,7	-71,1	-102,7	-57,2	-87,4	-127,0
	2,5	-26,6	-41,4	-61,7	-34,0	-53,0	-79,5	-41,5	-65,0	-97,9

На рис. 4.20-4.22 представлены графические изображения зависимостей коэффициентов выкатываемости локальных утолщений от параметров прокатываемых полос и утолщений по результатам расчета, приведенного в табл. 4.5, при постоянном абсолютном обжатии.

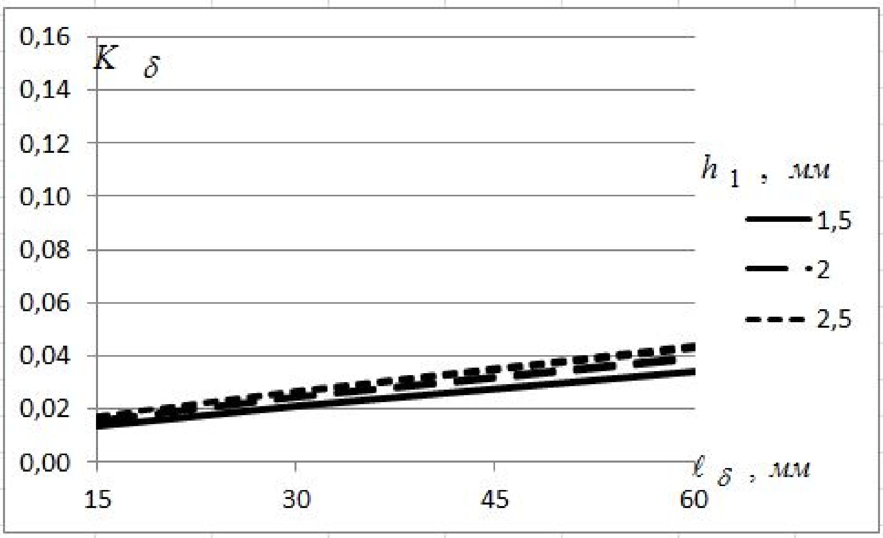


Рис. 4.20 - Зависимость выкатываемости локальных утолщений при Δh = 6,0 мм

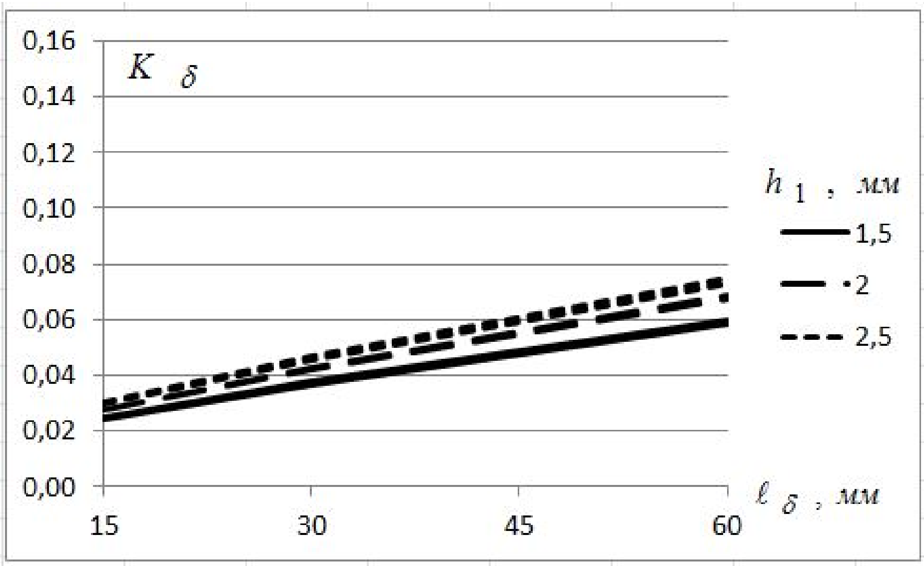


Рис. 4.21 - Зависимость выкатываемости локальных утолщений при Δh = 4,0 мм

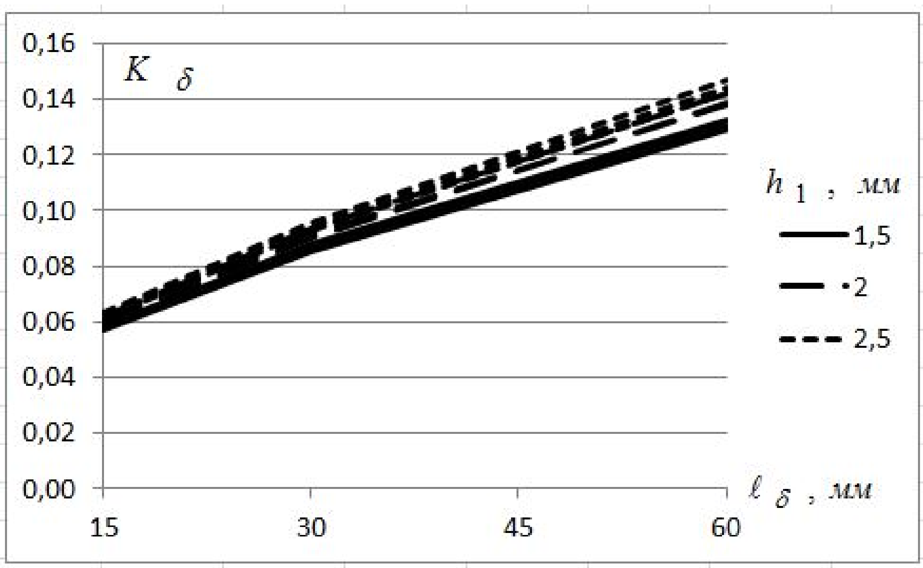


Рис. 4.22 - Зависимость выкатываемости локальных утолщений при Δh = 2,0 мм

Анализ зависимостей, приведенных на рис. 4.20-4.22 показывает, что коэффициент выкатываемости при постоянной величине абсолютного обжатия практически не зависит от высоты локального утолщения. Это следует из того, что триады линий (сплошные, пунктирные и точечные), соответствующие различным высотам локального утолщения при одинаковых абсолютных обжатиях и выходных толщинах, практически не отличимы друг от друга. Зависимость от длины локальных утолщений при этом является практически линейной.

На рис. 4.23-4.25 представлены графические изображения зависимостей коэффициентов выкатываемости локальных утолщений от параметров прокатываемых полос и утолщений по результатам расчета, приведенного в табл. 4.7, при постоянном относительном обжатии.

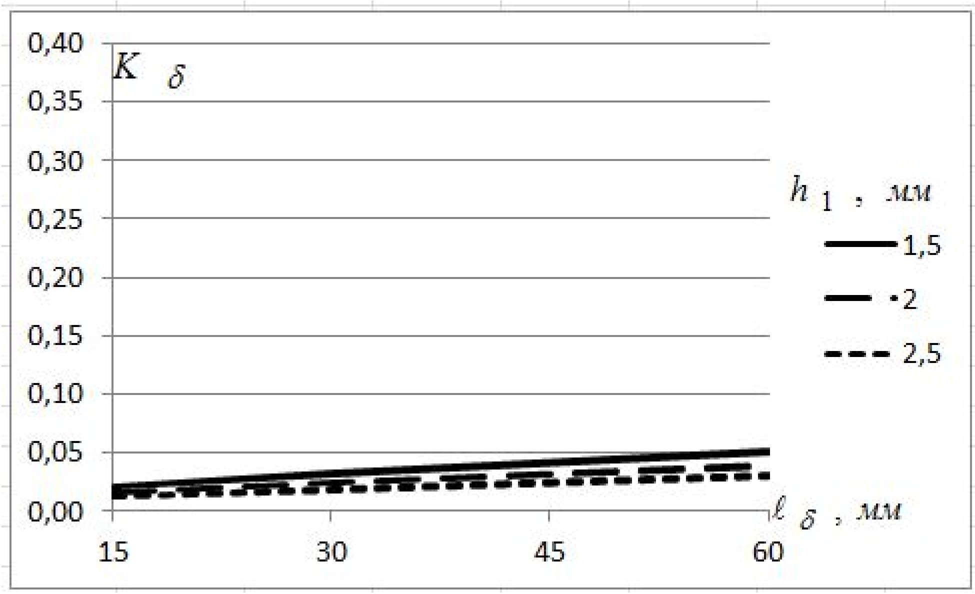


Рис. 4.23 - Зависимость выкатываемости локальных утолщений при ε = 75%

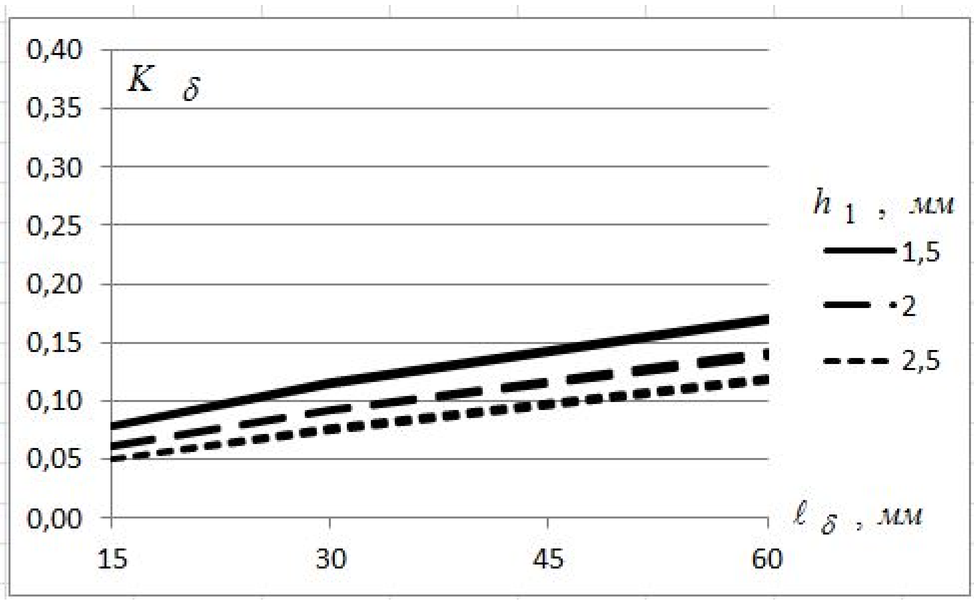


Рис. 4.24 - Зависимость выкатываемости локальных утолщений при ε = 50%

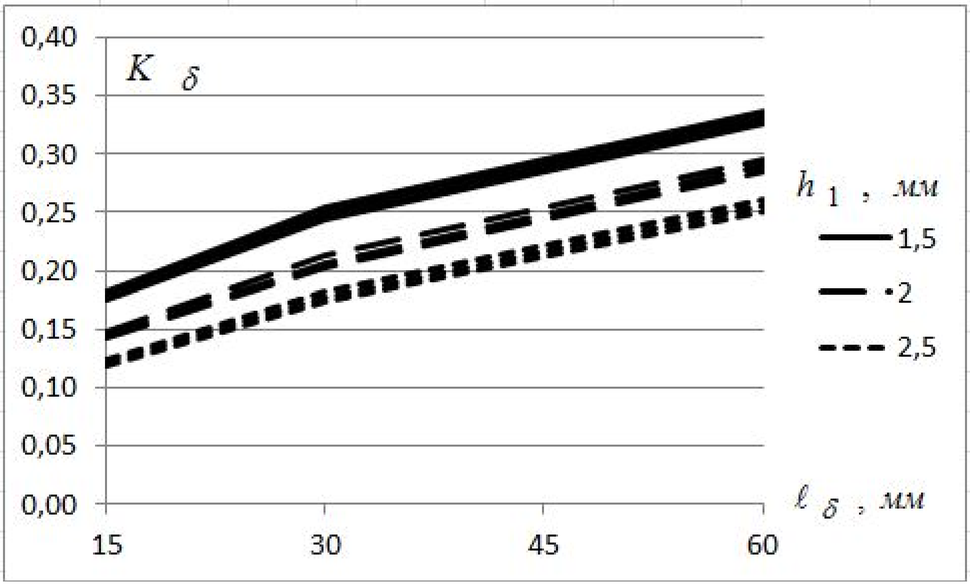


Рис. 4.25 - Зависимость выкатываемости локальных утолщений при ε = 25%

Анализ зависимостей, приведенных на рис. 4.23-4.25 демонстрирует аналогичную тенденцию. Различие состоит в том, что наилучшей выкатываемостью при одинаковом относительном обжатии в рамках триады линий обладает локальное утолщение наибольшей высоты – при этом коэффициент выкатываемости наименьший.

На рис. 4.26-4.28 представлены графические изображения зависимостей величин сжимающих напряжений от параметров прокатываемых полос и утолщений по результатам расчета, приведенного в табл. 4.6, при постоянном абсолютном обжатии.

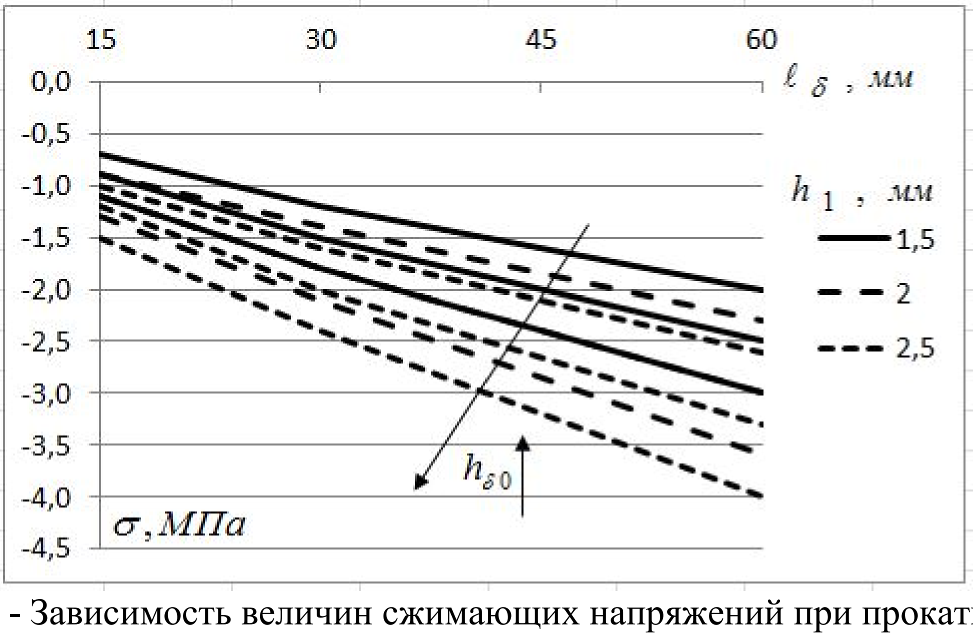


Рис. 4.26 - Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос Δh = 6,0 мм

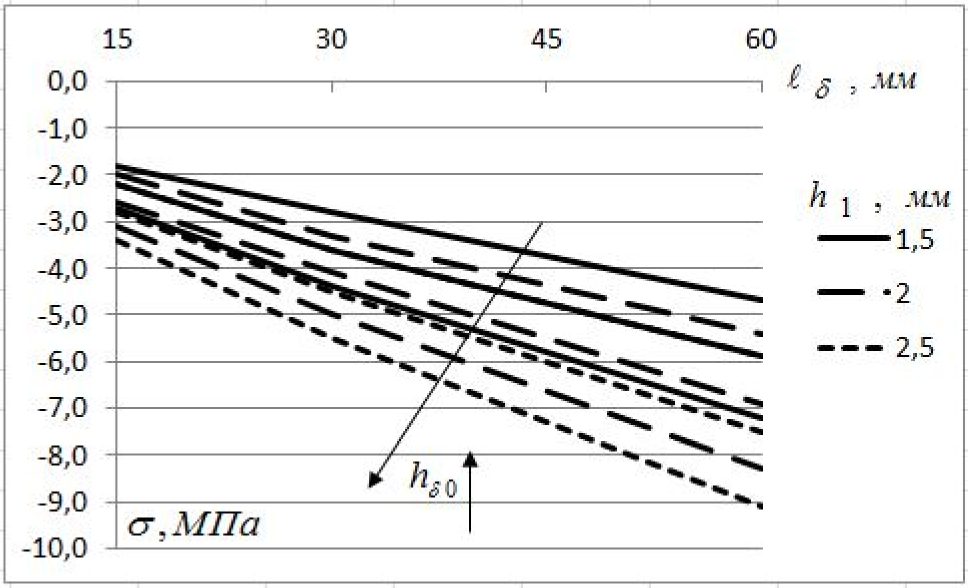


Рис. 4.27. Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос Δh = 4,0 мм

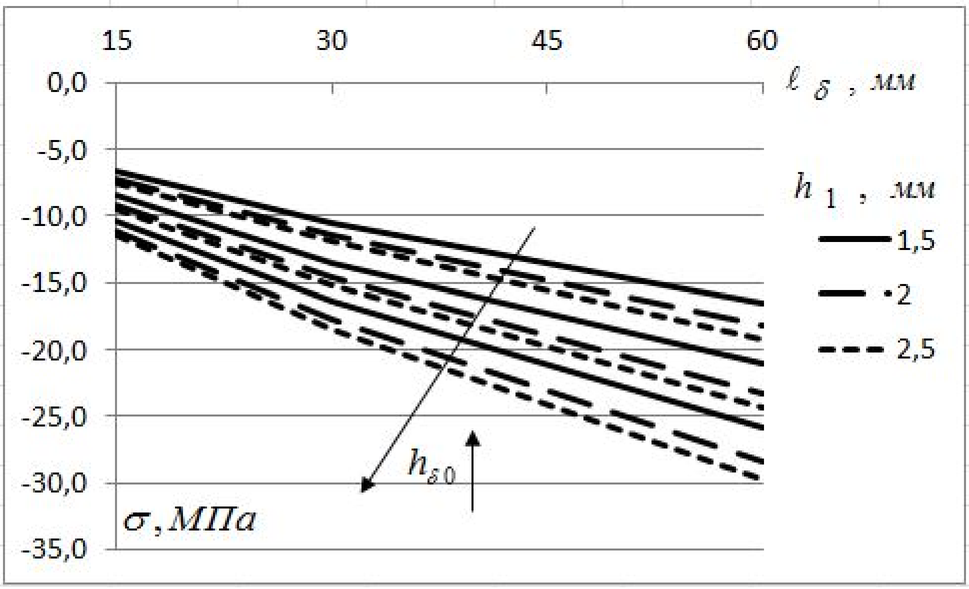


Рис. 4.28. Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос Δh = 2,0 мм

Анализ зависимостей, приведенных на рис. 4.26-4.28 показывает, что величины сжимающих напряжений при одинаковых величинах абсолютного обжатия и выходной толщины увеличиваются с увеличением высоты локального утолщения. При этом увеличение сжимающих напряжений при одинаковой высоте локального утолщения тем больше, чем больше выходная толщина полосы, т.е. соответственно выкатываемости локального утолщения. Легко увидеть, что приведенные зависимости практически линейны. Масштабы графиков, приведенных на рис. 4.26-4.28 различны, чтобы показать зависимости более детально.

На рис. 4.29-4.31 представлены графические изображения зависимостей величин сжимающих напряжений от параметров прокатываемых полос и утолщений по результатам расчета, приведенного в табл. 4.8, при постоянном относительном обжатии.

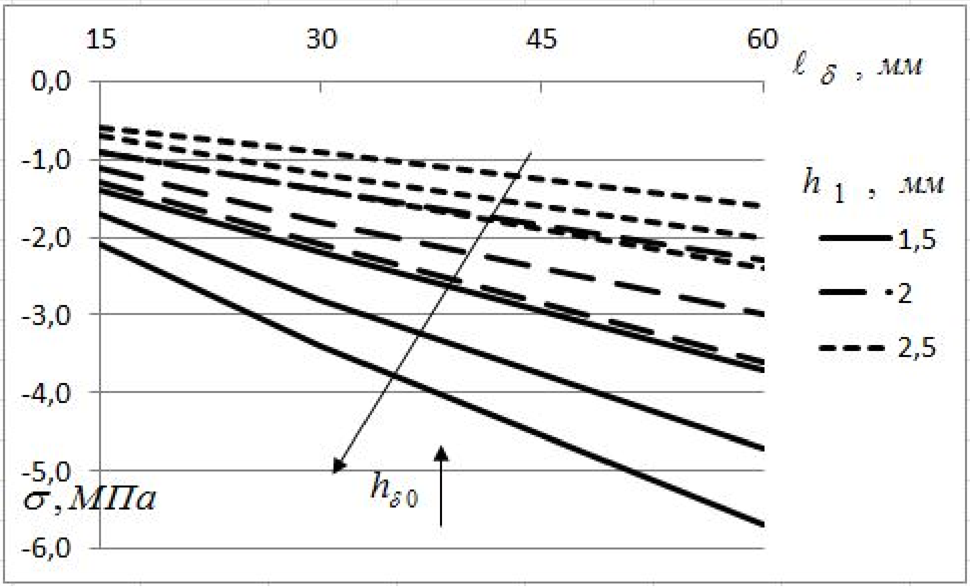


Рис. 4.29. Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос ε = 75%

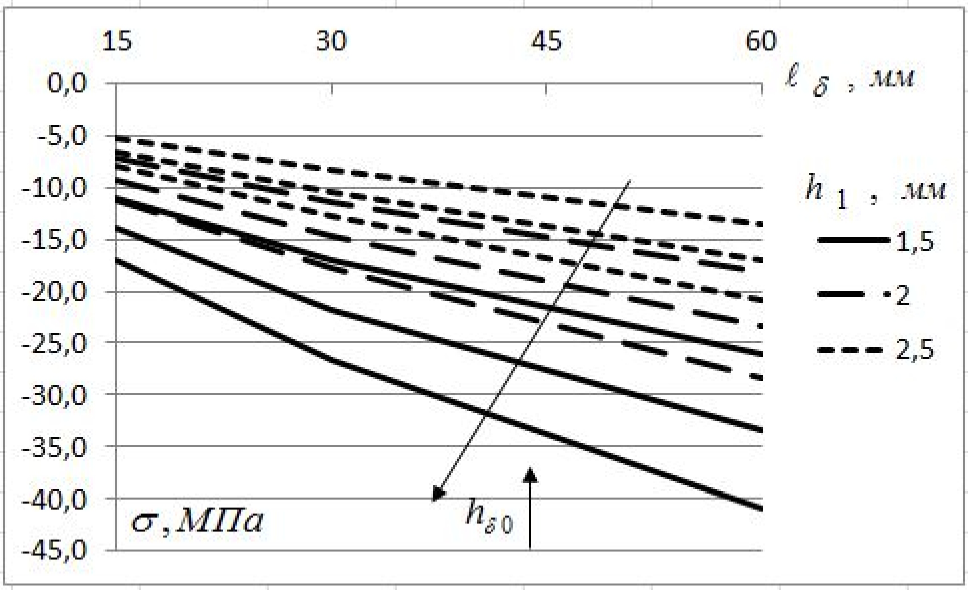


Рис. 4.30. Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос ε = 50%

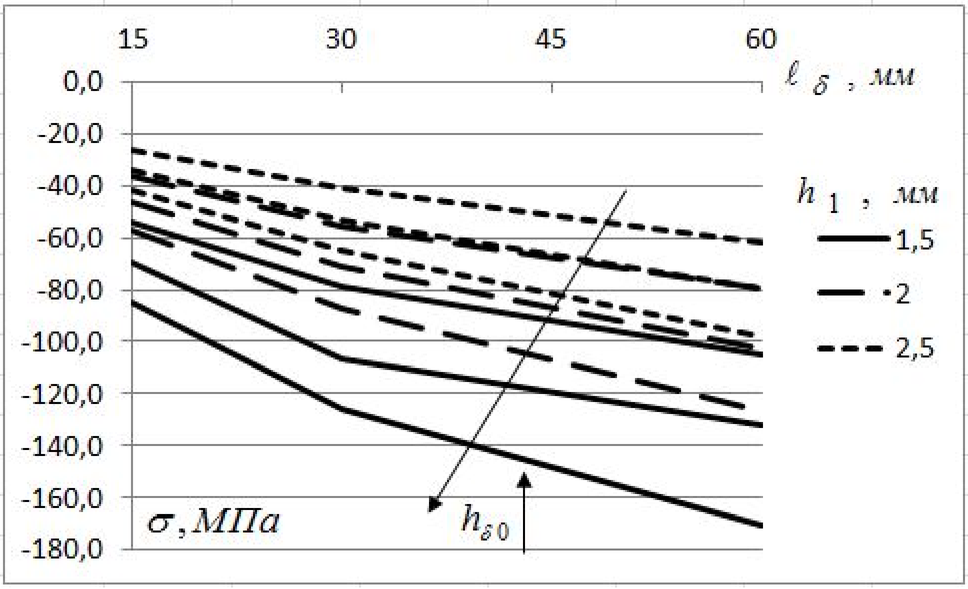


Рис. 4.31. Зависимость величин сжимающих напряжений при прокатке полос ε = 25%

Анализ зависимостей, приведенных на рис. 4.29-4.31 демонстрирует несколько иную тенденцию. Различие состоит в том, что наибольшие сжимающие напряжения появляются при прокатке полос с минимальной выходной толщиной. В свою очередь, при одинаковой выходной толщине полосы сжимающие напряжения увеличиваются с увеличением высоты локального утолщения. При относительных обжатиях ε< 50% зависимости практически линейны – нелинейность увеличивается при ε> 50%. Так же, как и в предыдущем случае, масштаб графиков, приведенных на рис. 4.29-4.31 различный для детализации поведения зависимостей.

