МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Рудненский индустриальный институт

Кафедра инженерных и социально-гуманитарных дисциплин

Арепьева С.В.

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

УДК 512.81(0758)
ББК 22.143 я73
А 86

Рецензенты:

Таджигитов А.А. – к.ф. – м.н., доцент, заведующий кафедрой «Математика и информатика» СКГУ им. М.Козыбаева
Шалдыкова Б.А. – к.ф. – м.н., заведующая кафедрой инженерных и социально-гуманитарных дисциплин Рудненского индустриального института

Арепьева С.В.
А 86 Векторный анализ: учеб. пособие / С.В. Арепьева – Рудный, 2018. – 70 с.

ISBN 978-601-7554-70-5

В учебном пособии изложены вопросы векторного анализа. Пособие содержит справочный материал и методические рекомендации по решению задач. Для самопроверки практических навыков в задания для самоконтроля в разных формах. Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей и форм обучения. Пособие будет активным помощником студентам и позволит им рационально организовать самостоятельную работу по изучению данной темы, активизировать участие на практических занятиях и СРСП. Рекомендуется для подготовки к ВОУД.

УДК 512.81(0758)
ББК 22.143 я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одним из фундаментальных понятий современной математики являются вектор и его обобщение – тензор. Эволюция понятия вектора осуществлялась благодаря широкому использованию этого понятия в различных областях математики, механики, а так же в технике.

Вектор относительно новое математическое понятие. Сам термин «вектор» впервые появился в 1845 году у ирландского математика и астронома Уильяма Гамильтона (1805 – 1865) в работах по построению числовых систем, обобщающих комплексные числа. Гамильтону принадлежат и термин «скаляр», «скалярное произведение», «векторное произведение». Почти одновременно с ним исследования в том же направлении, но с другой точки зрения вёл немецкий математик Герман Грассман (1809 – 1877). Англичанин Уильям Клиффорд (1845 – 1879) сумел объединить два подхода в рамках общей теории, включающий в себя и обычное векторное исчисление. А окончательный вид оно приняло в трудах американского физика и математика Джозайи Уилларда Гиббса (1839 – 1903), который в 1901 году опубликовал обширный учебник по векторному анализу.

Конец прошлого и начало текущего столетия ознаменовались широким развитием векторного исчисления и его приложений. Были созданы векторная алгебра и векторный анализ, общая теория векторного пространства. Эти теории были использованы при построении специальной и общей теории относительности, которые играют исключительно важную роль в современной физике.

Понятие вектора возникает там, где приходится иметь дело с объектами, которые характеризуются величиной и направлением. Например, некоторые физические величины, такие, как сила, скорость, ускорение и др., характеризуются не только числовым значением, но и направлением. В связи с этим указанные физические величины удобно изображать направленными отрезками. В соответствии с требованиями учебной программы по математике понятие вектора стало одним из ведущих понятий.

Данное учебное пособие является дополнением к учебникам и учебным пособиям по математике. Предназначено для студентов всех специальностей и всех форм обучения.

При подготовке пособия автор руководствовалась принципом повышения уровня математической подготовки студента. Все основные вопросы освещены достаточно подробно.

В учебном пособии представлен учебный материал по векторному анализу. Цель разработки данного пособия автором – дать студенту наиболее полный объем актуальной информации и математических знаний в доступной и понятной форме.

Структура учебного пособия следующая. Всего 4 главы. Каждая глава разбита на параграфы. Параграф содержит справочный материал (основные определения, формулы и т.п.), необходимый для осмысления темы. Приводятся методические рекомендации по решению определенного круга задач, алгоритмы их решения.

Для каждой главы содержатся типовые задачи не только с решениями, но и для самостоятельной работы, позволяющие достаточно полно охватить учебный материал.

Для обеспечения оценки уровня подготовленности студентов в настоящее время используются методы тестирования, в частности, с применением современных компьютерных технологий. Поэтому наряду с традиционными контрольными заданиями, в пособии предлагается достаточный объем тестовых заданий. Варианты тестов предложены как с одним правильным ответом, так и с несколькими правильными ответами. Проверить вычисления можно по предложенным в конце пособия ответам.

Для самоконтроля студентам предлагается ответить на вопросы.

В конце пособия приводится список литературы.

Приведенные задания для контрольной работы и тесты могут быть эффективно использованы при подготовке к различным проверочным работам, в том числе к ВОУД.

1 Векторы. Основные определения. Линейные операции над векторами

1.1 Скалярные и векторные величины

Величины, встречающиеся в механике, физике и других прикладных науках, могут быть разделены на две категории. С одной стороны, величины, которые определяются только числовым значением (числом), например, масса, температура тела, объем; с другой – величины, для определения которых необходимо знать не только числовое значение, но и направление, например, сила, скорость, ускорение.

Величины первого типа называются скалярными; величины второго типа – векторными.

Скалярная величина может быть задана числом в выбранной системе единиц. Векторную величину можно задать в виде направленного отрезка, предварительно выбрав линейный масштаб. Вектор, началом которого служит точка A, а концом – точка B, обозначается $\overrightarrow{AB}$ (рисунок 1).

Вектор обозначается также одной буквой, как показано на рисунке 2 Эту букву печатают жирным шрифтом, а в письме ставят над буквой черту $\overline{a}$.

Длина вектора называется модулем и обозначается двумя вертикальными чертами справа и слева: $\left|\overline{AB}\right|$ или $\left|\overline{a}\right|$.

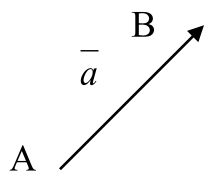


Рисунок 1

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются коллинеарными.

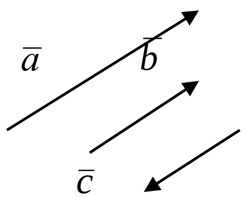


Рисунок 2

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ на рисунке 2 коллинеарные.

Коллинеарные векторы могут иметь одно и то же направление (равнонаправленные векторы) или противоположное. Так, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис.3) равнонаправлены, векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$ (также $\overline{b}$ и $\overline{c}$) противоположно направлены.

Нуль-вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два (ненулевых) вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны, если они равнонаправлены и имеют один и тот же модуль.

Так, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на рисунке 3 равны, а векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$ не равны. Это записывается так:

$\overline{a} = \overline{b}$, $\overline{a} \neq \overline{c}$.

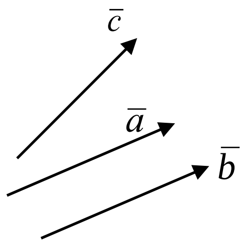


Рисунок 3

Два вектора, имеющие равные модули и противоположно направленные,
называются противоположными. Вектор, противоположный вектору $\overline{a}$, обозначается $-\overline{a}$.

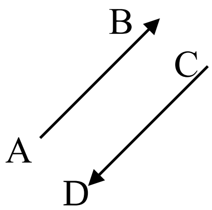


Рисунок 4

Так, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ на рисунке 4 – противоположные. Из определения следует, что $-(-\overline{a}) = \overline{a}$, $|-\overline{a}| = |\overline{a}|$.

Всякие векторы (в любом числе) можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало в точке О. Такое приведение изображено на рис.6.

Итак, в дальнейшем будем иметь дело со свободными векторами, т.е. векторами, определенными с точностью до параллельного переноса.

Вектор $\overline{O}$, начало и конец которого совпадают, называется нулевым вектором. Его модуль равен нулю. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

1.2 Линейные операции над векторами

Сложение векторов. Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец с концом вектора $\bar{b}$, при условии, что начало вектора $\bar{b}$ приложено к концу вектора $\bar{a}$ (правило треугольника) (рис.5).

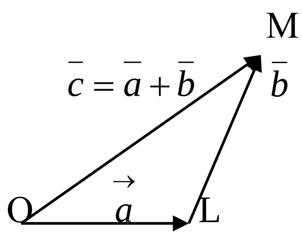


Рисунок 5

При сложении векторов имеют место неравенства:

$$\left|\bar{a} + \bar{b}\right| \le \left|\bar{a}\right| + \left|\bar{b}\right|$$

$$\left|\bar{a} + \bar{b}\right| \ge \left|\bar{a}\right| - \left|\bar{b}\right|,$$

выражающие что сторона OM треугольника OML (рис.5) меньше суммы и больше разности двух других сторон, причем равенство имеет смысл лишь для равнонаправленных векторов в первом неравенстве и для противоположно направленных векторов – во втором неравенстве.

Из определения следует, что сумма двух противоположных векторов равна нуль-вектору

$$\bar{a} + \left(-\bar{a}\right) = \bar{O}.$$

Сложение векторов подчиняется следующим законам:

а) переместительному закону

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

б) сочетательному закону

$$\bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c}.$$

Операция сложения может быть распространена на любое число слагаемых векторов.

Для того, чтобы сложить n векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \overline{a_n}$, надо к концу первого вектора приложить начало второго, затем к концу второго вектора приложить начало третьего и т.д. и, наконец, приложить к концу предпоследнего вектора начало последнего; тогда замыкающий вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, и будет являться вектором – суммой данных векторов. При сложении векторов можно любым образом переставлять и группировать слагаемые.

Вычитание векторов. Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют вектор $\bar{c}$, для которого $\bar{c} + \bar{b} = \bar{a}$.

Для геометрического построения вектора – разности $\bar{c}$ можно поступить так: из произвольного начала O строим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ (проведенный из конца вычитаемого вектора $\overrightarrow{OB}$ к концу уменьшаемого вектора $\overrightarrow{OA}$)
$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$
есть разность $\bar{a}$ - $\bar{b}$.

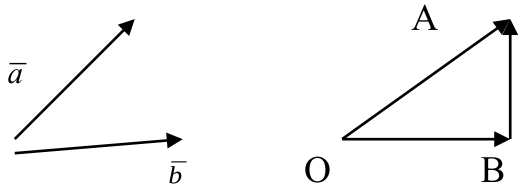


Рисунок 6

Действительно, сумма $\overline{OB} + \overline{BA}$ равна $\overline{OA}$ (рисунок 6).

Умножение вектора на скаляр. Произведением вектора $\bar{a}$ на скаляр λ называется вектор, параллельный $\bar{a}$ и равнонаправленный с $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направленный, если $\lambda < 0$. Обозначается произведение вектора $\bar{a}$ на скаляр λ так:

$$\lambda\bar{a} \text{ или } \bar{a}\lambda.$$

Таким образом, векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ - коллинеарные.
Если $\lambda = 0$, то, по направлению,

$$\lambda\bar{a} = \bar{O}.$$

На рисунке 7 показан вектор $2\bar{a}$.

Если длина вектора $\bar{a}$ равна единице, то и любой вектор $\bar{c}$, равнонаправленный вектору $\bar{a}$, можно представить в виде $\lambda\bar{a}$, здесь λ - длина этого вектора.

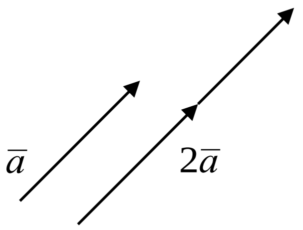


Рисунок 7

Деление вектора $\overline{a}$ на скаляр $\lambda \neq 0$ эквивалентно умножению вектора $\overline{a}$ на число $\frac{1}{\lambda}$. Умножение вектора на скаляр подчиняется сочетательному

$$\lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$$

и распределительному

$$(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\,\overline{a} + \mu\,\overline{a}$$

законам.

1.3 Проекция вектора на ось

Проекцией точки M на ось L будет называть основание A перпендикуляра MA на ось L. Проекцией вектора $\overline{a}$ на ось L называется длина отрезка AB, где точка A- проекция начала вектора, а точка B- проекция конца вектора $\overline{a}$ на ось L.

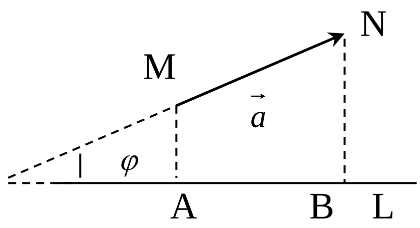


Рисунок 8

Обозначение: $Пр_L\,\overline{a}$

Основные теоремы о проекциях векторов формулируются следующим образом:

а) Проекция вектора на какую либо ось равна произведению модуля вектора на косинус угла наклона вектора к оси:

$$Пр_L\,\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi.$$

б) Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагаемых векторов на эту же ось.

в) При умножении вектора на скаляр его проекция умножается на тот же скаляр.

1.4 Прямоугольная система координат в пространстве

Три взаимно перпендикулярные оси OX, OY, OZ (рис.9), проходящие через некоторую точку O, образуют прямоугольную систему координат в пространстве.

Точка O называется началом координат, прямые OX, OY, OZ – осями координат (OX – ось абсцисс, OY – ось ординат, OZ – ось аппликат), а плоскости XOY,

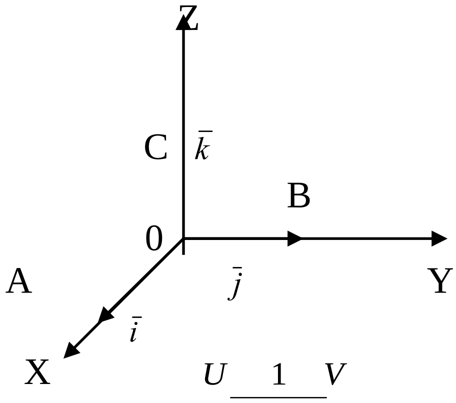


Рисунок 9

YOZ, ZOX – координатными плоскостями.

Какой-либо отрезок UV принимается за единицу масштаба для всех трех осей. Отложив на осях OX, OY, OZ в положительном направлении отрезки $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, равные единице масштаба, получим три вектора. Они называются основными векторами, или ортами, и обозначаются $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Координаты точки.

Положение любой точки M в пространстве можно определить тремя числами (координатами) следующим образом: из точки M опустим перпендикуляр MD на плоскость XOY, затем из точки D опустим перпендикуляр DN на ось OX, DL – на ось OY. Из точки M опустим также перпендикуляр KM на ось OZ.

Числа x (абсцисса), y (ордината) и z (аппликата), измеряющие соответственно отрезки ON, OL и OK в выбранном масштабе, называются прямоугольными координатами точки M.

Они берутся положительными или отрицательными в зависимости от того, имеют ли векторы ON, OL и OK одинаковое либо противоположное направление с ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Если точка M имеет координаты x, y, z, это записывается так M(x,y,z).

Вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий от начала O к некоторой точке M, называется радиус-вектором точки M и обозначается r.

Возьмем теперь произвольный вектор $\bar{a}$, его начало поместим в, начало координат O, а конец обозначим буквой M. (рис.10).

Спроектируем теперь вектор $\bar{a} = \vec{O}M$ на координатные оси.

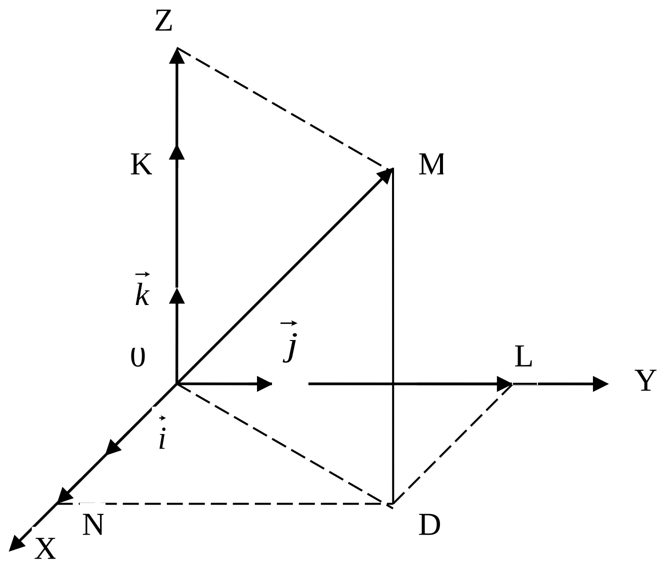


Рисунок 10

Величины проекции вектора на координатные оси называются координатами вектора $\overline{a}$.

Обозначают их X, Y и Z:

$$Пр_{ox}\overline{a} = X\,,\ Пр_{oy}\overline{a} = Y\,,\ Пр_{oz}\overline{a} = Z\,.$$

Тот факт, что координаты вектора $\overline{a}$ равны X, Y и Z, записывается следующим образом: $\overline{a}\{X, Y, Z\}$.

Координаты x, y, z точки M (конца вектора $\overline{a}$) соответственно равны координатам X, Y, Z вектора $\overline{a}$, т.е. x=X, y=Y, z=Z.

Если два вектора равны, то их координаты соответственно равны, т.е. если $\overline{a} = \overline{b}$ и $\overline{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\overline{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$, то $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$, $Z_1 = Z_2$.

1.5 Разложение вектора по ортам в пространстве

Каждый вектор равен сумме его геометрических проекций по трем осям координат. Так, вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис.10) равен сумме своих проекций на оси координат

$$\overrightarrow{OM} = \overline{ON} + \overline{OL} + \overline{OK}, \qquad (1)$$

где $\overline{ON} = Пр_{ox}\overrightarrow{OM}$, $\overline{OL} = Пр_{oy}\overrightarrow{OM}$, $\overline{OK} = Пр_{oz}\overrightarrow{OM}$.

Так вектор $\overline{ON}$ коллинеарен орту $\bar{i}$ и длина его равна X, то верно равенство $\overline{ON} = X\bar{i}$.

Аналогично векторы $\overline{OL}$ и $\overline{OK}$ можно представить в виде $\overline{OL} = Y\bar{j}$, $\overline{OK} = Z\bar{k}$.
Следовательно равенство (1) можно записать так:

$$\bar{a} = \vec{O}M = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}.$$

Слагаемые $X\bar{i}, Y\bar{j}, Z\bar{k}$ называются компонентами (или составляющими) вектора $\bar{a}$.

Тройка векторов $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$, по которым осуществлено разложение вектора, называется координатным базисом.

Представление вектора в виде суммы компонент называется разложением этого вектора по базису $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$.

1.6 Операции над векторами, заданными в координатной форме

Проекция суммы векторов на любую ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось. Как следствие из этого предложения и определения координат вектора вытекают следующие правила:

1.Два вектора равны, если равны их координаты.
2.При сложении векторов, заданных в координатной форме, их координаты складываются:
если

$$\bar{a} = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k},\ \bar{b} = X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k},$$

то

$$\bar{a} + \bar{b} = (X_1 + X_2)\bar{i} + (Y_1 + Y_2)\bar{j} + (Z_1 + Z_2)\bar{k}.$$

3.При вычитании векторов, заданных в координатной форме, их координаты вычитаются:

$$\bar{a} - \bar{b} = (X_1 - X_2)\bar{i} + (Y_1 - Y_2)\bar{j} + (Z_1 - Z_2)\bar{k}.$$

4.При умножении вектора на скаляр надо все его координаты умножить на этот скаляр:
если

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$

то

$$\lambda\bar{a} = \lambda X\bar{i} + \lambda Y\bar{j} + \lambda Z\bar{k}.$$

Несложно получить условия коллинеарности двух векторов.

Пусть даны два ненулевых коллинеарных между собой вектора $\bar{a} = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k}$ и $\bar{b} = X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k}$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны $\bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$, то всегда можно найти такой постоянный множитель $\lambda \neq 0$, что

$$\lambda\bar{b} = \bar{a}.$$

В координатной форме имеем:

$$\lambda\bar{b} = \lambda X_2\bar{i} + \lambda Y_2\bar{j} + \lambda Z_2\bar{k}.$$

Векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{b}$ равны, а значит равны их координаты, следовательно,

$$X_1 = \lambda X_2,\ Y_1 = \lambda Y_2,\ Z_1 = \lambda Z_2.$$

Определяя λ из каждого из этих трех равенств, можно составить пропорции

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}. \qquad (2)$$

Равенство (2) является условием коллинеарности двух векторов.

Угол между осью координат и вектором.

Углы α, β, γ (рис.11), образуемые положительными направлениями OX, OY, OZ с вектором $\bar{a}\{X, Y, Z\}$, можно найти по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \qquad (3)$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \qquad (4)$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \qquad (5)$$

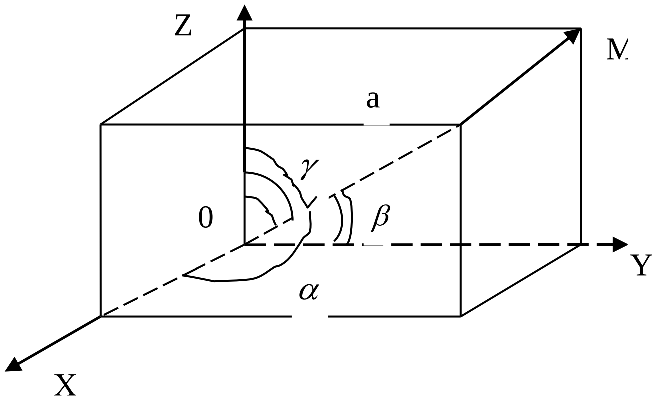


Рисунок 11

Если вектор $\bar{a}$ единичный, т.е $|\bar{a}| = 1$, то

$$\cos\alpha = X,\ \cos\beta = Y,\ \cos\gamma = Z.$$

Из формул (3), (4), (5) следует, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Величины $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma.$ называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$.

Деление отрезка в данном отношении.

Радиус-вектор $\bar{r}$ точки А, делящий отрезок A_1 A_2 в отношении

$$\frac{A_1A}{AA_1} = \frac{m_1}{m_2},$$

определяется формулой (6)

$$\bar{r} = \frac{m_2\bar{r}_1 + m_1\bar{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{6}$$

где $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ - радиус-векторы точек A_1 и A_2.

Координаты точки А находятся по формуле (7):

$$x = \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2} \qquad y = \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2} \qquad z = \frac{m_2z_1 + m_1z_2}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

В частности, координаты середины отрезка A_1 A_2 равны

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (8)$$

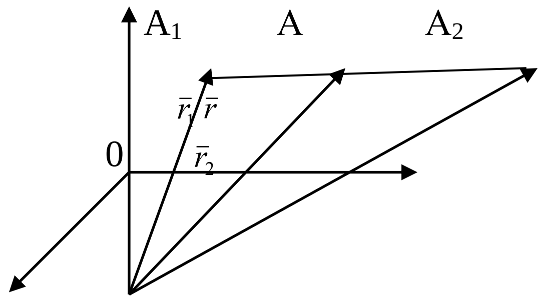


Рисунок 12

Пример 1. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a}\{2,-2,-1\}$.

Решение. По формулам (3), (4), (5) находим

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{3},\ \cos\beta=-\frac{2}{3},\ \cos\gamma=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$**,** $\cos\beta=-\frac{2}{3}$**,** $\cos\gamma=-\frac{1}{3}$**.**

Пример 2. Найти координаты точки А, делящей отрезок A_1 A_2 в отношении $\frac{A_1A}{AA_1}=\frac{2}{3}$, если A_1 (2,4,-1), A_2 (-3,-1,6).

Решение. По формуле (7) находим:

$$x=\frac{3\cdot 2+2\cdot(-3)}{2+3}=0,\ y=\frac{4\cdot 3+2\cdot(-1)}{5}=2,\ z=\frac{3\cdot(-1)+2\cdot 6}{5}=\frac{9}{5}.$$

Ответ: A(0; 2; $\frac{9}{5}$).

2 Скалярное произведение двух векторов

2. 1 Определение скалярного произведения

Скалярным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

Для обозначения скалярного произведения вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ употребляется одна из записей $\left(\bar{a},\bar{b}\right)$, $\bar{a}\bar{b}$.
Согласно определению

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\varphi. \qquad (9)$$

Скалярное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будет равно нулю, если векторы перпендикулярны (ортогональны).
Заметим, что

$$\left|\bar{b}\right| cos\varphi = Пр_{\bar{a}}\bar{b} .$$

Скалярное произведение можно записать в виде:

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left|\bar{a}\right|\cdot Пр_{\bar{a}}\bar{b} \qquad (10)$$

Пример 3. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если, а угол между ними равен 120^{o}.
Решение. По формуле (9) вычисляем скалярное произведение

$$\left(a,b\right)=2\cdot 1\cdot\cos 120^{0}=-1.$$

Ответ: -1.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left(\bar{b},\bar{a}\right)$ (переместительный закон).
2. $\left(\left(\bar{a}+\bar{c}\right),b\right)=\left(\bar{a},\bar{b}\right)+\left(\bar{c},\bar{b}\right)$ (распределительный закон).
3. $\left(\bar{a},\bar{a}\right)$ называется скалярным квадратом вектора $\bar{a}$, обозначается $\bar{a}^{2}$.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля

$$\left(\bar{a},\bar{a}\right)=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|\cdot\cos 0^{0}=\left|\bar{a}\right|^{2}$$

4. $\left(\bar{a},\lambda\cdot b\right)=\left(\lambda\cdot\bar{a},\bar{b}\right)=\lambda\cdot\left(\bar{a},\bar{b}\right)$, числовой множитель можно вывести за знак скалярного произведения.

Для пояснения физического смысла вычислим работу по перемещению материальной точки из B в C под действием постоянной силы F, направленной под углом φ к перемещению $\bar{s}=\overline{BC}$ (рис. 13):

$$A=np_{\bar{s}}\overline{F}\cdot\left|\vec{s}\right|=\left|\overrightarrow{F}\right|\cos\varphi\cdot\left|\vec{s}\right|=\overline{F}\cdot\bar{s}.$$

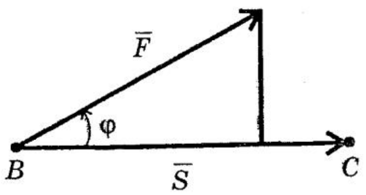


Рисунок 13

2.2 Скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме

Из определения скалярного произведения следует, что

$$(\bar{i},\bar{i}) = \bar{i}^{\,2} = |\bar{i}|^2 = 1; \quad (\bar{j},\bar{j}) = 1; \quad (\bar{k},\bar{k}) = 1; \quad (\bar{i},\bar{j}) = 0;$$

$$(\bar{i},\bar{k}) = 0; \quad (\bar{j},\bar{k}) = 0. \qquad (11)$$

Пусть теперь $\bar{a} = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k}$; $\bar{b} = X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k}$.

Используя свойства скалярного произведения и равенств (11), получаем

$$(\bar{a},\bar{b}) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \qquad (12)$$

Получена формула для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в координатной форме.

В частности,

$$\bar{a}^{\,2} = X_1^{\;2} + Y^2{}_1 + Z_1^{\;2}.$$

Теперь можно записать формулу для вычисления длины вектора

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^{\,2}} = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,. \qquad (13)$$

Замечание. Скалярное произведение может иметь следующий экономический смысл.

Пусть вектор $\bar{x} = \{X_1, X_2, X_3\}$ - план выпуска продукции (x_i - количество i-го продукта, выпускаемого фирмой), а $\bar{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ - вектор стоимости единицы этих продуктов, тогда доход фирмы можно записать в виде скалярного произведения векторов

$$\left(\bar{c},\bar{x}\right)=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3.$$

Пример 4. Найти длины векторов $\bar{a}=\{3,2,1\}$, $\bar{b}=\{2,-3,0\}$ и их скалярное произведение.

Решение. По формуле (9) вычисляем

$$|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14};$$

$$|\bar{b}|=\sqrt{\bar{b}^2}=\sqrt{2^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{13};$$

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=3\cdot 2+2\cdot(-3)+1\cdot 0=0;$$

Значит, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны.

Ответ: 0.

2.3 Угол между векторами

Найдем угол между нулевыми векторами $\bar{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$ и $\bar{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$. Возьмем скалярное произведение и определим косинус угла φ между этими векторами:

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$$

$$cos\,\varphi=\frac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}} \tag{14}$$

Если же векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, то $\cos\varphi$ и, следовательно,

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0.$$

Это равенство является условием ортогональности (перпендикулярности) двух векторов.