Таким образом, теоретические расчеты подтвердили экспериментально установленный факт того, что при относительном обжатии порядка 75% и выше локальные утолщения полностью выкатываются [18] – при таких обжатиях расчетный коэффициент выкатываемости становится меньше 0,04; при этом продольные сжимающие напряжения не превышают 6,0 МПа.

Итак, можно сделать вывод о том, что выкатываемость локального утолщения тем лучше (коэффициент выкатываемости уменьшается), а сжимающие напряжения тем меньше, чем более развиты поперечные перемещения металла в очаге пластической деформации, чему способствует увеличение обжатия.

5. НЕРАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ПРОКАТЫВАЕМЫХ ПОЛОС

В очаге пластической деформации функционируют по крайней мере два механизма самовыравнивания скоростей течения и вытяжек металла по ширине полосы. Один из них связан с поперечными перемещениями металла в очаге деформации.

Суть другого механизма заключается в следующем: неравномерное распределение обжатий по ширине полосы приводит к появлению дополнительных продольных напряжений, которые приводят к изменению формы эпюры переднего натяжения. Изменение эпюры приводит к изменению величины упругого сплющивания рабочего валка в контакте с полосой, что в свою очередь способствует выравниванию обжатий, вытяжек и скоростей течения полосы в очаге пластической деформации.

Принудительное приложение натяжения к полосе усиливает эффективность этого механизма самовыравнивания. Действие натяжения уменьшает величину контактного давления и сплющивания рабочего валка, но, в силу нелинейности процесса, уменьшение сплющивания при этом будет больше на том участке полосы, где оно было больше до приложения натяжения, и наоборот [24]. Таким образом, происходит дополнительное выравнивание скоростей металла и вытяжек по ширине прокатываемой полосы. Можно сказать, что натяжение играет роль отрицательной обратной связи в описанном механизме самовыравнивания неравномерности скоростей металла и вытяжек по ширине полосы.

5.1. Влияние формы эпюры переднего удельного натяжения на распределение погонного давления прокатки и остаточных напряжений по ширине полосы

Неравномерность эпюры переднего натяжения вызывает изменение выходных скоростей течения металла, при этом напряжения $\sigma_{вых}(y)$, вызванные неравномерностью выходных скоростей полосы, при снятии натяжении переходят в остаточные $\Delta\sigma_{ост}(y)$.

Оценим влияние изменения формы эпюры переднего натяжения на формообразование прокатываемых полос в соответствии с расчетной схемой, представленной на рис. 5.1. На схеме приведены следующие обозначения:

$f'(y)$, $\varphi'(y)$ - неравномерность распределения скоростей (вытяжек) металла по ширине без учета и с учетом выравнивания из-за поперечных перемещений металла в очаге пластической деформации;

v_x, v_y, v_z - составляющие скорости течения (перемещения) металла v в очаге пластической деформации по соответствующим осям координат;

v_0, v_1 - средние по ширине скорости металла на входе и выходе очага деформации;

W'- скорость вертикального поступательного движения рабочего валка.

Остальные обозначения понятны из рисунка.

При выходе из очага деформации на прокатываемую полосу действует переднее натяжение, которое можно представить следующим образом:

$$\sigma_1(y) = \bar{\sigma}_1 + \sigma_{1x}^0(y), \tag{5.1}$$

где $\bar{\sigma}_1$ - среднее по ширине переднее удельное натяжение, $\sigma_{1x}^0(y)$ - самоуравновешенная эпюра переднего удельного натяжения, которая определяет форму эпюры; переменная составляющая.

Так как при прокатке из-за неравномерного распределения обжатия и/или натяжения появляется неравномерность распределения скоростей и вытяжек металла по ширине очага пластической деформации, то при выходе из очага деформации в полосе образуется неравномерность распределения продольных напряжений, переходящая в остаточные напряжения, которые вычисляются в соответствии с формулой (4.7):

$$\sigma_{вых}(y) = \Delta\sigma_{ост}(y) = -E \cdot \varphi'(y). \tag{5.2}$$

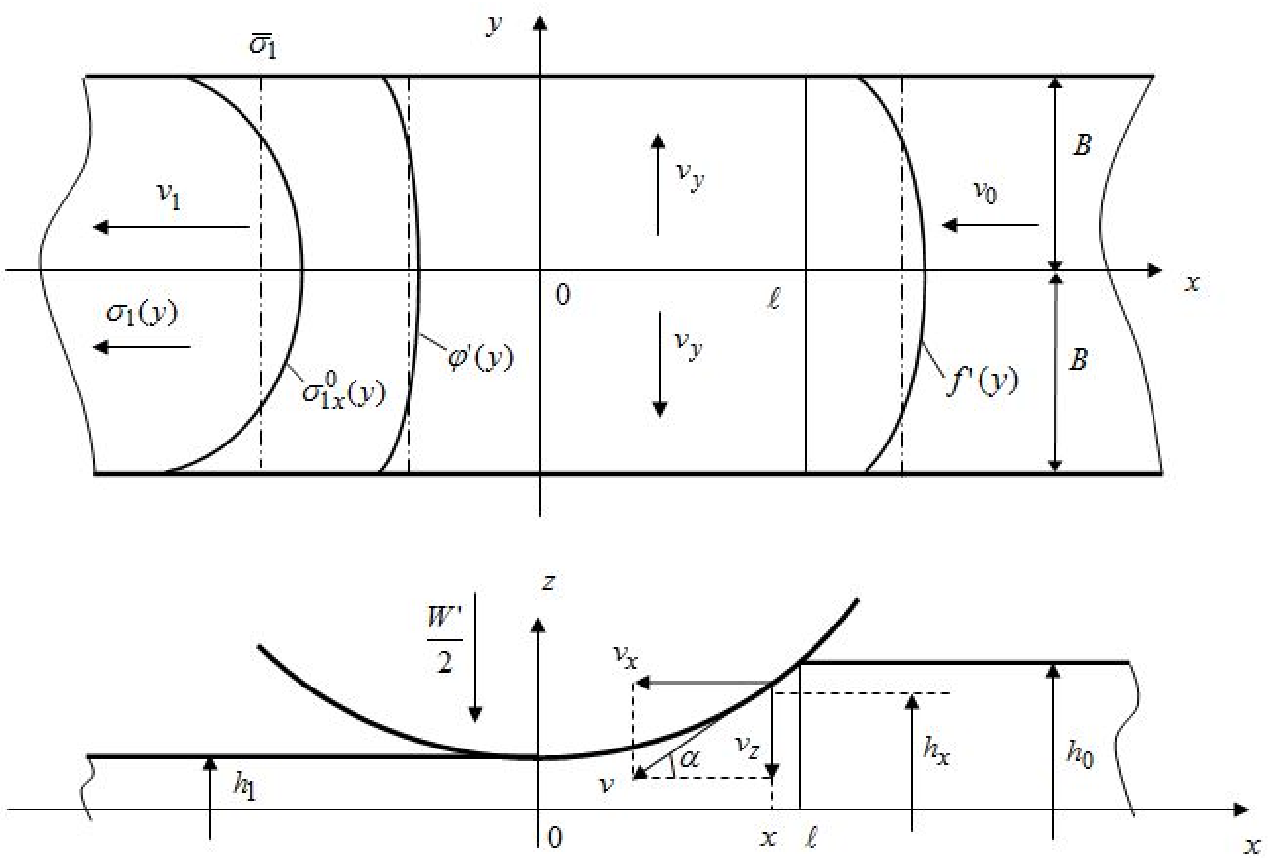


Рис. 5.1 - Расчетная схема

Для оценки влияния изменения формы эпюры переднего натяжения на формообразование прокатываемых полос воспользуемся методикой, разработка которой представлена в главе 3.

Методика основывается на вариационном принципе Журдена. Все мощности внутренних и внешних сил, действующих на полосу при прокатке, вычисляются так же, как и в методике, описанной в главе 3 предыдущего отчета, за исключением мощности переднего натяжения.

С учетом (5.2) выражение для полного переднего натяжения, действующего в выходной плоскости очага пластической деформации, запишется следующим образом:

$$\sigma_x(y) = \sigma_1(y) - \varphi'(y)E\,, \tag{5.3}$$

где $\sigma_1(y)$ определяется по выражению (5.1).

Мощность переднего натяжения N_{nom}, которая идет на накопление полосой потенциальной энергии, вычисляется в соответствии со следующим выражением:

$$\frac{N_{nom}}{\tau_s} = v_1 h_1 \int_0^B \frac{\sigma_x^2}{2E} dy\,, \tag{5.4}$$

где E – модуль упругости материала полосы.

Раскрывая выражение (5.4), получаем:

$$\begin{gathered} \frac{N_{nom}}{\tau_s} = \bar{v}_1 h_1 \int_0^B \frac{[(\bar{\sigma}_1 + \sigma_{1x}^0) - \varphi' E]^2}{2E} dy = \\ = \bar{v}_1 h_1 \left(\int_0^B \frac{(\bar{\sigma}_1 + \sigma_{1x}^0)^2}{2E} dy - \int_0^B \varphi' \bar{\sigma}_1 dy - \int_0^B \varphi' \sigma_{1x}^0 dy + \int_0^B \frac{(\varphi' E)^2}{2E} dy \right). \end{gathered} \tag{5.5}$$

Первый интеграл не содержит производную экстремали $\varphi'(y)$, а второй равен нулю, т.к. функция $\varphi'(y)$ является самоуравновешенной.

В мощности переднего натяжения, идущей на накопление полосой потенциальной энергии, опустим слагаемые, которые не повлияют на запись уравнений Эйлера-Лагранжа.

Тогда:

$$\frac{N_{nom}}{\tau_s} = \bar{v}_1 h_1 \left(\ldots - \int_0^B \varphi' \sigma_{1x}^0 dy + \frac{E}{2} \int_0^B (\varphi')^2 dy \right). \tag{5.6}$$

Функционал, представляющий собой полную мощность прокатки, содержит экстремали W и $\varphi(y)$ и их производные. Записывая уравнения Эйлера-Лагранжа, получаем систему двух уравнений относительно W и $\varphi(y)$.

При устремлении поступательной скорости рабочего валка W' к нулю уравнение Эйлера-Лагранжа, в которое входит экстремаль $\varphi(y)$, примет вид с характерной правой частью:

$$-\frac{1}{K^2}\varphi''+\varphi = f - \frac{1}{K^2}\frac{(\sigma_{1x}^0)'}{E}, \tag{5.7}$$

где $K^2 = \dfrac{16\mu\tau_s h_1}{h_{cp}\Delta h\ell E}$.

При переходе к нормированной координате $y^* = \dfrac{y}{B}$ получим следующее уравнение:

$$-\frac{1}{(BK)^2}\varphi''+\varphi = f - \frac{1}{(BK)^2}\frac{(\sigma_{1x}^0)'}{E}. \tag{5.8}$$

Второе уравнение из системы Эйлера-Лагранжа определяет функцию распределения погонного давления прокатки по ширине полосы:

$$p'(y) = \frac{4\mu\overline{v_1}h_1}{h_c\Delta h}(\varphi - f)\ln\left|\frac{2\sqrt{(1-t_н^2)^2 + a^2(\varphi - f)^2} - 2t_н^2 + 2 + a^2(\varphi - f)^2}{a^2(\varphi - f)}\right| +$$
$$+ f''\ell\left(\frac{h_1}{\Delta h} + \frac{2}{3}\right) - \varphi''\ell\left(\frac{h_0}{\Delta h} + \frac{2}{3}\right). \tag{5.9}$$

Расчет функций неравномерности скоростей и вытяжек $\varphi'(y)$ и распределения погонного давления прокатки $p(y)$ производится итерационным способом.

Сначала вычисляется нулевая итерация функции $f'(y)$ в соответствии с формулой $f'^{(0)} = \dfrac{\delta h_0(y)}{\bar{h}_0} - \dfrac{\delta h_1^{(0)}(y)}{\bar{h}_1}$, где $\bar{h}_0$ и $\delta h_0(y)$ - средняя толщина полосы и ее поперечная разнотолщинность на входе в очаг деформации; $\bar{h}_1$ - средняя толщина полосы на выходе из очага деформации; $\delta h_1^{(0)}(y)$ - поперечная разнотолщинность межвалкового зазора (профилировка рабочих валков) без учета прогиба рабочих валков.

Как упоминалось ранее, для решения уравнения (5.8) численным методом применяем метод прогонки, с помощью которого определяем функцию неравномерности скоростей и вытяжек $\varphi'(y)$ в первой итерации. Подставляя найденную функцию $\varphi'(y)$ в уравнение (5.9), методом Рунге-Кутта четвертого порядка находим распределение давления прокатки $p(y)$ также в первой итерации. Затем определяем прогиб и сплющивание рабочих валков в контакте с полосой и первую итерацию функции $f'^{(1)} = \frac{\delta h_0(y)}{\bar{h}_0} - \frac{\delta h_1^{(1)}(y)}{\bar{h}_1}$, где $\delta h_1^{(1)}(y)$ - поперечная разнотолщинность полосы на выходе из очага деформации с учетом профилировки, прогиба и сплющивания рабочих валков на первой итерации.

Далее, решая уравнение (5.8), находим функцию $\varphi'(y)$ второй итерации, и, решая уравнение (5.9), находим $p(y)$ также второй итерации.

При достижении разницы между функциями $f'(y)$, $\varphi'(y)$ и $p(y)$ настоящей и предыдущей итераций меньшей по сравнению с наперед заданной погрешностью, расчет останавливается. Последним действием расчета является вычисление распределения остаточных напряжений по ширине полосы по формуле (5.2).

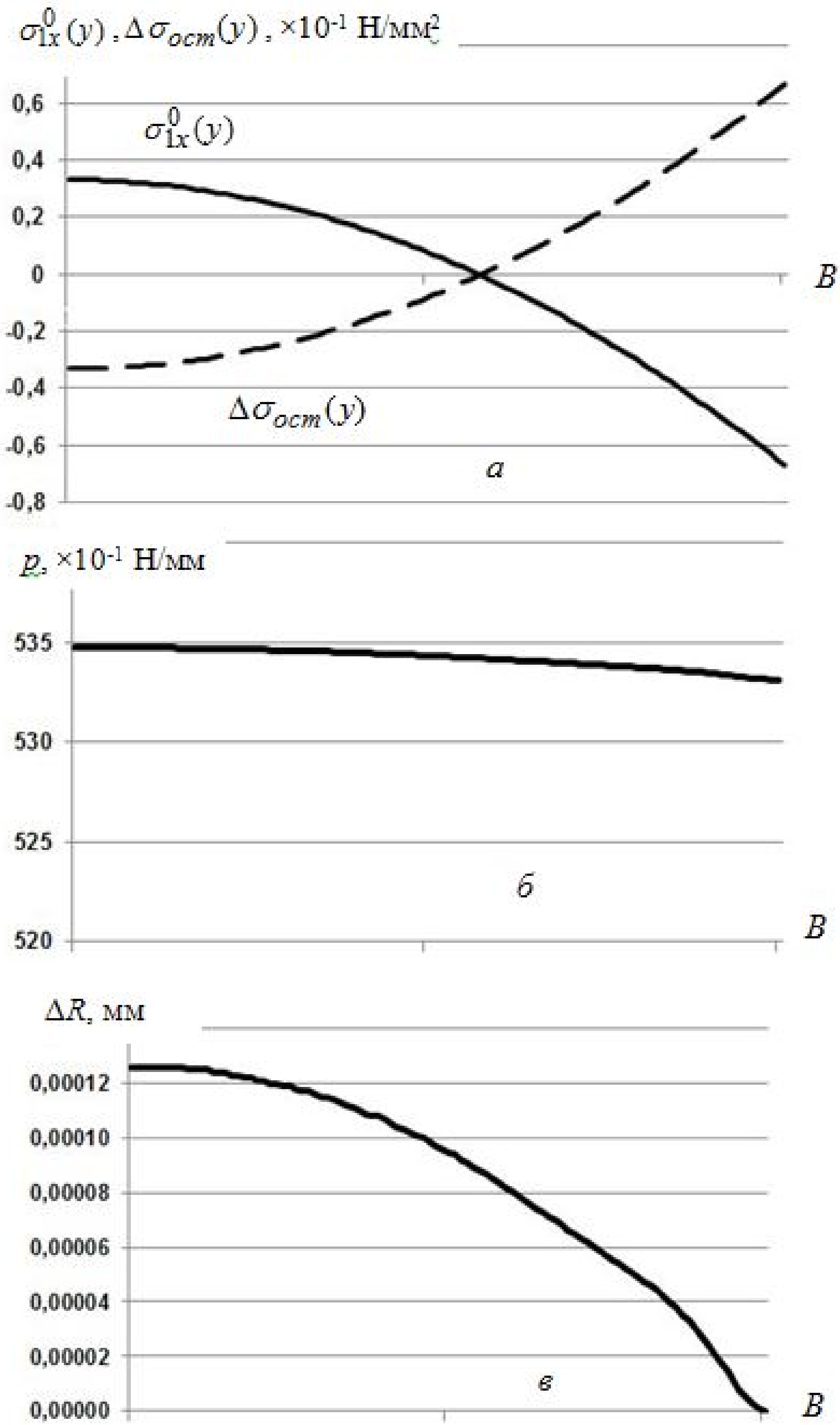
Важное замечание: слагаемые, входящие в правую часть выражения (5.8), нельзя объединять в одну функцию, т.к. они описывают различные факторы воздействия на очаг деформации: функция $f'(y)$ учитывает прогиб и сплющивание рабочих валков – она изменяется от итерации к итерации; функция $\sigma_{1x}^{0}(y)$ - описывает форму эпюры переднего натяжения – она не изменяется от итерации к итерации.

Примеры применения разработанной методики оценки влияние формы эпюры переднего удельного натяжения на распределение погонного давления прокатки и остаточных напряжений по ширине полосы

Так как переменная составляющая эпюры выходного удельного натяжения $\sigma_{1x}^{0}(y)$, определяющая ее форму, самоуравновешена, и при изменении ее формы полное усилие прокатки не изменяется, то при анализе влияния формы эпюры выходного удельного натяжения на функции распределения остаточных напряжений и давления прокатки по ширине полосы опускаем вычисление стрелы прогиба валковой системы.

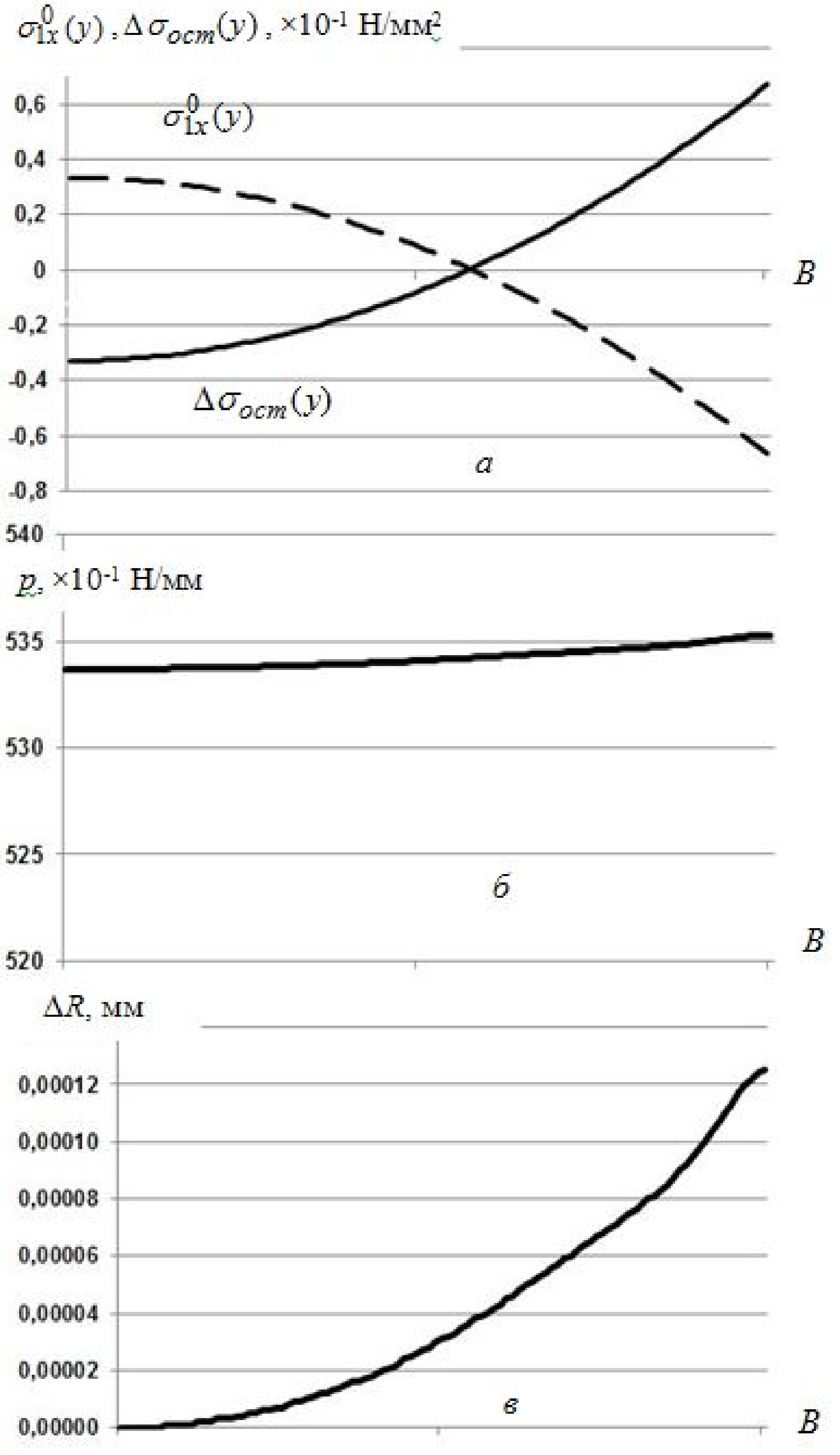
Приведем примеры расчетов параметров горячей прокатки для четырех случаев (рис. 5.2-5.5).

Случай 1: $R = 400$ *мм*; $\tau_s = 50$ *н/мм*^{2}; $h_0 = 4{,}0$ *мм*; $\Delta h = 1{,}5$ *мм*; $2B = 1400$ *мм*; $\mu = 0{,}3$; самоуравновешенная эпюра переднего удельного натяжения $\sigma_{1x}^{0}(y)$ - параболическая с амплитудой неравномерности 10 *н/мм*^{2}.



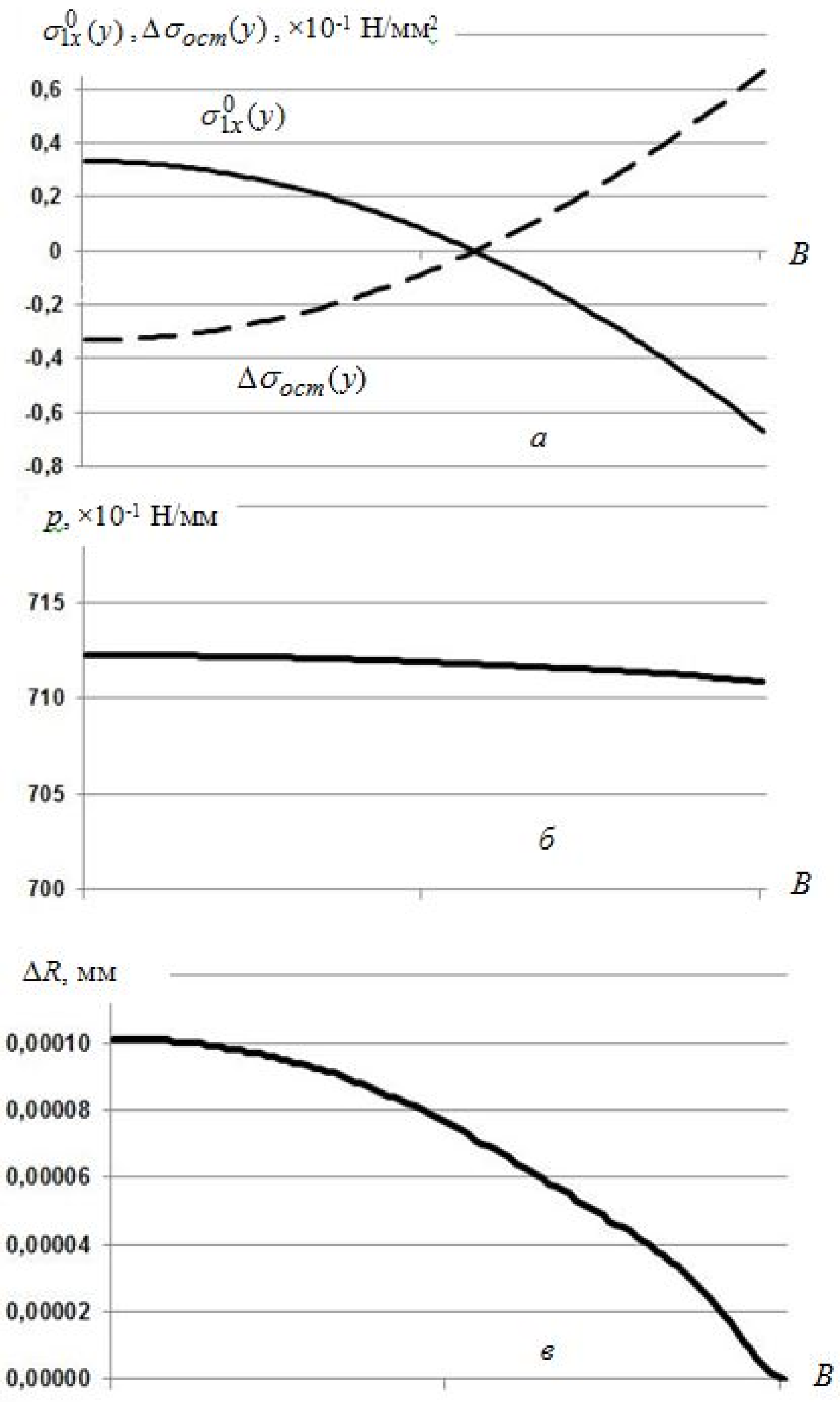
а - эпюра переднего удельного натяжения и остаточных напряжений в полосе;
б – распределение погонного давления прокатки по ширине полосы;
в – сплющивание рабочего валка в контакте с полосой
Рис. 5.2 - Результаты расчета для случая 1

Случай 2: $R = 400$ $мм$; $\tau_s = 50$ $н/мм^2$; $h_0 = 4{,}0$ $мм$; $\Delta h = 1{,}5$ $мм$; $2B = 1400$ $мм$; $\mu = 0{,}3$; самоуравновешенная эпюра переднего удельного натяжения $\sigma_{1x}^0(y)$ - обратная параболическая с амплитудой неравномерности 10 $н/мм^2$.



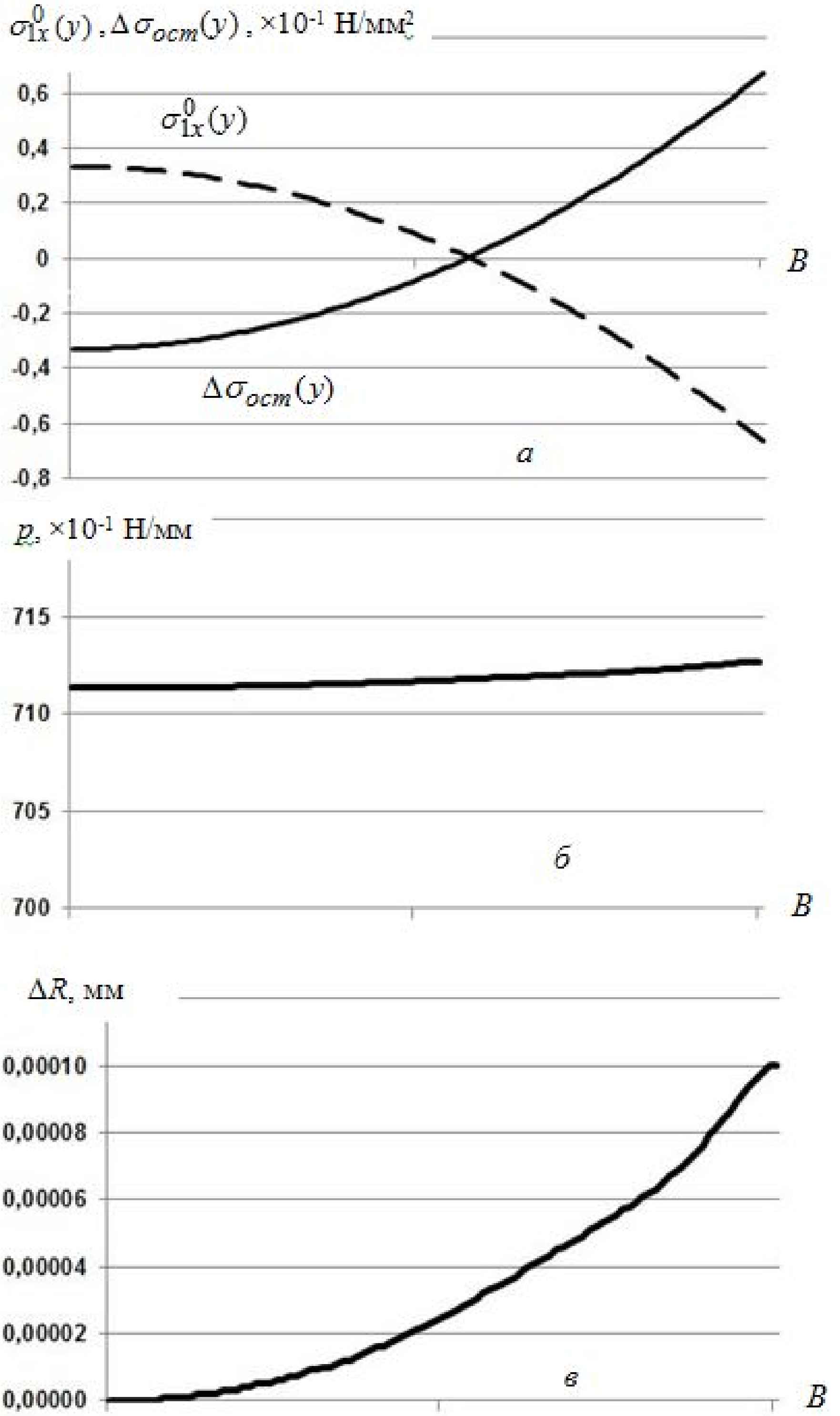
а - эпюра переднего удельного натяжения и остаточных напряжений в полосе;
б – распределение погонного давления прокатки по ширине полосы;
в – сплющивание рабочего валка в контакте с полосой
Рис. 5.3 - Результаты расчета для случая 2

Случай 3: $R = 400$ *мм*; $\tau_s = 50$ *н/мм*^{2}; $h_0 = 4{,}0$ *мм*; $\Delta h = 2{,}0$ *мм*; $2B = 1400$ *мм*; $\mu = 0{,}3$; самоуравновешенная эпюра переднего удельного натяжения $\sigma_{1x}^0(y)$ - параболическая с амплитудой неравномерности 10 *н/мм*^{2}.



а - эпюра переднего удельного натяжения и остаточных напряжений в полосе;
б – распределение погонного давления прокатки по ширине полосы;
в – сплющивание рабочего валка в контакте с полосой
Рис. 5.4 - Результаты расчета для случая 3

Случай 4: $R = 400$ *мм*; $\tau_s = 50$ $н/мм^2$; $h_0 = 4{,}0$ *мм*; $\Delta h = 2{,}0$ *мм*; $2B = 1400$ *мм*; $\mu = 0{,}3$; самоуравновешенная эпюра переднего удельного натяжения $\sigma_{1x}^0(y)$ - обратная параболическая с амплитудой неравномерности 10 $н/мм^2$.



а - эпюра переднего удельного натяжения и остаточных напряжений в полосе;
б – распределение погонного давления прокатки по ширине полосы;
в – сплющивание рабочего валка в контакте с полосой
Рис. 5.5 - Результаты расчета для случая 4

Амплитуда самоуравновешенной части эпюры переднего удельного натяжения $\sigma_{1x}^{0}(y)$ во всех случаях одинаковая и равная 10 $н/мм^2$.

В случаях 1 и 2 абсолютное обжатие одинаковое и равное $\Delta h = 1{,}5$ $мм$. Случаи 1 и 2 отличаются только расположением зон сжатия/растяжения эпюры переднего удельного натяжения $\sigma_{1x}^{0}(y)$: в случае 1 зона сжатия расположена в середине полосы, а зоны растяжения расположены в прикромочных областях; в случае 2 – наоборот.

В случаях 3 и 4 абсолютное обжатие одинаковое и равное $\Delta h = 2{,}0$ $мм$. Случаи 3 и 4 отличаются только расположением зон сжатия/растяжения эпюры переднего удельного натяжения $\sigma_{1x}^{0}(y)$: в случае 3 зона сжатия расположена в середине полосы, а зоны растяжения расположены в прикромочных областях; в случае 4 – наоборот.

Рис. 5.2-5.5 демонстрируют, что распределения погонного давления прокатки адекватно реагируют на форму самоуравновешенной части эпюры переднего удельного натяжения $\sigma_{1x}^{0}(y)$: в зонах продольного сжатия полосы погонное давление прокатки больше, чем в зонах растяжения. Соответственно ведет себя и сплющивание рабочего валка в контакте с полосой: сплющивание тем больше, чем больше погонное давление прокатки по ширине полосы.

Расчеты показывают, что при изменении формы самоуравновешенной части эпюры переднего удельного натяжения эпюра выходных скоростей и вытяжек по ширине полосы изменяется в соответствии со следующим выражением:

$$\varphi'(y) = \frac{\sigma_{1x}^{0}(y)}{E}. \tag{5.10}$$

5.2. Протяженность зоны влияния самоуравновешенной эпюры продольных упругих напряжений

Среди причин возникновения неравномерности распределения переднего и заднего натяжений по ширине прокатываемых полос, имеются следующие:

- неравномерность межклетевого охлаждения полос при горячей прокатке или неравномерность подачи смазочно-охлаждающей жидкости на полосу при холодной прокатке;

- неравномерное воздействие на полосу растягивающих напряжений из-за износа и/или неудовлетворительного профиля роликов петледержателей или отклоняющих роликов:

- воздействие на полосу противо- или дополнительного изгиба рабочих валков.

Эти возникшие растягивающие напряжения представляют собой сумму равномерной и самоуравновешенной составляющих. Равномерная составляющая всегда оказывает влияние на течение металла в очаге деформации, уменьшая усилие прокатки. Влияние самоуравновешенной составляющей, в соответствии с принципом Сен-Венана, убывает с увеличением расстояния от очага деформации до места воздействия.

Назовем *протяженностью зоны влияния* самоуравновешенной составляющей эпюры максимальное расстояние между очагом деформации и местом возникновения в прокатываемой полосе локальных упругих продольных напряжений, на котором самоуравновешенная составляющая ещё оказывает влияние на условия пластической деформации металла. В качестве критерия протяженности зоны влияния примем условие уменьшения амплитуды самоуравновешенной составляющей до 5 % от ее исходной величины.

Для вычисления распределения продольных напряжений в зоне влияния воспользуемся расчетной схемой, изображенной на рис.5.6: к противоположным сторонам прямоугольной пластинки единичной толщины приложены продольные напряжения с самоуравновешенной параболической эпюрой $\sigma_x^0(y)$. Т.к. задача симметричная (эпюры напряжений на обеих гранях одинаковые), то срединная плоскость 111'1' (рис. 5.6,а) свободна от напряжений, а распределение продольных напряжений по осям координат в верхней и нижней половинах пластинки будет одинаковым.

Для наглядности изобразим нижнюю половину пластинки плоским прямоугольником (рис. 5.6,б) и отметим, что сторона прямоугольника, лежащая на оси $0y$, находится в условиях закрепления, соответствующих защемлению полосы валками. В рассматриваемом случае a – расстояние от места возникновения возмущения до очага деформации.

Воспользуемся известным энергетическим методом, описанным, например, в [25].

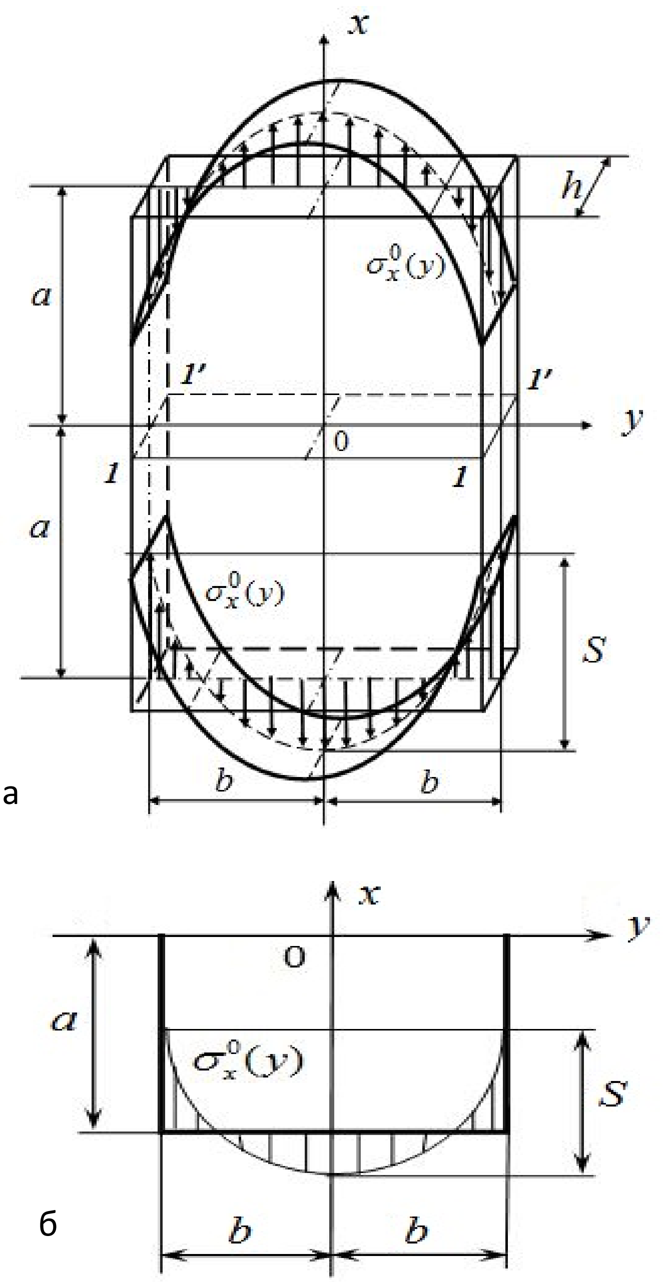


Рис. 5.6. Схема приложения самоуравновешенной эпюры: $2a$, $2b$, h – длина, ширина и толщина пластинки; $\sigma_x^0(y)$ - самоуравновешенная эпюра приложенных напряжений; S - амплитуда неравномерности эпюры

Граничные условия для схемы на рис. 3.1,*а* имеют следующий вид:

$$x = \pm a: \quad \tau_{xy}^0 = 0; \; \sigma_x^0 = S\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]; \quad y = \pm b: \quad \tau_{xy}^0 = 0; \; \sigma_y^0 = 0, \qquad (5.11)$$

где τ_{xy}^0 - касательные напряжения на гранях пластинки; σ_x^0 - нормальные напряжения на гранях пластинки, направленных перпендикулярно оси $0x$; σ_y^0 - нормальные напряжения на гранях пластинки, направленных перпендикулярно оси $0y$.

Энергия упругой деформации рассматриваемой пластинки для плоского напряженного состояния запишется следующим образом:

$$V = \frac{1}{2E}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2\right] dxdy \quad . \tag{5.12}$$

Для односвязной области, как в нашем случае, распределение напряжений не зависит от упругих констант материала пластинки, поэтому для упрощения выкладок полагаем коэффициент Пуассона $\nu = 0$ и введем функцию напряжений φ.

<u>Справка</u>: односвязной называется геометрическая область, в пределах которой не существует замкнутых кривых, не стягиваемых в пределах этой области в точку, например круг, прямоугольник. Примером многосвязной области является кольцо.

Подставляя в выражение (3.2) равенства $\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\tau_{yx} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$, получим следующее выражение:

$$V = \frac{1}{2E}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy\,. \tag{5.13}$$

Возьмем в качестве функции напряжений выражение $\varphi = \frac{S}{6}y^2 - \frac{S}{12b^2}y^4 + \left(x^2 - a^2\right)^2\left(y^2 - b^2\right)^2\left(\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + ...\right)$, которое удовлетворяет граничным условиям (5.11), а неизвестные коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$, в соответствии с приближенным методом Рэлея-Ритца определения экстремалей функционала, находятся из условия

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = 0, \text{ где } i = 1...n\,. \tag{5.14}$$

С целью повышения точности функции распределения $\sigma_x(x, y)$ рассмотрим функцию напряжений для случая $i = 5$:

$$\varphi^{(5)} = \frac{S}{6}y^2 - \frac{S}{12b^2}y^4 + \left(x^2 - a^2\right)^2\left(y^2 - b^2\right)^2\left[\alpha_1^{(5)} + \alpha_2^{(5)}x^2 + \alpha_3^{(5)}y^2 + \alpha_4^{(5)}x^4 + \alpha_5^{(5)}y^4\right]. \tag{5.15}$$

После выполнения вычислений производных функции напряжений $\varphi^{(5)}$, проведения элементарных преобразований и взятия интеграла в соответствии с выражением (5.12) придем к условию (5.14), которое запишется в виде системы пяти уравнений:

$$\begin{cases} A_{11}\alpha_1^{(5)} + A_{12}a^2\alpha_2^{(5)} + A_{13}a^2\alpha_3^{(5)} + A_{14}a^4\alpha_4^{(5)} + A_{15}a^4\alpha_5^{(5)} = \dfrac{S}{a^4b^2}; \\ A_{21}\alpha_1^{(5)} + A_{22}a^2\alpha_2^{(5)} + A_{23}a^2\alpha_3^{(5)} + A_{24}a^4\alpha_4^{(5)} + A_{25}a^4\alpha_5^{(5)} = \dfrac{S}{a^4b^2}; \\ A_{31}\alpha_1^{(5)} + A_{32}a^2\alpha_2^{(5)} + A_{33}a^2\alpha_3^{(5)} + A_{34}a^4\alpha_4^{(5)} + A_{35}a^4\alpha_5^{(5)} = \dfrac{S}{a^4b^2}; \\ A_{41}\alpha_1^{(5)} + A_{42}a^2\alpha_2^{(5)} + A_{43}a^2\alpha_3^{(5)} + A_{44}a^4\alpha_4^{(5)} + A_{45}a^4\alpha_5^{(5)} = \dfrac{S}{a^4b^2}; \\ A_{51}\alpha_1^{(5)} + A_{52}a^2\alpha_2^{(5)} + A_{53}a^2\alpha_3^{(5)} + A_{54}a^4\alpha_4^{(5)} + A_{55}a^4\alpha_5^{(5)} = \dfrac{S}{a^4b^2}; \end{cases} \quad (5.16)$$

где

$$A_{11} = \left(\frac{64}{7} + \frac{256}{49}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7}\frac{b^4}{a^4}\right); \; A_{12} = \left(\frac{64}{77} + \frac{64}{49}\frac{b^4}{a^4}\right); \; A_{13} = \left(\frac{64}{49}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77}\frac{b^6}{a^6}\right);$$

$$A_{14} = \left(\frac{64\times 3}{77\times 13} + \frac{256}{49\times 33}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{49\times 3}\frac{b^4}{a^4}\right); \quad A_{15} = \left(\frac{64}{49\times 3}\frac{b^4}{a^4} + \frac{256}{49\times 33}\frac{b^6}{a^6} + \frac{64\times 3}{77\times 13}\frac{b^8}{a^8}\right);$$

$$A_{21} = \left(\frac{64}{11} + \frac{64}{7}\frac{b^2}{a^2}\right); \; A_{22} = \left(\frac{64\times 3}{11\times 13} + \frac{256}{77}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64\times 3}{7}\frac{b^4}{a^4}\right); \; A_{23} = \left(\frac{64}{77}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77}\frac{b^6}{a^6}\right);$$

$$A_{24} = \left(\frac{256}{11\times 13} + \frac{512}{13\times 33}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64\times 53}{3\times 77}\frac{b^4}{a^4}\right); \; A_{25} = \left(\frac{64}{77\times 3}\frac{b^4}{a^4} + \frac{64\times 3}{77\times 13}\frac{b^8}{a^8}\right);$$

$$A_{31} = \left(\frac{64}{7} + \frac{64}{11}\frac{b^4}{a^4}\right); \; A_{32} = \left(\frac{64}{77} + \frac{64}{77}\frac{b^4}{a^4}\right); \; A_{33} = \left(\frac{64\times 3}{7}\frac{b^2}{a^2} + \frac{256}{77}\frac{b^4}{a^4} + \frac{64\times 3}{11\times 13}\frac{b^6}{a^6}\right);$$

$$A_{34} = \left(\frac{64\times 3}{77\times 13} + \frac{64}{7\times 33}\frac{b^4}{a^4}\right); \; A_{35} = \left(\frac{53\times 64}{7\times 33}\frac{b^4}{a^4} + \frac{512}{33\times 13}\frac{b^6}{a^6} + \frac{64}{11\times 13}\frac{b^8}{a^8}\right);$$

$$A_{41} = \left(\frac{64\times 9}{11\times 13} - \frac{256}{77}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{7}\frac{b^4}{a^4}\right); \; A_{42} = \left(\frac{64\times 3}{11\times 13} + \frac{512}{11\times 13}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64\times 53}{77}\frac{b^4}{a^4}\right);$$

$$A_{43} = \left(\frac{64\times 9}{77\times 13}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64}{77}\frac{b^6}{a^6}\right); \; A_{44} = \left(\frac{64\times 21}{11\times 13\times 17} + \frac{256\times 9}{77\times 13}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64\times 643}{77\times 13}\frac{b^4}{a^4}\right);$$

$$A_{45} = \left(\frac{64\times 3}{13\times 77}\frac{b^4}{a^4} + \frac{256}{77\times 33}\frac{b^6}{a^6} + \frac{64\times 3}{77\times 13}\frac{b^8}{a^8}\right); \; A_{51} = \left(\frac{64}{7} - \frac{256}{77}\frac{b^2}{a^2} + \frac{64\times 9}{11\times 13}\frac{b^4}{a^4}\right);$$

$$A_{52} = \left(\frac{64}{77} + \frac{64\times 9}{77\times 13}\frac{b^4}{a^4}\right); \; A_{53} = \left(\frac{53\times 64}{77}\frac{b^2}{a^2} + \frac{512}{11\times 13}\frac{b^4}{a^4} + \frac{64\times 3}{11\times 13}\frac{b^6}{a^6}\right);$$

$$A_{54}=\left(\frac{64\times 3}{13\times 77}+\frac{256}{33\times 77}\frac{b^2}{a^2}+\frac{64\times 3}{77\times 13}\frac{b^4}{a^4}\right);\ A_{55}=\left(\frac{643\times 64}{13\times 77}\frac{b^4}{a^4}+\frac{256\times 9}{13\times 77}\frac{b^6}{a^6}+\frac{64\times 21}{11\times 13\times 17}\frac{b^8}{a^8}\right).$$

Для упрощения вида системы (5.16) и приведения ее правых частей к единице сделаем следующую замену переменных:

$$\alpha_1^{(5)}=x_1^{(5)}\frac{S}{a^4b^2};\ \alpha_2^{(5)}a^2=x_2^{(5)}\frac{S}{a^4b^2};\ \alpha_3^{(5)}a^2=x_3^{(5)}\frac{S}{a^4b^2};\ \alpha_4^{(5)}a^4=x_4^{(5)}\frac{S}{a^4b^2};$$
$$\alpha_5^{(5)}a^4=x_5^{(5)}\frac{S}{a^4b^2}.$$

В результате получим из следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_{11}x_1^{(5)}+A_{12}x_2^{(5)}+A_{13}x_3^{(5)}+A_{14}x_4^{(5)}+A_{15}x_5^{(5)}=1;\\ A_{21}x_1^{(5)}+A_{22}x_2^{(5)}+A_{23}x_3^{(5)}+A_{24}x_4^{(5)}+A_{25}x_5^{(5)}=1;\\ A_{31}x_1^{(5)}+A_{32}x_2^{(5)}+A_{33}x_3^{(5)}+A_{34}x_4^{(5)}+A_{35}x_5^{(5)}=1;\\ A_{41}x_1^{(5)}+A_{42}x_2^{(5)}+A_{43}x_3^{(5)}+A_{44}x_4^{(5)}+A_{45}x_5^{(5)}=1;\\ A_{51}x_1^{(5)}+A_{52}x_2^{(5)}+A_{53}x_3^{(5)}+A_{54}x_4^{(5)}+A_{55}x_5^{(5)}=1. \end{cases} \tag{5.17}$$

Решая систему (5.17), находим функцию распределения продольных напряжений в рассматриваемой пластинке:

$$\sigma_x^{(5)}(x,y)=S\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]-12S\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2\times\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\times\left[x_1^{(5)}+x_2^{(5)}\left(\frac{x}{a}\right)^2+x_3^{(5)}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{y}{b}\right)^2+\right.$$
$$\left.+x_4^{(5)}\left(\frac{x}{a}\right)^4+x_5^{(5)}\left(\frac{b}{a}\right)^4\left(\frac{y}{b}\right)^4\right]-2S\left(\frac{b}{a}\right)^2\times\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2\times\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\times\left\{\left(\frac{y}{b}\right)^2\times\right.$$
$$\left.\times\left[8x_3^{(5)}+16x_5^{(5)}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]-\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\times\left[x_3^{(5)}+6x_5^{(5)}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\right\}. \tag{5.18}$$

Для оценки точности функции распределения продольных напряжений (5.18) был проведен проверочный расчет методом конечных элементов по схеме, изображенной на рис. 5.1,б. Результаты расчета при S = 30 МПа для случаев $a = b$ *и* $a = 2b$ приведены на рис 5.2-5.3.