Пример 5. Найти угол между векторами $\bar{a}=\{1,1,1\}$ и $\bar{b}=\{2,0,3\}$.

Решение. По формуле (14) имеем

$$cos\,\varphi=\frac{1\cdot 2+1\cdot 0+1\cdot 3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{13}}\approx 0{,}8006$$

Откуда $\varphi = 36^0 50'$.

Ответ: $\varphi = 36^0 50'$.

Пример 6. Вершины треугольника АВС имеют координаты А(1,2,-3); В(0,1,2); С(2,1,1). Найти длины сторон АВ и АС и косинус угла А.
Решение. По формуле (14) имеем

$$\overrightarrow{AB} = \{(0-1),(1-2),(2+3)\} = \{-1,-1,5\}$$

$$\overrightarrow{AC} = \{(2-1),(1-2),(1+3)\} = \{1,-1,4\}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos A = \frac{\left(\overline{AB} \times \overline{AC}\right)}{|AB||AC|} = \frac{(-1)\times 1 + (-1)\times(-1) + 5\times 4}{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}} = \frac{20}{9\sqrt{6}} \approx 0{,}9.$$

Ответ: $\cos A \approx 0{,}9$.

Пример 6. Найти проекцию вектора $\bar{b}\{5,-3,7\}$ на вектор $\bar{a}\{2,-2,1\}$.

Решение. По формуле (10) вычисляем:

$$Пр_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|} = \frac{2\cdot 5 + (-2)\cdot(-7) + 1\cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{27}{3} = 9.$$

Ответ: 9.

Пример 7. Треугольник задан вершинами $A(-2;3;4)$, $B(6;0;-1)$, $C(4;-1;2)$. Найти косинус внутреннего угла А, $пр_{\overline{AC}}\overline{BC}$ и единичный вектор, направленный вдоль медианы ВМ.
Решение. По формулам (10), (14) вычисляем

$$\cos A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|},$$

$$\overline{AB} = (8;-3;-5),\ \overline{AC} = (6;-4;-2),\ \overline{BC} = (-2;-1;3)$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{64+9+25} = \sqrt{98}\,,\ \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}\,.$$

Тогда $\cos A = \dfrac{8\cdot 6 + (-3)\cdot(-4) + (-5)\cdot(-2)}{\sqrt{98}\cdot\sqrt{56}} = \dfrac{70}{7\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{14}}$,

т.е. $\cos A = \dfrac{5}{\sqrt{28}} = \dfrac{5\sqrt{28}}{28}$.

Далее,

$$np_{\overline{AC}}\,\overline{BC} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|} = \frac{6\cdot(-2)+(-4)(-1)+(-2)\cdot 3}{\sqrt{56}} = \frac{-14}{\sqrt{56}} = -\frac{7}{\sqrt{14}} = -\frac{7\sqrt{14}}{14} = -\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Находим координаты точки М по формуле (8):

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = 1,\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = 1,\ z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = 3.$$

Тогда

$\overline{BM} = (x_M - x_B; y_M - y_B; z_M - z_B) = (-5; 1; 4)$,

$\left|\overline{BM}\right| = \sqrt{25+1+16} = \sqrt{42}$ и значит единичный вектор $\overline{m}$, направленный вдоль медианы ВМ имеет вид:

$$\overline{m} = \left(\frac{-5}{\sqrt{42}}; \frac{1}{\sqrt{42}}; \frac{4}{\sqrt{42}}\right).$$

Ответ: $\cos A = \dfrac{5\sqrt{28}}{28}$, $np_{\overline{AC}}\,\overline{BC} = -\dfrac{\sqrt{14}}{2}$, $\overline{m} = \left(\dfrac{-5}{\sqrt{42}}; \dfrac{1}{\sqrt{42}}; \dfrac{4}{\sqrt{42}}\right)$.

Пример 8. Найти вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющий условиям: $\overline{x}\cdot\overline{a} = -10$, $\overline{x}\cdot\overline{b} = 3$, $\overline{x}\cdot\overline{c} = 15$, где $\overline{a} = (2; -3; 1)$, $\overline{b} = (3; 1; -2)$, $\overline{c} = (-1; 3; -4)$.

Решение. Трижды использовав определение скалярного произведения, имеем:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 15 \end{cases}.$$

Решая эту систему любым методом, получаем $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Ответ: $\overline{x} = (-1, 2, -2)$.

Пример 9. Стороны параллелограмма заданы векторами $\bar{a} = 2\bar{m} + 3\bar{n}$ и $\bar{b} = -\bar{m} + 4\bar{n}$, где $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 5$, $\left(\bar{m} \,\hat{,}\, \bar{n}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Найти длину его большей диагонали.

Решение. Большая диагональ параллелограмма $\bar{d}$ является суммой его смежных сторон:

$$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} = 2\bar{m} + 3\bar{n} - \bar{m} + 4\bar{n} = \bar{m} + 7\bar{n}.$$

Далее, используя свойства скалярного произведения, имеем:

$$\left\|\bar{d}\right\|^2 = \bar{d} \cdot \bar{d} = \left(\bar{m} + 7\bar{n}\right) \cdot \left(\bar{m} + 7\bar{n}\right) = \left|\bar{m}\right|^2 + 7\bar{m} \cdot \bar{n} + 49\left|\bar{n}\right|^2 =$$

$$= 16 + 14 \cdot |\bar{m}| \cdot |\bar{n}| \cos\left(\bar{m} \,\hat{,}\, \bar{n}\right) + 49 \cdot 25 = 16 + 14 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 1225 = 1381.$$

Отсюда $\left|\bar{d}\right| = \sqrt{1381}$.

Ответ: $\sqrt{1381}$.

2.4 Понятие арифметического n – мерного пространства

В предыдущих параграфах рассмотрели векторы в декартовой прямоугольной системе координат с базисом $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Зная, что любой вектор $\bar{a}$ в этой системе можно разложить по базису, т.е. представить в виде

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$

где числа X, Y, Z являются координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и однозначно его определяют.

Итак, можно назвать вектором $\bar{a}$ упорядоченную тройку чисел (X,Y,Z). Например, вектор $\bar{i}$ представляет тройка чисел (1,0,0), соответственно $\bar{j}$ - {0,1,0}, $\bar{k}$ - {0,0,1}.

Говорят, что эти векторы заданы в трехмерном пространстве R^3, (3 – размерность пространства). Векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют базис пространства R^3, а вектор $\bar{a}$ ={X,Y,Z} является элементом этого пространства.

Обобщим введенные понятия. Назовем вектором n-мерного пространства R^n, упорядоченную n-ку чисел.

Особые векторы $\bar{e}_1\{1,0,0,...,0\}$, $\bar{e}_2\{0,1,0,...,0\},\ldots,\bar{e}_n\{0,0,0,...,1\}$ образуют базис пространства R^n.

Замечание. Очевидно, что пространство R^n совпадает с введенным ранее декартовым (прямым) произведением множеств. Подобно тому, как это было сделано выше, можно определить операции над векторами в пространстве R^n.
Пусть $\bar{a}\{a_1,a_2,...,a_n\}$, $\bar{b}\{b_1,b_2,...,b_n\}$ - два вектора пространства R^n.
1. Суммой векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$, координаты которого равны суммам соответствующих координат векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{c}\{c_1,c_2,...,c_n\}$, где

$$c_i=a_i+b_i,\ \left(i=\overline{1,n}\right).$$

2.Произведение вектора $\bar{a}$ на число λ называется вектор, координаты которого равны произведению соответствующих координат вектора $\bar{a}$ на число λ.

$$\lambda\bar{a}=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_n\}.$$

Вектор $\overline{O}\{0,0,...,0\}$ называют нулевым вектором.

Вектор $\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+...+\lambda_n\bar{x}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n$ с коэффициентами $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$.

Векторы $\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, не равные нулю, что

$$\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+...+\lambda_n\bar{x}_n=0.$$

Если же это равенство выполняется лишь при $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$, то векторы $\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n$, называют линейно зависимыми. Очевидно, что векторы $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ линейно независимы и любой вектор $\bar{a}\{a_1,a_2,...,a_n\}$ можно представить в виде линейной комбинации $\bar{a}\{a_1\bar{e}_1,a_2\bar{e}_2,...,a_n\bar{e}_n\}$.

Это равенство представляет собой разложение вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$, числа $a_1,a_2,...,a_n$ называют координатами вектора $\bar{a}$ в данном базисе.
3.Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов, т.е.

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n.$$

Очевидно, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля. Отсюда легко получить формулу для вычисления длины (модуля) вектора в пространстве

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} .$$

Т.к. по определению

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi ,$$

то для вычисления косинуса угла между двумя векторами получаем следующую формулу

$$cos\,\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots b_n^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}} . \qquad (15)$$

Известно, что если два вектора ортогональны (перпендикулярны), то косинус угла между ними равен нулю, отсюда имеем условие ортогональности двух векторов

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = 0 .$$

Скалярное произведение векторов пространства R^n широко используется в экономике. Допустим, например, что предприятие производит и реализует продукцию n видов.

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots., x_n)$ – вектор производства, указывающий число единиц продукции каждого вида, произведенной и реализованной в течение месяца, а $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots., p_n)$ – вектор прибыли; каждая его координата $p_i, i = 1,2,\ldots,n$, показывает прибыль предприятия за счет реализации единицы продукции *i*-го вида.

Тогда общая месячная прибыль предприятия может быть вычислена таким образом:

$$P = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots. + p_n \cdot x_n = \bar{p} \cdot \bar{x} .$$

Итак, прибыль предприятия есть скалярное произведение вектора прибыли на вектор производства.

3 Векторное произведение векторов

3.1 Определение векторного произведения. Свойства

Определение. Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ (обозначается $\bar{a}\times\bar{b}$) называется вектор $\bar{c}$, который:

1) ортогонален обоим векторам: $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$;
2) его модуль численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
3) направлен он так, что если смотреть из его конца, то кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ должен происходить против часовой стрелки. В таких случаях говорят, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку (рис. 14).

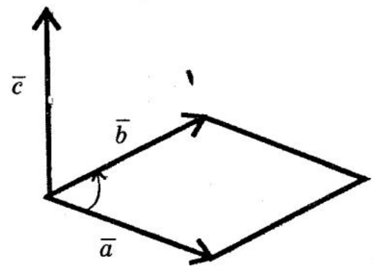


Рисунок 14

Свойства векторного произведения

1) $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$
2) $\lambda\bar{a}\times\bar{b}=\lambda(\bar{a}\times\bar{b})$
3) $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$
4) $\bar{a}\|\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0$
5) таблица умножения ортов:

$$\begin{array}{ccc} \bar{i}\times\bar{i}=\bar{0} & \bar{i}\times\bar{j}=\bar{k} & \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j} \\ \bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k} & \bar{j}\times\bar{j}=\bar{0} & \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i} \\ \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j} & \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i} & \bar{k}\times\bar{k}=\bar{0} \end{array}$$

3.2 Векторное произведение векторов в координатной форме

Даны векторы $\bar{a}=a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}$ и $\bar{b}=b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}$.
Выразим вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ через координаты заданных векторов.

Анализируя нижеприведенные выкладки, обратите особое внимание на использование всех свойств векторного произведения.

$$\overline{a}\times\overline{b}=(a_1\overline{i}+a_2\overline{j}+a_3\overline{k})\times(b_1\overline{i}+b_2\overline{j}+b_3\overline{k})^{св.3),2)}=a_1b_1\overline{i}\times\overline{i}+$$

$$+a_1b_2\overline{i}\times\overline{j}+a_1b_3\overline{i}\times\overline{k}+a_2b_1\overline{j}\times\overline{i}+a_2b_2\overline{j}\times\overline{j}+a_2b_3\overline{j}\times\overline{k}+$$

$$+a_3b_1\overline{k}\times\overline{i}+a_3b_2\overline{k}\times\overline{j}+a_3b_3\overline{k}\times\overline{k}^{св.5),4),1)}=a_1b_2\overline{k}-a_1b_3\overline{j}-$$

$$-a_2b_1\overline{k}+a_2b_3\overline{i}+a_3b_1\overline{j}-a_3b_2\overline{i}=(a_2b_3-a_3b_2)\overline{i}-$$

$$-(a_1b_3-a_3b_1)\overline{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\overline{k}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

Итак, векторное произведение в координатной форме находят по формуле (16):

$$\overline{a}\times\overline{b}=\left\|\begin{matrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{matrix}\right\|. \qquad (16)$$

Пример 10. Найти площадь треугольника, имеющего вершины в точках $A(5;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(4;-2;2)$.

Решение. По формуле (16) вычисляем векторное произведение $\overline{AB}=(-2;-1;-1)$, $\overline{AC}=(-1;-4;3)$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -2 & -1 & -1\\ -1 & -4 & 3\end{vmatrix}=-7\overline{i}+7\overline{j}+7\overline{k}.$$

Согласно пункту 2 определения, находим площадь треугольника, как половина площади параллелограмма

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{49+49+49}=\frac{1}{2}\sqrt{147}\text{ (кв.ед.).}$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{147}$ (кв.ед.)

Пример 11. Упростить выражение $\overline{a} = (2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}) \times (\overline{i} - 2\overline{j}) - 3\overline{i} - 4\overline{j}$.
Решение. Используя распределительный закон векторного произведения (свойство 3), а также возможность вынесения числового множителя, получаем

$$\overline{a} = 2\overline{i} \times \overline{i} - 4\overline{i} \times \overline{j} - 3\overline{j} \times \overline{i} + 6\overline{j} \times \overline{j} + 4\overline{k} \times \overline{i} - 8\overline{k} \times \overline{j} - 3\overline{i} - 4\overline{j}.$$

Далее пользуемся таблицей ортов (свойство 5):

$$\overline{a} = \overline{0} - 4\overline{k} + 3\overline{k} + \overline{0} + 4\overline{j} + 8\overline{i} - 3\overline{i} - 4\overline{j}.$$

Значит, $\overline{a} = 5\overline{i} - \overline{k}$.

Ответ: $\overline{a} = 5\overline{i} - \overline{k}$.

Пример 12. Даны векторы $\overline{a} = (3; -2; 4)$ и $\overline{b} = (1; 3; -1)$. Найти $\alpha = \left|(2\overline{a} - \overline{b}) \times (4\overline{a} + 5\overline{b})\right|$..
Решение. Используя свойства векторного произведения, находим

$$\alpha = \left|(2\overline{a} - \overline{b}) \times (4\overline{a} + 5\overline{b})\right| = \left|8\overline{a} \times \overline{a} + 10\overline{a} \times \overline{b} + 4\overline{b} \times \overline{a} - 5\overline{b} \times \overline{b}\right| =$$
$$= \left|10\overline{a} \times \overline{b} + 4\overline{a} \times \overline{b}\right| = 14\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -10\overline{i} + 7\overline{j} + 11\overline{k} \cdot$$

$$\alpha = 14\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = 14\sqrt{100 + 49 + 121} = 14\sqrt{270}.$$

Ответ: $\alpha = 14\sqrt{270}$.

Пример 13. Найти единичный вектор $\overline{e}$, ортогональный двум заданным векторам $\overline{a} = (2; 1; -1)$ и $\overline{b} = (1; -3; 3)$.
Решение. Одним из векторов, перпендикулярных двум заданным, является их векторное произведение $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$. Найдем разложение $\overline{c}$ в естественном базисе.

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -7\bar{j} - 7\bar{k}$$

и его модуль $|\bar{c}| = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$.

Искомый вектор $\bar{e} = \frac{1}{\bar{c}} \cdot \bar{c} = \frac{1}{7\sqrt{2}}(0;-7;-7) = \left(0; \frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ответ: $\bar{e} = \left(0; \frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

4 Смешанное произведение векторов.

4.1 Определение смешанного произведения. Свойства.

Определение. Смешанным произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (обозначается $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$) называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий вектор:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$$

Свойства смешанного произведения.

1) При перестановке местами двух множителей смешанное произведение меняет знак:

$$\bar{b}\bar{a}\bar{c} = -\bar{a}\bar{b}\bar{c},\ \bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{a}\bar{b}\bar{c},\ \bar{c}\bar{a}\bar{b} = -\bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$

2) При циклической перестановке множителей смешанное произведение не меняется:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}.$$

Доказательство вытекает из того, что перестановка любых двух строк определителя меняет его знак.

3) Если в смешанном произведении два любых вектора равны или коллинеарны, то оно равно нулю.

Действительно, это означает, что в определителе равны или пропорциональны две строки; следовательно, он равен нулю.

4.2 Смешанное произведение в координатной форме

Пусть векторы $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\overline{c}(c_1, c_2, c_3)$ заданы, тогда

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\overline{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\overline{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\overline{k},$$

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=(a_2b_3-a_3b_2)c_1-(a_1b_3-a_3b_1)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3,$$

остается правую часть равенства собрать в определитель:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

Перестановка двух любых строк определителя меняет его знак. Поменяв третью строку со второй, а затем новую вторую с первой, получим:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

Это – удобная формула для вычисления смешанного произведения.

Теорема. Абсолютная величина смешанного произведения трех векторов равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Доказательство. Даны векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ (рис. 15). Найдем сначала вектор $\overline{d}=\overline{a}\times\overline{b}$. Этот вектор перпендикулярен параллелограмму, образованному векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и его длина $|\overline{d}|=S$ (численно).

Далее, по определению,

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\overline{d}\cdot\overline{c}=|\overline{d}|\cdot|\overline{c}|\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\overline{c}$ и $\overline{d}$. Продолжая расчет смешанного произведения, получим:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=|\overline{d}|\cdot np_{\overline{d}}\,\overline{c}=S\cdot H=V,$$

где H – высота параллелепипеда, а V – его объем.

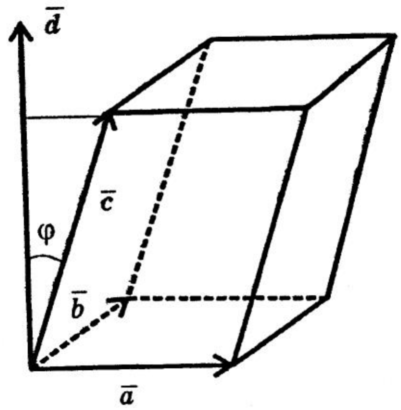


Рисунок 15

Получилось, что смешанное произведение векторов равно объему параллелепипеда, на них построенного.

Так будет всегда, если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (в указанном порядке) образуют правую тройку.

Если же векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют собой левую тройку, то их смешанное произведение отрицательно, однако $\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| = V$. теорема доказана.

Заметим, что объем пирамиды, построенной на тех же векторах, равен $\frac{1}{6}$ части объема параллелепипеда, т.е. $V_{пирам.} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$.

Пример 14. Найти объем пирамиды, если заданы ее вершины $A(-4;1;-3)$, $B(2;-5;1)$, $C(3;4;3)$ и $D(5;2;-4)$.

Решение. Рассмотрим три вектора, исходящие из одной точки (рис. 16): $\overline{AB}(6;-6;4)$, $\overline{AC}(7;3;6)$, $\overline{AD}(9;1;-1)$.

$$V_{пир.} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| \quad V_{пир.} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 6 & -6 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \\ 9 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|-500\right| = \frac{250}{3} \text{ ед}^3.$$

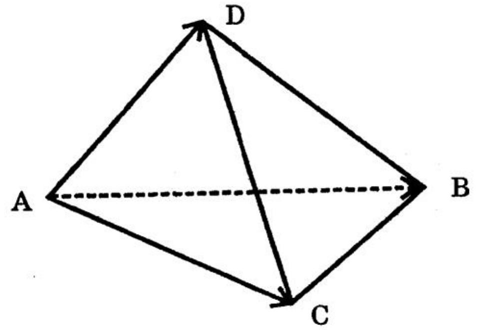


Рисунок 16

Ответ: $\dfrac{250}{3}$ ед^3.

Следствие. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ лежат в одной плоскости (компланарны) тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

В самом деле, компланарность векторов означает, что объем параллелепипеда, на них «построенного», равен нулю.

Это естественно и с алгебраической точки зрения, ибо компланарность трех векторов означает их линейную зависимость, т.е. равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов, или равенство нулю смешанного произведения.

Пример 15. Выяснить, лежат ли точки $M_1(2;5;3)$, $M_2(3;7;4)$, $M_3(-5;-5;-1)$, $M_4(-4;-3;0)$ в одной плоскости?

Решение. Указанные четыре точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда компланарны векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M_4}$ (рис. 17).

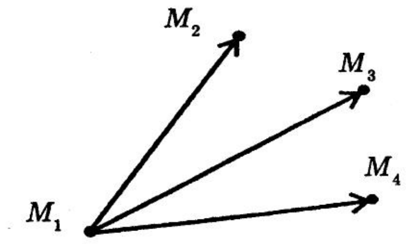


Рисунок 17

Определяем координаты этих векторов и вычисляем их смешанное произведение

$$\overline{M_1M_2} = (1;2;1),\ \overline{M_1M_3} = (-7;-10;-4),\ \overline{M_1M_4} = (-6;-8;-3)$$

$$\overline{M_1M_2}\,\overline{M_1M_3}\,\overline{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & -10 & -4 \\ -6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(30-32) -$$
$$-2\cdot(21-24)+1\cdot(56-60)=0.$$

Так как смешанное произведение равно 0, то рассматриваемые векторы компланарны, откуда следует, что данные точки лежат в одной плоскости.
Ответ: лежат в одной плоскости.

Пример 16. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, удовлетворяющие условию $\overline{a}\times\overline{b}+\overline{b}\times\overline{c}+\overline{c}\times\overline{a}=\overline{0}$, компланарны.
Решение. Умножив обе части данного векторного равенства скалярно на вектор $\overline{c}$, получим:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}+\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{c}+\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\cdot\overline{c}=0$$

или, на языке смешанных произведений,

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}+\overline{b}\overline{c}\overline{c}+\overline{c}\overline{a}\overline{c}=0.$$

Второе и третье слагаемые в левой части равенства равны нулю на основании свойства 3) смешанного произведения. Останется равенство $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0$, которое и означает компланарность данных векторов. Что и требовалось доказать.

4 Применение векторов в прикладных науках

В данном разделе рассматривается место и роль вектора в различных науках.

Как показывает практика, в наше время экономисту необходима серьезная математическая подготовка. Поэтому рассмотрим некоторые аспекты применения векторной алгебры при решении задач с экономическим содержанием.

Рассмотрим некоторые теоретические вопросы, использующиеся в данной теме. При введении прямоугольной системы координат на плоскость, каждому вектору X (направленному отрезку) приводится в соответствие пара чисел, (x_1,x_2),– координат этого вектора.

Это можно записать с помощью равенства $X=(x_1,x_2)$. Аналогично будет и в трехмерном пространстве $X=(x_1,x_2,x_3)$. Подытожив факты, получим следующее определение, в котором n означает любое натуральное число. Любая последовательность из n действительных чисел, $x_1,x_2\ldots x_n$, которые называются компонентами вектора, и есть арифметический n-мерный вектор. Обозначается n –мерный вектор:

$$X=(x_1,x_2\dots x_n).$$

Как будет видно далее, векторы очень удобно использовать для описания реальных процессов, в том числе экономических.

Например, под товаром понимаются некоторый товар или услуга, поступившие в продажу в определенном месте и в определенное время.

Предположим, что имеется n различных товаров, количество i-го товара обозначается n, тогда некоторый набор товаров обозначается $X=(x_1,x_2\dots x_n)$, т.е. является n - мерным вектором.

Будем рассматривать, как принято, только неотрицательные количества товаров, поэтому для любого i = 1, $n_i, \geq 0$ или $X \geq 0$.

Пространство товаров - множество всех наборов товаров. Далее предположим, что каждый товар имеет цену. Все цены могут быть только положительными.

Тогда вектор $C=(c_1,c_2,\dots c_n)$ есть вектор цен, при условии, что цена единицы i-го товара есть c. Вектор цен и вектор набора товара имеет одинаковую размерность. Для вектора цен $C=(c_1,c_2,\dots c_n)$ и набора товаров $X=(x_1,x_2\dots x_n)$ их скалярное произведение $C \cdot X=$ есть число, называемое ценой набора товаров или его стоимостью.

Рассмотрим несколько задач с применением векторов в экономике.

Задача 1. Пусть завод производит мужские, женские и детские ролики. Тогда объем его производства V за год можно записать как вектор V=(M, L, K), где M – объем производства за год мужских велосипедов, L – женских, K – детских.

Допустим, что объем производства в 2013 г. был равен (500, 400, 2000). Предположим, что объем производства в 2014 г. был на 10 % больше объема производства в 2005 г., следовательно, объем производства в 2014 г. есть вектор равный (550, 440, 2200).

Пусть торговая фирма «Велосипеды» приобрела половину всей продукции завода, тогда в 2013 г. фирма купила W=0/5, т.е. вектор закупки – W=(500, 400, 2000). Предположим, что в стране всего 2 завода по производству роликов, объемы производства которых в 2013 г. были =(500, 400, 2000),=(800, 1000, 4000). Тогда оба завода произвели вместе в 2013: Q= +=(1300, 1400, 4000), т.е. 1300 мужских, 1400 женских и 6000 детских роликов.

На данном примере – производство роликов - мы рассмотрели такие операции над векторами, как сложение векторов и умножение вектора на число.

Задача 2. Коммерческий банк, участвующий в строительстве сети социальных аптек в городе Т, предпринял усилия по получению кредитов в 4 коммерческих банках: «Сбербанк», «Омега-банк», «Индустриальный банк», «Сельхозбанк». Каждый из них предоставил кредиты в размерах соответственно 10, 30,20 и 40 млрд. руб. под годовую процентную ставку25, 15,30 и 20%.

В данном случае речь идет о двух векторах:
трехмерном векторе кредитов K=(10, 30, 20,40)
векторе процентных ставок P=(25, 15, 30,20).
Для расчетов вместо вектора процентных ставок P удобнее использовать вектор коэффициентов (1,25; 1,15; 1,3; 1,2).

Используя простой расчет, управляющий коммерческим банком может определить, сколь придется платить по истечении года за кредиты, взятые у банков: K 1.2 = 120 млрд. руб.

На данном примере мы рассмотрели применение операции скалярного произведения векторов.

Очень интересным является использование элементов векторной алгебры, которую можно рассмотреть в следующей задаче.

Задача 3. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых приведены в таблице 1. Следует рассчитать следующие ежесуточные показатели: расход сырья *S*, затраты рабочего времени *T* и стоимость *P* выпускаемой продукции предприятия.

Таблица 1 – Производственно-экономические показатели

Вид изделия	Количество изделий, ед.	Расход сырья, кг	Норма времени изготовления ч/изд.	Цена изделия ден. ед./изд.
1	10	2	9	35
2	40	3	4	20
3	30	7	14	44
4	20	6	7	25

Решение. Составим четыре вектора, характеризующие весь производственный цикл по данным таблице:

(10,40,30,20) — вектор ассортимента,

(2,3,7,6) — вектор расхода сырья,

(9,4,14,7) — вектор затраты рабочего времени, (35,20,44,25) — ценовой вектор.

Тогда искомые величины будут представлять собой соответствующие скалярные произведения вектора ассортимента на три других вектора.

Применение векторов подробно описано в следующей задаче.

Задача 4. Побывав на экспериментальном заводе города К сельскохозяйственной техники, были определены ежесуточны экономические показатели ОЭЗ, которые представлены в таблице 2:

Экономические показатели ОЭЗ

Таблица 2 – Экономические показатели

Вид изделия	Расход сырья(кг)	Время изготовления	Количество изделий	Цена изделий (руб)
Плуг	50	120	6	90000
Борона	40	150	5	14000
Лущильник	60	420	7	50000
Каток	90	220	4	300000

Необходимо найти цены на сельскохозяйственную технику, расходы и затраты сырья.

Решение: Для рассмотрения производственного процесса введем 4 вектора:
— вектор расхода сырья;
— вектор времени;
— вектор изделия товара;
— вектор цены.