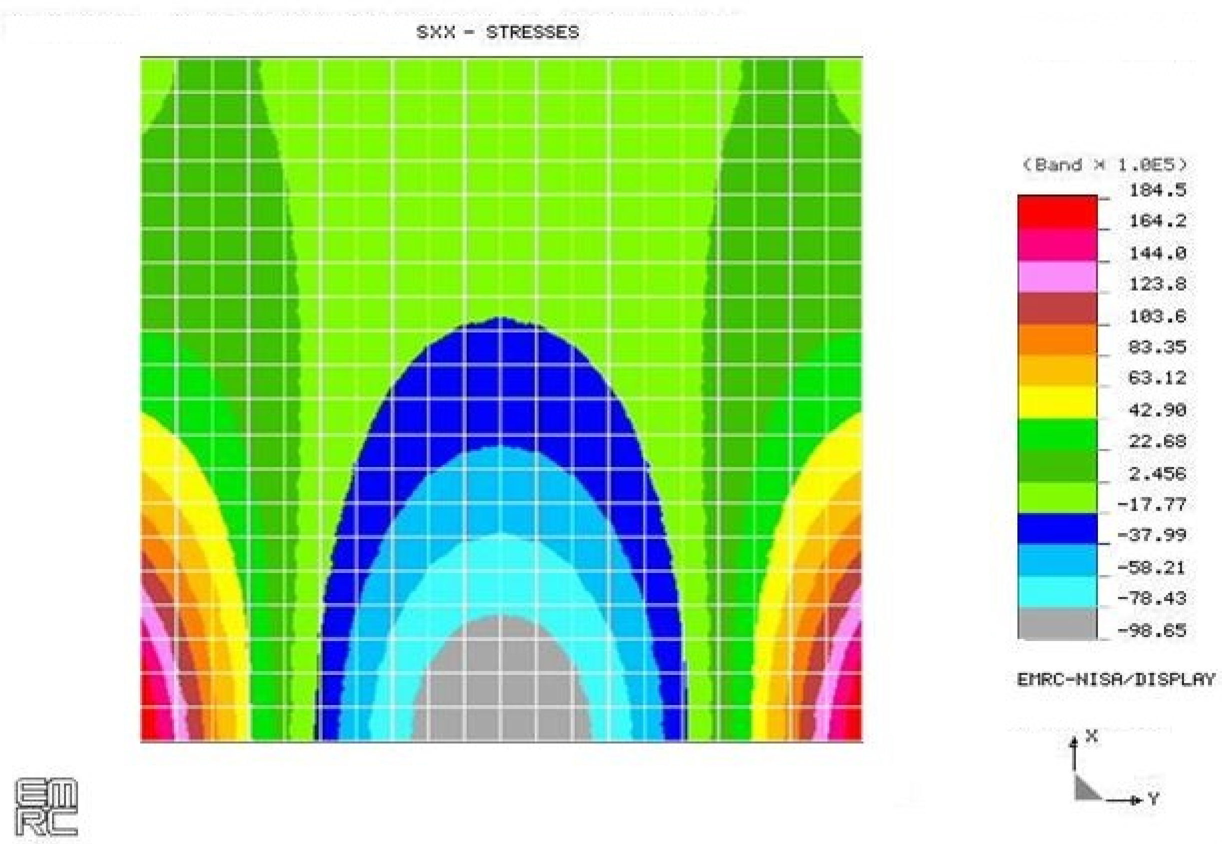


Рис. 5.2 - Распределение продольных напряжений при $a = b$

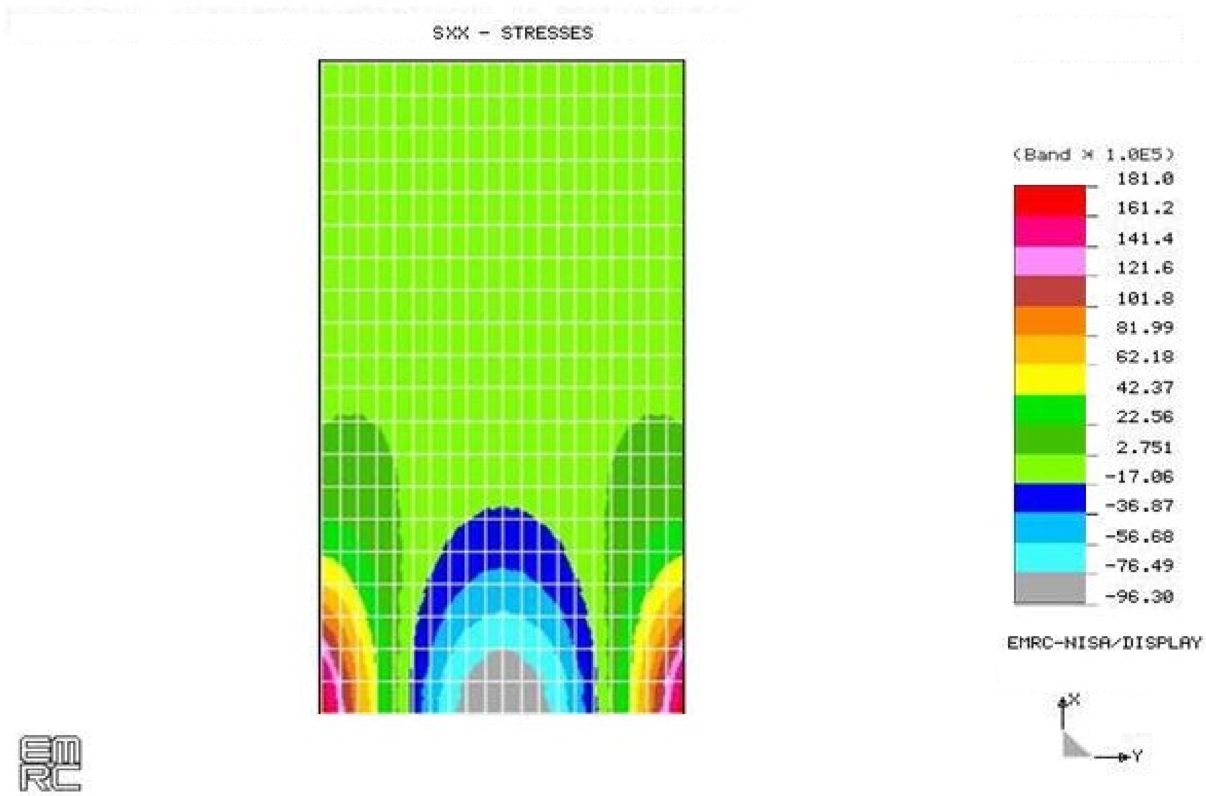


Рис. 5.3 - Распределение продольных напряжений при $a = 2b$

Расчеты методом конечных элементов и по выражению (5.18) для случая $a = b$ представлены на рис. 5.4,а-5.4,г; для случая $a = 2b$ – на рис. 5.4,д-5.4,з.

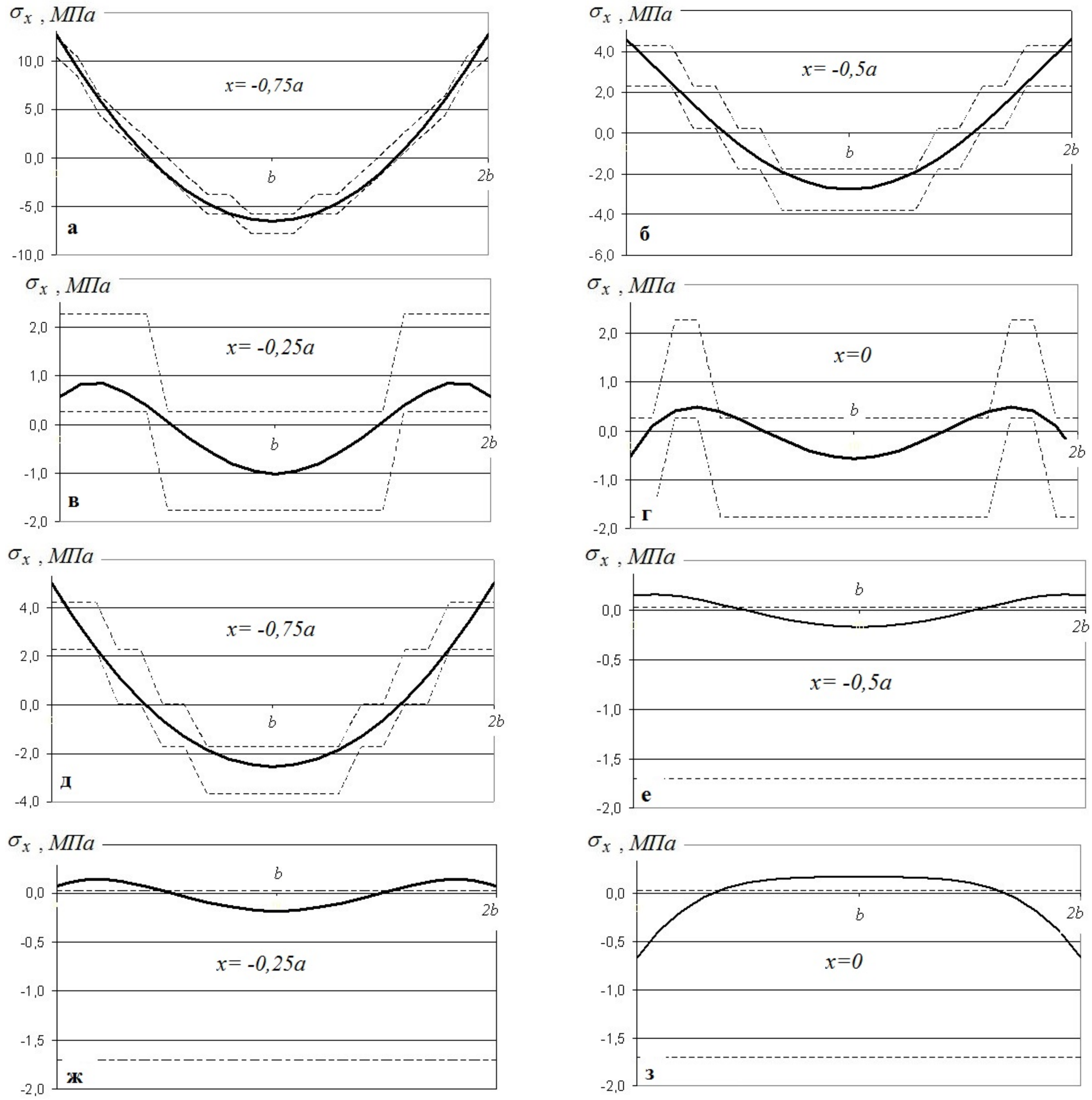


Рис.5.4 - Результаты расчета распределения продольных напряжений методом конечных элементов и по выражению (5.18)

Границы, обозначенные ступенчатыми и прямыми штриховыми линиями, показывают области значений функции распределения продольных напряжений $\sigma_x(x, y)$ по методу конечных элементов, толстые линии показывают результаты расчета по выражению (5.18).

Назовем функцией ослабления $K(x)$ отношение амплитуды самоуравновешенной эпюры продольных напряжений на расстоянии x от места воздействия к исходной амплитуде:

$$K(x)=\frac{\sigma_x(x)\big|_{y=0}-\sigma_x(x)\big|_{y=b}}{\sigma_x(x=a)\big|_{y=0}-\sigma_x(x=a)\big|_{y=b}}. \tag{5.19}$$

Зависимость этой функции от расстояния рассчитали при помощи выражения (5.18). Результаты расчета представлены на рис. 5.5: тонкой линии соответствует случай $a/b=1$, штриховой – $a/b=2$, толстой – $a/b=3$.

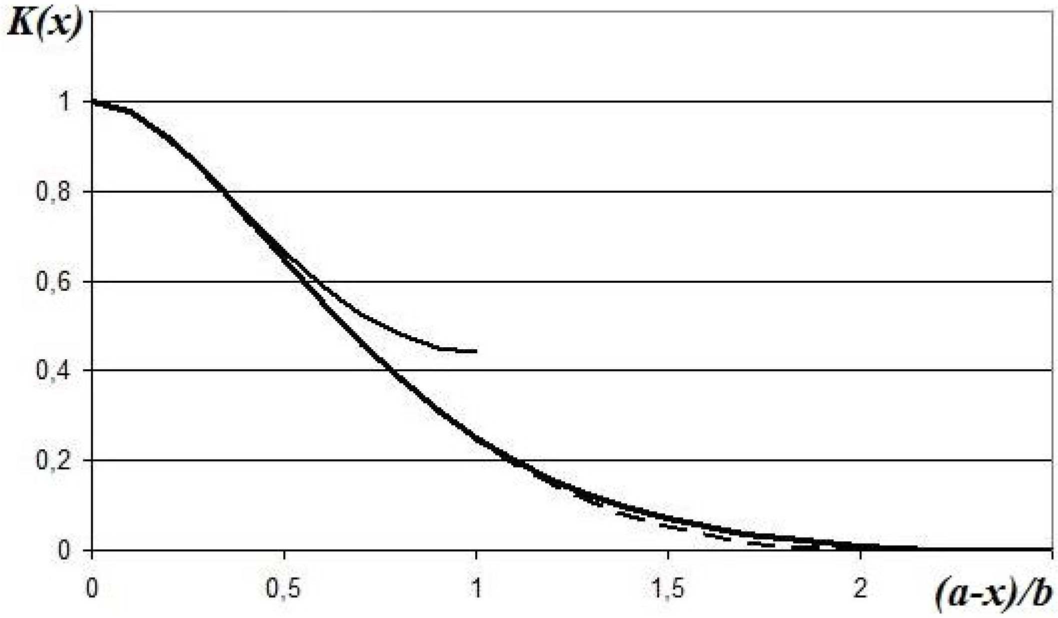


Рис. 5.5 - Зависимость функции $K(x)$ от расстояния

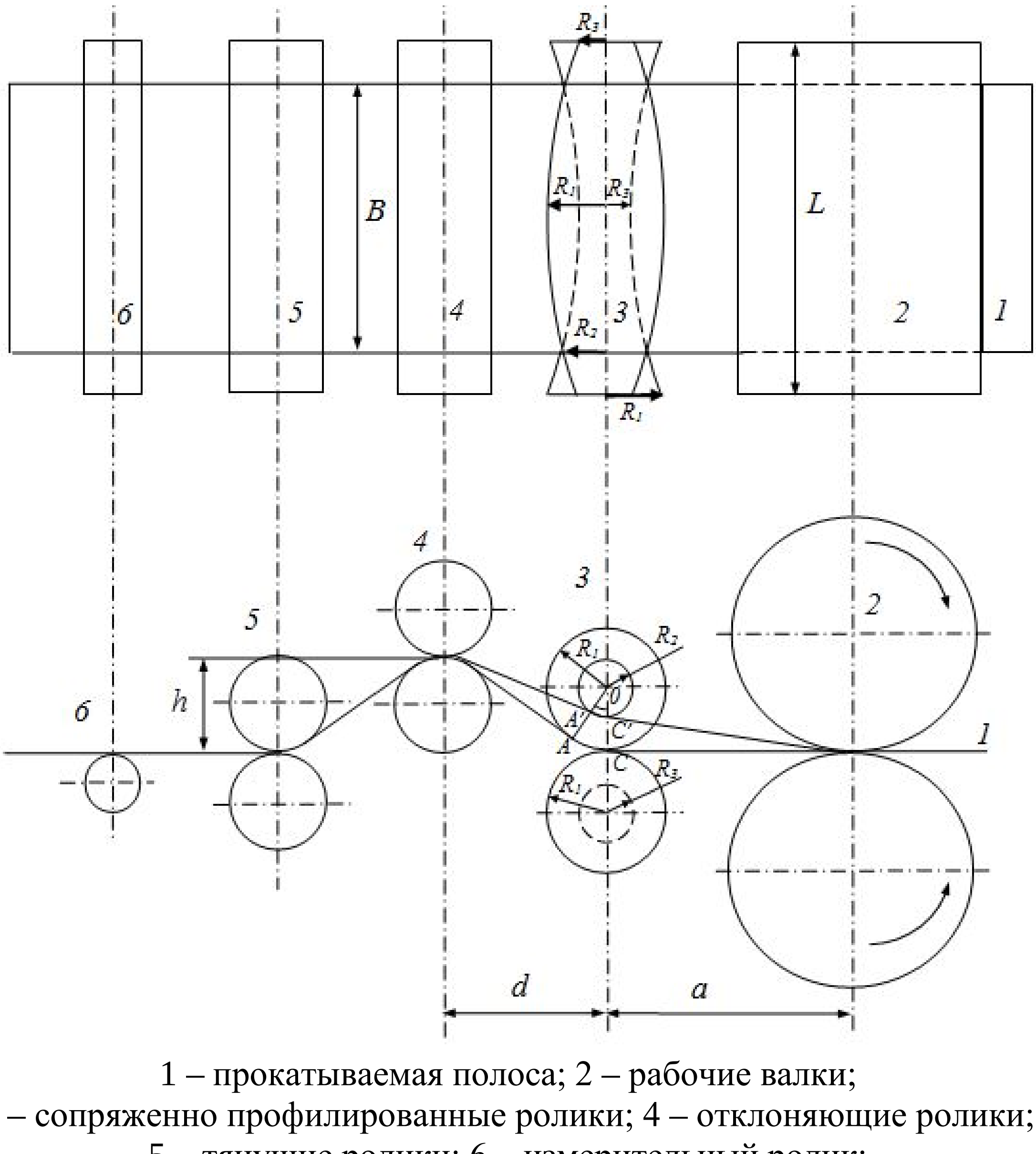
Анализ результатов расчета функции *K(x)* показывает, что влияние самоуравновешенной составляющей эпюры продольных упругих напряжений не распространяется далее $1{,}6b$; в пределах этой области $K(x)>0{,}05$.

Следовательно, продольные упругие напряжения, возникшие в полосе шириной B на расстоянии L от очага деформации, необходимо учитывать для анализа формоизменения прокатываемых полос в зоне, где $L\le 0{,}8B$. При $L>0{,}8B$ этим влиянием можно пренебречь.

5.3. Изменение формы эпюры переднего натяжения для регулирования плоскостности прокатываемых полос

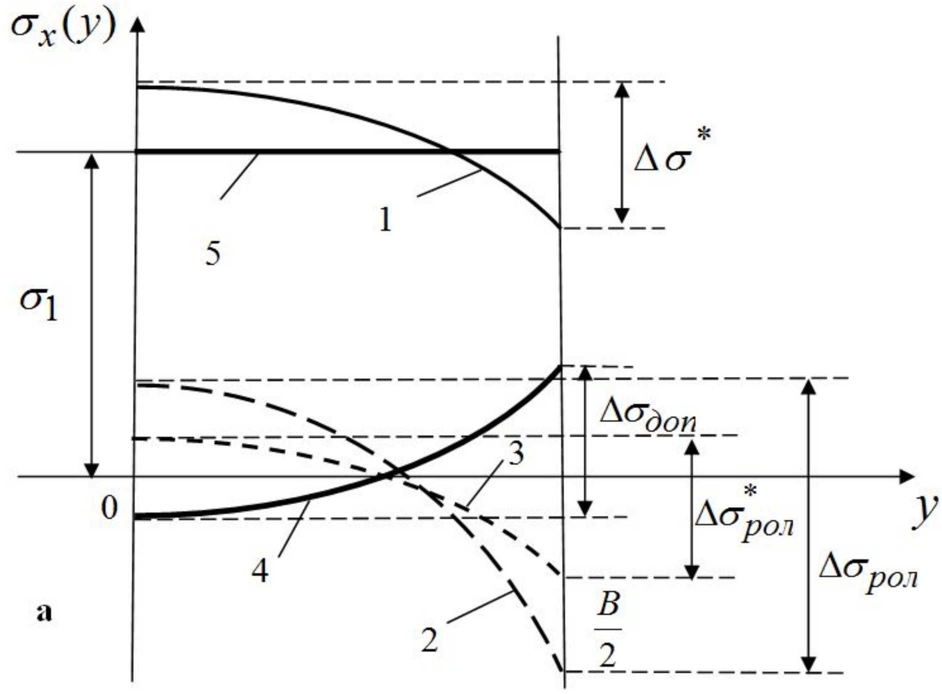
Решения задач о влиянии формы эпюры переднего натяжения на распределение погонной нагрузки и остаточных напряжений по ширине полосы, а также о распределении продольных напряжений в полосе при её нагружении самоуравновешенной эпюрой легли в основу способа регулирования плоскостности прокатываемых полос [26].

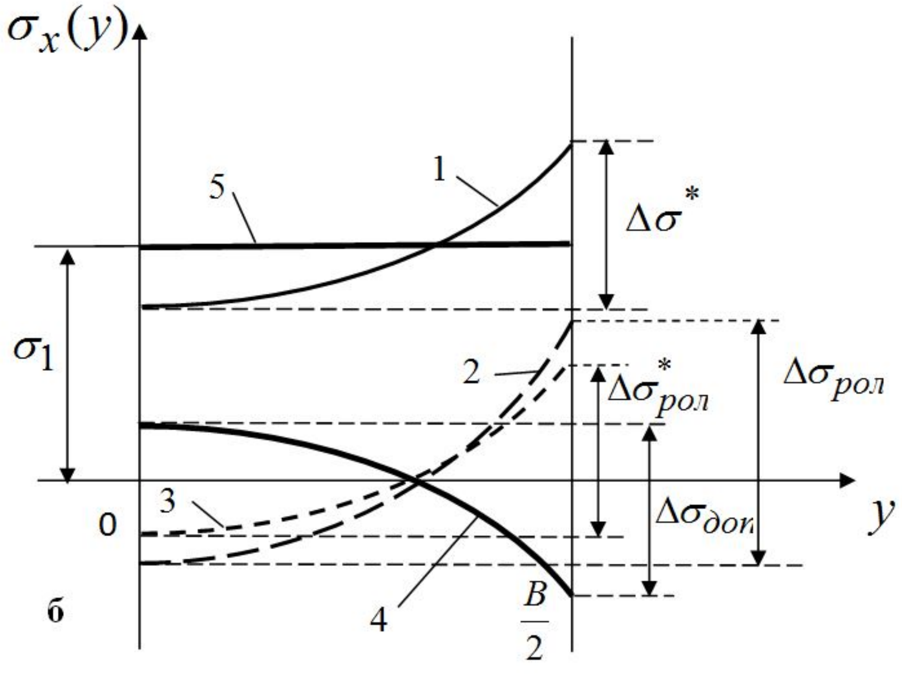
Схема возможного устройства регулирования плоскостности прокатываемых полос приведена на рис. 5.6.



1 – прокатываемая полоса; 2 – рабочие валки;
3 – сопряженно профилированные ролики; 4 – отклоняющие ролики;
5 – тянущие ролики; 6 – измерительный ролик;
B – ширина прокатываемой полосы; L – длина бочки рабочего валка
Рис. 5.6. Устройство для регулирования плоскостности

На рис.5.7 изображена схема, поясняющая принцип регулирования плоскостности прокатываемых полос. Допустим, что полоса (1) на выходе прокатной клети (2) имеет неравномерную эпюру продольных напряжений с амплитудой $\Delta\sigma^*$, способствующую краевой волнистости (рис.5.7,а, кривая 1). Форма эпюры и средний уровень переднего натяжения σ_1 измеряется специальным устройством (6) (например, стрессометрическим роликом).





а – краевая волнистость; б – центральная коробоватость
Рис.5.7. Схема способа регулирования плоскостности

При изменении формы эпюры выходного удельного натяжения эпюра выходных скоростей по ширине полосы изменяется в соответствии с выражением (5.10) $\varphi'(y) = \frac{\sigma^0_{1x}(y)}{E}$, где $\sigma^0_{1x}(y)$ – неравномерность эпюры переднего удельного натяжения; $\varphi'(y)$- выходная неравномерность скоростей полосы; E – модуль упругости материала полосы. Другими словами, если к выходному сечению очага деформации приложить неравномерную эпюру напряжений, то возникшая неравномерность скоростей выхода полосы компенсирует исходную неравномерность напряжений.

В соответствии с этим положением, к выходному сечению очага деформации необходимо приложить компенсирующую эпюру переднего натяжения $\Delta\sigma^*_{рол}$ (рис.5.7,а, кривая 3). Она вызовет течение металла, компенсирующее $\Delta\sigma^*_{рол}$. После снятия $\Delta\sigma^*_{рол}$ в полосе возникнут остаточные напряжения $\Delta\sigma_{доп}$, равные по амплитуде $\Delta\sigma^*_{рол}$, но противоположные по знаку (рис.5.7,а, кривая 4), которые в свою очередь компенсируют $\Delta\sigma^*$. В результате такого регулирования в полосе исчезнут остаточные напряжения (рис.5.7,а, кривая 5).

Процесс компенсации неравномерной эпюры продольных напряжений, способствующих возникновению коробоватости полосы, аналогичен и изображен на рис.3.7,б.