В соответствие с данными таблицы получим:
(50;40;60;90); (72, 15, 42,20); (6;5;7;4); (90000;14000;50000;300000).
Очевидно, что соответствующие скалярные произведения векторов, представляющие искомые величины, будут делиться на три других вектора:

$6\cdot120+5\cdot150+7\cdot420+4\cdot220=720+750+2940+880=5290$ часа
$6\cdot50+5\cdot40+7\cdot60+4\cdot90=300+200+420+360=1280$ кг
$6\cdot90000+5\cdot14000+7\cdot50000+4\cdot300000=540000+70000+350000+1200000=2160000$ денежных единиц.

Ответ: необходимо потратить сырья в размере 1280 килограмм, при этом на это потребуется 5290 часа и 2160000 денежных единиц.

Рассмотрим применение векторов в физике, механике.

Гораздо раньше векторов в науку были введены кватернионы. Эти и в самом деле странные величины придумал Гамильтон. Создатели квантовой механики очень обязаны трудам Гамильтона и Лагранжа, бывших не только физиками, но и превосходными математиками. Гамильтон творил в XIX в., но созданный им канонический формализм крайне полезен и сегодня.

Кватернион (выражаемый с помощью четверки чисел) и обычный вещественный вектор — совершенно разные понятия.

Сохранились записи лекций, прочитанных Гиббсом около 1880 г. в Йельском университете. Хотя векторы и не обозначались в них с помощью жирных букв, но, там дано определение скалярного и векторного произведений и введены символы, соответствующие современным круглым скобкам, оператору набла и прочим, т. е., в сущности, впервые механика изложена на языке векторов.

Этим вопросом занимался г-н Кавагути (ранее ассистент Института фундаментальных исследований при университете Киото, теперь — профессор кафедры физики высоких энергий в Университете Цукуба).

Идеи Гиббса об использовании векторов не получили немедленного признания. Например, уже упоминавшийся английский ученый Тейт утверждал, что пользоваться векторами неудобно. Несмотря на оппозицию сторонников кватернионов, после Гиббса векторы стали широко применять. Так, на использовании векторов основано изложение механики во многих английских учебниках (кстати, в наше время применение векторных обозначений характерно именно для английских книг по физике).

Вектор обозначают либо одним символом r, либо выписывают три его компоненты x, y, z; форма записи вектора одинакова в любой системе координат.

Применение векторов в физике основано на том, что существуют физические величины, при изменении системы координат ведущие себя, как векторы.

Понятие вектора наиболее естественно вводится в евклидовом пространстве, ибо здесь справедлива теорема Пифагора и можно пользоваться ортогональными составляющими, а это удобно: ведь движения во взаимно перпендикулярных направлениях независимы.

Совокупность трех ортогональных составляющих и образует вектор. Векторы распределены в пространстве, причем в декартовых координатах три компоненты вектора распределяются независимо друг от друга, а устанавливаемые между ними связи имеют смысл физических законов. В других системах координат соотношения между составляющими более сложные.

Находящаяся в пространстве материальная точка, как я уже говорил, движется, оставаясь сама собой. Ее перемещение можно рассматривать как в неподвижной, так и в движущейся системах отсчета. Поскольку точка та же самая, между ее радиус-векторами в двух системах отсчета должно выполняться соотношение r=r'+a, где a — вектор сдвига начала координат движущейся системы отсчета относительно начала координат неподвижной системы отсчета. В противном случае язык пространства не был бы универсален.

Наша материальная точка переходит в места, где ее раньше не было, т. е. она последовательно совмещается с разными элементами точечного множества, играющего для нас роль пространства. Как же мы будем различать (идентифицировать) элементы (точки) пространства? Чтобы не употреблять столь трудно произносимого слова, как идентификация, будем говорить просто о наименовании точек.

Смысл этих слов ясен: например, >в системе координат, принятой нами за неподвижную, точка именуется тройкой чисел (*x, y, z*) независимо от того, находится в ней частица или нет. Любая точка евклидова пространства получит имя, если *x, y, z* изменяются от $-\infty$до $+\infty$.

В другой системе координат имя рассматриваемой точки пространства задается тройкой чисел (*x', y', z'*) — компонент радиус-вектора r'. Взаимно однозначное соответствие разных имен одной и той же пространственной точки задается формулами вида x' = x'(x, y, z,); У'=У'(x, У, z,); z'=z'(x, y, z,), в которые введено время, чтобы подчеркнуть, что имя дается точке в некоторый момент *t*, например t_0. Тем самым точки пространства полностью идентифицируются независимо от наличия материальных тел.

При относительном движении двух систем отсчета связь между именами, получаемыми пространственными точками в этих системах, зависит от времени. В частности, это приводит к тому, что частица, покоящаяся в одной системе, может выглядеть движущейся в другой, ибо перемещение частицы означает, что с течением времени изменяются имена пространственных точек, с которыми она последовательно совмещена.

Интуитивно уверены, что пространство существует независимо от наличия материальных тел, например, мы думаем, что пространство над поверхностью Земли не исчезнет, если из него убрать воздух. Из окон аудитории видим здания, но даже если бы их не было, мы все равно представляли бы себе «на их месте» пространственные точки, имена которых можно определить. Движущийся наблюдатель, например человек в поезде, определяет пространство, пользуясь собственной системой отсчета, в которой все выглядит иначе, чем для наблюдателя вне поезда. Различие их точек зрения сводится к тому, что они по-разному именуют точки пространства, т. е. применяют разные схемы идентификации пространственных точек.

Постановка вопроса о центробежной силе, которая изображается вектором — лишь эпизод в колоссальной деятельности Ньютона по созданию механики. И никто, конечно, не упрекнет его за то, что он не придал ей современную элегантную векторную форму, с него достаточно того, что своей механикой он заложил краеугольный камень физики.

Обдумыванием физической картины мира занимались многие ученые после Ньютона; как для него, так и для них это было могучим источником интереса к нашей науке.

Стремление утвердить новый взгляд на мир, создать новый образ мироздания — прекрасно, и мне кажется, что это компетенция физиков, а не философов.

Разумеется, Ньютон многое отсек у реального мира, о котором размышляют физики. Представителям других специальностей абстрактный характер механики Ньютона кажется крупным недостатком. Но это критика слабых духом, звучащая на любой стадии развития науки.

Конечно, Ньютон абстрагируется, но он оставляет самое существенное и создает единую систему мира. Ему принадлежит, по крайней мере, построение теории солнечной системы. Это один из миров. Остается еще мир неподвижных звезд (наша Галактика) и множество других миров. В них он не успел разобраться, но солнечная система прекрасно воссоздана в рамках его механики. Думаю, что это крайне важный пункт.

Если принять, что абсолютная система отсчета существует, то возникнет вопрос, как ее разумно выбрать? В нее, конечно, надо помещать эфир, в противном случае (когда пространство — всего лишь пустота), как мы уже говорили, все системы отсчета равноправны.

Из законов движения вытекает, что абсолютную систему отсчета надо искать среди инерциальных систем. Выбрать одну из них можно, либо считая, что пространство заполнено эфиром, либо по способу Маха.

Мах рассматривал большие (но не бесконечно большие) удаленные области космического пространства, содержащие достаточное количество разреженного вещества, и предполагал, что плотность вещества во Вселенной быстро уменьшается по мере удаления от наблюдателя. Тогда центр масс Вселенной будет расположен хоть и далеко, но на конечном расстоянии, и можно будет ввести систему отсчета, в которой он покоится. Ее Мах и считал абсолютной. Несомненно, что априори такая точка зрения возможна.

По другому определению, связанному с теорией эфира, абсолютная система отсчета — та, в которой эфир в целом неподвижен (в частности, не совершает колебаний). Такой эфир напоминает обычную сплошную среду, по сравнению с которой он очень разрежен (его плотность столь мала, что ее нельзя измерить).

Эта пронизывающая все пространство субстанция в абсолютной системе отсчета совершенно спокойна, никакие ее части не движутся друг относительно друга. Определение абсолютной системы, основанное на теории эфира, просуществовало до конца XIX в. Сам Ньютон не решил задачу об эфире, но ее постановка стала возможной лишь после создания им механики.

Знакомство с теорией относительности естественно начать с выяснения вопроса, что это такое, чем она отличается от ньютоновой механики. При переходе к теории относительности преобразования Галилея заменяют преобразованиями Лоренца и рассматривают четырехмерное пространство-время [(3+1) - мерное пространство Минковского].

В теории относительности считают, что классическая (не квантовая) частица, так же, как в теории Ньютона, движется, оставаясь всегда сама собой. При движении она описывает мировую линию в четырехмерном пространстве-времени (мире), т. е. в пространстве Минковского. Таким образом, мировая линия характеризует материальную точку, или объект, имеющий массу.

Другое важное понятие теории относительности — точечное событие, под которым имеют в виду следующее.

Слово *событие* вообще означает, что что-то произошло.

Его определяют указанием, когда и где это произошло. *Когда* означает время, *где* — пространственную область, *что* — содержание события. Сказанное иллюстрирует рисунок 17, где изображены момент времени и пространственная точка.

Под событием можно понимать какую-нибудь реакцию с элементарными частицами. Но пока мы не пользуемся квантовым языком, а говорим о теории относительности в ее понимании, событие может длиться в течение конечного интервала времени и происходить сразу во многих пространственных точках, а его содержание может быть совсем простым, например событие может означать, что в некоторой пространственно-временной точке изменилась напряженность поля, которым эта точка помечена (рисунок 18).

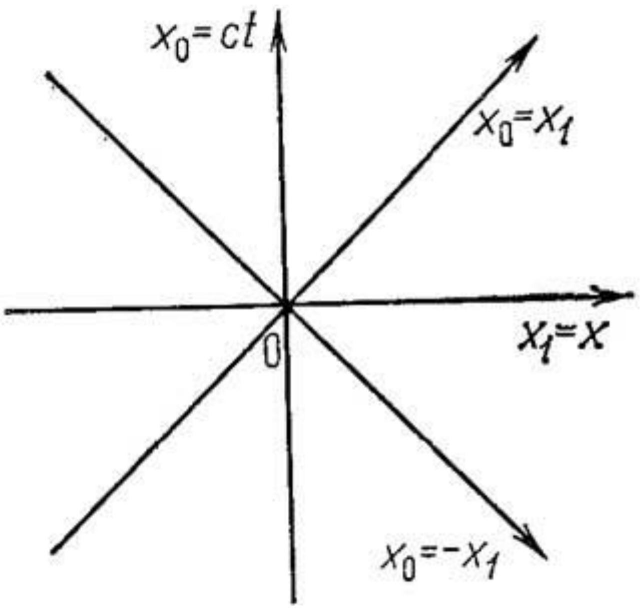


Рисунок 18

Полем можно метить также и четырехмерные линии, задавая во всех пространственно-временных точках, например, электромагнитное поле Е, Н. Его изменения при ускоренном движении заряженных частиц будут событиями в данной точке четырехмерного пространства.

Вместо электромагнитного можно рассматривать гравитационное поле, например поле Солнца, действующее в свободной от тел пространственной области.

Дополнив ее временным интервалом, получим пространственно-временную область, характеризуемую действующим в ней полем. Изменение поля играет роль события, а поскольку такое событие происходит в четырехмерной области, поле—существенно четырехмерное, а не трехмерное понятие.

Если событие (состоящее, например, в изменении электромагнитного поля) рассматривать в трехмерном пространстве, как это делалось в ньютоновой механике, то его содержание будет зависеть от выбора системы отсчета, в которой оно фиксируется.

Можно, сохраняя трехмерность, попытаться придать событию объективный смысл, вводя абсолютную систему отсчета, но для этого необходим эфир, проблематичность существования которого придает трехмерному пространству внутреннюю неопределенность.

Поэтому в теории относительности рассматривают не трехмерное пространство, а четырехмерное пространство-время, имеющее ясную структуру, предложенную Минковским. Чем это не абсолютное пространство-время? Если в нем ввести декартовы координаты и установить часы, то окажется, что в любой инерциальной системе отсчета физические законы имеют одинаковую форму, т. е. инвариантны относительно преобразования Лоренца.

Таким образом, имеем единое четырехмерное многообразие, точки в котором помечены полем, а события имеют смысл изменений поля-метки. Поле может удовлетворять уравнениям Максвелла или уравнениям гравитационного поля, связывающим его значения в некоторый момент и в близкий к нему следующий момент времени.

Некоторые из уравнений Максвелла связывают значения поля в пространственных направлениях. Итак, в каждой пространственно-временной точке задано поле, а его значения связаны соответствующим законом. Это обычная формулировка, даваемая в книгах по теории относительности.

В естественных науках наиболее фундаментальны законы, выражающие причинные связи. Есть, конечно, и другие законы, но они менее важны.

До зарождения современной науки (создания ньютоновой механики) понятиям причины и следствия придавали очень широкий смысл. Выдвигали самые разные источники движущей силы, но наиболее глубокой универсальной причиной движения считали божество. При такой точке зрения причина и следствие одинаково важны, а их последовательность во времени несущественна. Ее, конечно, рассматривали, но не так, как в ньютоновой механике. Короче, считали, что существует одна, очень общая фундаментальная причина движения.

С созданием ньютоновой механики причину и следствие стали определять временной последовательностью, и их взаимоотношение сильно прояснилось. Если, например, на рисунке 19 по оси абсцисс отложить положение материальной точки, а по оси орднат — время, то точка будет двигаться снизу вверх.

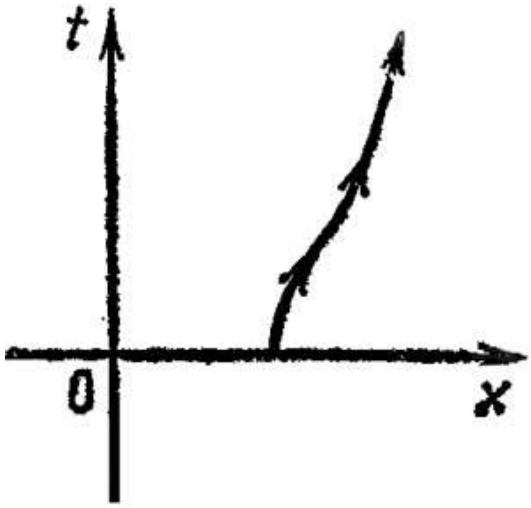


Рисунок 19

Уравнения движения в ньютоновой механике заданы, но с усложнением механической системы, ростом числа степеней свободы система этих зацепляющихся уравнений становится крайне сложной, а ведь, кроме них, нужно еще задать начальные условия, т. е. начальные положения и скорости. Состояние механической системы в некоторый момент времени определяется положениями и скоростями всех материальных точек, а ее будущие состояния однозначно определены дифференциальными уравнениями.

В такой ясной форме причинность ньютоновой механики впервые представил Лаплас.

В частной теории относительности понятие причинности видоизменяется. Подробно об этом я говорить не буду, потому что вам это тоже должно быть известно. Отложим по оси ординат (рисунок 20) величину ct, где t — время, c — скорость света. Плоскость разбивается на четыре части. Нам вообще-то надо иметь пространство Минковского, но нарисовать его мы не можем и в качестве заменителя пользуемся евклидовой плоскостью.

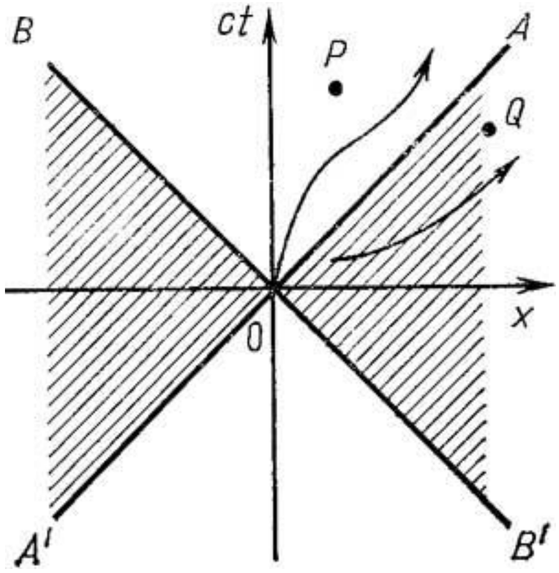


Рисунок 20

Итак, векторы, изучаемые в математике, помогают и в физике. Физические формулы, законы, чаще всего изображаются математическими знаками, в частности векторами. Любая сила, например F тяжести, раскладывается по векторам.

Это необходимо при расчётах в строительстве различных сооружений, например в построении моста. Так неправильные расчёты могут привести к трагедиям и многочисленным жертвам. Разложение векторов применяют при расчётах летательных аппаратов, например вектор скорости для круговых орбит, в навигации морского и воздушного флота.

Своё широкое применение векторы получили в химии.

Например, рассмотрим электронное строение атома азота. Каждый электрон имеет свою собственную характеристику – спин.

Спин – собственный момент импульса электрона, не связанный с движением в пространстве. Спины электронов складываются как вектора. Сумма спинов данного числа электронов на подуровне должна быть максимальной. Если в квантовой ячейке находятся два спаренных электрона, то их изображают противоположно направленными векторами.

Уравнения химических реакций в органической химии. В органической химии уравнения химических реакций записывают, использую вектор между левой частью уравнения и правой. Объяснение этому факту состоит в том, что большинство химических реакций между органическими веществами имеют несколько направлений течения. Могут образовываться различные продукты реакции при взаимодействии одних и тех же веществ, только количественное соотношение продуктов реакций различно, поэтому записывают то уравнение химической реакции, в котором продуктами реакции являются вещества, выход которых больше. Это и будет являться основным уравнением. Чтобы указать на существование побочных процессов, используют знак вектора.

Вектором (в биологии) называется организм, переносящий паразита от одного организма-хозяина к другому. Например, вши переносят возбудителей сыпного тифа, крысы – чумы, а клещи являются переносчиками вируса, вызывающего энцефалит. Так эти заболевания являются очень опасными для человека, поэтому необходимо досконально изучить механизм их передачи во избежание заражения.

Существует ещё одно значение слова «вектор» в биологии. На этот раз немножко коснёмся генной инженерии.

Вектор – это автономная молекула ДНК, используемая в генной инженерии, для переноса генов от организма-донора в организм-реципиент, а также для клонирования нуклеиновых последовательностей (клонирующий вектор).

Вектором, например, является бактериальная плазмида. Плазмиды дают бактериям большие преимущества, например способность синтезировать вещества опасные для других бактерий – антибиотики, а так же быть устойчивыми к антибиотикам своих собратьев. Эти свойства научился использовать в своей деятельности человек, но они так же могут и вредить ей. Например, был получен антибиотик против бактерии, вызывающей туберкулёз, но эта бактерия эволюционировала и приобрела к нему невосприимчивость. Поэтому необходимо снова искать средство, что бы справиться с этой болезнью. Человек создаёт также искусственные векторы.

С помощью векторов синтезируются различные лекарства и антибиотики. Синтезируются ферменты или даже целые каскады ферментов, необходимые человеку (например, инсулин). В генной инженерии существует такое молодое развивающееся направление, как генотерапия, где векторы позволяют исправлять генетические дефекты.

Эти молекулы ДНК (векторы) используются также при создании трансгенных растений и животных (например, генетически модифицированные овцы продуцируют человеческий ген альфа 1-антитрипсина в молоке). Люди, наследующие два нефункционирующих гена этого белка, страдают болезнью, называемой альфа 1-антитрипсиновой недостаточностью. Она поражает легкие и иногда печень. Векторы применяются также при клонировании.

Векторы в знаках дорожного движения.

Каждый день, выходя из дома, мы становимся участниками дорожного движения в роли пешехода либо в роли водителей. В наше время практически каждая семья имеет машину, что, разумеется, не может не отразиться на безопасности всех участников дорожного движения. И, чтобы избежать казусов на дороге, стоит соблюдать все правила дорожного движения. Но не стоит забывать того, что в жизни всё взаимосвязано и, даже в простейших предписывающих знаках дорожного движения, мы видим указательные стрелки движения, в математике называемые – векторами. На примере знаков:

«Движение прямо», «Движение направо», «Движение налево», «Движение прямо и налево» и другие . Эти стрелки (векторы) указывают нам направления движения, стороны движения, стороны объезда, и ещё многое другое. Всю эту информацию можно прочитать на знаках дорожного движения на обочинах дорог. Не соблюдение этих правил и пренебрежение знаками приводит к необратимым последствиям (автокатастрофам), что, конечно же, не обходится без человеческих жертв, в том числе и детей.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что в современных науках и ее приложениях векторы играют важную роль.

Примеры решения задач

Задача 1 Даны два вектора $\bar{a} = \{1,\ 1, -2\}$и $\bar{b} = \{\ 2,-1, 0\}$.Найти косинус угла между векторами $\bar{c} = 2\bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b}$.
Решение. Найдем координаты векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$.

$$X_c = 2 \cdot 1 - 2 = 0;\ Y_c = 2 \cdot 1 - (-1) = 3;\ Z_c = 2 \cdot (-2) - 0 = -4;$$

$$X_d = 1 + 2 = 3;\ Y_d = 1 + (-1) = 0;\ Z_d = -2 + 0 = -2 .$$

Итак: $\bar{c} = \{0, 3, -4\},\ \bar{d} = \{\ 3, 0, -2\}$.

Вычислим модули этих векторов и их скалярное произведение:

$$|\bar{c}| = \sqrt{X_c^2 + Y_c^2 + Z_c^2} = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5;$$

$$|\bar{d}| = \sqrt{X_d^2 + Y_d^2 + Z_d^2} = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2} = 13$$

$$(\bar{c}, \bar{d}) = X_c \cdot X_d + Y_c \cdot Y_d + Z_c \cdot Z_d = 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + (-4) \cdot (-2) = 8.$$

Теперь можно вычислить косинус угла φ между этими векторами

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{c}, \bar{d})}{|\bar{c}| \cdot |\bar{d}|} = \frac{8}{5 \cdot \sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{65} .$$

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{8\sqrt{13}}{65}$

Задача 2 При каком значении α векторы $\bar{a} - \bar{b}$ и $\alpha\ \bar{a} - \bar{b}$ ортогональны? (Координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в задаче 1).
Решение. Найдем координаты векторов $\bar{a} - \bar{b}$ и $\alpha\ \bar{a} + \bar{b}$:

$$\bar{a} - \bar{b} = \{1 - 2;\ 1 - (-1);\ -2 - 0\} = \{-1, 2, -2\};$$

$$\alpha\,\bar{a} + \bar{b} = \{\alpha \cdot 1 + 2; \alpha \cdot 1 + (-1); -2 \cdot \alpha + 0\} = \{\alpha + 2, \alpha - 1, -2\alpha\}.$$

Запишем условие ортогональности полученных векторов:

$$-1(\alpha + 2) + 2(\alpha - 1) + (-2)(-2\alpha) = 0 \text{ или } -\alpha - 2 + 2\alpha - 2 + 4\alpha = 0 .$$

После преобразования получим $5\alpha - 4 = 0$; откуда $\alpha = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\alpha = \frac{4}{5}$.

Задача 3 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{k}$.

Решение. Площадь параллелограмма по определению векторного произведения равна

$$S_{\text{пар}} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$$

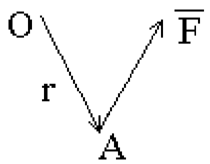
$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12\bar{i} + 14\bar{j} + 4\bar{k}.$$

$S_{\text{пар}} = \sqrt{(-12)^2 + 14^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 196 + 16} = \sqrt{356} \approx 18{,}9.$

Ответ: 18,9

Задача 4 Найти момент силы $\overline{F} = (2;-3;0)$ приложенной к точке $A(1;-2;0)$ относительно точки $O(4;-6;1)$

Решение. Момент силы $\overline{F}$ относительно точки O равен



$\overline{M} = \bar{r} \times \overline{F}$, где $\bar{r} = \overline{OA}$

Найдем вектор $\bar{r} = (1-4;-2+6;0-1) = (-3;4;-1)$

$$\bar{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$$

Момент $\overline{M} = (4;2;1)$

Ответ: $\overline{M} = (4;2;1)$

Задача 5 Компланарны ли векторы $\bar{a} = (3;-1;2), \bar{b} = (4;3;-1), \bar{c} = (-1;-4;3)$

Решение. Условием компланарности трех векторов является $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$,

$$\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 1 - 32 + 6 - 12 + 12 = 0,$$

следовательно, векторы компланарны.
Ответ: компланарны.

Задача 6 Найти высоту пирамиды с вершинами $A(0;0;1)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;0;-1)$, $D(4;1;0)$, опущенной из вершины D.

Решение. Найдем векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися к вершине A.

$$\overline{AB} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k},\ \overline{AC} = 2\bar{i} - 2\bar{k},\ \overline{AD} = 4\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}.$$

Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 8 + 2 - 0 + 2 - 2 = 10$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \frac{5}{3}.$$

$$V_{\text{пир}} = S_{осн} \cdot h, \quad h = \frac{V}{S}, \quad S_{осн} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$$

Найдем площадь основания.

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k},\ S_{осн} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{6}$$

$$h = \frac{5/3}{\sqrt{6}} = \frac{5}{3\sqrt{6}}.$$

Ответ: $h = \dfrac{5}{3\sqrt{6}}$.

Задача 7 Даны векторы $\bar{a} = \{3;0;-4\}$ и $\bar{b} = \{-2;1;0\}$. Найти $2\bar{a} + 3\bar{b}$.

Решение. Вычислим координаты вектора $2\bar{a}$ и $3\bar{b}$.

$$2\bar{a} = \{6;0;-8\} \quad 3\bar{b} = \{-6;3;0\}$$

Вычислить координаты вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$

$$\bar{c} = \{0;3;-8\}$$

Ответ: $\bar{c} = \{0;3;-8\}$

Задача 8 Даны векторы $\bar{a} = \{1;-2;1\}$и $\bar{a} = \{2;-6;3\}$. Найти косинус угла между векторами $\bar{c} = 3\bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{b}$.
Решение. Вычислим координаты вектора $3\bar{a}$ и $-\bar{b}$

$$3\bar{a} = \{3;-6;3\} \quad -\bar{b} = \{-2;6;-3\}.$$

Вычислим координаты вектора $\bar{c} = 3\bar{a} - \bar{b}$

$$\bar{c} = \{1;0;0\}.$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\bar{c}$ и $\bar{b}$

$$(\bar{c},\bar{b}) = 1\cdot 2 + 0\cdot(-6) + 0\cdot 3 = 2.$$

Вычислим длину вектора $\bar{c}$

$$|\bar{c}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1.$$

Вычислим длину вектора $\bar{b}$

$$|\bar{b}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 7$$

Вычислим косинус угла между векторами $\bar{c}$ и $\bar{b}$

$$\cos\varphi = \frac{2}{1\cdot 7} = \frac{2}{7}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{7}\right)$$

Ответ: $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{7}\right)$.

Задача 9 Даны три точки $A(1;0;-2)$; $B(3;4;0)$; $C(1;-5;4)$. Найти площадь треугольника ABC.
Решение. Вычислим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = \{2;4;2\},\ \overline{AC} = \{0;-5;6\}.$$

Вычислим векторное произведение векторов $\overline{AB} \times \overline{AC}$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & -5 & 6\end{vmatrix}=34\bar{i}-12\bar{j}-10\bar{k}.$$

Вычислим модуль вектора $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{34^2+(-12)^2+(-10)^2}=\sqrt{1400}.$$

Вычислить площадь S_Δ

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{1400}\approx 18{,}7 \text{ кв.ед..}$$

Ответ: $S_\Delta\approx 18{,}7$ кв.ед.

Задача 10 Даны координаты вершин пирамиды $A(0;1;-1)$, $B(4;1;-1)$, $C(4;1;0)$, $D(-1;-3;5)$. Найти объем пирамиды.

Решение. Вычислим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

$$\overline{AB}=\{4;0;-2\};\ \overline{AC}=\{4;0;-1\};\ \overline{AD}=\{-1;-4;4\}.$$

Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}4 & 0 & -2\\ 4 & 0 & -1\\ -1 & -4 & 4\end{vmatrix}=-16.$$

Вычислим объем пирамиды

$$V_{пир}=\frac{1}{6}\cdot\left|-16\right|=\frac{8}{3} \text{ куб.ед.}$$

Ответ: $V_{пир}=\frac{8}{3}$ куб.ед.