В соответствии с принципом Сен-Венана неравномерность приложенных к полосе напряжений уменьшается с увеличением расстояния от места приложения. Следовательно, для того, чтобы к очагу деформации была приложена неравномерная эпюра напряжений с амплитудой $\Delta\sigma^*_{рол}$, на расстоянии a от него (рис.5.6) необходимо создать эпюру напряжений с амплитудой, равной $\Delta\sigma_{рол} = \dfrac{\Delta\sigma^*_{рол}}{K}$ (рис.3.7,а,б, кривые 2), где $K = K(a, B)$ – значение функции ослабления, величина которого вычисляется по формуле (5.19).

Предлагаемый способ регулирования плоскостности реализуется следующим образом. Полоса (1) выходит из клети (2), имея неравномерность выходных напряжений $\Delta\sigma^*$ (рис.5.7, кривые 1). На расстоянии a от очага деформации установлена пара роликов, имеющих сопряженные профилировки: один выпуклую, другой вогнутую, равную $\delta = R_1 - R_3$. Для компенсации эпюры, способствующей волнистости полосы, отклоняющие ролики (4) поднимаются вверх, и полоса частично оборачивается вокруг верхнего профилированного ролика (3) на угол $\varphi = A0C$.

Для компенсации эпюры, способствующей коробоватости полосы, отклоняющие ролики (4) опускаются вниз, и полоса частично оборачивается вокруг нижнего профилированного ролика (3). При этом профилированные ролики должны создать компенсирующую неравномерность натяжений, равную $\Delta\sigma_{рол} = \dfrac{\Delta\sigma^*}{K}$, где $K = K(a, B)$ - значение функции ослабления, зависящее от расстояния до очага деформации a и ширины полосы B.

Так как на полосу действует переднее натяжение, равное σ_1, то полоса охватывает профилированный ролик на участке, соответствующем углу φ.

При этом разность расстояний, пройденных серединой и краями полосы по поверхности выпуклого профилированного ролика $\Delta\ell = AC - A'C' = R_1\varphi - R_2\varphi = \varphi\Delta R$, где R_2 - радиус ролика на краю полосы, а по поверхности нижнего - $\Delta\ell = R_2\varphi - R_3\varphi = \varphi\Delta R$. При параболической профилировке сопряженных роликов $\Delta R = \delta\left(\frac{B}{L}\right)^2$, и тогда $\Delta\ell = \delta\left(\frac{B}{L}\right)^2\varphi$.

Так как угол охвата профилированного ролика равен $\varphi = arctg\frac{h}{d} \approx \frac{h}{d}$, то $\Delta\ell = \delta\left(\frac{B}{L}\right)^2\frac{h}{d}$. Относительная разность расстояний, пройденных серединой и краями полосы, $\varepsilon \approx \frac{\Delta\ell}{a} = \delta\left(\frac{B}{L}\right)^2\frac{h}{da}$. Тогда неравномерность напряжений, создаваемая профилированным роликом $\Delta\sigma_{рол} = E\varepsilon = E\delta\left(\frac{B}{L}\right)^2\frac{h}{da}$.

Необходимо отметить, что плотный охват полосой профилированного ролика на участке, соответствующем углу φ, обеспечивается при условии $\Delta\sigma_{рол} \le \sigma_1$. В противном случае участки полосы, где $\Delta\sigma_{рол} > \sigma_1$, не будут прилегать к поверхности профилированного ролика.

Таким образом, для компенсации неравномерности напряжений $\Delta\sigma^*$, возникающей в полосе на выходе из клети, необходимо переместить отклоняющие ролики на расстояние, равное $h = \frac{\Delta\sigma^*}{KE}\left(\frac{L}{B}\right)^2\frac{da}{\delta}$, где $\Delta\sigma^*$ – разница между удельными напряжениями в середине и на краю полосы, причем она положительна при форме эпюры, способствующей волнистости полосы, и отрицательна при форме эпюры, способствующей коробоватости; K – значение функции ослабления; L – длина бочки профилированных роликов; B – ширина полосы; a – расстояние между осями рабочих валков и профилированных роликов, не более половины длины бочки; d – расстояние между осями профилированных роликов и отклоняющих роликов; δ – выпуклость/вогнутость профилированных роликов на радиусе; E – модуль упругости материала полосы.

6. УШИРЕНИЕ ПРИ ЛИСТОВОЙ ПРОКАТКЕ КАК ПРОЯВЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МЕТАЛЛА В ОЧАГЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Одной из самых сложных проблем в листовой прокатке является уширение, причиной которого является поперечное перемещения металла в очаге пластической деформации.

Начало исследований процесса уширения было положено еще в XIX веке работами Бласса (1882 г.) и Тафеля (1909 г.), в которых было сделано предположение о том, что уширение развивается в основном на боковых кромках полосы и в зонах, прилегающих к ним.

А.Ф. Головин (1928 г.) считал, что в соответствии с законом наименьшего сопротивления при пластической деформации частицы металла в очаге деформации перемещаются по нормалям к боковой поверхности - при этом очаг деформации условно делится на четыре зоны: опережения, отставания и две примыкающие к боковым кромкам полосы зоны уширения.

Исследования Б.П. Бахтинова, А.И. Целикова, А.И. Гришкова показали, что боковые зоны, несмотря на их условность, могут послужить исходной позицией для развития практических методик вычисления величины уширения при листовой прокатке.

Для теоретического анализа влияния уширения на параметры листовой прокатки и прокатываемой полосы, включая неравномерность распределения скоростей во входном и выходном сечениях очага деформации, необходимо иметь адекватную математическую модель течения металла в очаге пластической деформации, в которой сочетаются инженерная наглядность и физическая сущность процесса.

6.1. Обоснование кинематической допустимости поля скоростей при листовой прокатке с уширением

Вариационный принцип Журдена представляется наиболее подходящим для теоретического исследования формоизменения металла при листовой прокатке. В соответствии с этим принципом строится кинематически допустимое поле скоростей металла в очаге деформации и соответствующий ему функционал, представляющий собой полную мощность прокатки. Минимум этого функционала определяет действительное поле скоростей, которое служит для определения параметров прокатки, в том числе и величина уширения.

Для предварительного анализа процесса уширения при листовой прокатке и анализа кинематической допустимости поля скоростей была разработана математическая модель, в которой характер поперечного перемещения металла не зависел от зон опережения и отставания.

Было построено кинематически допустимое поле скоростей металла, учитывающее экспериментально установленный факт увеличения скорости поперечного перемещения металла от середины полосы к её кромкам. При построении математической модели использовалась расчетная схема, приведенная на рис. 6.1. В соответствии с приведенной схемой были приняты следующие обозначения:

v_0, v_1, v_x, v_y, v - входная и выходная скорости полосы и проекции скорости течения металла на оси x, y соответственно, а также суммарная скорость металла;

$h_0, h_н, h_1, B_0, B_н, B_1$ - толщина и полуширина полосы на входе, в нейтральном сечении и на выходе соответственно;

$\ell, x_н$ - длина очага деформации и зоны опережения.

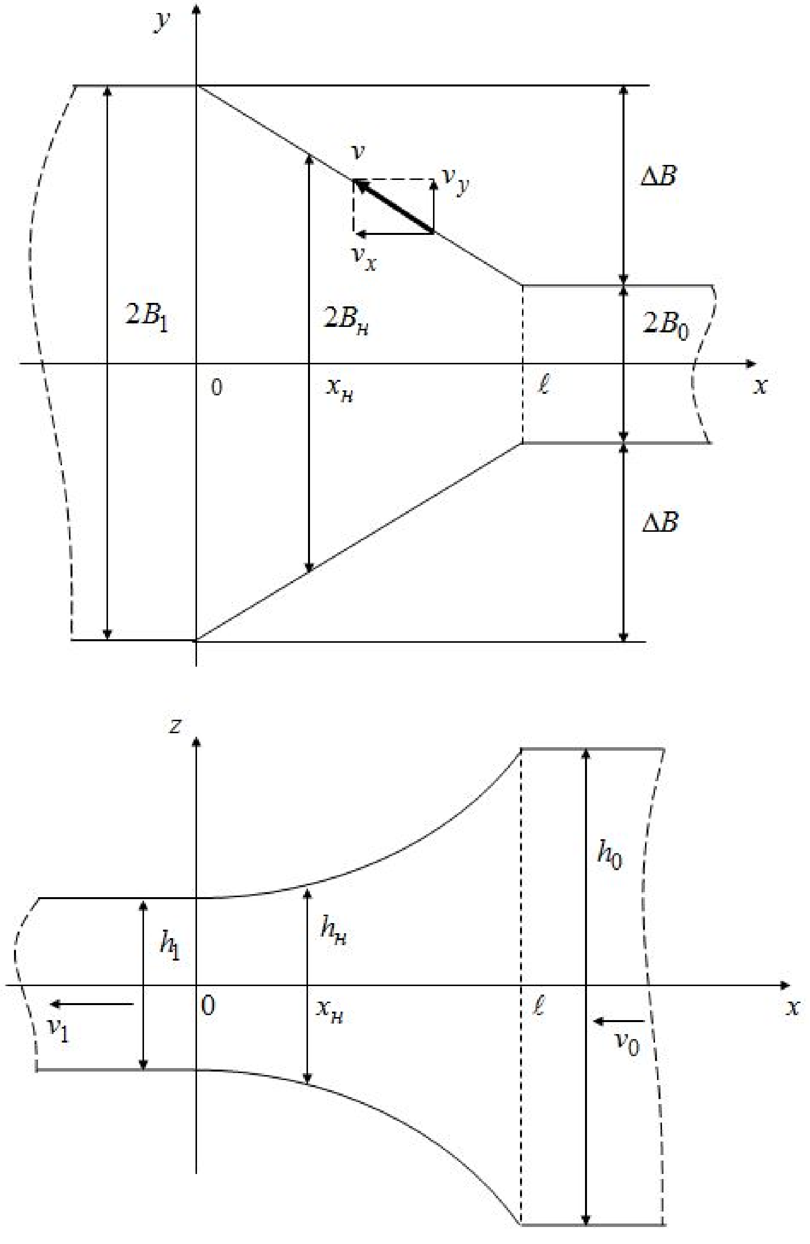


Рис.6.1 - Расчетная схема

Закономерность изменения ширины и толщины прокатываемой полосы соответствует следующим функциям:

$$B_x = B_1 - \Delta B \frac{x}{\ell} = B_0 \left(1 + \beta - \beta \frac{x}{\ell}\right), \tag{6.1}$$

$$h = h_1 + \Delta h \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 = h_0 \left[a + \varepsilon \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right], \tag{6.2}$$

где $\beta = \dfrac{\Delta B}{B_0}$, $a = \dfrac{h_1}{h_0}$, $\varepsilon = \dfrac{\Delta h}{h_0}$.

Из условия кинематической допустимости поля скоростей в очаге деформации получаем следующие соотношения на кромке полосы

$$\left. \frac{v_y}{v_x} \right|_{y = B_x} = -\frac{\Delta B}{\ell} \tag{6.3}$$

и на контакте с валком

$$\left. \frac{v_z}{v_x} \right|_{z = \frac{h_x}{2}} = tg\alpha = \frac{1}{2} \frac{dh}{dx}. \tag{6.4}$$

Для скорости поперечного течения металла в очаге пластической деформации выбираем степенную зависимость, которая может показывать различный характер увеличения скорости поперечного перемещения металла от середины полосы к кромкам в зависимости от величины показателя степени:

$$\frac{v_y}{v_x} = -\frac{\Delta B}{\ell} \left(\frac{y}{B_x}\right)^p, \tag{6.5}$$

где p - варьируемый показатель степени.

Из закона постоянства секундных объёмов следует

$$v_x B_x h_x = v_в \cos\gamma B_{н}, h_н, \tag{6.6}$$

где B_x и h_x - полуширина и толщина полосы в произвольном сечении, γ - нейтральный угол, $v_в$ - окружная скорость валка.

Нормируя скорость течения металла v_x к окружной скорости валка $v_в$, получаем:

$$v_x = -\frac{A}{\left(1+\beta-\beta\dfrac{x}{\ell}\right)\cdot\left[a+\varepsilon\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right]}, \tag{6.7}$$

где $\quad A = \cos\gamma\cdot\left(1+\beta-\beta\dfrac{x_н}{\ell}\right)\cdot\left[a+\varepsilon\left(\dfrac{x_н}{\ell}\right)^2\right].$

Подставляя (6.7) в (6.5), получим

$$v_y = \frac{\Delta B}{\ell}v_x\left(\frac{y}{B_x}\right)^p = \frac{\Delta B}{\ell}\cdot\frac{A}{\left(1+\beta-\beta\cdot\dfrac{x}{\ell}\right)^{p+1}\cdot\left[a+\varepsilon\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right]}\cdot\left(\frac{y}{B_0}\right)^p. \tag{6.8}$$

Скорости деформации определяются по известным соотношениям теории пластичности и условия несжимаемости:

$$\xi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \xi_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \xi_z = -\xi_x - \xi_y, \quad \eta_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right),$$

$$\eta_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \quad \eta_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right).$$

Принимая деформацию металла по высоте равномерной, получаем выражение для скорости вертикального перемещения:

$$v_z = \int \xi_z dz = -\left(\xi_x + \xi_y\right)\cdot z + \varphi(x,y). \tag{6.9}$$

Из условия симметричности задачи $v_z\big|_{z=0} = 0$, следовательно, $\varphi(x,y) \equiv 0$.

Вычислим выражения для скоростей деформации по осям x и y:

$$\xi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{A\dfrac{\beta}{\ell}}{\left(1+\beta-\beta\dfrac{x}{\ell}\right)^2\left[a+\varepsilon\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right]} + \frac{2A\dfrac{\varepsilon}{\ell}\dfrac{x}{\ell}}{\left(1+\beta-\beta\dfrac{x}{\ell}\right)\left[a+\varepsilon\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right]^2};$$

$$\xi_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{A\dfrac{\beta}{\ell}p}{\left(1+\beta-\beta\dfrac{x}{\ell}\right)^{p+1}\left[a+\varepsilon\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right]}\left(\frac{y}{B_0}\right)^{p-1}.$$

Проверим выполнение условие (6.4) кинематической допустимости поля скоростей (6.7), (6.8), (6.9). Для этого сравним два выражения для ξ_z; одно получено из условия несжимаемости, другое из условия равномерности деформации по высоте – они должны совпадать.

Выражение для ξ_z из условия несжимаемости:

$$\xi_z = -\xi_x - \xi_y = \frac{A\frac{\beta}{\ell}}{\left(1+\beta-\beta\frac{x}{\ell}\right)^2\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]} - \frac{2A\frac{\varepsilon}{\ell}\frac{x}{\ell}}{\left(1+\beta-\beta\frac{x}{\ell}\right)\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]^2} -$$

$$- \frac{A\frac{\beta}{\ell}p}{\left(1+\beta-\beta\frac{x}{\ell}\right)^{p+1}\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]}\left(\frac{y}{B_0}\right)^{p-1}. \quad (6.10)$$

Теперь рассмотрим выражение для ξ_z из условия равномерности деформации по высоте:

$$v_z\Big|_{z=\frac{h_x}{2}} = v_x tg\alpha = \frac{v_x}{2}\frac{dh}{dx}; \qquad \frac{dh}{dx} = 2\frac{\Delta h}{\ell}\frac{x}{\ell};$$

$$\xi_z = \frac{v_z\Big|_{z=\frac{h_x}{2}}}{\frac{h}{2}} = -\frac{2A\frac{\varepsilon}{\ell}\frac{x}{\ell}}{\left(1+\beta-\beta\frac{x}{\ell}\right)\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]^2}. \quad (6.11)$$

Приравняем друг другу правые части выражений (6.10) и (6.11):

$$\frac{A\frac{\beta}{\ell}}{\left(1+\beta-\beta\frac{x}{\ell}\right)^2\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]} - \frac{2A\frac{\varepsilon}{\ell}\frac{x}{\ell}}{\left(1+\beta-\beta\frac{x}{\ell}\right)\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]^2} -$$

$$- \frac{A\frac{\beta}{\ell}p}{\left(1+\beta-\beta\frac{x}{\ell}\right)^{p+1}\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]}\left(\frac{y}{B_0}\right)^{p-1} = -\frac{2A\frac{\varepsilon}{\ell}\frac{x}{\ell}}{\left(1+\beta-\beta\frac{x}{\ell}\right)\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]^2}.$$

Для того, чтобы выражения (6.10) и (6.11) совпадали, необходимо выполнение следующего равенства:

$$1 = \frac{p}{\left(1+\beta-\beta\frac{x}{\ell}\right)^{p-1}}\left(\frac{y}{B_0}\right)^{p-1} = p\left(\frac{y}{B_x}\right)^{p-1} . \qquad (6.12)$$

Замечаем, что равенство (6.12) выполняется интегрально:

$$\int_0^{B_x} dy = \int_0^{B_x} p\left(\frac{y}{B_x}\right)^{p-1} dy = B_x . \qquad (6.12а)$$

Итак, равенство (6.12а) доказывает, что поле скоростей (6.7)-(6.9), выведенное на основе гипотезы плоских сечений, кинематически допустимо в интегральном смысле для анализа процессов уширения при листовой прокатке.

6.2. Математическая модель процесса уширения на основе поля скоростей, кинематически допустимого в интегральном смысле

Вариационный принцип Журдена, примененный к очагу пластической деформации, записывается следующим образом:

$$\delta\left(\iiint_{\Omega} \tau_s \mathrm{H} d\Omega - \iint_{S} \vec{\sigma}^n \vec{v} ds + \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} \tau_s \left|\Delta v_i\right| ds\right) = 0 . \qquad (6.13)$$

В уравнении (6.13) τ_s - предел текучести на сдвиг, H - интенсивность скоростей сдвиговых деформаций; $\vec{\sigma}^n$, $\vec{v}$ - полное напряжение на поверхности S с единичной внешней нормалью $\vec{n}$ и соответствующая скорость перемещения; Δv_i - скачок скоростей течения металла на i - ой поверхности среза S_i; δ - символ варьирования.

Первое слагаемое выражения (6.13) - мощность внутренних сопротивлений, второе - мощность сил, действующих на границах очага деформации, третье - мощности среза.

Интенсивность скоростей деформаций вычисляем с учётом скоростей деформаций сдвига:

$$\mathrm{H} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\left(\xi_x-\xi_y\right)^2+\left(\xi_y-\xi_z\right)^2+\left(\xi_z-\xi_x\right)^2+\frac{3}{2}\left(\eta_{xy}^2+\eta_{yz}^2+\eta_{zx}^2\right)} . \qquad (6.14)$$

Суммарная скорость скольжения между валками и полосой с учетом поперечного перемещения металла в очаге деформации:

$$v_{ск} = \sqrt{\Delta v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

где $\Delta v_x = (v_x - v_в)$ - скорость скольжения металла относительно рабочего валка по оси x; μ - коэффициент трения.

В уравнении (6.13) варьируемыми параметрами являются показатель степени p и величина половины абсолютного уширения ΔB. С помощью метода Ритца получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dp}\left[\iiint\limits_V \tau_s \mathrm{H} dv - \iint\limits_S (\vec{p}_n, \vec{v}) ds + \sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{S_i} \tau_s \left|\Delta v_i\right| ds_i\right] = 0, \\ \dfrac{d}{d(\Delta B)}\left[\iiint\limits_V \tau_s \mathrm{H} dv - \iint\limits_S (\vec{p}_n, \vec{v}) ds + \sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{S_i} \tau_s \left|\Delta v_i\right| ds_i\right] = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Координата нейтрального сечения определяется как граница между зонами опережения и отставания с помощью закона сохранения энергии (для принципа Журдена – энергии в единицу времени, т.е. мощности):

$$\iiint\limits_V \tau_s \mathrm{H} dv - \iint\limits_S (\vec{p}_n, \vec{v}) ds + \sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{S_i} \tau_s \left|\Delta v_i\right| ds_i = 2\mu\tau_s (S_{от} - S_{оп}), \quad (6.16)$$

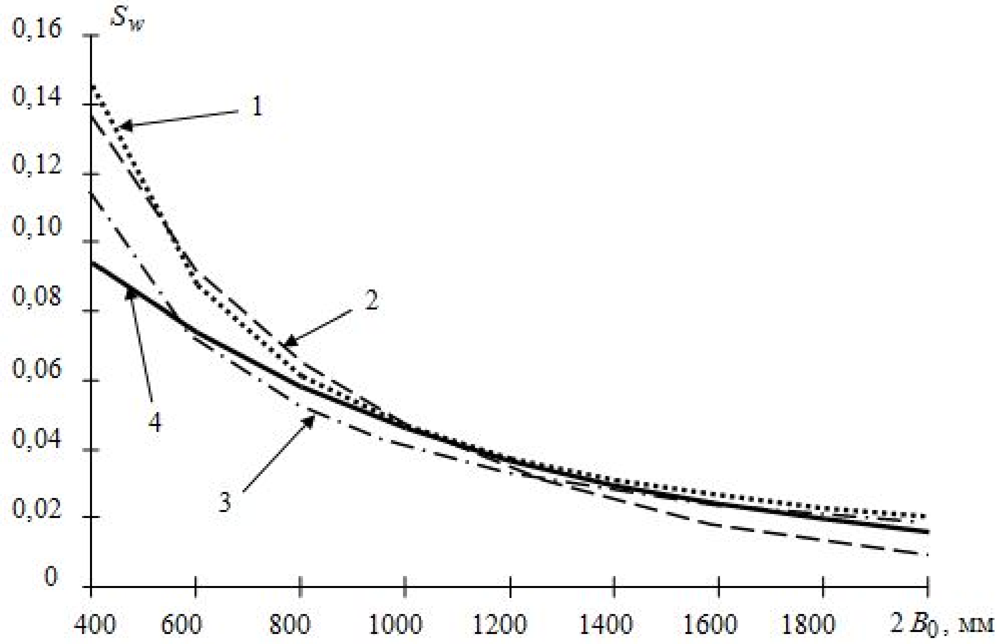
где $S_{от}, S_{оп}$ - площади зон отставания и опережения.

Уравнения (6.15) и (6.16) и являются собственно математической моделью процесса уширения, разработанной на основе поля скоростей, кинематически допустимого в интегральном смысле

Поперечное течение металла при листовой прокатке с уширением часто описывают с помощью коэффициента уширения, представляющего собой отношение истинных деформаций по ширине и высоте:

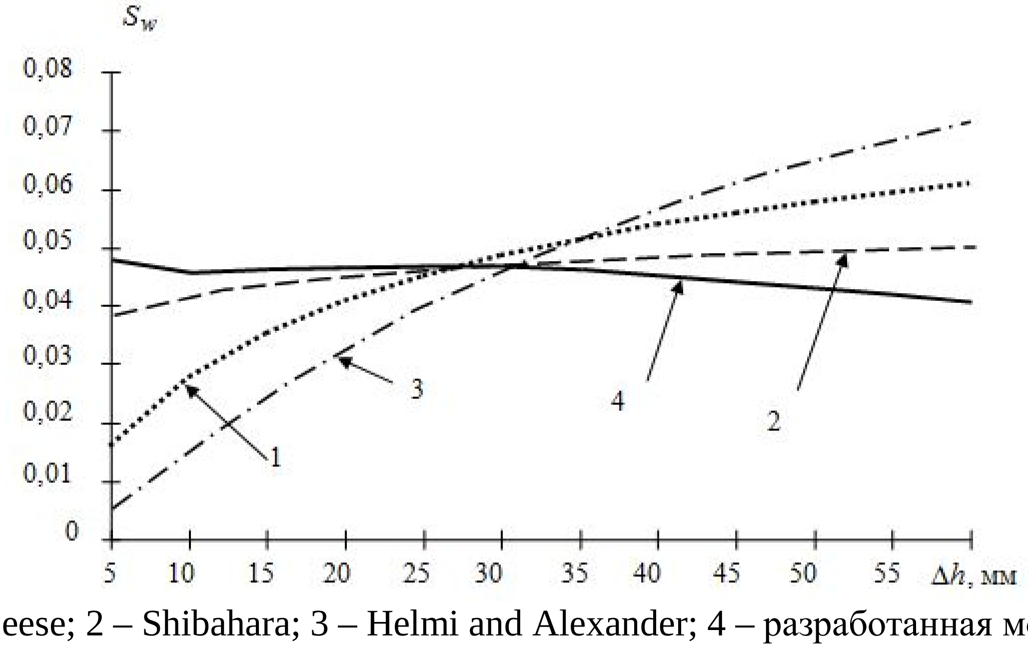
$$S_w = \frac{\ln \dfrac{B_1}{B_0}}{\ln \dfrac{h_0}{h_1}}. \quad (6.17)$$

С помощью математической модели (6.15)-(6.16) по формуле (6.17) были рассчитаны зависимости коэффициента уширения S_w от геометрических размеров исходной полосы, диаметра рабочих валков и величины абсолютного обжатия и проведено их графическое сравнение (рис. 6.2-6.5) с известными экспериментальными зависимостями [27-29].