Основные понятия, используемые в решении задач

Скалярная величина	величина, которая может быть задана числом в выбранной системе единиц
Вектор	величина, которая задается числовым значением и направлением
Коллинеарные вектора	вектора, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой)
Координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	коэффициенты X, Y, Z в разложении вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$: $$\bar{a} = X \cdot \bar{i} + Y \cdot \bar{j} + Z \cdot \bar{k}$$
Условие коллинеарности двух векторов заданных координатами $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$	пропорциональность их соответствующих координат: $$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$
Направляющие косинусы вектора $\bar{a} = \{X, Y, Z\}$	косинусы углов, образуемых вектором $\bar{a}$ с положительными направлениями осей *OX*, *OY*, *OZ*: $$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};$$ $$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};$$ $$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$
Скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$	число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними: $(\bar{a}, \bar{b}) = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert \cdot \cos\varphi$
Формула вычисления скалярного произведения векторов $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, заданных в координатной форме	$$(\bar{a}, \bar{b}) = X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2$$
Формула вычисления угла φ между векторами $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и	$$\cos\varphi = \frac{X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$$

$\bar b = \{X_2, Y_2, Z_2\}$

Условие перпендикулярности (ортогональности) двух векторов

$$X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2 = 0$$

Проекция вектора на вектор

$$пр_{\bar в}\bar a = \frac{(\bar a, \bar b)}{|\bar b|}$$

Векторное произведение вектора $\bar a$ на вектор $\bar b$

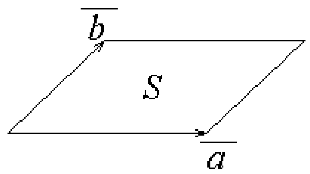
вектор $\bar d$, модуль которого численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar a$ и $\bar b$, вектор $\bar d \perp \bar a$, $\bar d \perp \bar b$, тройка $\bar a, \bar b, \bar d$ - правая.

Векторное произведение двух векторов $\bar a$ и $\bar b$ в координатной форме

$$\bar a \times \bar b = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar k$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar a$ и $\bar b$



$$S_{пар} = |\bar a \times \bar b|$$

Смешанное произведение трех векторов

скалярно-векторное произведение, численно равное объему параллелепипеда, построенного на этих векторах

Смешанное произведение в координатной форме

$$\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Условие компланарности трех векторов

$$\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c = 0$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется вектором ?
2. Какие осуществляются операции над векторами ?
3. По какому правилу производиться сложение векторов ?
4. Что называется орт вектором ?
5. Что называется длиной вектора ?
6. По какой формуле вычисляется угол между векторами ?
7. По какой формуле вычисляется скалярное произведение между векторами ?
8. Что называется коллинеарностью векторов ?
9. Какие вектора определяют правую тройка ?
10. Что называется компланарностью векторов ?
11. Что такое направляющие косинусы ?
12. Как определяется векторное произведение векторов?
13. Каково условие ортогональности двух векторов ?
14. Что называется проекцией вектора на ось ?
15. Перечислите свойства скалярного произведения.
16. Каким условием определяется коллинеарность вектов?
17. Перечислите свойства векторного произведения векторов.
18. В чем заключается геометрический смысл смешанного произведения?
19. В чем заключается физический смысл скалярного произведения ?
20. Что называют проекциями вектора на координатные оси ?
21. Какие области применения векторов знаете ?

Задания для самостоятельной работы

В данном разделе представлены задания для самостоятельной работы в разных формах: в виде контрольной работе по теме «Векторный анализ» 20 варианта, самостоятельная работа по теме «Матрицы. Определитель», 20 вариантов, самостоятельная работа по теме «Решение систем линейных уравнений», 10 вариантов. Тест по теме «Линейная алгебра» с одним правильным ответом, 25 вопросов. Тест по теме «Линейная алгебра» с несколькими правильными ответами, 20 вопросов. В конце пособия представлены ответы для самопроверки на некоторые задания.

Задание 1 Контрольная работа по теме «Векторный анализ»

Даны координаты четырех точек $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$, $D(x_4;y_4;z_4)$ (таблица 3).

1) Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.
2) Найти площадь треугольника *ABC*.
3) Найти объем пирамиды *ABCD*.
4) Найти длину высоты, опущенной из вершины *D*.

Таблица 3 – Расчетные данные

№ вар.	A	B	C	D
1	(1;0;-1)	(2;1;0)	(3;0;-4)	(5;1;-1)
2	(2;3;0)	(3;1;-1)	(2;-1;4)	(3;1;0)
3	(5;0;-1)	(2;4;0)	(3;0;-2)	(4;0;1)
4	(1;0;-2)	(3;4;1)	(5;0;-3)	(4;-1;2)
5	(3;1;0)	(4;2;-1)	(3;1;-1)	(5;0;-3)
6	(1;-1;3)	(2;3;4)	(2;0;-3)	(2;1;0)
7	(0;1;-1)	(3;1;0)	(2;-1;4)	(5;1;0)
8	(4;0;2)	(3;0;2)	(5;1;-1)	(6;0;3)
9	(2;-1;0)	(-3;0;-4)	(5;0;3)	(1;0;-3)
10	(1;0;-3)	(4;2;0)	(3;-1;2)	(2;-1;4)
11	(-3;0;2)	(2;0;3)	(5;0;-1)	(3;-1;0)
12	(4;2;1)	(3;-1;0)	(4;1;-1)	(2;3;4)
13	(-1;2;0)	(3;0;5)	(5;-1;4)	(5;1;-3)
14	(-2;0;-4)	(4;1;-3)	(0;2;1)	(-1;3;2)
15	(-1;1;0)	(3;-4;0)	(2;5;-3)	(0;-1;4)
16	(-3;0;-1)	(2;-1;4)	(3;2;0)	(5;0;-3)
17	(4;0;-3)	(2;1;0)	(-3;-1;2)	(5;-1;-4)
18	(3;-1;2)	(5;2;-2)	(0;-3;-2)	(0;-3;-5)
19	(-4;1;-1)	(2;0;-3)	(1;-1;4)	(3;0;2)
20	(-1;0;1)	(5;-2;3)	(4;0;2)	(3;-1;4)

Задание 2 Самостоятельная работа

1.1 Даны векторы $\bar{a}=\{1;0;2\}$ и $\bar{b}=\{3;-1;1\}$. Найти косинус угла между векторами $\bar{c}=3\bar{a}-\bar{2}b$ и $\bar{b}$.

1.2 Найти косинус угла между векторами $\bar{c}=2\bar{a}+3\bar{b}$ и $\bar{a}$, где $\bar{a}=\{1;0;2\}$, $\bar{b}=\{3;-1;1\}$

1.3 При каком значении α векторы $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ и $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ ортогональны (угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$)?

1.4 Найти угол между векторами $\bar{c}=-\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{d}=2\bar{a}-\bar{b}$, если $\bar{a}=\{0;1;3\}$, $\bar{b}=\{1;1;3\}$.

1.5 Вычислить угол между векторами $\bar{c}=2\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{d}=\bar{a}+2\bar{b}$, если $\bar{a}=\{1;1;1\}$, $\bar{b}=\{-2;0;1\}$.

1.6 Найти единичный вектор $\bar{e}$, ортогональный двум векторам $\bar{a}=(3;0;-2)$, $\bar{b}=(1;4;0)$.

1.7 Даны векторы $\bar{a}=\{3;-4\}$ и $\bar{b}=\{2;5\}$. Найти вектор $\bar{c}=\frac{1}{2}\bar{a}-3\bar{b}$

1.8 Дан вектор $\bar{a}=3\bar{i}-4\bar{j}+5\bar{k}$. Записать вектор, коллинеарный вектору $\bar{a}$, противоположно направленный, в два раза длиннее.

1.9 Даны три точки $A(2;0;-4)$; $B(-3;-4;0)$; $C(1;7;4)$. Найти площадь треугольника *ABC.*

1.10 Найдите высоту пирамиды, опущенной из вершины *A*. Координаты вершин: $A(-1;0;2)$, $B(3;-1;4)$, $C(2;-1;0)$, $D(4;2;-2)$.

1.11 Найти вектор $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$, удовлетворяющий условиям: $\bar{x}\cdot\bar{a}=8$, $\bar{x}\cdot\bar{b}=2$, $\bar{x}\cdot\bar{c}=4$ где $\bar{a}=(6;3;1)$, $\bar{b}=(-3;-1;-2)$, $\bar{c}=(7;3;4)$.

1.12 Вершины треугольника ABC имеют координаты A(4,-2,3); B(4,8,2); C(7,1,1). Найти длины сторон AB и AC и угол A.

Задание 3 Тест по теме «Векторный анализ» с одним правильным ответом

1. Найти модуль вектора векторного произведения векторов $3\bar{i}$ и $2\bar{j}$:

а) 5
б) 6
в) 1
г) 3
д) 0.

2. Найдите произведение координат вектора, коллинеарного вектору $\bar{a} = \{2;\ 0;\ 1{,}5\}$, модуль которого равен 5:

а) 6
б) 12
в) 7
г) 0
д) 3.

3. Если вектор $\bar{p}$ направлен противоположно вектору $\bar{a} = \{2; -3; 4\}$, то сумма координат вектора $\bar{p}$ равна:

а) -3
б) 3
в) -24
г) 0
д) 5.

4. Модуль вектора $\bar{i} + \bar{j}$ равен:

а) 1
б) 2
в) 0
г) $\sqrt{2}$
д) 3.

5. Найти угол между векторами $\bar{i}$ и $\bar{j}$:

а) 0
б) $\frac{\pi}{6}$

в) $\frac{\pi}{4}$

г) $\frac{\pi}{3}$

д) $\frac{\pi}{2}$.

6. Найти проекцию вектора $\bar{i}$ на вектор $\bar{j}$:

а) 1
б) 0
в) 2
г) -1
д) -2

7. Найти длину вектора $\bar{a} = \{-4;0;3\}$

а) -1
б) 12
в) 1
г) $\sqrt{7}$
д) 5.

8. Найти сумму координат вектора $\overline{M_1M_2}$ если $M_1(2; -1)$, $M_2(3; 4)$

а) 2
б) 1
в) 5
г) 6
д) 3.

9. Определить угол между векторами: $\vec{a} = \{1; \quad 2; \quad 3\}$, $\vec{в} = \{6; \quad 4; \quad -2\}$.

а) $\varphi = \pi$
б) $\varphi = \arccos(1/4)$
в) $\varphi = \arccos(2/7)$
г) $\varphi = \pi/2$
д) $\varphi = 0$.

10. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = \{1; \quad 3; \quad -1\}$, $\vec{в} = \{3; \quad 0; \quad 1\}$.

а) $\{3;-4;-9\}$

б) $\{3;\quad 3;\quad 9\}$
в) $\{5;\quad 1;\quad 2\}$
г) $\{6;\quad 3;\quad 0\}$
д) $\{3;0;-1\}$.

11. Найти проекции вектора $\overline{AB}$ на координатные оси, если: A(3; -1; 2); B(2; 1; -3).

а) $\{5;\quad 0;\quad -1\}$
б) $\{-1;\quad -2;\quad -5\}$
в) $\{-1;\quad 2;\quad -5\}$
г) $\{-1;\quad 0;\quad 5\}$
д) $\{-5;\quad 0;\quad 1\}$.

12. Скалярное произведение векторов $\overline{a} = \{3;\quad 0;\quad 1\}$, $\overline{в} = \{5;\quad 1;\quad 0\}$ равно

а) 15
б) $\{-1;\quad -5;\quad 3\}$
в) 17
г) $\{8;\quad 1;\quad 1\}$
д) 8.

13. Найти векторное произведение векторов $\overline{a} = \{2;\quad 0;\quad 1\}$, $\overline{в} = \{3;\quad 1;\quad 0\}$

а) 6
б) $\{-1;\quad 3;\quad 2\}$
в) $\{-1;\quad -3;\quad -2\}$
г) $\{6;\quad 0;\quad 0\}$
д) $\{3;\quad 1;\quad -1\}$.

14. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a} = \{3;\quad 0;\quad 1\}$, $\overline{в} = \{5;\quad 1;\quad 2\}$.

а) 15
б) $\{-1;\quad -5;\quad 3\}$
в) 17
г) $\{8;\quad 1;\quad 1\}$
д) 10.

15. Найти длину вектора $\overline{a}$- $\overline{в}$, если $\overline{a}$=(1;-2;3) $\overline{в}$=(-1;0;2)

а) (2;-2;1)
б)3

в)1
г) (0;-2;5)
д) $\sqrt{29}$

16. Найти скалярное произведение векторов $\bar{а}$ и $\bar{а}+\bar{в}$ если а=(1;2;0) $\bar{в}$=(0;-1;3)

а) 3
б)(1;2;0)
в) (-1;-6;0)
г)7
д)1

17. Определить угол между векторами: $\vec{a}=\{1;\quad 2;\quad 3\}$, $\quad \vec{в}=\{-2;\quad -4;\quad -6\}$.

а) $\varphi=\pi$
б) $\varphi=\arccos(1/4)$
в) $\varphi=\arccos(2/7)$
г) $\varphi=\pi/2$
д) $\varphi=0$.

18.Даны векторы $\vec{a}=\{1;0;0\}, \vec{b}=\{-2;4;-1\}, \vec{c}=\{2;4;-6\}$. Найти смешанное произведение трёх векторов. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

а) 80
б) 90
в)-87
г) -98
д) -20.

19. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{1;-2;3\}$ на ось Оу.

а) -2
б) 2
в)1
г) -6
д) -3.

20. Найти проекции вектора $\overline{AB}$ на координатные оси, если: А(0; -1; 2); В(2; 1; -3).

а) $\{2;\quad 0;\quad -1\}$
б) $\{2;\quad 2;\quad -5\}$
в) $\{-1;\quad 2;\quad -5\}$

г) $\{-2;\quad 0;\quad 5\}$

д) $\{-5;\quad 0;\quad 1\}$.