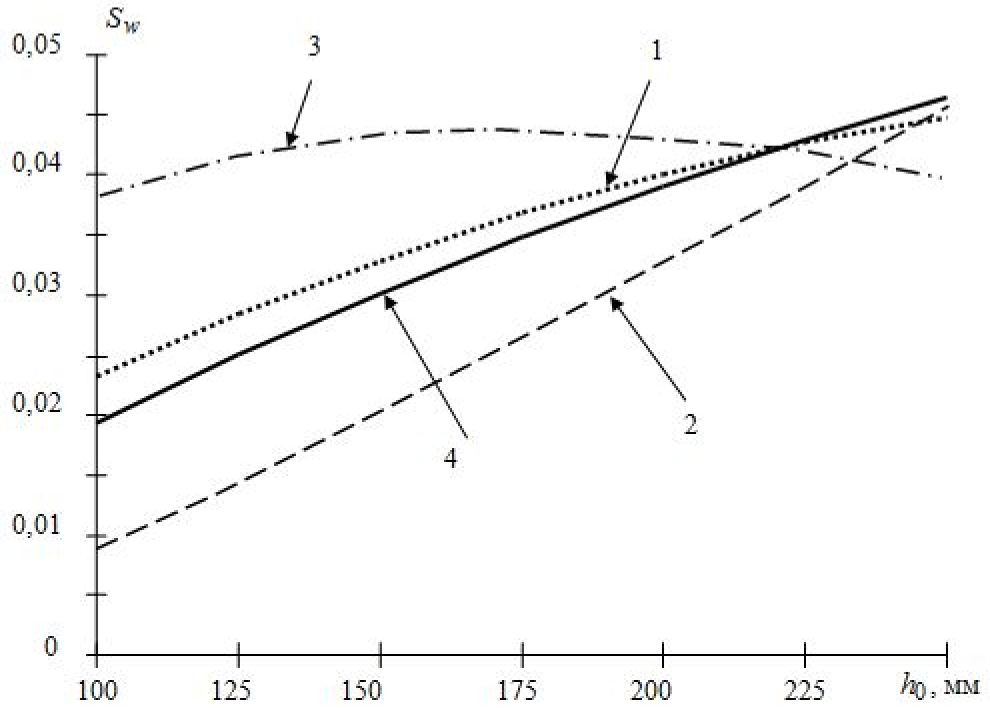
1 – Beese; 2 – Shibahara; 3 – Helmi and Alexander; 4 – разработанная модель

Рис. 6.2 - Зависимость коэффициента уширения от ширины полосы

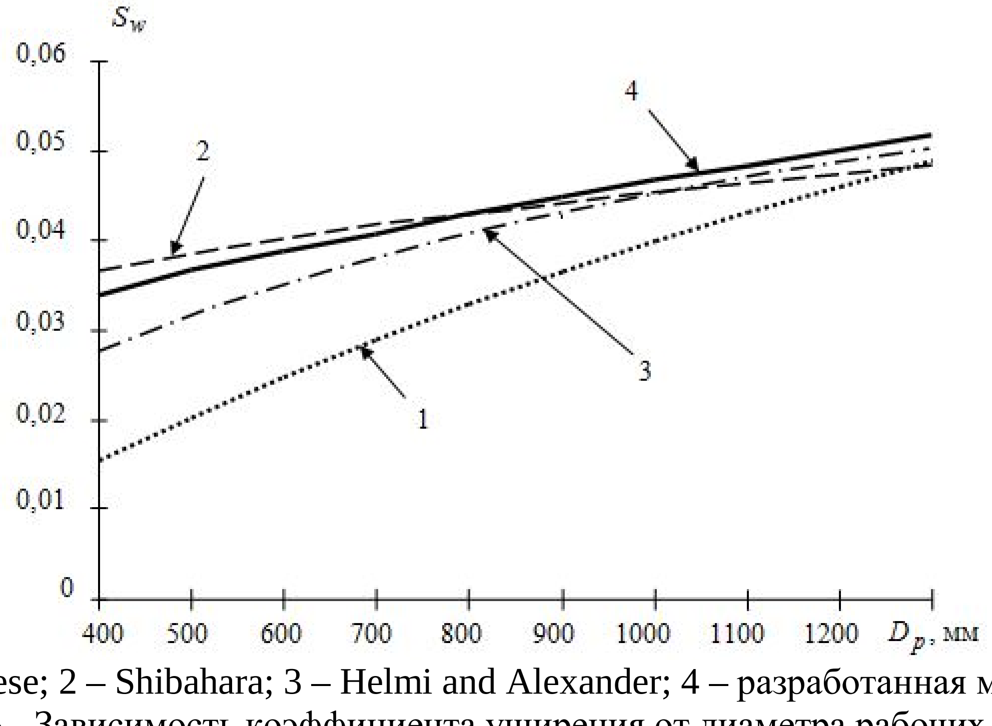


1 – Beese; 2 – Shibahara; 3 – Helmi and Alexander; 4 – разработанная модель

Рис.6.3 - Зависимость коэффициента уширения от обжатия



1 – Beese; 2 – Shibahara; 3 – Helmi and Alexander; 4 – разработанная модель
Рис. 6.4 - Зависимость коэффициента уширения от входной толщины



1 – Beese; 2 – Shibahara; 3 – Helmi and Alexander; 4 – разработанная модель
Рис. 6.5 - Зависимость коэффициента уширения от диаметра рабочих валков

Как следует из анализа приведенных графиков, результаты расчета величин коэффициента уширения по разработанной математической модели хорошо коррелируют с экспериментальными данными.

Варьируемый показатель степени p в формуле (6.5) характеризует соотношение продольной и поперечной составляющей течения металла в очаге пластической деформации или, другими словами, поперечную протяженность зоны уширения. Очевидно, что чем выше p, тем теснее к прикромочным областям примыкает зона уширения. График, приведённый на рис. 6.6, показывает качественную зависимость параметра p от ширины полосы и абсолютного обжатия при постоянных коэффициенте трения, радиусе рабочих валков и входной толщине.

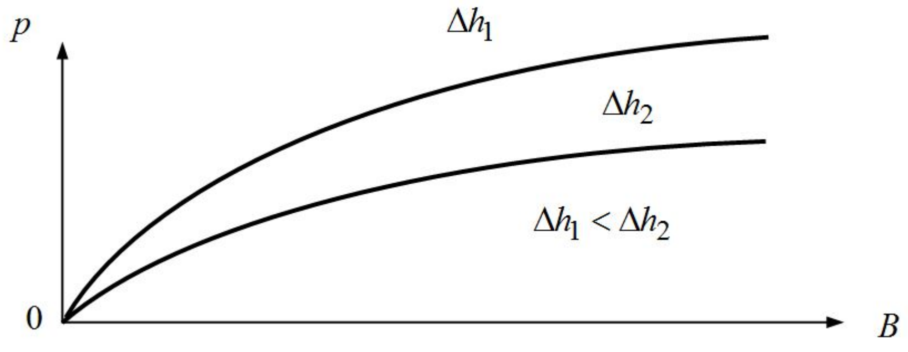


Рис. 6.6 - Зависимость параметра p от ширины полосы B и абсолютного обжатия Δh

График показывает, что чем шире прокатываемая полоса, тем теснее зона уширения примыкает к прикромочным областям; чем больше абсолютное обжатие, тем большую часть полосы захватывает зона уширения. Эти результаты вполне согласуются с опытными данными.

6.3. Распределение уширения вдоль очага деформации

Рассмотренная выше математическая модель процесса уширения металла при прокатке полосы предполагает закон распределения уширения пропорционально длине очага пластической деформации. Однако результаты многочисленных экспериментов показали, что такой закон не соответствует фактическому распределению уширения – уширение в основном формируется в зоне отставания [30-31].

С целью уточнения описания процесса уширения в очаге пластической деформации воспользуемся расчетной схемой, приведенной на рис. 6.7. Очаг пластической деформации разобьем на две области – зону опережения и зону отставания. Форма кромки (штриховая линия) аппроксимирована двумя отрезками прямых – для зоны отставания и зоны опережения. Тогда уравнения, описывающие форму боковых кромок полосы в очаге пластической деформации, запишутся следующим образом: а) для зоны опережения $0 \le x \le x_н$: $B_{оп}(x) = B_0[\ 1+\beta+(\beta_t-\beta)\frac{x}{x_н}\ ]$; б) для зоны отставания $x_н \le x \le \ell$:

$B_{от}(x) = B_0\left[\ 1+\dfrac{\beta_t}{1-t_н}-\dfrac{\beta_t}{1-t_н}\dfrac{x}{\ell}\ \right]$, где $\beta=\dfrac{\Delta B}{B_0}$, $\beta_t=\dfrac{\Delta B_t}{B_0}$, $\Delta B = B_1 - B_0$, $\Delta B_t = B_н - B_0$, $t_н = \dfrac{x_н}{\ell}$.

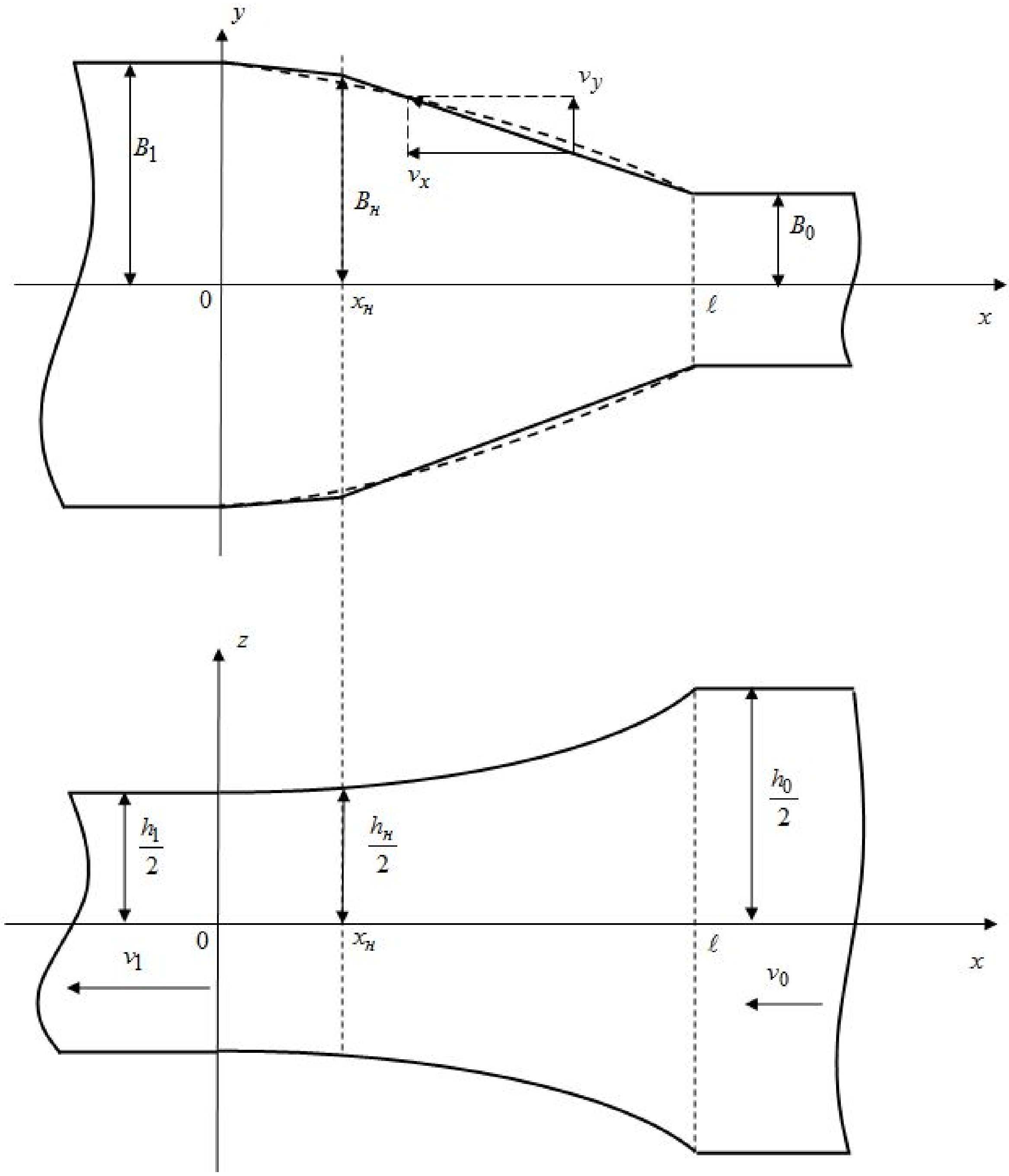


Рис. 6.7. Расчетная схема

Из кинематических соображений получаем следующие условия для боковой кромки: а) для зоны опережения $0 \le x \le x_н$: $\left.\dfrac{v_y}{v_x}\right|_{кр} = \dfrac{\Delta B - \Delta B_t}{x_н}$, б) для зоны отставания $x_н \le x \le \ell$: $\left.\dfrac{v_y}{v_x}\right|_{кр} = \dfrac{\Delta B_t}{\ell - x_н}$.

Для произвольной материальной точки с текущей координатой (x, y) в соответствии с выражением (6.5) задаем закон изменения скоростей течения металла:

а) для зоны опережения $0 \le x \le x_н$:

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\Delta B - \Delta B_t}{x_н}\left[\frac{y}{B_{оп}(x)}\right]^p, \tag{6.18}$$

б) для зоны отставания $x_н \le x \le l$

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\Delta B_t}{\ell - x_н}\left[\frac{y}{B_{от}(x)}\right]^p, \tag{6.19}$$

где p - варьируемый параметр.

Скорость v_x определим из закона постоянства секундных объемов :

$$v_0 h_0 B_0 = v_1 h_1 B_1 = v_x h_x B_x = v_в h_н B_н \cos\gamma \;, \tag{6.20}$$

где $v_в$ - окружная скорость рабочего валка, γ - нейтральный угол, R - радиус рабочего валка, $\cos\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{x_н}{R}\right)^2}$.

Используя известные соотношения теории пластичности, найдем выражения для интенсивности скоростей деформаций, мощностей внутренних сопротивлений, скольжения, среза и натяжений, получив систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p}\left(N_1 + N_2 + N_3 - N_4 + N_5\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial(\Delta B)}\left(N_1 + N_2 + N_3 - N_4 + N_5\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial(\Delta B_t)}\left(N_1 + N_2 + N_3 - N_4 + N_5\right) = 0 \end{cases}, \tag{6.21}$$

где N_1 - мощность внутренних сопротивлений; N_2 - мощность сил трения скольжения; N_3 - мощность сил среза; N_4 - мощность переднего натяжения; N_5 - мощность заднего натяжения.

Система (6.21) представляет собой запись вариационного принципа Журдена для метода Ритца и вместе с уравнением (6.16) является уточненной математической моделью процесса уширения прокатываемых полос. С помощью разработанной модели можно изучать распределение уширения вдоль очага деформации в зависимости от различных параметров прокатки и полосы, таких как обжатия, коэффициент трения, натяжение и другие.

С целью проверки адекватности разработанной математической модели был проведен ряд экспериментов на лабораторном прокатном стане кафедры «Обработки металлов давлением» ЛГТУ с диаметром рабочих валков 120 мм. Суть экспериментов была в следующем: прокатывали свинцовые образцы без натяжения, причем после выхода переднего конца образца из межвалкового зазора стан останавливали, валки разводили и образец извлекали для измерений. В таблицах 6.1-6.3 представлены условия и результаты двух из серии проведенных опытов.

Таблица 6.1 - Условия проведения опытов

N опыта	h_0, мм	$2B_0$, мм	h_1, мм	$2B_1$, мм	Δh, мм	$2\Delta B$, мм	$\ell_{деформ}$, мм
1	10,1	30,1	8,15	31,4	1,95	1,3	15,0
2	10,0	15,4	7,8	16,8	2,2	1,4	16,0

Таблица 6.2 - Фактическая ширина образца в очаге деформации (опыт 1)

Расстояние от входного сечения, мм	0	3,0	6,0	9,0	12,0	15,0
$2B(x)$, мм	30,1	30,45	30,8	31,1	31,3	31,4

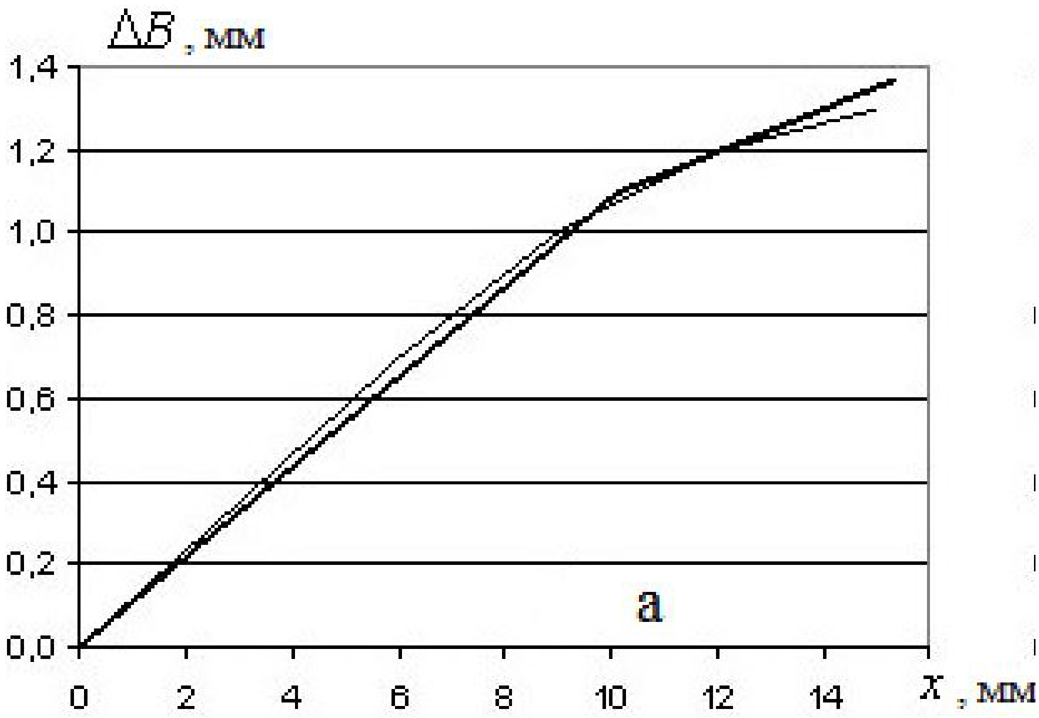
Таблица 6.3 - Фактическая ширина образца в очаге деформации (опыт 2)

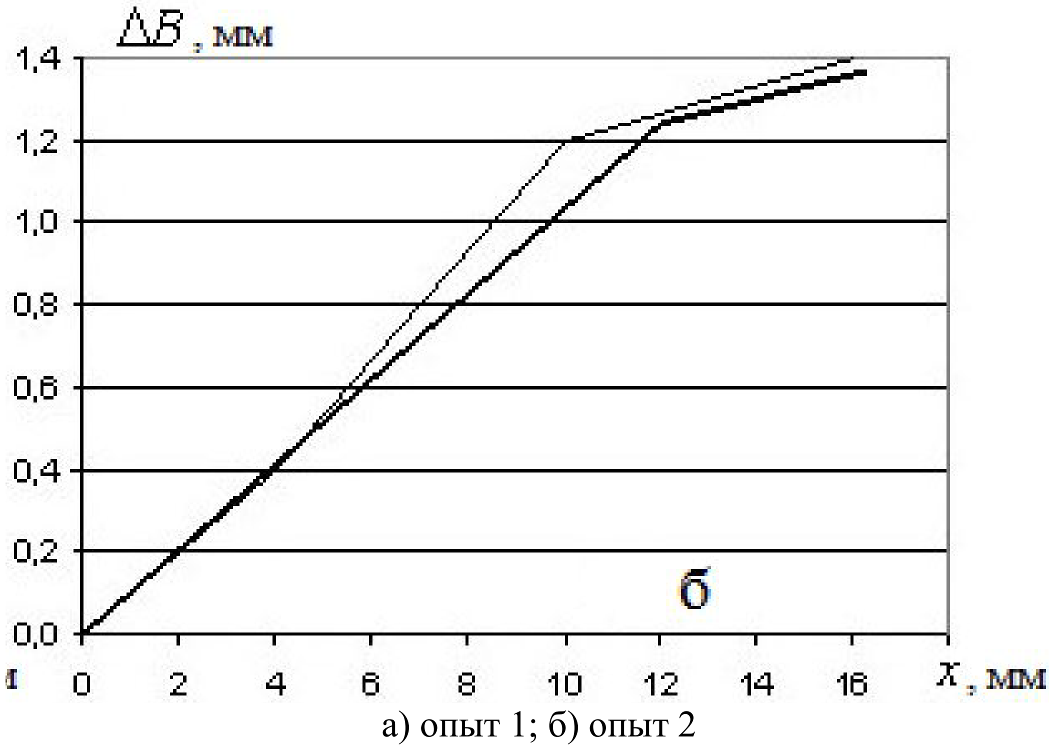
Расстояние от входного сечения, мм	0	4,0	7,0	10,0	1,.0	16,0
$2B(x)$, мм	15,4	15,8	16,2	16,6	16,7	16,8

Результаты расчета уширения полосы по разработанной математической модели при прокатке свинцовых образцов в условиях проведения опытов представлены в таблице 6.4 и на рис. 6.8 а,б.

Таблица 6.4 - Результаты расчета

N опыта	ℓ, мм	$x_н$, мм	$2\Delta B_t$, Мм	$2\Delta B$, мм	(измер.-теория), мм	отн. ошибка, %
1	15,3	5,2	1,1	1,37	-0,07	-5,4
2	16,25	4,4	1,16	1,28	0,12	8,6





а) опыт 1; б) опыт 2

Рис. 6.8 - Сравнение измеренных и расчётных данных

На рис. 6.8а,б тонкой линией изображены результаты измерений, а толстой – результаты теоретического расчета. Видно, что характер распределения уширения вдоль очага деформации, рассчитанного по математической модели, удовлетворительно соответствует фактическому распределению; при этом точность рассчитанных величин уширения относительно измеренных менее 10% .

6.4. Влияние натяжения на величину уширения при листовой прокатке

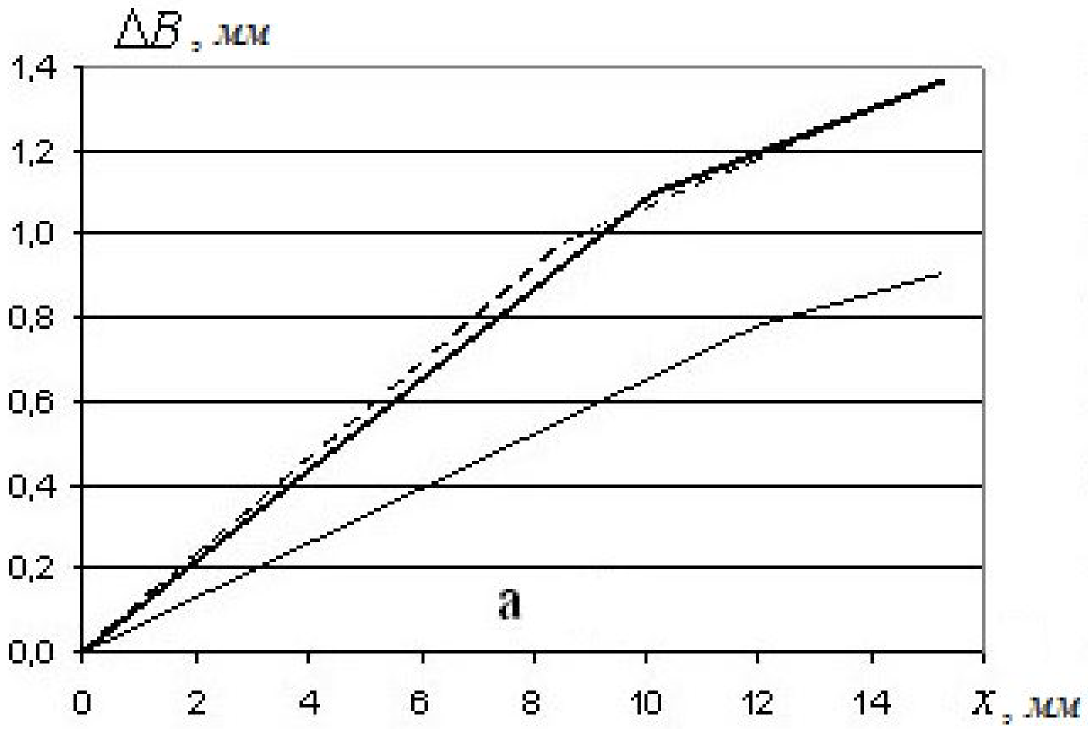
Опытные данные свидетельствуют о том, что на величину уширения при продольной прокатке оказывают большое влияние приложенное натяжение или подпор. Исследованию этого влияния посвятили ряд экспериментальных и теоретических работ такие ученые, как А.И.Целиков, А.И.Гришков, А.П.Чекмарев, В.Н.Выдрин и многие другие. По поручению А.И.Целикова влияние натяжения на уширение полосы впервые было исследовано В.П.Калининым [32], который установил, что заднее натяжение влияет на уширение в большей степени, чем переднее. В работе [33] были опубликованы результаты исследования влияния натяжений и подпора при прокатке свинцовых образцов в Челябинском политехническом институте, которые показали, что задний подпор увеличивает уширение, а заднее натяжение его уменьшает, причем влияние заднего натяжения на уширение значительно выше, чем переднего.

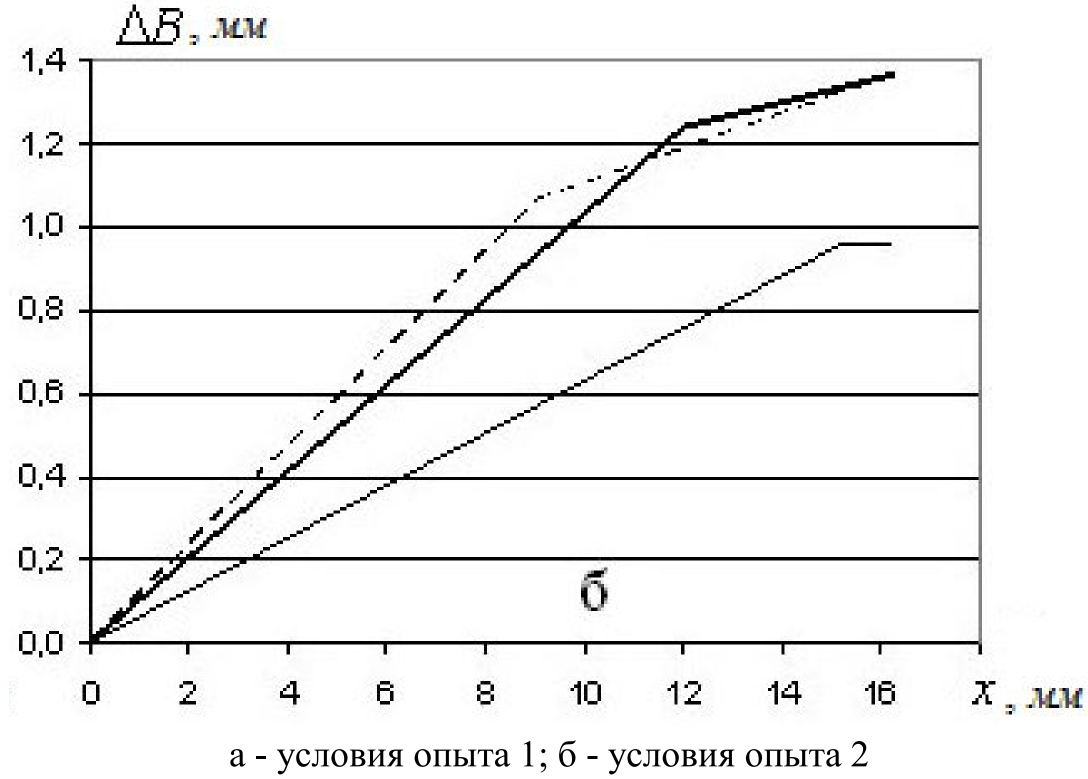
Для теоретических исследований влияния переднего и заднего натяжений на уширение при листовой прокатке применяются в основном два метода: интегрирование дифференциального уравнения равновесия при разбиении очага деформации на четыре зоны: опережения, отставания и две боковые зоны уширения, например, [32,34], и вариационный (6.21), описанный выше.

Теоретическое исследование влияния натяжения на уширение полосы с помощью разработанной математической модели (6.21) проведем на примере полос, условия прокатки которых представлены в таблице 6.1. Были просчитаны оба случая при попеременном приложении переднего и заднего натяжения. В обоих случаях величина удельного натяжения составляла 20% предела текучести на растяжение. Здесь необходимо привести замечание И.Я.Тарновского [35] о неизменности величины *полного* натяжения при варьировании величины уширения; только при этом условии возможно корректное применение принципа Журдена.

Результаты расчета представлены на рис. 6.9 а,б.

На представленных рисунках толстая линия соответствует распределению уширения вдоль очага деформации при прокатке без натяжений, штриховая - при приложении только переднего натяжения, тонкая – при приложении только заднего натяжения. Теоретический расчет с помощью разработанной модели распределения уширения вдоль очага деформации при приложении натяжений соответствует практическим результатам, описанным, например, в работах В.Н.Выдрина [33] и В.П.Калинина [32].





а - условия опыта 1; б - условия опыта 2

Рис. 6.9 - Влияние переднего и заднего натяжений на уширение

Обратимся теперь к системе уравнений (6.21) – в них со знаком «минус» входит мощность переднего натяжения N_4 и со знаком «плюс» мощность заднего натяжения N_5. В соответствии с этими уравнениями возможна комбинация толщин и натяжений, при которой эти мощности компенсируют друг друга, и, соответственно, величина уширения в этом случае должна совпадать с величиной уширения при прокатке без натяжения. Однако, многочисленные экспериментальные исследования свидетельствуют о том, что величина уширения при прокатке с передним и/или задним натяжением меньше, чем при прокатке без натяжений. Так, например, в работе [36] приведены результаты промышленного исследования влияния натяжений на ширину полос при прокатке на стане 1680 завода «Запорожсталь» и стане 1700 Ждановского металлургического завода. Отмечено, что ширина готовой полосы всегда меньше ширины подката на 3-18 мм, причем при этих утяжках ширины полос удельные натяжения по промежуткам не превышали предела текучести. Возникает резонный вопрос, как эти факты увязываются с уравнением баланса энергии при прокатке? Можно предположить, что приложение натяжений является причиной появления в уравнениях (6.21) мощностей дополнительных сил, действующих во входном и выходном сечениях очага деформации, т.е. возникает так называемый краевой эффект.

Для проверки этого предположения был проведен следующий численный эксперимент. Методом конечных элементов с помощью программного пакета NISA/DISPLAY фирмы EMRC (США) были вычислены и построены поля напряжений растяжения и сжатия в полосе, одна сторона которой закреплена по перемещениям, а другая равномерно нагружена растягивающими напряжениями. Поле напряжений в сечении, примыкающем к очагу деформации, для случая приложения равномерно распределенного натяжения на расстоянии $L = 2B$ и $L = B$, где $B-$ полуширина полосы, от очага деформации, представлено на рис. 6.10 и 6.11 соответственно.

Анализ полей напряжений показывает, что распределение растягивающих напряжений в выходном сечении очага деформации практически не зависит от расстояния приложения натяжения и имеет неравномерность, которую в общем случае можно описать функцией $\sigma_x = \varphi(y)$. При этом появляется мощность, которая выносится полосой из очага деформации и называется мощностью, расходуемой полосой на накопление потенциальной энергии. Величину этой мощности можно вычислить следующим образом:

$$N_{nom} = \tau_s v_1 h_1 \int_0^{2B} \frac{\sigma_x^2}{2E} dy . \qquad (6.22)$$

Выражение для мощности должно появиться в системе уравнений (6.21) одновременно с мощностью переднего натяжения. То, что при расчетах формоизменения полос в чистовой группе НШСГП необходимо учитывать неравномерность распределения удельных натяжений по ширине полосы, отмечалась еще в работе [37].

Кроме того, напряженное состояние полосы, к которой приложено натяжение, характеризуется наличием вблизи очага деформации напряжений сжатия в направлении, перпендикулярном направлению прокатки (рис. 6.12-6.13).

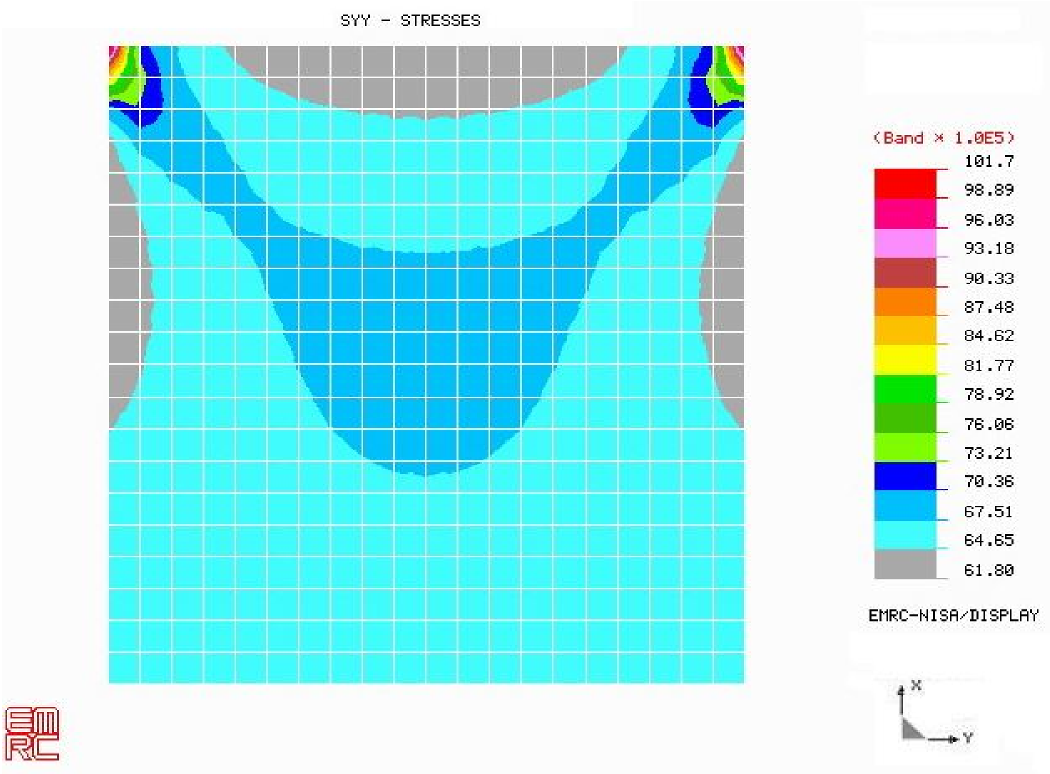


Рис. 6.10 - Распределение растягивающих напряжений ($L = 2B$)

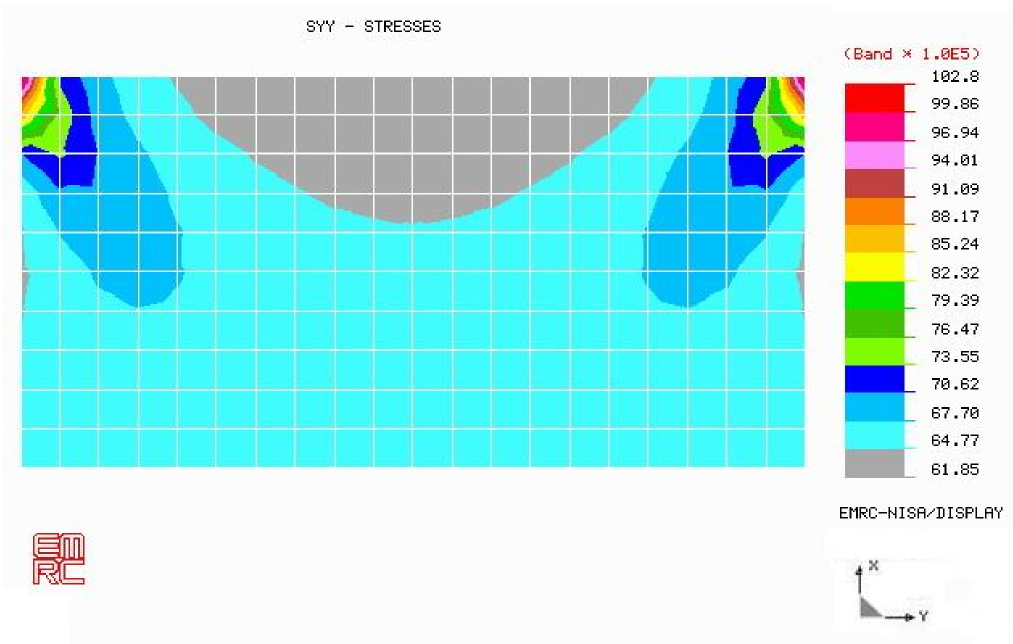


Рис. 6.11 - Распределение растягивающих напряжений ($L = B$)

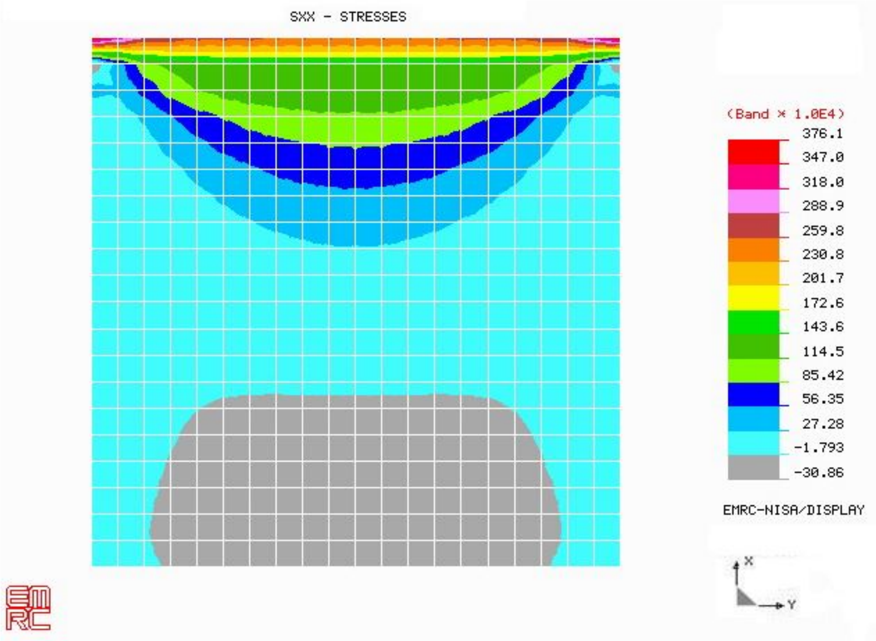


Рис. 6.12 - Распределение напряжений сжатия в полосе ($L = 2B$)

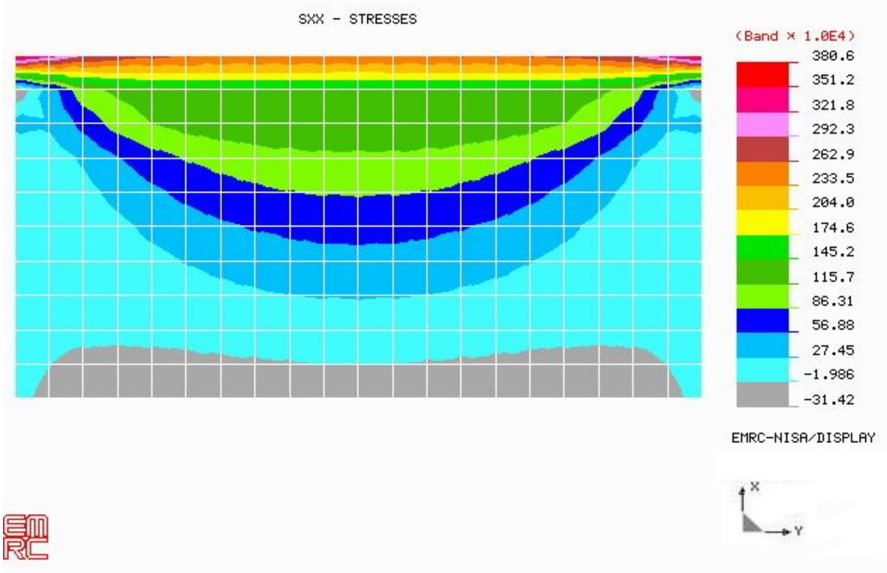


Рис. 6.13 - Распределение напряжений сжатия в полосе ($L = B$)

Сжимающие напряжения, которые возникают во входном и выходном сечениях очага деформации, также влияют на уменьшение величины уширения полосы при прокатке с натяжением.

Введение выражений для мощностей напряжений, возникающих во входном и выходном сечениях очага деформации в результате действия переднего и заднего натяжений, в суммарный баланс (6.21) позволит уточнить теоретический анализ процесса уменьшения ширины полосы (утяжки) при совместном действии переднего и заднего натяжений.

Особенностью теоретической модели уширения, основанной на гипотезе плоских сечений, является то, что она не учитывает возникающую во входном и выходном сечениях очага деформации неравномерность напряжений, и при больших обжатиях дает ощутимую погрешность.

6.5. Регулирование величины уширения горячекатаной полосы с помощью усилий изгиба рабочих валков

Изменение величин усилий противоизгиба и дополнительного изгиба рабочих валков является причиной перераспределения удельных натяжений по ширине прокатываемой полосы (рис.6.14).

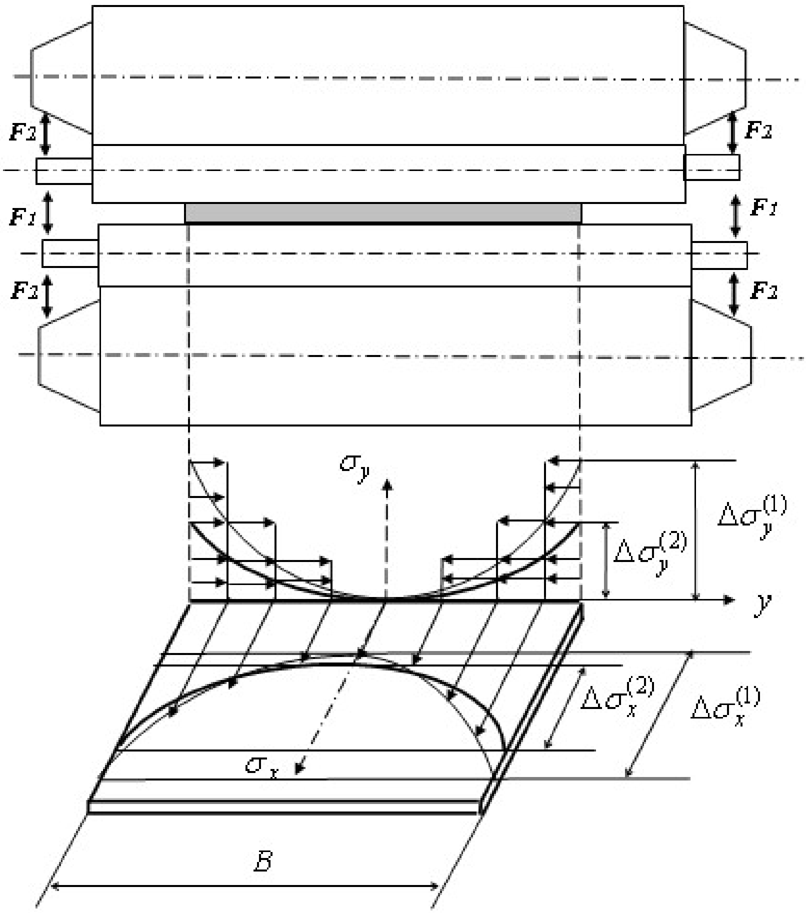


Рис.6.14 - Влияние усилий изгиба рабочих валков на распределение удельных натяжений на входе и выходе очага деформации

При уменьшении усилий противоизгиба ***F1*** или увеличении усилий дополнительного изгиба ***F2*** рабочих валков амплитуда растягивающих полосу напряжений $\Delta\sigma_x^{(1)}$ в прикромочных областях прокатываемой полосы уменьшаются до $\Delta\sigma_x^{(2)}$, а амплитуда сжимающих в направлении ширины напряжений $\Delta\sigma_y^{(1)}$ уменьшается до $\Delta\sigma_y^{(2)}$ – при этом уширение полосы увеличивается. И наоборот - при увеличении усилий противоизгиба ***F1*** или уменьшении усилий дополнительного изгиба ***F2*** растягивающие полосу напряжения в прикромочных областях и сжимающие полосу напряжения в направлении ширины увеличиваются – при этом уширение полосы уменьшается.

Этот эффект можно положить в основу регулирования величины уширения при прокатке полос на широкополосных станах горячей прокатки, клети чистовой группы которых оборудованы устройствами изгиба рабочих валков в вертикальной плоскости.

6.6. Уширение как фактор уменьшения амплитуды распределения вытяжек и остаточных напряжений по ширине полосы

6.6.1. Теоретическое обоснование уменьшения неравномерности вытяжек по ширине при прокатке с уширением

Факт того, что процесс уширения металла при листовой прокатке уменьшает неравномерность остаточных напряжений по ширине полосы, улучшая её плоскостность, установлен практически [38-39]. На рис. 6.15 изображен принципиальный механизм уменьшения неравномерности распределения остаточных напряжений при прокатке с уширением.

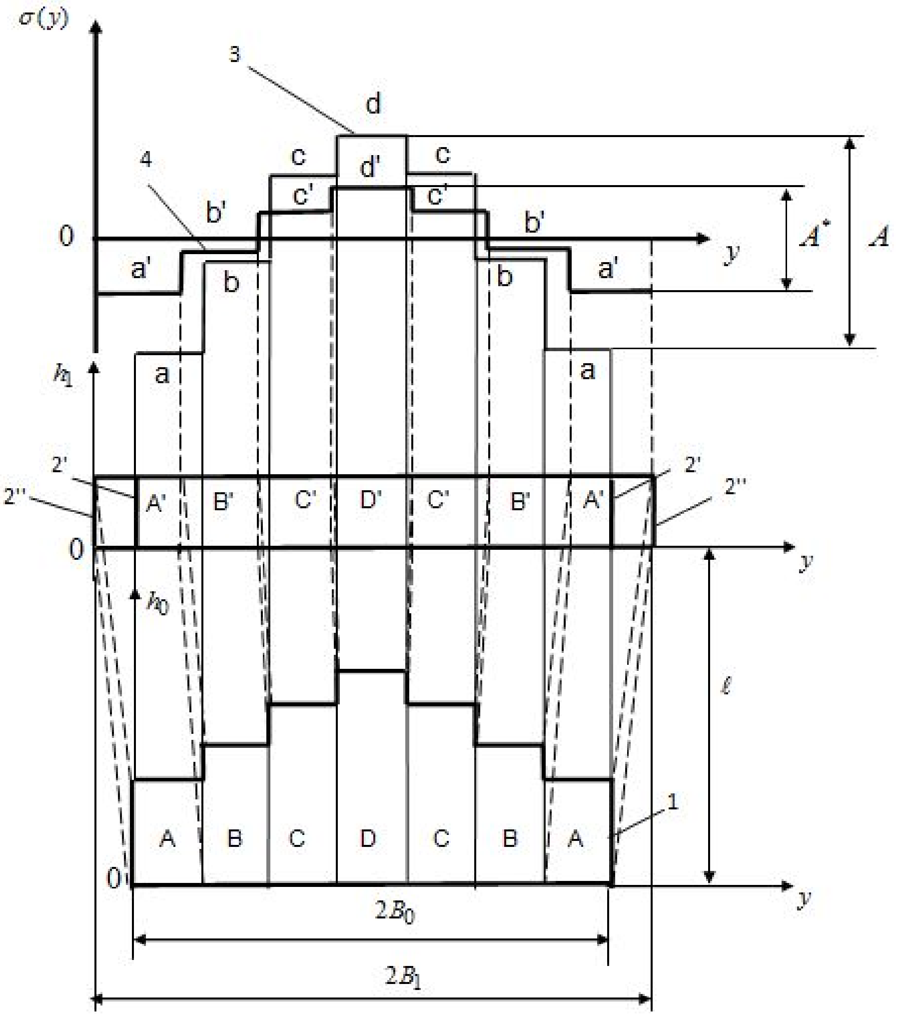


Рис. 6.15 - Механизм уменьшения неравномерности распределения остаточных напряжений по ширине полосы при прокатке с уширением

Предположим, что на вход клети подают полосу с профилем поперечного сечения переменной толщины и шириной $2B_0$, изображенным на рис. 6.15 в виде ломаной фигуры 1, разделенной на полоски A,B,C,D,C,B,A. Полосу прокатывают на толщину h_1 при сохранении прямоугольного профиля выходного поперечного сечения. Рассмотрим два случая: прокатка без уширения при плоской схеме деформации и прокатка с уширением.

При прокатке без уширения в предположении плоской схемы деформации полоса на выходе получает профиль 2', а элементарные полоски A,B,C,D,C,B,A испытывают только продольную вытяжку, не изменяя своей ширины. Эпюра распределения неравномерности вытяжек по ширине полосы имеет форму ломаной *abcdcba* (обозначена на рис. 3.15 цифрой 3); амплитуда неравномерности обозначена буквой A.

Другая картина наблюдается при прокатке полосы с уширением. Ширина прокатанной полосы становится равной $2B_1$ при той же толщине h_1, её профиль обозначен цифрой 2". При этом элементарные полоски A,B,C,D,C,B,A раскатываются в полоски A',B',C', D',C',B',A' соответственно, причем ширина полосок возрастает к краям полосы. При этом происходит выравнивание вытяжек по ширине полосы за счет уменьшения длины полосок. В итоге эпюра выходной неравномерности вытяжек получает вид фигуры *a*' *b*' *c*' *d*' *c* '*b*' *a*', обозначенной на рис. 6.15 цифрой 4, а её амплитуда A^* оказывается меньше входной A.

6.6.2. Математическая модель влияния уширения на уменьшение неравномерности вытяжек по ширине при прокатке с уширением

Для количественной оценки влияния уширения на уменьшение неравномерности вытяжек по ширине полосы при прокатке с уширением разработаем математическую модель, в которой примем следующее допущение: уширение распределяется по очагу пластической деформации в соответствии с линейным законом. На рис. 6.16 изображена расчетная схема течения металла в очаге деформации, которая используется для разработки указанной математической модели; на схеме приведены такие же обозначения, как и на рис.6.1.