21. Найти косинус угла между вектором $\vec{a} = \{2;-2;1\}$ и положительным направлением оси Ох.

а) $\frac{2}{9}$;

б) $\frac{1}{3}$;

в) $\frac{1}{2}$;

г) $\frac{2}{3}$;

д) -1.

22. Даны координаты трех точек А(2; -1; 0), В(3; -1; 4), С(-2; 5; 1)
Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$

а) –8
б) 8
в) 0
г) 6
д) 15

23 . Как называются три вектора, которые принадлежат одной плоскости или параллельным плоскостям?

а) коллинеарными
б) компланарными
в) линейно-независимыми
г) единичными
д) линейно-зависимыми

24. Смешанное произведение векторов $\bar{a} = 4i - j + 3K$; $\bar{b} = -2i + 3j + K$; $\bar{c} = i - 5K$ равно

а) 54
б) -54
в) 60
г) 38
д) -60

25. Укажите координаты единичного вектора $\overline{BA}^0$, если известны координаты точек А (2, 3) и В (-1, 2)

а) $\left(\frac{3}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

б) $\left(\frac{-3}{\sqrt{10}};\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$

в) $(3;1)$

г) $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$

д) $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

Задание 4 Тест по теме «Векторный анализ» с несколькими правильными ответами

1. Даны точки $A(2;2)$ и $B(5;-2)$. Абсцисса вектора AB:

a) $6/3$
в) $-3/3$
c) $-4/1$
d) $6/2$
e) $3/1$
F) $9/3$

2. Векторы будут компланарны, если:

а) смешанное произведение равно любому числу
в) объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен любому положительному числу
с) объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен нулю
d) смешанное произведение равно нулю
e) объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен единице
f) объем пирамиды, построенного на этих векторах, равен нулю

3. Найдите длину вектора $\overline{a} = (4; 12; 3)$

а) 11
в) $36/2$
с) 12
d) 13
е) $39/3$
f) $36/3$

4. Даны векторы a $= 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, b $= 2\vec{i} + \vec{k}$, c $= -4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, Тогда:

A) их смешанное произведение $abc = 0$
B) они компланарные
C) они образуют правую тройку
D) они некомпланарные
E) они образуют левую тройку
F) их смешанное произведение $abc = -2$
G) они образуют базис

5. Верное равенство (-а):

A) $\overline{j} \times \overline{j} = 1$
B) $\overline{k} \times \overline{k} = \overline{i}$
C) $\overline{j} \times \overline{i} = -\overline{k}$
D) $\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}$
E) $\overline{i} \times \overline{k} = 1$
F) $\overline{i} \times \overline{i} = 0$

6. Проекции вектора $\overline{a}(-3; 2; -5)$ на оси координат равны:

A) 5

B) -3

C) -2

D) -5

E) 2

7. Даны векторы $a = (4; -2; -4)$, $b = (6; -3; 2)$. Тогда, для скалярного произведения справедливо(-вы):

A) $b \cdot b = 48$

B) $b \cdot a = 22$

C) $a \cdot b = 22$

D) $a \cdot b = -b \cdot a$

E) $a \cdot a = 36$

F) $a \cdot b = 38$

8. Даны векторы $a = (5; 3; 0)$, $b = (1; 4; 0)$. Тогда:

A) угол между ними $\varphi = \pi / 2$
B) угол между ними $\varphi = 0$

C) их векторное произведение $a \times b = -17 \vec{j}$

D) их векторное произведение $a \times b = 17 \vec{\kappa}$
E) их скалярное произведение $a \cdot b = 17$
F) их скалярное произведение $a \cdot b = -17$

9. Даны векторы $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k} = (0;0;1)$. Тогда:

A) они образуют правую тройку
в) угол между ними равен нулю
с) они образуют базис
d) они некомпланарные
е) они образуют левую тройку
f) они компланарные
g) их смешанное произведение равно нулю

10. Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$:

а) параллельный и вектору $\overline{a}$ и вектору $\overline{b}$
в) составляющий с этим векторами упорядоченную правую тройку
с) длина которого равна длине вектора $\overline{b}$
d) длина которого равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$
е) перпендикулярный и вектору $\overline{a}$ и вектору $\overline{b}$

11. Верные формулы:

A) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

в) $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

с) $\lambda\vec{a} = (\lambda x; y; z)$
d) $AB = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$
е) $\vec{a} + \vec{b} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$
f) $\vec{a}\vec{b} = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1$
g) $S_\Delta = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

12. Даны точки A(2;2), B(5;-2), C(0;1). Тогда:

а) $\vec{AB} = (-3;4)$
в) $\vec{AC} = (-2;-1)$
с) $\vec{AB} = (3;-4)$
d) $\left|AC\right| = 3$

e) $\vec{B}C = (-5;-1)$

f) $\vec{B}C = (5;-1)$

13. Даны векторы $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k} = (0;0;1)$. Тогда:

A) угол между ними равен нулю
в) их смешанное произведение равно нулю
c) они образуют базис
d) они некомпланарные
e) они образуют левую тройку
f) они компланарные
g) они образуют правую тройку

14. Найти длину вектора: $\overline{a} = (3;4)$

a) $4/2$

в) $20/4$

c) $10/2$

d) $1/5$

e) $0/6$

f) $5/1$

15. Даны точки $A(2;2)$ и $B(5;-2)$. Ордината середины отрезка АВ равна:

a) $2{,}5 \cdot 10$

в) $10/25$

c) $0/25$

d) $-2 \cdot 10^{1}$

e) $0 \cdot 10^{0}$

f) $3{,}5 \cdot 10^{0}$

g) $5 \cdot 10^{2}$

16. Линейные операции над векторами $\overline{a}(x_1;y_1;z_1)$ $и$ $\overline{b}(x_2;y_2;z_2)$ в координатной форме:

A) $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$

B) $(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$

C) $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

D) $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)$

E) $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)$

F) $(x_1 x_2;\ y_1 y_2;\ z_1 z_2)$

G) $(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$

17. Даны векторы $\vec{a} = 3i - 2j + k$, $\vec{b} = 2j - 3k$, $\vec{c} = -3i + 2j - k$. Тогда:

A) они образуют правую тройку
в) их смешанное произведение равно нулю
с) они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях
d) они некомпланарные
e) их смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -2$
f) они образуют левую тройку
g) они образуют базис

18. Точка $E(-2;3)$ является серединой отрезка:

A) $(3;-3)$ и $(-3;0)$

в) $(4;4)$ и $(-6;-7)$

с) $(-2;2)$ и $(-2;4)$

d) $(1;-1)$ и $(-6;7)$

f) $(0;1)$ и $(-4;5)$

g) $(3;0)$ и $(-7;3)$

19. Верное равенство:

A) $j \times j = 1$

в) $k \times k = i$

с) $j \times i = -k$

d) $k \times i = j$

e) $i \times k = 1$

f) $i \times i = 0$

20. $\vec{a}=\{0, -1{,}5\}$, $\vec{b}=\{7,\ 5{,}1\}$ Найти скалярное произведение векторов:

A) 2
B) 0/8
C) 0
D) 3
E) 4
F) ½
G) 0/9

21. Проекции вектора $\bar{a}(-3; 2; -5)$ на оси координат равны:

A)-2
B) 2
C) 5
D) -5
E) -3

22. Модуль вектора $\bar{i} + \bar{\kappa}$ равен:

а) 1
B) 2
с) 0
D) $\sqrt{2}$
E) 3.

23. Даны координаты трех точек A(2; -1; 0), B(3; -1; 4), C(-2; 5; 1). Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$

а) Ln1
в) 8
с) 0
D) 6
е) Lg10
F) 0/5

24. Векторное произведение векторов $\bar{a} = \{2; \quad 0; \quad 1\}$, $\bar{в} = \{3; \quad 1; \quad 0\}$ равно:

а) 6
в) $\{-1; \quad 3; \quad 2\}$
с) $\{-1; \quad -3; \quad -2\}$
D) $\{6; \quad 0; \quad 0\}$
е) $\{3; \quad 1; \quad -1\}$.

25. Угол между векторами $\bar{i}$ и $\bar{j}$ равен:
а) 90^0
в) $\frac{\pi}{6}$
с) $\frac{\pi}{4}$
д) $\frac{\pi}{3}$
е) $\frac{\pi}{2}$.

Ответы к тестовым заданиям

Таблица 4 - Ответы к тестам с одним правильным ответом

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
б	г	а	г	д	б	д	г	в	а
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
в	а	б	в	б	а	а	д	а	б
21	22	23	24	25					
г	в	б	д	а					

Таблица 5 - Ответы к тестам с несколькими правильными ответами

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e g	ce	c	c	b g	b f	d g	e	b e	c d e
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b e f	a c	b e	b c f	c e	a b g	a	c f	c d f	b c g
21	22	23	24	25					
b e d	d	ac f	в	a e					

Список литературы

1. Гусак, А.А Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справ. пособие к решению задач / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2008. – 288 с.
2. Епихин, В.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач: Учебное пособие / В.Е. Епихин, С.С. Граськин. - М.: КноРус, 2013. - 608 с.
3. Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. - М.: Проспект, 2012. - 400 с.
4. Кожухов, И.Б. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х т.Т. 1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры: Учебное пособие для втузов / И.Б. Кожухов. - М.: Физматлит, 2009. - 288 с.
5. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс: С контрольными работами: линейная алгебра; аналитическая геометрия; основы математического анализа; комплексные числа / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. - М.: Айрис-пресс, 2011. - 576 с.
6. Михалев, А.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / А.А. Михалев, И.Х. Сабитов. - М.: ИЦ Академия, 2013. - 256 с.
7. Просветов, Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Задачи и решения: Учебно-практическое пособие / Г.И. Просветов. - М.: Альфа-Пресс, 2009. - 208 с.
8. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ, 2003. -471 с. Раздел I. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии
9. Просветов Г.И. Математика в экономике. Задачи и решения/Г.И.Просветов. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство "Экзамен", 2004. - 446 с.
10. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч.1/Д.Т.Письменный. - 6-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2006. - 288 с. Гл.I-IV.
11.Солодовников А.С. Математика в экономике. Учебник ч. 1 М. / А.С. Солодовников, В.А.Бабайцев , А.В.Браилов.- Финансы и статистика, 1998.-224 с.
12.Каганов М.И. Абстракции в математике и физике. / – М.И.Каганов, Г.Я. Любарский М.: Физматлит, 2005. – 580 с.
13.Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Математическое моделирование социально-экономических систем // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона Ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета "Аграрная наука - Северо-Кавказскому региону". 2012. С. 283-286.
14.Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б., Донец З.Г. Экономико-математическое моделирование факторов экономического анализа посредством метода линейного программирования // Аграрная наука, творчество, рост Сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции. 2014. С. 329-332.

15.Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Финансовая математика в инвестиционном проектировании (учебное пособие) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 8-2. С. 178-179.
16.Долгополова А.Ф., Мелешко С.В., Цыплакова О.Н. Применение анализа чувствительности модели при восстановлении финансового равновесия предприятия // Аграрная наука Северо - Кавказскому федеральному округу. Сборник научных трудов по материалам 80-й Ежегодной научно-практической конференции. Ставропольский государственный аграрный университет. 2015. С. 98-103.
17.Мамаев И.И., Долгополова А.Ф. Профессиональная направленность в обучении студентов математическим дисциплинам /Аграрная наука, творчество, рост. -2013. -С. 268-371.
18.Шмалько С.П. Формирование профессионально ориентированного мышления у студентов экономических направлений. // Культурная жизнь Юга России. 2010. №1. С. 99-101.
19.Цысь Ю.В., Долгополова А.Ф., Элементы линейной алгебры и их применение при решении экономических задач // Современные наукоемкие технологии. 2013. № 6. С. 91-93.
20. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (Типовые расчеты): учеб. пособие для вузов/ Л.А. Кузнецов. - 9-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2007. - 240 с.
21. Казешев А.К. Математика для экономистов: учеб. пособие/ А.К. Казешев, С.А. Нурпеисов. - Алматы: Экономика, 2008. - 448 с.
22. Виленкин И.В. Высшая математика/И.В. Виленкин, В.М. Гробер. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. - 416 с.
23. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие для сред. проф. учеб. заведений/Н.В. Богомолов. - 10-е изд., перераб. - М.: Высшая школа, 2009. - 496 с.
24.Бидайбеков, Е.Ы. Численные методы: учебник/ Е.Ы. Бидайбеков, Г.Б. Камалова. - Алматы, 2015. - 432 с.
25. Ильин В.А. Высшая математика: учебник/В.А. Ильина, А.В. Куркина. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Проспект, 2006, 2014.
26. Богомолов Н.В. Практические занятия по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. учеб. заведений/Н.В. Богомолов. - 10-е изд., перераб. - М.: Высшая школа, 2010. - 542 с.
27. Бидайбеков, Е.Ы. Численные методы: учебник/ Е.Ы. Бидайбеков, Г.Б. Камалова. - Алматы, 2015. - 432 с.
28. Виленкин, И.В. Аналитическая геометрия. Дифференциальное и интегральное исчисление/И.В. Виленкин, В.М., Гробер. - 7-е изд. - Ростов н/Д: Феникс, 2013. - 444 с.
29.Виленкин И.В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов/ И.В. Виленкин, В.М. Гробер. - 5-е изд. - Ростов н/Д: Феникс, 2009(5-е изд), 2008(4-е изд). - 416 с.
30.Ильин В.А. Высшая математика: учебник/В.А. Ильина, А.В. Куркина. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Проспект, 2006.- 456 с.

31.Сборник задач по высшей математике. Ч.1.: учеб. пособие для бакалавров/Ред. А.С. Поспелов. - М.: Юрайт, 2012. - 608 с.
32.Сборник задач по высшей математике. Ч.2.: учеб. пособие для бакалавров/Ред. А.С. Поспелов. - М.: Юрайт, 2012. - 624 с.
33.Шапкин, А.С. Задачи с решениями по аналитической геометрии: учеб. пособие/А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. - М.: Дашков и К, 2013. – 432 с.