В соответствии с (6.1) уравнение линии боковой кромки полосы в очаге пластической деформации выражается следующим образом:

$$B(x) = B_0\left[1+\beta-\beta\frac{x}{\ell}\right], \qquad 0 \le x \le \ell .$$

Так же, как и ранее, для произвольной материальной точки с текущей координатой (x, y) назначаем следующую функцию изменения скоростей течения металла:

$$\frac{v_y}{v_x} = -\frac{\Delta B}{\ell}\left[\frac{y}{B(x)}\right]^p ,$$

где p - варьируемый параметр.

Входную неравномерность продольных скоростей течения металла опишем функцией $f'(y)\big|_{x=\ell} << 1$, а выходную - $\varphi'(y)\big|_{x=0} << 1$, причем $f'(x,y)$ и $\varphi'(x,y)$ – самоуравновешенные функции, т.е. $\int\limits_0^{B_0} f'(x,y)dy = 0$, $\int\limits_0^{B_1} \varphi'(y)dy = 0$.

Для описания распределения продольных скоростей по длине очага деформации возьмем следующую функцию:

$$v_x(y) = \overline{v_x}\left[1 + f'(x,y)\frac{x}{\ell} + \varphi'(x,y)\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\right], \tag{6.23}$$

где ℓ - длина очага пластической деформации; $\overline{v_x}$ - среднее по ширине значение продольной скорости металла в сечении x.

Функцию неравномерности распределения входных скоростей металла зададим следующим образом:

$$f'(x,y) = A\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right], \tag{6.24}$$

где A – амплитуда входной неравномерности продольных скоростей металла, $B(x)$ – текущая ширина полосы в очаге деформации, k – целое число, принимающее значения $\overline{1,n}$.

Назовем отношение амплитуды неравномерности выходных скоростей металла в полосе, прокатанной с уширением, к амплитуде выходных скоростей металла в той же полосе, но прокатанной без уширения, коэффициентом ρ_B. Заметим, что при отсутствии уширения ($\Delta B = 0$) задача становится плоской – перемещение металла по ширине отсутствует, и ρ_B становится равным единице.

Функция неравномерности распределения выходных скоростей металла:

$$\varphi'(x,y) = A\rho_B\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right], \tag{6.25}$$

где $0 < \rho_B < 1$ - коэффициент, учитывающий влияние поперечного перемещения металла в очаге пластической деформации.

Скорость $\overline{v_x}$ определяется с помощью закона постоянства секундных объемов: $v_0 h_0 B_0 = v_1 h_1 B_1 = v_x h_x B_x = v_в h_н B_н \cos\gamma$, где $v_в$ - окружная скорость рабочих валков, γ - нейтральный угол, $\cos\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{x_н}{R}\right)^2}$, R - радиус рабочего валка.

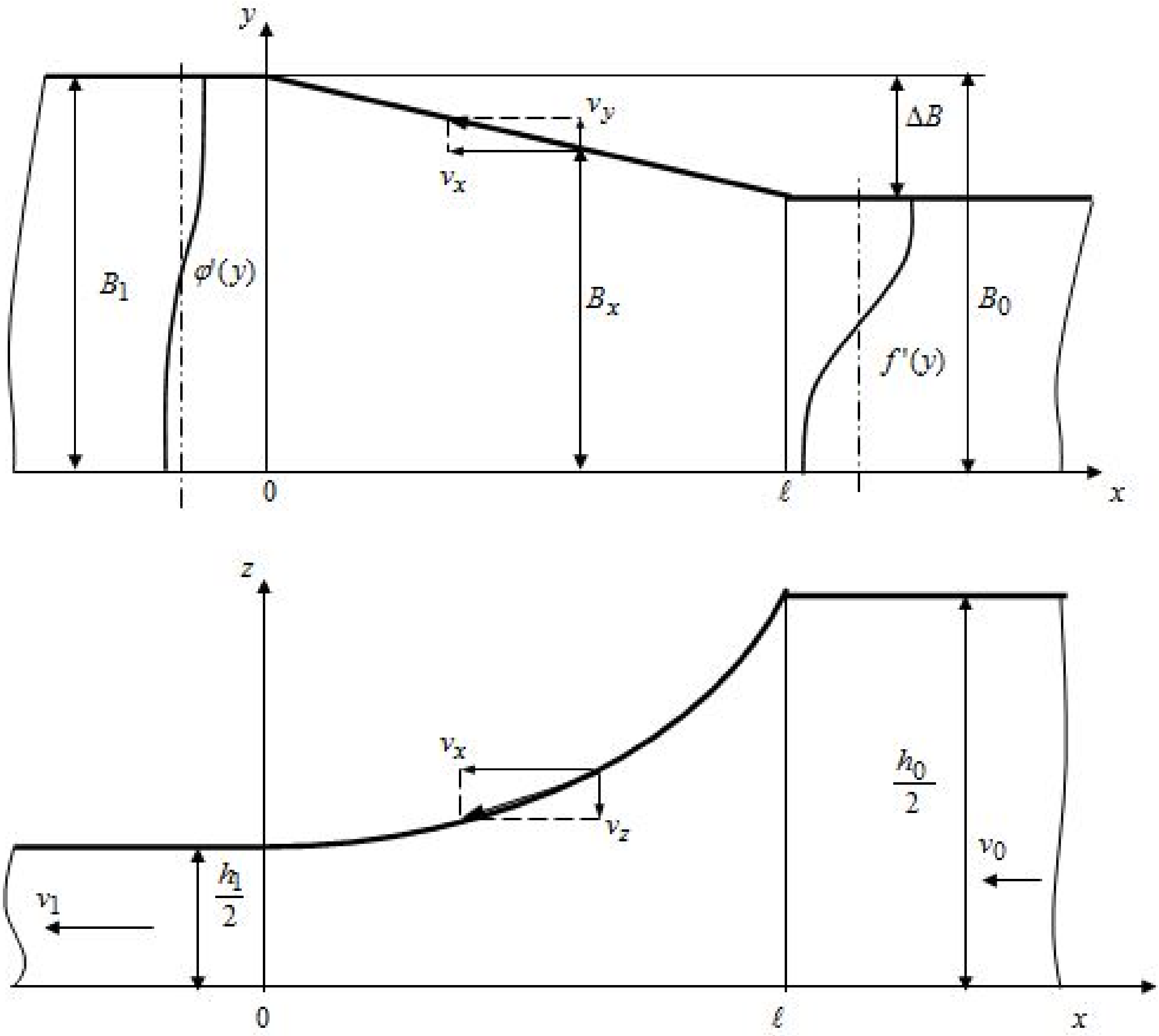


Рис. 6.16. Расчетная схема

В соответствии с законом постоянства секундных объемов получим:

$$\bar{v}_x = v^* \frac{1}{\left(c_1 - \beta \frac{x}{\ell}\right)\left[a + \varepsilon \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]},$$

где $v^* = v_в(1+\beta-\beta\ t_н)(a+\varepsilon\ t_н^2)\cos\gamma$; $a = \dfrac{h_1}{h_0}$, $\varepsilon = \dfrac{\Delta h}{h_0}$,

$\Delta h = h_0 - h_1$, $t_н = \dfrac{x_н}{\ell}$, $c_1 = 1+\beta$.

Тогда в соответствии с (6.23) - (6.25) получим выражение для проекции скорости течения металла в очаге деформации по координате *x*:

$$v_x(y) = v^* \frac{1}{\left(c_1 - \beta \frac{x}{\ell}\right)\left[a + \varepsilon \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]} \times$$

$$\times\left\{1+A\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\frac{x}{\ell}+A\rho_B\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\right\}.$$

$$v_y(y)=v^*\frac{c_2}{\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]}\times$$

$$\times\left\{1+A\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\frac{x}{\ell}+A\rho_B\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\right\}\left[\frac{y}{B(x)}\right]^p,\ \text{где}\quad c_2=\frac{\Delta B}{\ell}.$$

Скорость деформации ξ_x :

$$\xi_x=\frac{\partial v_x}{\partial x}=v^*\left\{\frac{\frac{\beta}{\ell}}{\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)^2\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]}+\frac{-2\frac{\varepsilon}{\ell}\frac{x}{\ell}}{\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]^2}\right\}\times$$

$$\times\left\{1+A(1-\rho_B)\cos\left[k\pi\frac{y}{B_0\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)}\right]\frac{x}{\ell}+A\rho\cos\left[k\pi\frac{y}{B_0\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)}\right]\right\}+$$

$$+v^*\frac{1}{\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]}\left\{A(1-\rho_B)\cos\left[k\pi\frac{y}{B_0\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)}\right]\left(\frac{1}{\ell}\right)-\right.$$

$$-A(1-\rho_B)k\pi\frac{y}{B_0}\frac{x}{\ell}\sin\left[k\pi\frac{y}{B_0\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)}\right]\frac{\left(\frac{\beta}{\ell}\right)}{\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)^2}-$$

$$\left.-A\rho_B k\pi\frac{y}{B_0}\sin\left[k\pi\frac{y}{B_0\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)}\right]\frac{\left(\frac{\beta}{\ell}\right)}{\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)^2}\right\}.$$

Скорость деформации ξ_y :

$$\xi_y=\frac{\partial v_y}{\partial y}=v^*\frac{c_2}{\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]}\times\left\{-A\frac{k\pi}{B(x)}\sin\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\frac{x}{\ell}-\right.$$

$$-A\rho_B\frac{k\pi}{B(x)}\sin\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\Bigg\}\times\left[\frac{y}{B(x)}\right]^p+v^*\frac{c_2}{\left(c_1-\beta\frac{x}{\ell}\right)\left[a+\varepsilon\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]}\times$$

$$\times\left\{1+A\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\frac{x}{\ell}+A\rho_B\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\right\}\frac{p}{B(x)}\left[\frac{y}{B(x)}\right]^{p-1}.$$

Выражение для скорости деформации по оси z получим с помощью условия несжимаемости $\xi_z=-\xi_x-\xi_y$. Скорости сдвиговых деформаций определяются по известным из теории пластичности формулам:

$$\xi_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right),\quad \xi_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right),\ \xi_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right).$$

В мощность внешних сил на границах очага деформации входят следующие мощности: мощность трения скольжения между валками и полосой, мощности переднего и заднего натяжения. Одна из составляющих мощности переднего натяжения названа мощностью, расходуемой на накопление полосой потенциальной энергии:

$$N_{pot_1}=\tau_s\bar{v}_1h_1\int_0^{B_1}\frac{\sigma_{x1}^2}{2E}dy,$$

где $\sigma_{x1}=\bar{\sigma}_1-\varphi' E=\bar{\sigma}_1-AE\rho_B\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]$ - остаточные напряжения в полосе, $\bar{\sigma}_1$- среднее по ширине переднее удельное натяжение, E – модуль упругости материала полосы.

$$N_{pot1}=\tau_s\bar{v}_1h_1\int_0^{B_1}\frac{\left(\bar{\sigma}_1-AE\rho_B\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\right)^2}{2E}dy=$$

$$=\tau_s\bar{v}_1h_1\left(\int_0^{B_1}\frac{(\bar{\sigma}_1)^2}{2E}dy-\int_0^{B_1}A\rho_B\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\bar{\sigma}_1dy+\int_0^{B_1}\frac{\left(AE\rho_B\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\right)^2}{2E}dy\right)=$$

$$=\tau_s\bar{v}_1h_1\frac{(\bar{\sigma}_1)^2}{2E}B_1+\tau_s\bar{v}_1h_1\int_0^{B_1}\frac{\left(AE\rho_B\cos\left[k\pi\frac{y}{B(x)}\right]\right)^2}{2E}dy.$$

Составляющая мощности заднего натяжения, вносимая полосой в очаг деформации, названа мощностью напряженного состояния полосы:

$N_{pot_0} = \tau_s \bar{v}_0 h_0 \int\limits_0^{B_0} \frac{\sigma_{x0}^2}{2E} dy$, где $\sigma_{x0} = \bar{\sigma}_0 - f'E = \bar{\sigma}_0 - AE\cos\left[k\pi \frac{y}{B(x)}\right]$, $\bar{\sigma}_0$ - среднее по ширине заднее удельное натяжение.

$$N_{pot0} = \tau_s \bar{v}_0 h_0 \int\limits_0^{B_0} \frac{\left(\bar{\sigma}_0 - AE\cos\left[k\pi \frac{y}{B(x)}\right]\right)^2}{2E} dy =$$

$$= \tau_s \bar{v}_0 h_0 \left(\int\limits_0^{B_0} \frac{(\bar{\sigma}_0)^2}{2E} dy - \int\limits_0^{B_0} A\cos\left[k\pi \frac{y}{B(x)}\right] \bar{\sigma}_0 dy + \int\limits_0^{B_0} \frac{\left(AE\cos\left[k\pi \frac{y}{B(x)}\right]\right)^2}{2E} dy \right) =$$

$$= \tau_s \bar{v}_0 h_0 \frac{(\bar{\sigma}_0)^2}{2E} B_1 + \tau_s \bar{v}_0 h_0 \int\limits_0^{B_0} \frac{\left(AE\cos\left[k\pi \frac{y}{B(x)}\right]\right)^2}{2E} dy .$$

Используя известные соотношения теории пластичности, найдем выражения для интенсивности скоростей деформаций, мощностей внутренних сопротивлений, скольжения и среза. Применяя вариационный принцип Журдена, получим систему из трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p}\left[\iiint\limits_V \tau_S \mathrm{H} dv - \iint\limits_S \left(\vec{f}, \vec{v}\right) ds + \sum\limits_{i=1}^{2} \iint\limits_{S_i} \tau_S \left|\Delta v_i\right| ds_i \right] = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial(\Delta B)}\left[\iiint\limits_V \tau_S \mathrm{H} dv - \iint\limits_S \left(\vec{f}, \vec{v}\right) ds + \sum\limits_{i=1}^{2} \iint\limits_{S_i} \tau_S \left|\Delta v_i\right| ds_i \right] = 0 , \\ \dfrac{\partial}{\partial(\rho_B)}\left[\iiint\limits_V \tau_S \mathrm{H} dv - \iint\limits_S \left(\vec{f}, \vec{v}\right) ds + \sum\limits_{i=1}^{2} \iint\limits_{S_i} \tau_S \left|\Delta v_i\right| ds_i \right] = 0 \end{cases} \qquad (6.26)$$

где τ_S - предел текучести на сдвиг, $\vec{f}, \vec{v}$ - напряжения и скорости течения металла на границах очага деформации, Δv_i - скачок скоростей на поверхностях среза (входное и выходное сечение), H - интенсивность скоростей сдвиговых деформаций.

Система (6.26) представляет собой математическую модель, с помощью которой можно исследовать и давать количественную оценку влияния уширения на уменьшение неравномерности распределения остаточных напряжений по ширине полосы.

С помощью разработанной модели был проведен анализ влияния некоторых параметров полосы на величину коэффициента ρ_B.

Результаты расчета не показали сколько-нибудь значимой зависимости амплитуды и знака входной неравномерности скоростей металла на величину свободного уширения и коэффициент ρ_B. Это объясняется линейностью математической модели.

Для анализа влияния ширины полосы на коэффициент ρ_B был проведен расчет для следующих условий: входная толщина полосы $h_0 = 10мм$, обжатие 50 %, коэффициент трения $\mu = 0.3$, отношение модуля упругости полосы к пределу текучести на сдвиг $\frac{E}{\tau_S} = 2000$, радиус рабочего валка $R = 400мм$, переднее и заднее натяжения отсутствуют $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_1 = 0$, функция неравномерности распределения входных скоростей металла $f'(x,y) = 0{,}0005\cos\left[\pi \frac{y}{B(x)}\right]$, входная ширина полосы $2B_0$ варьировалась от $100мм$ до $1600мм$.

Сначала расчет проводился для условий свободного уширения полосы, а затем для вынужденном уширении, равном половине свободного. Результаты расчета представлены в таблице 6.7.

Таблица 6.7. Результаты расчета

B_0, $мм$	$\Delta B_{свободн}$, $мм$	$\rho_{B\_свободн}$	$\Delta B_{вынужд}$, $мм$	$\rho_{B\_вынужд}$
50	5,8	0,01	2,9	0,02
200	2,3	0,08	1,15	0,14
500	0,9	0,11	0,45	0,15
800	0,5	0,14	0,25	0,21

Анализ результатов расчета показывает, что с уменьшением ширины полосы выравнивающая способность очага деформации возрастает с одновременным возрастанием интенсивности уменьшения остаточных напряжений в полосе. Если же создать стесненные условия для развития уширения, например, при прокатке в ящичном калибре, то выравнивающая способность очага деформации уменьшается, причем интенсивность уменьшения выравнивающей способности увеличивается с увеличением степени стесненности.

Библиография

1. Суяров, Д.И. Качество тонких стальных листов / Д.И. Суяров, М.А. Беняковский. – М.: Металлургия, 1964. – 175 с.

2. Третьяков, В.А. Развитие теории и разработка технологии высокоточной беспрограммной широкополосовой горячей прокатки: дисс. … докт. техн. наук / В.А.Третьяков. – Липецк, ЛГТУ. – 1997. – 247 с.

3. Железнов, Ю.Д. Прокатка ровных листов и полос / Ю.Д. Железнов. – М.: Металлургия, 1971. – 200 с.

4. Мельцер, В.В. Матричный метод расчета профилирования валков станов кварто / В.В. Мельцер, И.А. Пыженков // Известия вузов. Черная металлургия. – 1965. – № 10. – С. 94-100

5. Мельцер, В.В. Методика расчета эффективности гидромеханичес-кого регулирования профиля тонких листов / Мельцер В.В., Пыженков И.А., Салганик В.М. // Теория и технология прокатки: сб. науч. тр. – Челябинск: ЧПИ, 1968. – С. 65-75.

6. Пыженков, В.И. Развитие методов расчета упругих деформаций валков станов кварто: дисс. … канд. техн. наук / В.И. Пыженков. – Москва: МИСиС, 1975. – 280 с.

7. Боровик, Л.И. Эксплуатация валков станов холодной прокатки / Л.И. Боровик. – М.: Металлургия, 1968.– 233 с.

8. Бельский С.М. Совершенствование технологий формообразования полос и листов на основе развития теории симметричной и асимметричной горячей прокатки: дисс. … д-р техн. таук/ С.М. Бельский. – Липецк. ЛГТУ, 2009. – 376 с.

9. Гастев, В.А. Краткий курс сопротивления материалов / В.А. Гастев. М.: Наука, 1977. – 456 с.

10. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1979. – 560 с.

11. Григорян, Г.Г. Учет схемы деформации при анализе формообразования в процессе листовой прокатки / Г.Г. Григорян, С.Л. Коцарь, Ю.Д. Железнов // Известия вузов. Черная металлургия. – 1976. – № 7. – С. 88-92.

12. Биргер, И.А. Остаточные напряжения/ И.А. Биргер. М.: Машгиз. 1963. – 239 с.

13. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.– М.: Наука. – 1969. – 424 с.

14. Бельский, С.М. Расчёт распределения усилия прокатки по ширине полосы и остаточных напряжений в полосе вариационным методом / С.М. Бельский, С.Л. Коцарь, Б.А. Поляков // Известия вузов. Чёрная металлургия. – 1990. – № 10. – С. 32-34.

15. Теория обработки металлов давлением (Вариационные методы расчета усилий и деформаций) / И.Я.Тарновский [и др.] – М.: Металлургиздат, 1963. – 672 с.

16. Зильберг, Ю.В. Формоизменение единичных дефектов при прокатке полос / Ю.В. Зильберг, В.В. Ребрин // Теоретические проблемы прокатного производства: тезисы докладов IV Всесоюзной науч.-техн. конф. ч.I. – Днепропетровск, 1988. -С.14-16.

17. Кузьменко, В.И. Анализ сглаживания микронеровности металла при прокатке / В.И. Кузьменко, В.Е. Немогай, В.А. Унцов // Теоретические проблемы прокатного производства: тезисы докладов IV Всесоюзной науч.-техн. конф. ч.I. –Днепропетровск, 1988. -С.17-18.

18. Сосковец, О.Н. Тонколистовое производство / О.Н. Сосковец. – М.: Агенство «Инфомарт», 1995. – 430 с.

19. Пыженков, В.И. Развитие методов расчета упругих деформаций валков станов кварто: дисс. … канд. техн. наук / В.И. Пыженков. – Москва: МИСиС, 1975. – 280 с.

20. Ткалич, К.Н. Влияние профиля валков на прогиб и поперечные размеры горячекатаных полос / К.Н. Ткалич // Сталь. – 1969. – №11. – С. 1016-1020.

21. Боровик, Л.И. Эксплуатация валков станов холодной прокатки / Л.И. Боровик. – М.: Металлургия, 1968.– 233 с.

22. Ковальский, Б.С. Научные записки ХАИ / Б.С. Ковальский. – Т. V. – Вып. 1 (10). – Харьков: ХАИ, 1941. – С. 17-18.

23. Целиков, А.И. Теория прокатки / А.И. Целиков, Г.С. Никитин, С.Е. Рокотян. – М.: Металлургия, 1980. – 318 с.

24. Железнов, Ю.Д. Прокатка ровных полос и листов / Ю.Д. Железнов. – М.: Металлургия, 1972. – 198 с.

25. Тимошенко, С.П. Теория упругости /С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1979. – 560 с.

26. Бельский С.М., Мухин Ю.А., Мазур И.П., Бахаев К.В. Способ регулирования плоскостности полос при прокатке/ / Патент RU 2386491 C2 B21B 1/22. Заявл. 23.05.2008, Опубл.20.04.2010 Бюл. № 11, часть 3, с. 580-581.

27. Automatic Operation of SOLLAC Reversing Roughing Mill / M. De Vathaire [et al.] // Proceedings of 4th International Steel Rolling Conference: The Science and Technology of Flat Rolling. Vol. 1, Deauville, France, June 1-3, 1987. - pp. A.9.1-A.9.7.

28. Huismann, R.L. Large Width Reductions in Hot Strip Mills /R.L. Huismann // Commission of the European Communities Report. - 1983.

29. Design and operation of a new hot strip mill at Hirohata works / S. Nishibayashi [et al.] // Iron and Steel Engineer. - October 1986. - P. 49-56.

30. Бахтинов, Ю.Б. К учету влияния межклетевых сил на величину уширения при непрерывной прокатке / Ю.Б. Бахтинов, Ю.Ф. Тарасевич, А.Ф. Пименов // Производство проката. – 2007. - № 10.- С.2-5.

31. Бахтинов, Ю.Б. Анализ формул для расчета уширения при прокатке полос / Ю.Б. Бахтинов, В.И. Зюзин, Р.Л. Шаталов, С.А. Карпов // Производство проката. – 2006. - № 6.- С.2-5.

32. Целиков, А.И. Теория прокатки / А.И. Целиков, А.И. Гришков. – М.: Металлургия, 1970. – 359 с.

33. Выдрин, В.Н. Исследование влияния натяжения (подпора) на поперечную деформацию / В.Н. Выдрин, Ю.Т.Батин // Теория и технология прокатки: сб. науч.тр. – Челябинск, 1968. – Вып. 54. – С. 220-224.

34. Бахтинов, Ю.Б. К учету влияния межклетевых сил на величину уширения при непрерывной прокатке / Ю.Б. Бахтинов, Ю.Ф. Тарасевич, А.Ф. Пименов // Производство проката. – 2007. - № 10.- С.2-5.

35. Тарновский, И.Я. Уширение и расход мощности при прокатке в гладких валках с уширением/ И.Я. Тарновский, Э.Р. Римм // Изв.вуз. Черная металлургия. – 1964.- № 7. - С. 96-103.

36. Изменение ширины полос при прокатке в непрерывной группе клетей широкополосного стана / Ю.В. Коновалов [и др.] // Сталь. – 1974. - № 7. - С. 626-628.

37. Григорян, Г.Г. Исследование удельных натяжений и утяжки горячей полосы между последними клетями чистовой группы широкополосного стана / Г.Г. Григорян, Ю.Д. Железнов, А.С. Гуров, Р.Л. Шаталов // Новые технологические процессы обработки металлов давлением: научные труды. - № 112. – М.: Металлургия. -1979.- С. 26-31.

38. Настойка, стабилизация и контроль процесса тонколистовой прокатки / Г.Г. Григорян [и др.]. – М.: Металлургия, 1975. – 368 с.

39. Григорян, Г.Г. Учет схемы деформации при анализе формообразования в процессе листовой прокатки / Г.Г. Григорян, С.Л. Коцарь, Ю.Д. Железнов // Известия вузов. Черная металлургия. – 1976. – № 7. – С. 88-92.

Сергей Михайлович Бельский
Игорь Петрович Мазур
Сергей Николаевич Лежнев
Евгений Александрович Панин

ФОРМОИЗМЕНЕНИЕ ПОЛОСЫ
ПРИ ТОНКОЛИСТОВОЙ ПРОКАТКЕ

Монография

Подписано к печати 09.11.2016 г. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Объем 10,0 п.л. Тираж 500 экз. Заказ №127

Отпечатано в типографии Издательства КарГУ им. Е.А. Букетова
100012, г. Караганда, ул. Гоголя, 38. Тел. 51-38-20